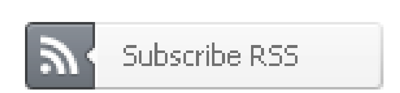
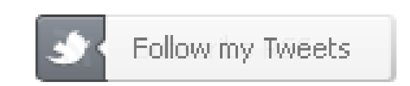
Find your solutions manual here!

El Solucionario

www.elsolucionario.net







Encuentra en nuestra página los Textos Universitarios que necesitas!

Libros y Solucionarios en formato digital
El complemento ideal para estar preparados para los exámenes!

Los Solucionarios contienen TODOS los problemas del libro resueltos y explicados paso a paso de forma clara..

Visitanos para descargarlos GRATIS!
Descargas directas mucho más fáciles...

WWW.ELSOLUCIONARIO.NET

Biology Investigación Operativa Computer Science Matemáticas Avanzadas Physics Estadística Chemistry Geometría Math Termodinámica Cálculo Electrónica Circuitos Business Mechanical Engineering Civil Engineering Economía Análisis Numérico Ecuaciones Diferenciales Electrical Engineering Álgebra Electromagnetismo

Find your solutions manual here!

www.elsolucionario.net

009540

física
para la ciencia y la tecnología

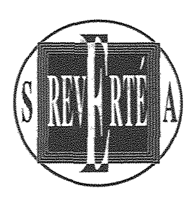
Volumen 2

Cuarta Edición

Electricidad y magnetismo
Luz
Física moderna:
mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia

Paul A. Tipler

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (...) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

www.elsolucionario.net

Título de la obra original:
Physics for Scientists and Engineers, Fourth Edition. Volume 2 and 3
www.elsolucionario.net

Edición original en lengua inglesa publicada por:
W. H. Freeman and Company/Worth Publishers, 41 Madison Avenue, New York

Copyright © W. H. Freeman and Company

Versión española por:
Prof. Dr. J. Aguilar Peris
Catedrático Emérito de la Universidad Complutense de Madrid
y
Prof. Dr. J. de la Rubia Pacheco
Catedrático Emérito de la Universidad de Valencia

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
E-mail: istz0125@tsai.es
Internet: http://www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento infornático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 2000

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4382 - 3 Volumen 2
ISBN - 84 - 291 - 4384 - X Obra completa
Depósito Legal: B - 34763- 2000

Impresión y encuadernación:
Cayfosa-Quebecor
Ctra. de Caldes, Km 3
08130 Sta. Perpètua de Mogoda
Barcelona

www.elsolucionario.net

UNIV... DAD ... NOLOGICA NACIONAL
www.elsolucionario.net
... REGIONAL
... 425541 / 423303
Ing. PEREIRA ... CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA
009540

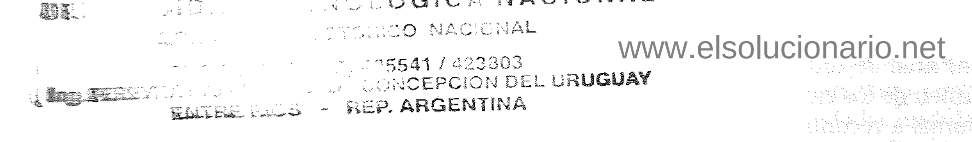
Para Claudia

Y PARA TROMPIZ

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Prefacio

www.elsolucionario.net

En esta cuarta edición nuestros objetivos fundamentales han sido:

1. Procurar que los estudiantes aumenten su experiencia y habilidad en la resolución de problemas.
2. Hacer más fácil y amena la lectura del texto para los alumnos.
3. Poner al día la presentación de la física y reflejar la importancia del papel de la teoría cuántica.
4. Conseguir que el texto sea más flexible para el profesor mediante una amplia variedad de formatos del curso.

Impulsar la resolución de problemas

Para ayudar a los estudiantes a resolver problemas de física, el número de *Ejemplos* resueltos que corresponden a problemas de nivel intermedio se ha incrementado grandemente. Especialmente notable es el formato de dos columnas, una al lado de otra, que se ha desarrollado para exponer con mayor claridad el texto y las ecuaciones de los ejemplos resueltos. Se ha procurado mostrar a los estudiantes un método lógico para resolver problemas. Los ejemplos comienzan con la estrategia, y a menudo diagramas, en un prólogo que llamamos *Esquema del problema*. Siempre que es posible, la primera etapa ofrece una ecuación que relaciona la magnitud que se desea hallar con otras magnitudes. A continuación suele recordarse un enunciado del principio general de la física que se aplica. Por ejemplo, esta etapa puede ser "Aplicar la segunda ley de Newton" o "Usar el principio de conservación de la energía". Los ejemplos suelen concluir con *Observaciones* que analizan el problema y la solución, y en muchos casos secciones de *Comprobación del resultado* que enseñan al alumno a comprobar la respuesta, así como *Ejercicios* que plantean problemas relacionados adicionales, que los estudiantes pueden resolver por sí mismos.

Otro tipo de ejemplos interactivos e innovadores es el que denominamos *¡Inténtelo!*. En ellos se dice a los estudiantes en la columna izquierda cómo deben actuar en cada etapa del proceso, pero sólo en la columna de la derecha vienen las respuestas. De este modo se guía a los alumnos a lo largo del problema, pues corresponde a ellos realizar el trabajo independientemente con sus deducciones y cálculos reales.

www.elsolucionario.net

Al final de cada capítulo aparece una *Guía de resolución de problemas* en forma de un resumen de los ejemplos resueltos en el mismo. Esta Guía está diseñada para ayudar a los alumnos a reconocer tipos específicos de problemas y determinar la estrategia conceptual para su resolución. De nuevo, aquí se destacan los principios generales implicados, tales como la aplicación de la segunda ley de Newton o la conservación de la energía.

Como conclusión de cada capítulo presentamos una selección de aproximadamente un centenar de *Problemas,* agrupados por tipos, que pueden coincidir o no con los títulos de las secciones del propio capítulo. Cada Problema está clasificado como fácil, intermedio o desafiante. Otras cuestiones y problemas de naturaleza cualitativa se integran conjuntamente con problemas de tipo cuantitativo dentro de cada grupo, con la esperanza de que esta distribución eleve la categoría de los problemas cualitativos en las mentes de los estudiantes (e instructores). Al final del texto, en la sección *Respuestas* se ofrecen los resultados de los problemas de número impar. Antes de las respuestas de cada capítulo se presenta un *Mapa de problemas* que indica la correspondencia entre los problemas de tipo intermedio y número impar y aquellos ejemplos resueltos en el texto. Las soluciones completas de una mitad (alternativamente uno sí y otro no) de los problemas de número impar, resueltos según el formato de los ejemplos con dos columnas pueden encontrarse en el *Manual de soluciones para los estudiantes*.

No creemos que los estudiantes deban recibir una ayuda excesiva en la resolución de problemas. Ellos aprenden más y mejor cuando aciertan en las tareas asignadas. La jerarquía de problemas resueltos, ejemplos "¡Inténtelo!", "Guía de resolución de problemas" y "Mapa de problemas" ofrece al estudiante y al profesor la máxima flexibilidad para conducirse a través de niveles progresivos de independencia. Los problemas del tipo "¡Inténtelo!" conducen al estudiante paso a paso en busca de las respuestas dejándole que haga él mismo el cálculo matemático. La Guía de resolución de problemas ofrece una supervisión de las técnicas que se han demostrado en el capítulo correspondiente. El Mapa de problemas muestra a los estudiante con alguna dificultad donde deben buscar ayuda dentro del capítulo, peso sin otra asistencia.

En beneficio del estudiante

Se ha realizado un esfuerzo considerable para conseguir una exposición del texto más realista e informal. Los estudiantes basan sus conocimientos en la física que ya han aprendido y cada concepto nuevo que adquieren actúa de fundamento para profundizar en otros temas. Una consulta realizada por un centenar de estudiantes entusiastas indica que los cambios verificados en esta cuarta edición influirán con éxito en un amplio sector de estudiantes y les ayudará a realizar un aprendizaje ameno y a hacer física sin concentrarse en la dificultad del tema. Para estimular el interés de los estudiantes se ofrecen a lo largo del texto unas breves secciones suplementarias "Explorando la naturaleza" donde se exponen ensayos sobre diversos temas de interés a los alumnos de ciencias e ingeniería.

La física moderna en el curso de introducción

Aunque la teoría cuántica revolucionó la descripción del mundo físico hace ya más de 70 años, su integración en los textos introductorios de física ha sido lenta. Para hacer la física más relevante a los estudiantes de hoy, la relación masa-energía y la cuantización energética se incluyen como secciones en el capítulo de conservación de la energía, y la cuantización del momento angular se trata en el capítulo sobre la conservación de esta magnitud. Estas ideas se utilizan luego a través del texto, por ejemplo, en el capítulo 19 para explicar el fallo del teorema de equipartición.

Además se han incluido dos capítulos opcionales, "La dualidad onda-partícula y la física cuántica" (capítulo 17) y "La teoría microscópica de la conducción eléctrica" (capítulo 27), de tal modo que los profesores que lo deseen puedan integrarlos en un curso de dos semestres junto con los temas usuales de la física clásica. Estos capítulos ofrecen algo completamente nuevo, los fundamentos para los profesores que decidan introducir la física cuántica más pronto en este curso. El capítulo 17 sobre la dualidad onda-partícula de la naturaleza es el último de la Parte II del curso, inmediatamente después del capítulo que trata de la superposición y de las ondas estacionarias. En él se introduce la idea de la dualidad onda-partícula de la luz y la materia y utiliza la cuantización de la frecuencia de las ondas estacionarias estudiada en el capítulo anterior, para introducir la cuantización energética de los sistemas confinados. Muchos estudiantes han oído hablar de la teoría cuántica y sienten curiosidad sobre ella. El concepto de cuantización de la

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

frecuencia en las ondas estacionarias es un buen punto de partida para entender la cuantización energética de las ondas electrónicas estacionarias, una vez han visto con los diagramas de difracción e interferencia que los electrones poseen propiedades ondulatorias. Como realmente el tiempo es corto, incluso para cubrir la materia ordinaria del curso introductorio, algunos instructores se resisten a impartir un capítulo más, como el 17. No obstante, quisiera decirles que la física cuántica, es al menos tan importante como muchos de los restantes temas del texto.

El capítulo 27 sobre la explicación cuántica de la conducción eléctrica puede impartirse inmediatamente después de abordar las corrientes eléctricas y los circuitos de corriente continua. Se desarrolla el modelo clásico de la conducción y se concluye con la relación entre resistividad y velocidad media, v_m y el recorrido libre medio, λ, de los electrones. A continuación se estudian las interpretaciones clásica y cuántica de v_m y λ por medio del modelo de la partícula en una caja, expuesta en el capítulo opcional 17, para introducir la energía de Fermi. Se aborda la teoría simple de bandas para analizar las razones por las cuales los materiales son conductores, aislantes o semiconductores. Es nuestra esperanza que al ofrecer estos capítulos opcionales los instructores puedan sacar partido de los medios incluidos para incorporara la teoría cuántica simple en sus curso de física elemental.

Flexibilidad

Con el fin de acomodar a los profesores en una amplia variedad de formatos del curso, y responder a las preferencias de los usuarios previos de este texto, se han realizado algunas revisiones en el ordenamiento de las materias. En esta nueva edición, los instructores pueden ofrecer a sus estudiantes una breve exposición de la física moderna integrada en los temas clásicos, o bien prescindir de los capítulos opcionales de la física cuántica completamente o quizás volver a ellos en la parte final del curso, método más tradicional. Para dar tiempo al análisis de estos capítulos cuánticos opcionales, una parte del material tradicional puede ignorarse. Para ayudar al instructor, este material que puede saltarse sin arriesgar el estudio de otras secciones se ha catalogado en secciones opcionales. Existen otros dos capítulos opcionales, además de los citados 17 y 27. Son el capítulo 12, "Equilibrio estático y elasticidad" y el capítulo 21, "Propiedades y procesos térmicos", que contiene temas que los instructores pueden saltar o también ofrecer como simple lectura. La calificación "opcional" de secciones y capítulos permite al instructor seleccionar los temas que desee con la seguridad de que ningún texto de las secciones no opcionales depende del conocimiento previo de un tema opcional. Las secciones y capítulos opcionales están indicados claramente con fondos de color amarillo en las páginas afectadas. Otro material opcional, como los métodos numéricos y el uso de los números complejos para resolver la ecuación del oscilador forzado se presenta en los ensayos titulados "Explorando la naturaleza".

www.elsolucionario.net

Agradecimientos

Muchas personas han contribuido en esta edición. Desearía agradecer a todos los que utilizaron las ediciones anteriores y me ofrecieron sus comentarios y sugerencias.

Gene Mosca, James Garland, Robert Lieberman y Murray Scureman nos proporcionaron revisiones detalladas de casi todos los capítulos. Gene Mosca escribió también la "Guía de estudio" para los estudiantes, en colaboración con Ron Gautreau. Robert Lieberman y Brooke Pridmore ensayaron en sus clases ciertas partes del libro y ayudaron a la obtención de opiniones de los alumnos y su revisión. Howard McAllister contribuyó al desarrollo de un método estándar en la resolución de problemas en los ejemplos.

Muchos nuevos problemas fueron proporcionados por Frank Blatt y Boris Korsunsky. Frank Blatt proporcionó también las respuestas del final del texto y ofreció muchas sugerencias útiles. Jeff Culbert ayudó a amenizar la serie de problemas con historias divertidas. Varios de los gráficos incluidos al final de los ejemplos fueron proporcionados por Robert Hollebeek.

Particularmente quisiera agradecer a más de un centenar de estudiantes que leyeron y estudiaron diversos capítulos y proporcionaron comentarios detallados y valiosos. Muchos instructores suministraron revisiones extensas e inestimables de uno o más capítulos. Todos ellos realizaron contribuciones a la calidad de esta revisión. Por todo ello, agradezco a:

www.elsolucionario.net

Michael Arnett, *Iowa State University*
William Bassichis, *Texas A & M*
Joel C. Berlinghieri, *The Citadel*
Frank Blatt, *Retired*
John E. Byrne, *Gonzaga University*
Wayne Carr, *Stevens Institute of Technology*
George Cassidy, *University of Utah*
I. V. Chivets, *Trinity College, University of Dublin*
Harry T. Chu, *University of Akron*
Jeff Culbert, *London, Ontario*
Paul Debevec, *University of Illinois*
Robert W. Detenbeck, *University of Vermont*
Bruce Doak, *Arizona State University*
John Elliot, *University of Manchester, England*
James Garland, *Retired*
Ian Gatland, *Georgia Institute of Technology*
Ron Gautreau, *New Jersey Institute of Technology*
David Gavenda, *University of Texas at Austin*
Newton Greenburg, *SUNY Binghamton*
Huidong Guo, *Columbia University*
Richard Haracz, *Drexel Unversity*
Michael Harris, *University of California at Davis*
Dieter Hartmann, *Clemson University*
Robert Hollebeek, *University of Pennsylvania*
Madya Jalil, *University of Malaya*
Monwhea Jeng, *University of California, Santa Barbara*
Ilon Joseph, *Columbia University*
David Kaplan, *University of California, Santa Barbara*
John Kidder, *Dartmouth College*
Boris Korsunsky, *Northfield Mt. Hermon School*
Andrew Lang (estudiante graduado) *University of Missouri*
David Lange, *University of California, Santa Barbara*
Isaac Leichter, *Jerusalem College of Technology*
William Lichten, *Yale University*
Robert Lieberman, *Cornell University*
Fred Lipschultz, *University of Connecticut*
Graeme Luke, *Columbia University*
Howard McAllister, *University of Hawaii*
M. Hoard Miles, *Washington State University*
Matthew Moelter, *University of Puget Sound*
Eugene Mosca, *United States Naval Academy*
Aileen O'Donughue, *St. Lawrence University*
Jack Ord, *University of Waterloo*
Richard Packard, *University of California*
George W. Pollack, *University of Connecticut*
John M. Pratte, *Clayton College & State University*
Brooke Pridmore, *Clayton State College*
David Roberts, *Brandeis University*
Lile D. Roelofs, *Haverford College*
Larry Rowan, *University of North Carolina at Chapel Hill*
Lewis H. Ryder, *University of Kent, Canterbury*
Bernd Schuttler, *University of Georgia*
Cindy Schwarz, *Vassar College*
Murray Scureman, *Amdahl Corporation*
Scott Sinawi, *Columbia University*
Wesley H. Smith, *University of Wisconsin*
Kevork Spartalian, *University of Vermont*
Kaare Stegavik, *University of Trondheim, Norway*
Jay D. Strieb, *Villanova University*
Martin Tiersten, *City College of New York*
Oscar Vilches, *University of Washington*
Fred Watts, *College of Charleston*
John Weinstein, *University of Mississippi*
David Gordon Wilson, *MIT*
David Winter, *Columbia University*
Frank L. H. Wolfe, *University of Rochester*
Roy C. Wood, *New Mexico State Univesity*
Yuriy Zhestkov, *Columbia University*

Participantes del Grupo de convergencia

Cherry Hill, New Jersey, 15 Julio 1997

John DiNardo, *Drexell University*
Eduardo Flores, *Rowan College*
Jeff Martoff, *Temple University*
Anthony Novaco, *Lafayette College*
Jay Dtrieb, *Villanova University*
Edward Whittaker, *Stevens Institute of Technology*

Denver Colorado, 15 Agosto 1997

Edward Adelson, *Ohio State University*
David Bartlett, *University of Colorado at Boulder*
David Elmore, *Purdue University*
Colonel Rolf Enger, *United States Air Force Academy*
Kendal Mallory, *University of Colorado at Colorado Springs*
Anders Schenstrom, *Milwaukee School Of Engineering*
Daniel Schroeder, *Weber State University*
Ashley Schultz, *Fort Lewis College*

Revisores estudiantes

En esta edición invitamos a revisores estudiantes a participar en todas las etapas de desarrollo del manuscrito. Cierto número de estas revisiones fueron anónimas. Especialmente útiles fueron las revisiones de los siguientes estudiantes:

Jesper Anderson, *Haverford College*
Anthony Bak, *Haverford College*
Luke Benes, *Cornell University*
Deborah Brown, *Northwestern University*

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Andrew Burgess, *University of Kent, Canterbury*
Sarah Burnett, *Cornell University*
Sara Ellison, *University of Kent, Canterbury*
Ilana Greenstein, *Haverford College*
Sharon Hovey, *Northwestern University*
Samuel LaRoque, *Cornell University*
Valerie Larson, *Northwestern University*
Jonathan McCoy, *Haverford College*
Aaron Todd, *Cornell University*
Katalin Varju, *University of Kent, Canterbury*
Ryan Walker, *Haverford College*
Matthew Wolpert, *Haverford College*
Julie Zachiariadis, *Haverford College*

También quiero agradecer a los revisores de ediciones previas, cuyas contribuciones son parte de los fundamentos de esta edición.

Walter Borst, *Texas Technological University*
Edward Brown, *Manhattan College*
James Brown, *The Colorado School of Mines*
Christopher Cameron, *University of Southern Mississippi*
Roger Clapp, *University of South Florida*
Bob Coakley, *University of Southern Maine*
Andrew Coates, *University College, London*
Miles Dresser, *Washington State University*
Manuel Gómez-Rodríguez, *University of Puerto Rice, Río Piedras*
Allin Gould, *John Abbott College C.E.G.E.P., Canada*
Dennis Hall, *University of Rochester*
Grant Hart, *Brigham Young University*
Jerold Izatt, *University of Alabama*
Alvin Jenkins, *North Carolina State University*
Lorella Jones, *University of Illinois, Urbana-Champaign*
Michael Kambour, *Miami-Dade Junior College*
Patrick Kenealy, *California State University at Long Beach*
Doug Kurtza, *Clarkson University*
Lui Lam, *San Jose State University*
Chelcie Liu, *City College of San Francisco*
Robert Luke, *Boise State University*
Stefan Machlup, *Case Western Reserve University*
Eric Matthews, *Wake Forest University*
Konrad Mauersberger, *University of Minnesota, Minneapolis*
Duncan Moore, *University of Rochester*
Elizabeth Nickles, *Albany College of Pharmacy*
Harry Otteson, *Utah State University*
Jack Overley, *University of Oregon*
Larry Panek, *Widener University*
Malcolm Perry, *Cambridge Unversity, United Kingdom*
Arthur Quinton, *University of Massachusetts, Amherst*
John Risley, *North Carolina State University*
Robert Rundel, *Mississippi State University*
John Rusell, *Southeastern Massachusetts University*
Michael Simon, *Housatonic Community College*
Jim Smith, *University of Illinois, Urbana-Champaign*
Richard Smith, *Mountana State University*
Larry Sorenson, *University of Washington*
Thor Stromber, *New Mexico State University*
Edward Thomas, *Georgia Institute of Technology*
Colin Thompson, *Queens University, Canada*
Gianfranco Vidali, *Syracuse University*
Brian Watson, *St. Lawrence University*
Robert Weidman, *Michigan Technological University*
Stan Williams, *Iowa State University*
Thad Zaleskiewicz, *University of Pittsburg, Greensburg*
George Zimmerman, *Boston University*

Finalmente quisiera agradecer a todo el personal de Worth y W. H. Freeman Publishers por su ayuda y aliento. Fue una fortuna para mi colaborar con dos editores de gran talla en el desarrollo de proyectos. Steve Tenney trabajó en las fases iniciales del libro y es responsable de muchas de las ideas innovadoras, tales como el formato de los ejemplos, el formato de los resúmenes, la guía de resolución de problemas y el mapa de problemas. Morgan Ryan trabajó en las etapas finales, incluyendo todo el programa artístico y realizó mejoras importantes en todo el libro. Agradezco también las contribuciones de Kerry Baruth, Anne Duffy, Margaret Comaskey, Elizabeth Geller, Yuna Lee, Sarah Segal, Patricia Lawson y George Touloumes.

Berkeley, California
December 1997

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
...TORICO NACIONAL
...425541 / 423303
...CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Prólogo del traductor

Cuando en 1976, el profesor Paul A. Tipler de la Universidad de Oakland (EE.UU.) publicó la obra FÍSICA, fue muy bien recibida en los medios universitarios por su énfasis en la unidad de esta disciplina y su capacidad para simplificar el bagaje teórico de la misma, de tal modo que con un número mínimo de fórmulas podía relacionarse el mayor número de fenómenos físicos. Por ejemplo, no incluía el capítulo clásico de mecánica de fluidos. En su lugar, el principio de Arquímedes se discutía como un ejemplo de las leyes de Newton y la ecuación de Bernouilli surgía como una simple aplicación del teorema trabajo-energía. De igual modo la relación entre la presión de un gas y su energía cinética molecular se obtenía como una aplicación más de la ecuación impulso-cantidad de movimiento. Para el estudiante que comienza a navegar por el mar de la ciencia, la descripción de múltiples fenómenos con un ahorro de teorías físicas, más o menos abstractas, resultaba atrayente y clarificador.

En aquellas fechas no era frecuente exponer en un libro de física general —tal como se exponía en el texto de Tipler— el estudio sistemático de las cuatro interacciones básicas de la naturaleza, explicando con ellas las fuerzas moleculares, las fuerzas de contacto, las propiedades de los muelles elásticos, las leyes de gravitación y las fuerzas atómicas y nucleares, que en capítulos posteriores se trataban con más detalle. Lo mismo puede decirse del tratamiento unificado de las ondas y sus propiedades: reflexión, interferencia, difracción, dispersión, etc., de todo tipo de ondas que se discutían como fenómenos generales y una teoría común aplicable a las cuerdas elásticas, al sonido y a la luz. La unidad de la física era una constante en todo el libro.

Otra característica del texto que se amplió en las sucesivas ediciones fue la abundancia de cuestiones y problemas prácticos incluidos en cada capítulo, unos resueltos y otros propuestos, así como glosarios y tests que permiten al alumno hacer una rápida revisión de la materia expuesta. Igualmente son de gran interés para alumnos y profesores los ensayos que se intercalan en el texto en forma de biografías, temas históricos y aplicaciones, renovadas casi totalmente en cada edición, sobre temas llamativos de vanguardia. Así, en la primera edición se incluyeron, entre otros, ensayos sobre contaminación, energías renovables y agujeros negros; en la segunda (1983) y tercera (1992) se exponen el descubrimiento del neutrino, la teoría del caos y la influencia del efecto

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

invernadero sobre el cambio global de clima terrestre; y en esta cuarta edición aparecen las fuerzas de mareas y el límite de Roche, los transductores, los choques de partículas y galaxias, el arco iris infrarrojo y el microscopio de barrido por efecto túnel, así como otros de carácter teórico como motores eléctricos y circuitos integrados y algunos de índole matemática como los números complejos y el teorema de Euler. Todos estos ensayos han sido cuidadosamente elegidos y magníficamente ilustrados.

Esta cuarta edición que ahora aparece a la luz pública es una auténtica joya bibliográfica de la física. En su prefacio, Tipler resume los nuevos objetivos propuestos:

1. *Incrementar la experiencia y capacidad de los alumnos para resolver problemas de física.* Para ello se ha aumentado notablemente el número de ejemplos resueltos en el texto con un nuevo planteamiento pedagógico que aplica por igual a los problemas más elementales de la mecánica clásica, como a los más complejos de física cuántica y relativista.
2. *Hacer la lectura del texto más simple y más amena para los estudiantes y más eficaz para el profesor.* Como es lógico y de acuerdo con los tiempos, la física se ha desarrollado hacia nuevas metas, pero la capacidad de aprendizaje de los alumnos que comienzan con este texto sus estudios universitarios de física sigue siendo por término medio la misma. Esto obliga a desarrollar métodos lógicos y nuevas estrategias pedagógicas, acompañadas de un sinfín de diagramas y figuras para exponer los principios físicos y sus aplicaciones, combinando el rigor y la amenidad (en muchos problemas, hasta el buen humor), lo simple y lo complejo, "el quark y el jaguar", como titula Gell-Mann su famoso libro.
3. *Actualizar la física general introduciendo en ellas los principios fundamentales de la mecánica cuántica.* Estos conceptos aparecieron a principios de siglo, pero pocos autores se han atrevido a integrarlos en un curso de introducción. El mismo Tipler siempre incluyó estos conceptos, con rigor y extensión, en un texto separado con el nombre de física Moderna. Sin embargo, en esta cuarta edición incluye los principios cuánticos en los capítulos 17 y 27 con el tacto suficiente para que los laberintos conceptuales y las controversias planteadas por esta ciencia puedan ser asimilados por alumnos de un nivel medio. De todas formas, su exposición está discretamente "blindada" con el epígrafe de materia opcional para que pueda prescindirse de ella en una primera lectura o en un curso más elemental.

   La parte 6 (Volumen II) de esta cuarta edición ya no es la llamada Física Moderna de ediciones anteriores, sino la continuación lógica de la física introductoria en su estructura más avanzada y dedicada a los últimos avances de la física (mecánica-cuántica, física atómica y nuclear, estado sólido, relatividad y partículas elementales)
4. *Hacer más flexible el texto para que los profesores puedan adaptarlo* a distintos curriculos. Además de los dos capítulos mencionado de mecánica cuántica, hay otros dos capítulos opcionales: "Equilibrio estático y elasticidad" (cap. 12) y "Propiedades y procesos térmicos" (cap. 21) que incluyen fenómenos físicos de los que puede prescindirse en determinados cursos o ser asignados para una simple lectura.

Cualquiera que examine detenidamente este libro podrá pensar que será difícil mejorar su contenido y su presentación, al menos en un par de lustros, pero estamos casi seguros de que los primeros años del nuevo milenio, Tipler y sus colaboradores volverán a sorprendernos con otra nueva y renovada edición de su física.

José Aguilar Peris

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: ([illegible]) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - [illegible] - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Suplementos

Para estudiantes

Study Guide

Volumen 1 (Capítulos 1-21) ISBN: 1-57259-511-6
Volumen 2 y 3 (Capítulos 22-41) ISBN: 1-57259-512-4

Cada capítulo contiene una descripción de ideas fundamentales, dificultades y conceptos dudosos, cuestiones del tipo verdadero-falso, cuestiones que exigen definiciones esenciales y relaciones, cuestiones y respuestas que requieren razonamientos cualitativos, problemas y soluciones

Solutions Manual for Students

Volumen 1 (Capítulos 1-21) ISBN: 1-57259-513-2
Volumen 2 y 3 (Capítulos 22-41) ISBN: 1-57259-524-8

Este texto proporciona las respuestas de la mitad (alternativamente uno sí y otro no) de los problemas impares recopilados al final de cada capítulo), presentados con el mismo formato y el mismo nivel de detalle que en el Instructor's Solutions Manual

Tipler PLUS⊕ CD-ROM

El *Tipler* PLUS⊕ CD-ROM está diseñado específicamente para complementar el proceso de aprendizaje iniciado en el texto. En el CD-ROM los estudiantes encontrarán detalles abundantes que reforzarán el estudio del texto. Los ejercicios interactivos que se incluyen basados en problemas adicionales aportan destreza de resolución. Los vídeos cortos sobre demostraciones de laboratorio y física aplicada aportan ejemplos de la vida diaria, así como curiosidades animadas basadas en los gráficos en relieve que aparecen en los distintos capítulos del texto. Los sistemas de ordenadores tipo Web permiten conducir al estudiante a través del apasionante mundo de la física. La versión del estudiantes del Tipler PLUS⊕, lo mismo que la versión de los instructores, pueden ser actualizadas vía Web.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Para profesores

Instructor's Solutions Manual

Volumen 1 (Capítulos 1-21) ISBN: 1-57259-514-0
Volumen 2 y 3 (Capítulos 22-41) ISBN: 1-57259-515-9

Las soluciones completas a todos los problemas del texto están elaboradas en el mismo formato a dos columnas que los ejemplos

Test Bank

Ofrece aproximadamente 3500 cuestiones de elección múltiple que abarcan todas las secciones del texto. Cada cuestión está identificada por un tema y clasificada como real, conceptual o numérica. ISBN: 1-57259-517-5

Computerized Test-Generation System

Una base de datos comprende las cuestiones del Test Bank. Los profesores pueden diseñar sus propios tests con el Computerized Test Bank. Para Windows, ISBN: 1-57259-519-1; para Macintosh, ISBN: 1-57259-520-5

Instructor's Resource Manual

Se incluyen demostraciones y una guía de películas y vídeos. ISBN: 1-57259-516-7

Transparencies

Se incluyen aproximadamente 150 transparencias de acetato a todo color de figuras y tablas del texto con el tipo de letra aumentado para su proyección. Volumen 1, ISBN: 1-57259-521-3; Volúmenes 2 y 3, ISBN: 1-57259-674-0

Instructor's Tipler PLUS⊕ CD-ROM

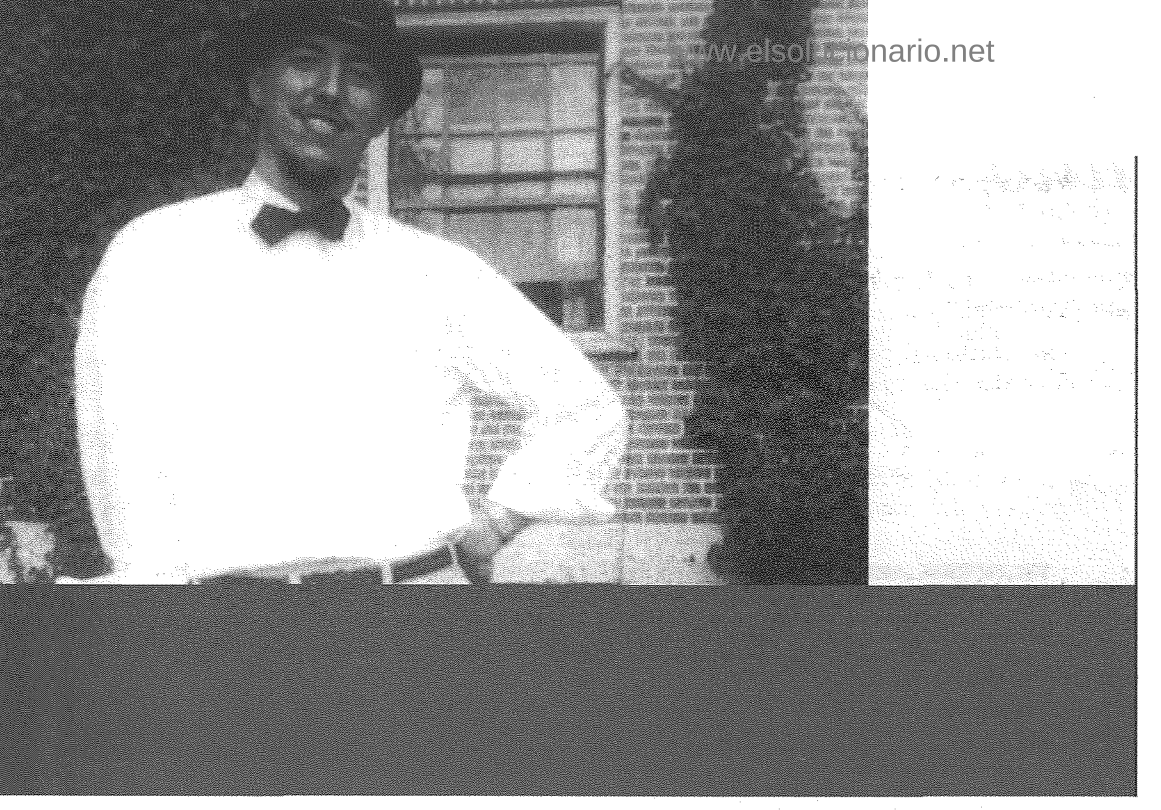
La versión para el profesor del *Tipler PLUS⊕* CD-ROM incluye todo el material de la versión para el estudiante, así como el *software* para construir programas en un conjunto simple de operación. Basta indicar la parte del libro que el profesor está impartiendo y en qué momento, para que el *Tipler PLUS⊕* acople su programa con una profusión de detalles y de ideas del contenido del CD-Rom y Web. Si se pulsa el botón de "puesta al día" para una nueva conexión Web se obtienen ejercicios y contenido actualizados, así como puede incluir sus propias creaciones y bibliografía. El *Tipler PLUS⊕* puede incluso almacenar una lista *e-mail* de estudiantes y colaboradores. Además del software indicado y el material sobre el CD-ROM del estudiante, el Instructor's CD-ROM también presenta temas seleccionados del *Study Guide* y del *Instructor's Resource Manual.*

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

Sobre el autor



El autor cuando era estudiante en 1954

www.elsolucionario.net

Paul Tipler nació en la pequeña ciudad agrícola de Antigo, Wisconsin, en 1933. Realizó sus estudios medios en Oshkosh, Wisconsin, de donde su padre era superintendente de las Escuelas Públicas. Recibió el título de *Bachelor of Science* en la Universidad de Purdue en 1955 y el de Philosofical Doctor en la Universidad de Illinois, en donde estudió la estructura de los núcleos. Impartió la enseñanza durante un año en la Welleyan University de Connecticut mientras redactaba sus tesis. Después se desplazó a la Universidad de Oakland en Michigan, donde fue uno de los primeros miembros del Departamento de Física, y desempeñó un papel importante en el desarrollo de los planes de estudio. Durante los siguientes 20 años explicó casi todas las disciplinas de física y escribió la primera y segunda ediciones de sus ampliamente difundidos textos Física Moderna (1969, 1978) y Física (1976, 1982). En 1982 se desplazó a Berkeley, California, donde ahora reside y donde escribió College Physics (1987). Además de la física, sus aficiones incluyen la música, excursionismo y camping. Es un excelente pianista de jazz y un buen jugador de póker.

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX (...) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA ... CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net

Guía de estudio

La *Física* de Tipler para la *Ciencia* y la *Tecnología*, 4ª edición, continúa siendo el mejor libro de texto para aprender física. Algunos aspectos dinámicos del aprendizaje, como los que se muestran a continuación, ayudan a los estudiantes a dominar esta ciencia.

Ejemplos

- El texto incluye un gran número de ejemplos de nivel intermedio resueltos.
- Cada ejemplo tiene un "**Esquema del problema**" que enseña a los estudiantes cómo resolver conceptualmente el problema antes de resolverlo matemáticamente. Al aprender a encontrar y organizar la información importante de un problema los estudiantes aprenden a pensar como un físico.
- Una de las principales innovaciones es el potente **formato a dos columnas emparejadas**: en la de la izquierda se explican los conceptos y en la de la derecha se presenta las matemáticas. Este formato permite relacionar las ecuaciones con lo que éstas significan.
- Muchos ejemplos terminan con una "**Observación**" que proporciona información adicional, advierte de errores comunes e informa sobre la manera en que un físico resolvería el problema.

EJEMPLO 2.6

La posición de una piedra que a partir del reposo se deja caer desde un acantilado viene dada por $x = 5t^2$, en donde x se mide en metros y hacia abajo desde la posición inicial cuando $t = 0$ y t se expresa en segundos. Hallar la velocidad de un instante t cualquiera. (Se omite la indicación explícita de la unidades para simplificar la notación.)

Esquema del problema Podemos calcular la velocidad de un instante determinado t calculando la derivada dx/dt directamente a partir de su definición en la ecuación 2.4. En la figura 2.7 se muestra la curva correspondiente que nos da x en función de t. Las líneas tangentes están dibujadas en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Las pendientes de estas líneas tangentes crecen uniformemente indicando que la velocidad instantánea crece del mismo modo con el tiempo.

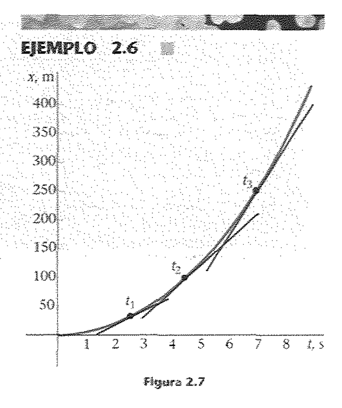


Figura 2.7

1. Por definición la velocidad instantánea es: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
2. Podemos calcular el desplazamiento Δx a partir de la función posición $x(t)$: $x(t) = 5t^2$
3. En un tiempo posterior $t + \Delta t$, la posición $x(t + \Delta t)$ viene dada por: $x(t+\Delta t) = 5(t+\Delta t)^2 = 5[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2] = 5t^2 + 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2$
4. El desplazamiento para este intervalo de tiempo será: $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = [5t^2 + 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2] - 5t^2 = 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2$
5. Dividir Δx por Δt para determinar la velocidad media en este intervalo de tiempo: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t$
6. A medida que consideramos intervalos de tiempo cada vez más cortos, Δt se aproxima a cero y el segundo termino, $5\Delta t$, tiende a cero; en cambio, el primer término permanece invariable. La velocidad instantánea en el tiempo t es así: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10t$

Observación Si hubiéramos hecho $\Delta t = 0$ en las etapas 4 y 5, el desplazamiento hubiera sido $\Delta x = 0$, en cuyo caso la relación $\Delta x/\Delta t$ quedaría indefinida. En su lugar, hemos dejado Δt como una variable hasta la etapa final, cuando el límite $\Delta t \to 0$ está bien definido.

- Cuando se ha considerado adecuado, las secciones "**Comprobación del resultado**" enseñan a los estudiantes cómo comprobar el resultado de su trabajo.
- A muchos ejemplos les siguen uno o más **ejercicios**. Se dan las respuestas, pero el estudiante debe relacionar el ejercicio con el ejemplo resuelto.

Comprobar el resultado El componente de A en la dirección de B es A cos ϕ = (13 m) cos 70,6° = 1,2 m.

Ejercicio (a) Determinar **A** · **B** para **A** = (3 m)**i** + (4 m)**j** y **B** = (2 m)**i** + (8 m)**j**. (b) Determinar A, B y el ángulo formado entre **A** y **B** para estos vectores. (*Respuestas:* (a) = 38 m², (b) A = 5 m, B = 8,25 m, ϕ = 23°.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 5.5

Un cochecillo de niños incontrolado se desliza sin rozamiento por una charca helada hacia un agujero en el hielo. Una persona sobre patines intenta alcanzar el cochecillo. Cuando lo consigue, esta persona y el cochecillo siguen deslizándose hacia el agujero con velocidad v_0. El coeficiente de rozamiento entre los patines (en la posición de frenado) y el suelo es μ_c. La distancia al agujero en el momento de agarrar al cochecillo es D, la masa de la persona es m y la del cochecillo M. (a) ¿Cuál es el valor mínimo de D para evitar la caída en el agujero? (b) ¿Qué fuerza debe ejercer la persona sobre el cochecillo?

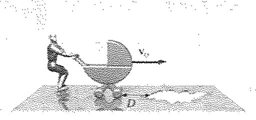
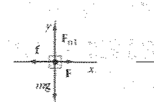


Figura 5.13

Esquema del problema Inicialmente la persona y el cochecillo se mueven hacia el agujero con velocidad v_0 en la dirección x que tomamos como positiva. Si llamamos F a la magnitud de la fuerza que la persona ejerce sobre el cochecillo, la fuerza neta sobre éste sera $-F$ y sobre la persona $F - f$, siendo $f = \mu_c mg$, la fuerza de rozamiento cinético. El valor mínimo de D es aquél para el cual la velocidad de la persona se hace cero justo al llegar al agujero (figura 5.13).

(a) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para la persona y el cochecillo aisladamente:



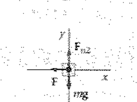


Figura 5.14 Persona Cochecillo

2. La distancia mínima D está relacionada con la velocidad inicial v_0 y la velocidad final, $v = 0$:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x D = 0$$

$$D = -\frac{v_0^2}{2a_x}$$

3. Aplicar $\sum F = ma$ al movimiento de ambos, persona y cochecillo, en la dirección x para relacionar la aceleración de cada objeto con las fuerzas aplicadas:

Persona $\sum F_x = ma_x$, $F - f = F - \mu_c mg = ma_x$

Cochecillo $\sum F_x = Ma_x$, $-F = Ma$

4. Sumar estas dos ecuaciones para eliminar F, y a continuación despejar a_x:

$$-\mu_c mg = (M + m)a_x$$

La aceleración, lógicamente, es negativa:

$$a_x = -\left(\frac{m}{M + m}\right)\mu_c g$$

5. Aplicar este resultado de a_x en la ecuación obtenida para D en la etapa 2:

$$D = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \left(\frac{M + m}{m}\right)\frac{v_0^2}{2\mu_c g}$$

(b) F resulta de la segunda ley de Newton aplicada al cochecillo:

$$F = -Ma_x = \left(\frac{Mm}{M + m}\right)\mu_c g$$

Observación El valor mínimo de D es proporcional a v_0^2 e inversamente proporcional a μ_c. La figura 5.15 muestra la distancia de frenado D en función de v^2 para valores de M/m iguales a 0,1, 0,3 y 1,0 con $\mu_c = 0,5$. Obsérvese que cuando la masa del cochecillo aumenta, se requiere una mayor distancia de frenado para una determinada velocidad inicial. Esto es análogo a lo que ocurre cuando se quiere detener un vehículo que arrastra un remolque cuando éste no tiene sus propios frenos. La masa del remolque aumenta la distancia de parada para una determinada velocidad.

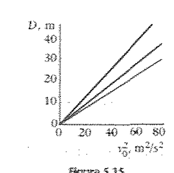


Figura 5.15

- Casi todos los ejemplos incluyen ilustraciones que ayudan a comprender el problema.
- Los estudiantes participan en todos los pasos de la solución completa de cada ejemplo.

Ejemplos ¡Inténtelo!

- Los ejemplos "**¡Inténtelo!**" tienen el mismo formato que el resto de los ejemplos, excepto en que en la columna de la izquierda se dan instrucciones breves y en la de la derecha sólo se presentan las fórmulas importantes, sin mostrar los pasos matemáticos intermedios.
- Los ejemplos "**¡Inténtelo!**" comprueban la comprensión de los conceptos, identifican los puntos débiles y refuerzan los procedimientos propios de resolución de problemas.

EJEMPLO 6.7
¡Inténtelo!

Una partícula experimenta un desplazamiento $\Delta \mathbf{s} = 2\text{ m }\mathbf{i} - 5\text{ m }\mathbf{j}$ a lo largo de una línea recta. Durante el desplazamiento una fuerza constante $\mathbf{F} = 3\text{ N }\mathbf{i} + 4\text{ N }\mathbf{j}$ actúa sobre la partícula (figura 6.14). Determinar (a) el trabajo realizado por la fuerza y (b) el componente de la fuerza en dirección del desplazamiento.

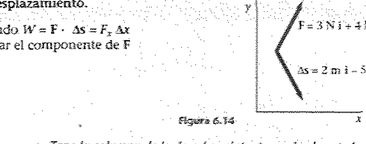


Figura 6.14

Esquema del problema El trabajo W se determina calculando $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$. Como $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s} = F \cos\phi\, \Delta \mathbf{s}$ podemos determinar el componente de F en la dirección del desplazamiento a partir de

$$F\cos\phi = \frac{(\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s})}{\Delta\mathbf{s}} = \frac{W}{\Delta\mathbf{s}}$$

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	Respuestas
(a) Calcular el trabajo realizado W.	$W = -14\text{ N}\cdot\text{m}$
(b) 1. Calcular $\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{s}$ y utilizar el resultado para determinar la distancia $\Delta\mathbf{s}$.	$\Delta s = \sqrt{29}$ m
2. Calcular $F\cos\phi = W/\Delta\mathbf{s}$.	$F\cos\phi = -2{,}60$ N

Observación El componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es negativo; por tanto, el trabajo realizado es negativo.

Ejercicio Determinar la magnitud de **F** y el ángulo ϕ entre **F** y $\Delta\mathbf{s}$. (*Respuesta*: $F = 5$ N, $\phi = 121°$.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

"Explorando la naturaleza"

- Estos ensayos enriquecen al estudiante ya que abordan temas que no pertenecen estrictamente al núcleo del curso pero son tan interesantes que no se los puede pasar por alto.

*e*xplorando la naturaleza

La fuerza magnética y la conservación del momento lineal

La fuerza magnética ejercida por una carga móvil sobre otra se determina combinando la ecuación 28.1 que nos da la fuerza ejercida por un campo magnético sobre una carga móvil y la ecuación 29.1 que expresa el campo magnético ejercido por una carga. La fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$ ejercida por una carga q_1 que se mueve con velocidad v_1 sobre una carga q_2 de velocidad v_2 viene dada por

$$\mathbf{F}_{1,2} = q_2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = q_2\mathbf{v}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{1,2}}{r_{1,2}^2}\right) \qquad \text{(E29.1a)}$$

en donde $\mathbf{B}_1$ es el campo magnético en la posición de la carga q_2 debido a la carga q_1, y $\hat{\mathbf{r}}_{1,2}$ es el vector unitario que apunta de q_1 a q_2. Igualmente, la fuerza $\mathbf{F}_{2,1}$ ejercida por una carga q_2 que se mueve con velocidad v_2 sobre una carga q_1 de velocidad v_1 viene expresada por

$$\mathbf{F}_{2,1} = q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = q_1\mathbf{v}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{2,1}}{r_{2,1}^2}\right) \qquad \text{(E29.1b)}$$

Estas relaciones son notables por el hecho de que la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 no es generalmente igual y opuesta a la ejercida por la carga q_2 sobre la carga q_1. Es decir, estas fuerzas no obedecen la tercera ley de Newton, como puede demostrarse considerando el caso especial ilustrado en la figura E29.1. Aquí, el campo magnético B_1 debido a la carga q_1 sobre la carga q_2 tiene la dirección z negativa y la fuerza sobre q_2 está dirigido hacia la izquierda en la dirección x negativa. Sin embargo, el campo magnético B_2 debido a q_2 sobre q_1 es cero ya que q_1 se encuentra en la línea de movimiento de q_2. Por tanto, la fuerza magnética ejercida por q_2 sobre q_1 es nula. Así pues, existe una fuerza neta $F_{1,2}$, que actúa sobre el sistema de las dos cargas. El sistema acelerará en la dirección de esta fuerza y el momento lineal no se conserva.

Esta aparente violación de la ley de conservación del momento lineal resulta al considerar la fuerza ejercida por una carga sobre

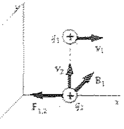


Figura E29.1 Las fuerzas ejercidas por dos cargas móviles entre sí no son iguales y opuestas. El campo magnético $\mathbf{B}_1$ producido por la carga q_1 sobre q_2 tiene la dirección z negativa y, por tanto, ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$ sobre q_2 a la izquierda en la dirección x negativa. Sin embargo, el campo $\mathbf{B}_2$ ejercido por la carga q_2 sobre q_1 es nulo, de tal modo que no hay fuerza sobre q_1.

Resumen

- Al final de cada capítulo se presenta un detallado **Resumen** que refuerza las lecciones estudiadas. El resumen no es un sustitutivo del texto para estudiantes atentos, sino un esquema que les ayuda a organizar lo que han aprendido.

Resumen

1. Trabajo, energía cinética, energía potencial y potencia son importantes magnitudes dinámicas.
2. El teorema del trabajo-energía cinética es una relación importante deducida de las leyes de Newton aplicadas a una partícula.
3. El producto escalar de dos vectores es una definición matemática útil en todos los campos de la física.

OBSERVACIONES Y ECUACIONES IMPORTANTES		TEMA
		1. Trabajo
El trabajo realizado por una fuerza constante es igual al producto del componente de la fuerza en la dirección del movimiento y el desplazamiento de la fuerza		Fuerza constante
$W = F\cos\theta\,\Delta x = F_x\,\Delta x$	(6.1)	
$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx =$ área bajo la curva de F_x en función de x	(6.9)	Fuerza variable
$W = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$	(6.14)	Fuerza en tres dimensiones
La unidad SI del trabajo y la energía es el julio (J):		Unidades
$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m}$	(6.2)	
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	(6.6)	2. Energía cinética
$W_{total} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$	(6.7)	3. Teorema del trabajo-energía cinética
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi$	(6.11)	4. Producto escalar
en donde ϕ es el ángulo entre los vectores.		

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Problemas

- Los tipos de problemas se indican mediante colores: el **gris** significa problemas conceptuales y el **amarillo** se refiere a secciones opcionales o ensayos "Explorando la naturaleza".
- Los niveles de dificultad se indican mediante puntos de color azul
- Los problemas cualitativos se ponen en contexto mediante problemas cuantitativos relacionados.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
••• Desafiante, para alumnos avanzados

Tomar $g = 9{,}81$ N/kg $= 9{,}81$ m/s² y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se diga lo contrario.

Conservación de la energía mecánica

•• 1 ¿Cuáles son las ventajas e inconvenientes de utilizar el principio de conservación de la energía mecánica en lugar de las leyes de Newton para resolver problemas?

•• 2 Dos objetos de masas desiguales están conectados por una cuerda sin masa que pasa por un polea sin rozamiento. Una vez liberados del reposo, ¿cuáles de las siguientes proporciones son ciertas? (U = energía potencial gravitatoria, E_c = energía cinética del sistema).
(a) $\Delta U < 0$ y $\Delta E_c > 0$
(b) $\Delta U = 0$ y $\Delta E_c > 0$
(c) $\Delta U < 0 =$ y $\Delta E_c = 0$
(d) $\Delta U = 0$ y $\Delta E_c = 0$
(e) $\Delta U > 0$ y $\Delta E_c < 0$

•• 3 Dos piedras se lanzan con la misma velocidad inicial y en el mismo instante desde el tejado de un edificio. Una piedra se lanza bajo un ángulo de 30° por encima de la horizontal; la otra se lanza horizontalmente. (Despreciar la resistencia del aire). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
(a) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con iguales velocidades.
(b) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con diferentes velocidades.
(c) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades iguales.
(d) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades diferentes.

• 4 Un bloque de masa m comprime un muelle hasta una distancia x y luego se deja en libertad. El muelle proyecta el bloque a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad v. El mismo muelle proyecta un segundo bloque de masa $4m$ con una velocidad $3v$. ¿A qué distancia se comprimió el muelle en este último caso?

• 7 En una fiesta al aire libre, una niña se divierte lanzando balines de papel arrollado a sus amigos con un juguete de muelle que ella se ha construido. Uno de estos "proyectiles" de masa 200 g se apoya sobre el muelle cuya constante de fuerza es 300 N/m y éste se comprime 9 cm.
(a) Determinar el trabajo realizado por la niña y por el muelle en el lanzamiento.
(b) Si el balín sale despedido del muelle cuando éste se encuentra es su posición de equilibrio, determinar la velocidad del balín en este punto.
(c) Si el aparato está a 2,2 m sobre el césped, ¿cuál será el alcance horizontal del balín si su masa es de 200 g?

• 8 Un bloque de 3 kg se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 7 m/s (figura 7.17). Después de recorrer una distancia de 2 m, encuentra una rampa sin rozamiento inclinada un ángulo de 40° con la horizontal. ¿Qué distancia recorrerá el bloque en la rampa ascendente antes de detenerse?

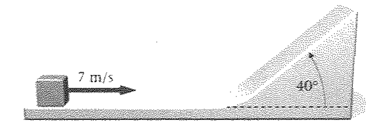


Figura 7.17 Problema 8.

• 9 Un objeto de 3 kg en reposo (figura 7.18) se deja libre a una altura de 5 m sobre una rampa curva y sin rozamiento. Al pie de la rampa existe un muelle cuya constante es $k = 400$ N/m. El objeto se desliza por la rampa y choca contra el muelle comprimiéndole una distancia x antes de alcanzar momentáneamente el reposo.
(a) Determinar x.
(b) ¿Qué ocurre con el objeto después de alcanzar el reposo?

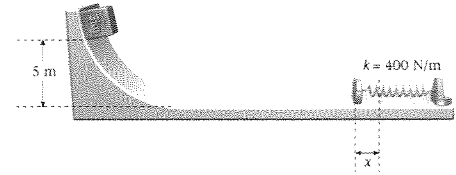


Figura 7.18 Problema 9.

Problemas generales

• 89 Verdadero o falso:
(a) La magnitud de la suma de dos vectores debe ser mayor que la magnitud de cualquiera de ellos.
(b) Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración debe ser cero.
(c) Si la aceleración es cero, el módulo de la velocidad debe ser constante.

• 90 Las velocidades inicial y final de un objeto son las indicadas en la figura 3.39. Indicar la dirección de la velocidad media.

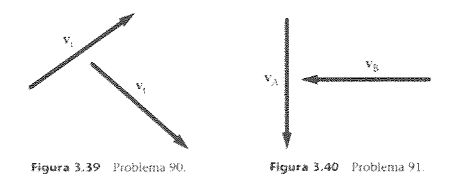


Figura 3.39 Problema 90. **Figura 3.40** Problema 91.

• 91 Las velocidades de los objetos A y B se muestran en la figura 3.40. Dibujar un vector que represente la velocidad de B relativa a A.

•• 92 Un vector $\mathbf{A}(t)$ tiene un módulo constante, pero su dirección cambia de modo uniforme. Dibujar los vectores $\mathbf{A}(t + \Delta t)$ y $\mathbf{A}(t)$ para un pequeño intervalo de tiempo Δt y determinar la diferencia $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$ gráficamente. ¿Cuál es la dirección de $\Delta\mathbf{A}$ respecto a $\mathbf{A}$ para pequeños intervalos de tiempo?

• 96 Dos vectores A y B corresponden al plano xy. ¿En qué condiciones la relación $A/B = A_x/B_x$?

• 97 El vector de posición de una partícula viene dado por $\mathbf{r} = 5t\,\mathbf{i} + 10t\,\mathbf{j}$, en donde t está en segundos y $\mathbf{r}$ en metros.
(a) Dibujar la trayectoria de la partícula en el plano xy.
(b) Hallar $\mathbf{v}$ en forma de sus componentes y calcular su módulo.

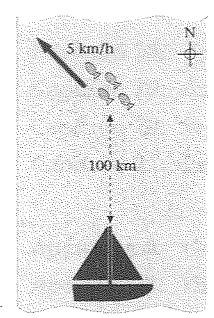


Figura 3.43 Problema 98.

• 98 Frente a la costa de Chile un avión de observación divisa un banco de atunes nadando a una velocidad uniforme de 5 km/h hacia el

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
DOCUMENTO HISTORICO NACIONAL
... 425541 / 423803
Ing. ... CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net

Índice abreviado

www.elsolucionario.net



Capítulo 1: Sistemas de medida

PARTE 1: Mecánica

Capítulo 2: El movimiento en una dimensión
Capítulo 3: Movimiento en dos y tres dimensiones
Capítulo 4: Leyes de Newton I
Capítulo 5: Aplicaciones de las leyes de Newton
Capítulo 6: Trabajo y energía
Capítulo 7: Conservación de la energía
Capítulo 8: Sistemas de partículas y conservación del momento lineal
Capítulo 9: Rotación
Capítulo 10: Conservación del momento angular
Capítulo 11: Gravedad
Capítulo 12: Equilibrio estático y elasticidad
Capítulo 13: Fluidos

PARTE 2: Oscilaciones y ondas

Capítulo 14: Oscilaciones
Capítulo 15: Movimiento ondulatorio
Capítulo 16: Superposición y ondas estacionarias
Capítulo 17: Dualidad onda-partícula y física cuántica

PARTE 3: Termodinámica

Capítulo 18: Temperatura y teoría cinética de los gases
Capítulo 19: Calor y primer principio de la termodinámica
Capítulo 20: Segundo principio de la termodinámica
Capítulo 21: Propiedades y procesos térmicos

Apéndice A: Unidades SI y factores de conversión
Apéndice B: Datos númericos
Apéndice C: Tabla periódica de los elementos
Apéndice D: Revisión de matemáticas

Origen de las ilustraciones
Respuestas de problemas
Índice alfabético

www.elsolucionario.net

VOLUMEN II

PARTE 4: **Electricidad y magnetismo**

Capítulo 22: Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga
Capítulo 23: Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga
Capítulo 24: Potencial eléctrico
Capítulo 25: Energía electrostática y capacidad
Capítulo 26: Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua
Capítulo 27: Teoría microscópica de la conducción eléctrica
Capítulo 28: El campo magnético
Capítulo 29: Fuentes del campo magnético
Capítulo 30: Inducción magnética
Capítulo 31: Circuitos de corriente alterna
Capítulo 32: Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

PARTE 5: **Luz**

Capítulo 33: Propiedades de la luz
Capítulo 34: Imágenes ópticas
Capítulo 35: Interferencia y difracción

PARTE 6: **Física moderna: mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia**

Capítulo 36: Aplicaciones de la ecuación de Schrödinger
Capítulo 37: Átomos
Capítulo 38: Moléculas y sólidos
Capítulo 39: Relatividad
Capítulo 40: Física nuclear
Capítulo 41: Partículas elementales y los comienzos del Universo

Apéndice A: Unidades SI y factores de conversión
Apéndice B: Datos numéricos
Apéndice C: Tabla periódica de los elementos

Origen de las ilustraciones
Respuestas de problemas
Índice alfabético

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
/ 423803
Ing. ... CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Índice analítico

SECCIONES OPCIONALES: Estas secciones contienen material que puede omitirse sin comprometer la comprensión de otras secciones.

Prefacio VII

Prólogo del traductor XIII

Suplementos XV

Sobre el autor XVII

Guía de estudio XVIII

Índice abreviado XXIII

Parte 4: Electricidad y magnetismo 717

Capítulo 22: **Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga 719**

22.1 Carga eléctrica 719
- Cuantización de la carga 720
- Conservación de la carga 721

22.2 Conductores y aislantes 722
- Electroscopio 722
- Carga por inducción 723

22.3 Ley de Coulomb 724
- Fuerza ejercida por un sistema de cargas 726

22.4 El campo eléctrico 728
- Dipolos eléctricos 732

22.5 Líneas de campo eléctrico 732

22.6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos 735

22.7 Dipolos eléctricos en campos gravitatorios 736

Resumen 738

Guía de resolución de problemas 739

Problemas 740

Capítulo 23: **Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga 749**

23.1 Cálculo del campo eléctrico **E** mediante la ley de Coulomb 750
- Campo eléctrico **E** sobre el eje de una carga lineal finita 750
- Campo eléctrico **E** fuera del eje de una carga lineal finita 751
- Campo eléctrico **E** debido a una carga lineal infinita 752
- Campo eléctrico **E** sobre el eje de una carga anular 754
- Campo eléctrico **E** en el eje de un disco uniformemente cargado 754
- Campo eléctrico **E** en las proximidades de un plano infinito de carga 755

23.2 Ley de Gauss 756
- Flujo eléctrico 757
- Enunciado cuantitativo de la ley de Gauss 758

23.3 Cálculo del campo eléctrico **E** mediante la ley de Gauss 760

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Geometría plana 760
Geometría esférica 761
Campo eléctrico E debido a una corteza esférica de carga 761
Geometría cilíndrica 765
23.4 Discontinuidad de E_n 766
23.5 Carga y campo en la superficie de los conductores 767
23.6 Deducción de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb 770
Resumen 771
Guía para la resolución de problemas 772
Problemas 772

Capítulo 24: Potencial eléctrico 781
24.1 Diferencia de potencial 781
Continuidad de V 782
Unidades 782
Potencial y líneas de campo eléctrico 783
24.2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales 784
24.3 Determinación del campo eléctrico a partir del potencial 788
Relación general entre E y V 789
24.4 Cálculo de V para distribuciones continuas de carga 790
Potencial V sobre el eje de un anillo cargado 790
El potencial V sobre el eje de un disco uniformemente cargado 791
Potencial V debido a un plano infinito de carga 792
El potencial V en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga 794
El potencial V debido a una carga lineal infinita 796
24.5 Superficies equipotenciales 796
Generador de Van de Graaff 798
Ruptura dieléctrica 799
Resumen 802
Guía de resolución de problemas 803
Problemas 804

Capítulo 25: Energía electrostática y capacidad 811
25.1 Energía potencial electrostática 812
25.2 Capacidad 814
Condensadores 815
25.3 Almacenamiento de la energía eléctrica 818
Energía del campo electrostático 820
25.4 Combinaciones de condensadores 821
Condensadores en paralelo 822
Condensadores en serie 822
25.5 Dieléctricos 825
Energía almacenada en presencia de un dieléctrico 828
25.6 Estructura molecular de un dieléctrico 830
Magnitud de la carga ligada 832
Efecto piezoeléctrico 833
Resumen 833
Guía de resolución de problemas 834
Problemas 835

Capítulo 26: Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua 843
26.1 Corriente y movimiento de cargas 843
26.2 Resistencia y ley de Ohm 847
26.3 La energía en los circuitos eléctricos 850
Fuerza electromotriz y baterías 851
26.4 Combinaciones de resistencias 853
Explorando la naturaleza: Tecnología de baterías 854
Resistencias en serie 854
Resistencias en paralelo 855
26.5 Reglas de Kirchhoff 859
Circuitos de una sola malla 859
Circuito de múltiples mallas 862
Amperímetros, voltímetros y ohmímetros 865
26.6 Circuitos RC 866
Descarga de un condensador 866
Carga de un condensador 868
Conservación de la energía en la carga de un condensador 870
Resumen 871
Guía para la resolución de problemas 872
Problemas 873

Capítulo 27: Teoría microscópica de la conducción eléctrica 885
27.1 Imagen microscópica de la conducción 885
Interpretación clásica de λ y v_m 887
27.2 El gas de electrones de Fermi 888
Cuantización energética en una caja 888
Principio de exclusión de Pauli 889
La energía de Fermi 890
El factor de Fermi a $T = 0$ 891
El factor de Fermi para $T > 0$ 892
Potencial de contacto 893
Capacidad calorífica debida a los electrones en un metal 894
27.3 Teoría cuántica de la conducción eléctrica 894
Dispersión de las ondas eléctricas 895
27.4 Teoría de bandas de los sólidos 896
27.5 Superconductividad 897
Teoría BCS 898
Efecto Josephson 900
27.6 Distribución de Fermi-Dirac1 900
Resumen 904
Guía para la resolución de problemas 905
Problemas 906

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 28: El campo magnético 909

28.1 Fuerza ejercida por un campo magnético 909
28.2 Movimiento de una carga puntual en un campo magnético 914
Selector de velocidades 916
Medida del cociente *q/m* para electrones realizada por Thomson 917
Espectrómetro de masas 918
El ciclotrón 919
28.3 Pares de fuerzas sobre espiras de corriente e imanes 921
Energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético 922
28.4 Efecto Hall 924
Efecto Hall cuántico 926
Resumen 926
Guía de resolución de problemas 928
Problemas 928

Capítulo 29: Fuentes del campo magnético 935

29.1 Campo magnético creado por cargas puntuales en movimiento 935
29.2 Campo magnético creado por corrientes eléctricas: ley de Biot y Savart 937
B debido a una espira de corriente 937
Campo magnético B debido a una corriente en un solenoide 940
Campo magnético B debido a una corriente en un conductor rectilíneo 943
Definición del amperio 946
29.3 Ley de Gauss para el magnetismo 948
29.4 Ley de Ampère 949
Limitaciones de la ley de Ampère 951
29.5 El magnetismo en la materia 952
Imantación y susceptibilidad magnética 952
Explorando la naturaleza: La fuerza magnética y la conservación del momento lineal 954
Momentos magnéticos atómicos 955
Paramagnetismo 958
Ferromagnetismo 959
Diamagnetismo 963
Resumen 964
Guía de resolución de problemas 967
Problemas 968

Capítulo 30: Inducción magnética 979

30.1 Flujo magnético 980
30.2 Fem inducida y ley de Faraday 981
30.3 Ley de Lenz 984
30.4 Fem de movimiento 987
30.5 Corrientes de Foucault o turbillonarias 989
30.6 Inductancia 990
Autoinducción 990
Inductancia mutua 992
30.7 Energía magnética 992
30.8 Circuitos *RL* 994
30.9 Propiedades magnéticas de los superconductores 998
Efecto Meissner 998
Cuantización del flujo 999
Resumen 999
Guía para la resolución de problemas 1000
Problemas 1001

Capítulo 31: Circuitos de corriente alterna 1009

31.1 Generadores de corriente alterna 1009
31.2 Corriente alterna en una resistencia 1011
Valores eficaces 1012
31.3 Corriente alterna en inductores y condensadores 1014
Inductores en circuitos de ca 1014
Condensadores en circuitos de ca 1016
31.4 Fasores 1018
31.5 Circuitos *LC* y *LCR* sin generador 1019
31.6 Circuitos *LCR* con un generador 1022
Circuito *LCR* en serie 1022
Resonancia 1024
Circuito *LCR* en paralelo 1029
31.7 Transformador 1029
Explorando la naturaleza: El uso de los números complejos para resolver circuitos LCR 1030
Explorando la naturaleza: Motores eléctricos 1034
Resumen 1038
Guía de resolución de problemas 1040
Problemas 1041

Capítulo 32: Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 1051

32.1 Corriente de desplazamiento de Maxwell 1052
32.2 Ecuaciones de Maxwell 1054
32.3 Ondas electromagnéticas 1055
El espectro electromagnético 1055
Producción de ondas electromagnéticas 1057
Radiación del dipolo eléctrico 1057
Energía y cantidad de movimiento en una onda electromagnética 1059
32.4 La ecuación de onda para las ondas electromagnéticas 1062
Deducción de la ecuación de onda 1063
Explorando la naturaleza: ***James Clerk Maxwell*** *1064*
Resumen 1068
Guía para la resolución de problemas 1069
Problemas 1070

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Parte 5: Luz 1075

Capítulo 33: Propiedades de la luz 1077
33.1 Dualidad onda-partícula 1077
33.2 Espectros luminosos 1078
33.3 Fuentes luminosas 1079
Absorción, dispersión y emisión estimulada 1080
Láseres 1082
33.4 La velocidad de la luz 1083
33.5 Propagación de la luz 1087
Principio de Huygens 1087
Principio de Fermat 1088
33.6 Reflexión y refracción 1088
Mecanismos físicos de la reflexión y la refracción 1090
Reflexión especular y difusa 1090
Intensidad relativa de la luz reflejada y transmitida 1091
Reflexión interna total 1091
Espejismo 1093
Dispersión 1094
Explorando la naturaleza: Más allá del arco Iris 1096
33.7 Polarización 1099
Polarización por absorción 1099
Polarización por reflexión 1101
Polarización por dispersión (o "scattering") 1102
Polarización por birrefringencia 1102
33.8 Deducción de las leyes de reflexión y refracción 1104
Principio de Huygens 1105
Principio de Fermat 1105
Resumen 1107
Guía para la resolución de problemas 1108
Problemas 1109

Capítulo 34: Imágenes ópticas 1115
34.1 Espejos 1115
Espejos planos 1115
Espejos esféricos 1117
Diagramas de rayos para los espejos 1119
34.2 Lentes 1122
Imágenes formadas por refracción 1122
Lentes delgadas 1125
Diagramas de rayos para las lentes 1129
Lentes múltiples 1130
34.3 Aberraciones 1133
34.4 Instrumentos ópticos 1133
El ojo 1133
La lupa (o microscopio simple) 1136
Microscopio compuesto 1138
Telescopio 1139
Resumen 1142
Guía de resolución de problemas 1144
Problemas 1144

Capítulo 35: Interferencia y difracción 1153
35.1 Diferencia de fase y coherencia 1153
35.2 Interferencia en películas delgadas 1154
35.3 Diagrama de interferencia de dos rendijas 1157
Cálculo de la intensidad 1158
35.4 Diagrama de difracción de una sola rendija 1159
Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas 1161
35.5 Suma de ondas armónicas mediante fasores 1162
Diagrama de interferencia de tres o más fuentes igualmente espaciadas 1163
Cálculo del diagrama de difracción producido por una sola rendija 1165
Cálculo del diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas 1167
35.6 Difracción de Fraunhofer y de Fresnel 1168
35.7 Difracción y resolución 1169
35.8 Redes de difracción 1171op
Hologramas 1173
Resumen 1174
Guía para la resolución de problemas 1175
Problemas 1176

Parte 6: Física moderna: mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia 1183

Capítulo 36: Aplicaciones de la ecuación de Schrödinger 1185
36.1 Ecuación de Schrödinger 1185
36.2 Una partícula en un pozo rectangular finito 1188
36.3 Oscilador armónico 1190
Funciones de onda y niveles energéticos 1190
36.4 Reflexión y transmisión de las ondas electrónicas: penetración de barrera 1192
Potencial escalón 1192
Penetración de barrera 1194
Explorando la naturaleza: El microscopio de barrido por efecto túnel 1196
36.5 La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones 1200

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

36.6 La ecuación de Schrödinger para dos partículas idénticas 1203
Resumen 1205
Guía de resolución de problemas 1206
Problemas 1206

Capítulo 37: Átomos 1209
37.1 El átomo nuclear 1210
Espectros atómicos 1210
37.2 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno 1211
La energía en una órbita circular 1211
Postulados de Bohr 1212
Niveles energéticos 1214
37.3 Teoría cuántica atómica 1215
La ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas 1215
Números cuánticos en coordenadas esféricas 1216
37.4 Teoría cuántica del átomo de hidrógeno 1217
Niveles energéticos 1218
Funciones de onda y densidades de probabilidad 1218
El primer estado excitado 1220
37.5 Efecto espín–órbita y estructura fina 1222
37.6 El sistema periódico 1223
Helio ($Z = 2$) 1224
Litio ($Z = 3$) 1225
Berilio ($Z = 4$) 1226
Del boro al neón ($Z = 5$ a $Z = 10$) 1226
Del sodio al argón ($Z = 11$ a $Z = 18$) 1227
Elementos con $Z > 18$ 1227
37.7 Espectros ópticos y espectros de rayos X 1230
Espectros ópticos 1230
Espectros de rayos X 1231
Resumen 1233
Guía de resolución de problemas 1235
Problemas 1236

Capítulo 38: Moléculas y sólidos 1241
38.1 Enlace molecular 1241
Enlace iónico 1242
Enlace covalente 1243
Otros tipos de enlace 1246
38.2 Moléculas poliatómicas 1247
38.3 Niveles energéticos y espectros de moléculas diatómicas 1249
Niveles energéticos de rotación 1249
Niveles energéticos de vibración 1252
Espectros de emisión 1253
Espectros de absorción 1254
38.4 La estructura de los sólidos 1256
38.5 Semiconductores 1260
38.6 Uniones y dispositivos semiconductores 1262
Diodos 1263
Transistores 1265
Explorando la naturaleza: Circuitos integrados 1266
Explorando la naturaleza: Dispositivos de carga acoplada 1268
Resumen 1271
Guía de resolución de problemas 1272
Problemas 1273

Capítulo 39: Relatividad 1277
39.1 Relatividad newtoniana 1277
El éter y la velocidad de la luz 1278
39.2 Postulados de Einstein 1278
39.3 La transformación de Lorentz 1280
Dilatación del tiempo 1281
Contratación de longitudes 1284
Efecto Doppler relativista 1285
39.4 Sincronización de relojes y simultaneidad 1287
Explorando la naturaleza: La paradoja de los gemelos 1290
39.5 Transformación de velocidades 1292
39.6 Cantidad de movimiento relativista 1295
Ilustración de la conservación de la cantidad de movimiento relativista 1296
39.7 Energía relativista 1296
Masa en reposo y energía 1299
Explorando la naturaleza: Relatividad general 1302
Resumen 1306
Guía para la resolución de problemas 1307
Problemas 1308

Capítulo 40: Física nuclear 1315
40.1 Propiedades de los núcleos 1315
Tamaño y forma 1316
Números N y Z 1316
Masa y energía de enlace 1317
40.2 Radiactividad 1319
Desintegración beta 1321
Desintegración gamma 1323
Desintegración alfa 1323
40.3 Reacciones nucleares 1324
Reacciones con neutrones 1326
40.4 Fisión y fusión 1327
Fisión 1327
Reactores de fisión nuclear 1329
Fusión 1332
Resumen 1335
Guía de resolución de problemas 1336
Problemas 1337

Capítulo 41: Las partículas elementales y el origen del universo 1343
41.1 Hadrones y leptones 1344
41.2 Espín y antipartículas 1345

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

41.3 Leyes de conservación 1349
41.4 Quarks 1352
Confinamiento de quarks 1354
41.5 Partículas de campo 1354
41.6 Teoría electrodébil 1355
41.7 El modelo estándar 1355
Teorías de la gran unificación 1357
41.8 Evolución del universo 1357
La radiación de fondo 2,7 K 1358
El big bang 1358
Resumen 1359
Guía de resolución de problemas 1360
Problemas 1361

Apéndice A: **Unidades SI y factores de conversión A-1363**
Apéndice B: **Datos númericos A-1365**
Apéndice C: **Tabla periódica de los elementos A-1367**

Origen de las ilustraciones O-1369
Respuestas de problemas R-1373
Índice alfabético I-1403

www.elsolucionario.net

PARTE 4

www.elsolucionario.net

Un pequeño imán permanente de forma cúbica levita sobre un disco de material superconductor de óxido de cobre-bario-ytrio, refrigerado a 77 K. El campo magnético del cubo origina corrientes eléctricas que circulan en el disco superconductor de tal modo que el campo magnético resultante en éste es cero. Estas corrientes producen un campo magnético que repele el cubo.

Electricidad y magnetismo

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264SYD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA
www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 22

Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga

Producción de pares. Un electrón de carga −e y un positrón de carga +e se crean por la interacción de radiación electromagnética con la materia. Las trayectorias de las partículas cargadas opuestamente, hechas visibles en una cámara de burbujas, se desvían en direcciones contrarias por medio de un campo magnético.

www.elsolucionario.net

Nuestra vida diaria depende extraordinariamente de la electricidad, mientras que hace un siglo sólo disponíamos de alguna lámpara eléctrica. Sin embargo el estudio de la electricidad tiene una larga historia. Las primeras observaciones de la atracción eléctrica fueron realizadas por los antiguos griegos. Estos observaron que al frotar el ámbar, éste atraía pequeños objetos como pajitas o plumas. Ciertamente, la palabra "eléctrico" procede del vocablo griego asignado al ámbar, *elektron*.

En este capítulo comenzaremos el estudio de la electricidad con la **electrostática**, que trata de las cargas eléctricas en reposo. Después de introducir el concepto de carga eléctrica estudiaremos brevemente el concepto de conductores y aislantes y la forma en que un conductor puede adquirir una carga. A continuación estudiaremos la ley de Coulomb, que describe la fuerza ejercida por una carga eléctrica sobre otra. Posteriormente introduciremos el campo eléctrico y veremos cómo puede describirse mediante las líneas de campo, las cuales indican la magnitud y dirección del campo. Por último, abordaremos el comportamiento de las cargas puntuales y los dipolos en campos eléctricos.

Carga eléctrica 22.1

Consideremos una barra de plástico que se frota con un trozo de piel y se suspende de una cuerda que puede girar libremente. Si aproximamos a esta barra una segunda barra de plástico, frotada también con una piel, observaremos que las barras se repelen entre sí (figura 22.1). El mismo resultado se obtiene si repetimos el mismo experimento con dos barras de vidrio que han sido frotadas con seda. Sin embargo, si utilizamos una barra de plástico frotada con piel y una varilla de vidrio frotada con seda, observaremos que las barras se atraen entre sí.

Al frotar una barra, ésta se carga eléctricamente. Repitiendo el experimento con diversos tipos de materiales encontramos que todos los objetos cargados pueden clasifi-

 www.elsolucionario.net

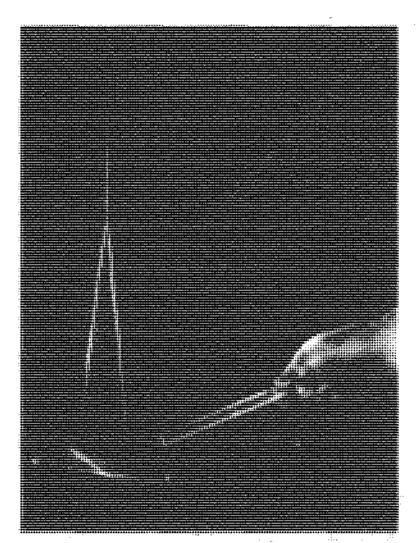


Figura 22.1 Dos barras de plástico que han sido frotadas con piel se repelen mutuamente.

carse en dos grupos: aquellos que se cargan como la barra de plástico frotada con un trozo de piel y los que se cargan como la varilla de vidrio frotada con un paño de seda. Benjamín Franklin, propuso un modelo de electricidad para explicar este fenómeno. Sugirió que todo objeto posee una cantidad "normal" de electricidad y cuando dos objetos se frotan entre sí, parte de la electricidad se transfiere de un cuerpo al otro: así pues, uno tiene un exceso de carga y el otro una deficiencia de carga de valor igual. Franklin describió las cargas resultantes con los signos más y menos. Al tipo de carga adquirida por una barra de vidrio frotada con un paño de seda le llamó positiva, lo cual significaba que el paño de seda adquiría una carga negativa de igual magnitud. Según esta elección de Franklin, el plástico frotado con una piel adquiere una carga negativa y la piel adquiere una carga positiva de igual magnitud. Como vimos en nuestro experimento, dos objetos que portan el mismo tipo de carga se repelen entre sí, mientras que si portan cargas opuestas se atraen mutuamente (figura 22.2).

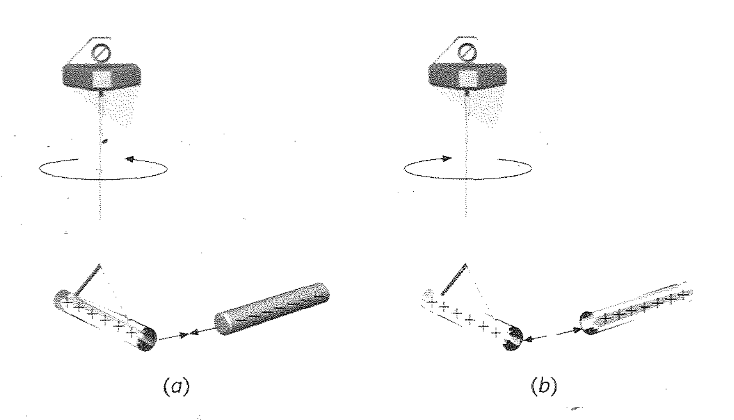


Figura 22.2 (*a*) Los objetos portadores de cargas de signo opuesto se atraen entre sí. (*b*) Los objetos portadores de cargas de igual signo se repelen entre sí.

Hoy sabemos que cuando el vidrio se frota con un paño de seda, se transfieren electrones del vidrio a la seda y, por tanto, ésta adquiere un número en exceso de electrones y el vidrio queda con un déficit de estas partículas. Según la clasificación de Franklin, que todavía se utiliza, la seda se carga negativamente, y se dice que los electrones transportan una carga negativa.

Cuantización de la carga

La materia está formada por átomos eléctricamente neutros. Cada átomo posee un pequeño, pero masivo, núcleo que contiene protones y neutrones. Los protones están cargados positivamente, mientras que los neutrones no poseen carga. El número de protones en el núcleo es el número atómico Z del elemento. Rodeando al núcleo existe un número igual de electrones negativamente cargados, de modo que el átomo posee una carga neta cero. La masa del electrón es aproximadamente 2000 veces menor que la del protón. Sin embargo, sus cargas son exactamente iguales pero opuestas en signo. La carga del protón es e y la del electrón $-e$, siendo e la **unidad fundamental de carga**. La carga de un electrón o protón es una propiedad intrínseca de la partícula; del mismo modo, la masa y el espín de estas partículas son también propiedades intrínsecas de las mismas.

Todas las cargas se presentan en cantidades enteras de la unidad fundamental de carga e. Es decir, *la carga está cuantizada*. Toda carga Q presente en la naturaleza puede escribirse en la forma $Q = \pm Ne$, siendo N un número entero.[1] Sin embargo, en sistemas macroscópicos, N es usualmente un número muy grande y la carga parece ser continua, del mismo modo que el aire parece ser un medio continuo y realmente consta de muchas moléculas discretas. Por ejemplo, al cargar una barra de plástico frotándola con un trozo de piel se transfieren del orden de 10^{10} electrones a la barra.

[1] En el modelo estándar de las partículas elementales se supone que los protones, neutrones y otras partículas están formadas por entes llamados quarks que trasportan cargas de $\pm\frac{1}{3}e$ o $\pm\frac{2}{3}e$. Aparentemente los quarks no pueden observarse individualmente, sino sólo en combinaciones que dan lugar a una carga neta de $\pm Ne$ o 0.

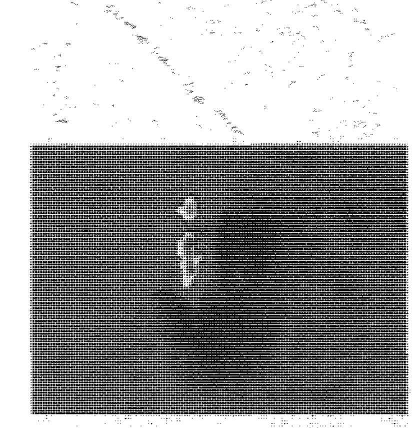
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

Cuando dos objetos se frotan entre sí, uno de ellos queda con un número en exceso de electrones y se carga, por tanto, negativamente y el otro queda con un déficit de electrones y su carga es positiva. La carga neta de los dos objetos considerada globalmente no cambia. Es decir, *la carga se conserva*. La **ley de conservación de la carga** es una ley fundamental de la naturaleza. En ciertas interacciones entre partículas elementales puede ocurrir que los electrones se creen o aniquilen. Sin embargo, en todos estos procesos se producen o destruyen cantidades iguales de cargas negativas y positivas, de manera que la carga del universo no varía.

Conservación de la carga



Carga por contacto. Una muestra de plástico de anchura 0,02 mm fue cargada en contacto con una pieza de níquel. Aunque el plástico posee una carga neta positiva, se aprecian regiones de carga negativa (oscuras) y regiones de carga positiva (amarillo). La fotografía se tomó barriendo una aguja cargada, de anchura 10^{-7} m, sobre la muestra y midiendo la fuerza electrostática sobre la aguja.

La unidad SI de carga es el culombio, el cual se define en función de la unidad de corriente o intensidad eléctrica, el *amperio*.[1] El **culombio** (C) es la cantidad de carga que fluye a través de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente en el mismo es de un amperio. La unidad fundamental de carga eléctrica *e* está relacionada con el culombio por

$$e = 1{,}602\,177 \times 10^{-19}\ \text{C} \qquad (22.1)$$

Unidad fundamental de carga

Ejercicio Una carga de magnitud 50 nC (1 nC = 10^{-9} C) puede producirse en el laboratorio simplemente frotando entre sí dos objetos. ¿Cuántos electrones deben ser transferidos para producir esta carga? (*Respuesta:* $N = Q/e = (50 \times 10^{-9}\ \text{C})/(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 3{,}12 \times 10^{11}$. La cuantización de la carga no puede detectarse en esta escala; incluso sumando o restando un millón de electrones se produciría un efecto despreciable.)

EJEMPLO 22.1

Una moneda de cobre (Z = 29) tiene una masa de 3 g. ¿Cuál es la carga total de todos los electrones contenidos en la moneda?

Esquema del problema Los electrones poseen una carga total dada por el número de electrones contenidos en la moneda, N_e, multiplicado por la carga de uno de ellos, $-e$. El número de electrones es 29 veces el número de átomos de cobre, N. Para determinar N hay que tener en cuenta que un mol de cualquier sustancia tiene un número de moléculas igual al número de Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) y el número de gramos de un mol es la masa molecular M, que para el cobre es 63,5. Como la molécula de cobre es monoatómica, determinaremos el número de átomos por gramo dividiendo el N_A (átomos por mol) por el peso molecular M (gramos por mol).

1. La carga total es el número de electrones multiplicado por la carga electrónica: $Q = N_e(-e)$
2. El número de electrones es Z multiplicado por el número de átomos de cobre, N_a: $N_e = ZN_a$
3. Calcular el número de átomos de cobre en 3 g de este metal: $N_a = (3\ \text{g})\dfrac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{63{,}5\ \text{g/mol}} = 2{,}84 \times 10^{22}\ \text{átomos}$
4. Calcular el número de electrones, N_e: $N_e = ZN_a = (29\ \text{electrones/átomo})(2{,}84 \times 10^{22}\ \text{átomos}) = 8{,}24 \times 10^{23}\ \text{electrones}$
5. Utilizar este valor de N_e para determinar la carga total $Q = N_e(-e) = (8{,}24 \times 10^{23}\ \text{electrones})(-1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C/electrón}) = -1{,}32 \times 10^{5}\ \text{C}$

[1] El amperio (A) es la unidad de corriente utilizada en los circuitos eléctricos habituales. Será definido posteriormente.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Ejercicio Si cada habitante de los EE.UU. (aproximadamente 250 millones de habitantes) recibiera un millón de electrones, ¿qué porcentaje del número de electrones contenido en la moneda del ejemplo 22.1 representaría? (*Respuesta:* Aproximadamente 30×10^{-9} por ciento.)

22.2 ■ Conductores y aislantes

En muchos materiales, tales como el cobre y otros metales, parte de los electrones pueden moverse libremente en el seno del material. Estos materiales se denominan **conductores**. En otros materiales, tales como la madera o vidrio, todos los electrones están ligados a los átomos próximos y ninguno puede moverse libremente. Estos materiales se denominan **aislantes**.

En un simple átomo de cobre existen 29 electrones ligados al núcleo por atracción electrostática entre los electrones cargados negativamente y los núcleos cargados positivamente. Los electrones más externos están ligados más débilmente que los más internos a causa de su mayor distancia al núcleo y a la repulsión de los electrones más internos. Cuando un gran número de átomos de cobre se combinan en una pieza de cobre metálico, el enlace de los electrones de cada átomo individual se modifica por interacciones con los átomos próximos. Uno o más de los electrones externos de cada átomo queda en libertad para moverse por todo el metal, del mismo modo que una molécula de gas se mueve en el interior de una caja. El número de electrones libres depende del metal particular, pero típicamente oscila alrededor de un electrón por átomo. Cuando a un átomo se le quita o se le añade un electrón, con la aparición de una carga neta, se convierte en un **ion**. En el cobre metálico, los iones de cobre se distribuyen regularmente formando una *red*. Normalmente, un conductor es eléctricamente neutro porque existe un ion reticular que transporta una carga positiva $+e$ por cada electrón libre portador de una carga negativa $-e$. Un conductor puede tomar una carga neta por adición o extracción de electrones libres.

■ Electroscopio

La figura 22.3 muestra un **electroscopio**, que es un dispositivo para la detección de carga eléctrica. Dos láminas de oro se adhieren a un vástago conductor que posee una esfera en su parte superior y quedan aisladas de la estructura del aparato. Cuando están descargadas, las hojas cuelgan juntas verticalmente. Cuando se toca la esfera con una barra de plástico cargada negativamente, parte de esta carga se transfiere a la esfera y alcanza las láminas de oro que se separan en virtud de la repulsión eléctrica de sus cargas negativas. Tocando la bola con una barra de vidrio positivamente cargada, también las láminas de oro se separan. En este caso, la barra de vidrio cargada positivamente atrae los electrones de la esfera metálica, dejando las hojas de oro cargadas positivamente.

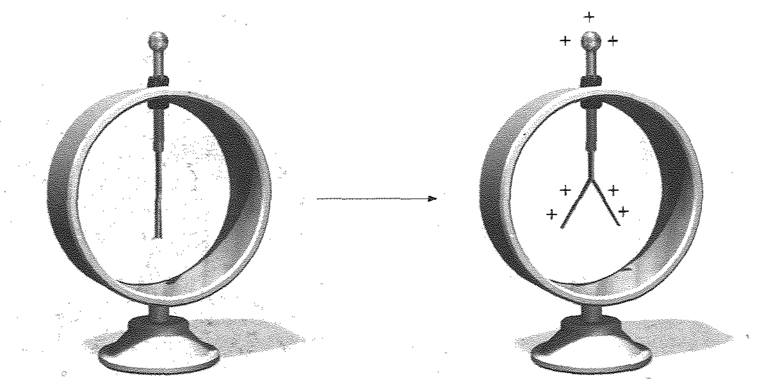


Figura 22.3 Electroscopio. Las dos hojas de oro se conectan a una barra metálica terminada en la parte superior por una esfera de metal. Cuando una carga negativa se deposita sobre la bola metálica, es conducida a las hojas y éstas se repelen entre sí.

www.elsolucionario.net

Carga por inducción

La conservación de la carga puede ilustrase mediante un método simple de cargar un conductor llamado **carga por inducción**, como se muestra en la figura 22.4. Dos esferas metálicas sin carga están en contacto. Al acercar a una de las esferas una barra cargada, los electrones fluyen de una esfera a la otra, acercándose a la barra si ésta se encuentra positivamente cargada o alejándose si su carga es negativa. Si la barra está cargada positivamente (figura 22.4*a*) atrae a los electrones cargados negativamente y la esfera más próxima a la barra adquiere electrones de la otra. La esfera más próxima adquiere carga negativa y la más alejada queda con una carga neta igual, pero positiva. Cuando en un conductor se separan cargas iguales y opuestas se dice que está **polarizado**. Si las esferas se separan antes de retirar la barra, quedarán con cantidades iguales de cargas opuestas (figura 22.4*b*). Un resultado semejante se obtiene con una barra cargada negativamente: los electrones pasarían de la esfera próxima a la más alejada.

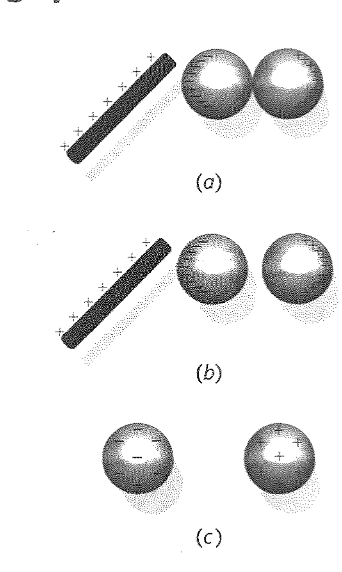


Figura 22.4 Carga por inducción. (*a*) Los dos conductores esféricos en contacto adquieren cargas opuestas, pues la barra cargada positivamente atrae los electrones hacia la esfera de la izquierda dejando la esfera de la derecha con cargas positivas. (*b*) Si las esferas se separan sin mover la barra de su posición, las esferas retienen sus cargas iguales y opuestas. (*c*) Si la barra se retira y las esferas se separan, éstas quedan uniformemente cargadas con cargas iguales y opuestas.

Ejercicio Dos esferas conductoras idénticas, una de carga inicial Q y otra inicialmente descargada, se ponen en contacto. (a) ¿Cuál es la nueva carga sobre cada esfera? (b) Mientras las esferas están en contacto, una barra cargada negativamente se aproxima a una de ellas de tal modo que ésta pasa a tener una carga $2Q$. ¿Cuál es la carga sobre la otra esfera? (*Respuesta:* (a) $\frac{1}{2}Q$. Como las esferas son idénticas deben compartir la carga total por igual. (b) $-Q$, ya que es necesario satisfacer la conservación de la carga.)

Ejercicio Dos esferas idénticas se cargan por inducción y después se separan; la esfera 1 tiene la carga Q y la esfera 2 la carga $-Q$. Una tercera esfera idéntica está inicialmente descargada. Si la esfera 3 toca a la esfera 2 y luego se separa, ¿cuál es la carga final sobre cada una de las tres esferas? (*Respuesta:* $Q_1 = Q/2$, $Q_2 = -Q/4$, $Q_3 = -Q/4$.)

La propia Tierra constituye un conductor que para muchos propósitos puede considerarse como infinitamente grande. Cuando un conductor se pone en contacto con el suelo se dice que está **conectado a tierra**. Esto se representa esquemáticamente mediante un cable de conducción que termina en unas pequeñas líneas horizontales, como indica la figura 22.5*b*. La figura 22.5 muestra como puede inducirse una carga en un conductor simple transfiriendo electrones desde el suelo y a continuación interrumpiendo la conexión a tierra.

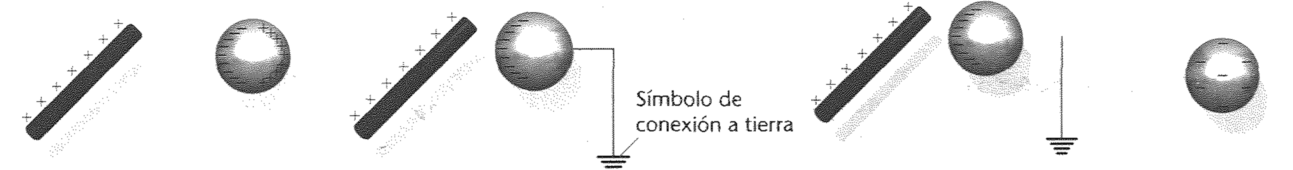
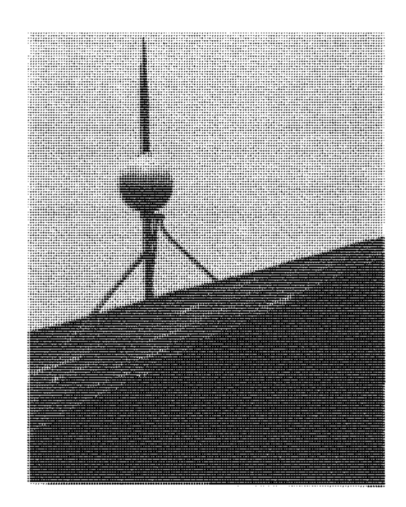


Figura 22.5 Inducción por conexión a tierra. (*a*) La carga libre sobre una esfera conductora se polariza a causa de la barra cargada positivamente, de tal modo que la esfera tiene una carga negativa en el lado más próximo a la barra y una carga positiva en el otro extremo. (*b*) Si la esfera se conecta a un conductor muy grande, tal como la tierra, por medio de un alambre, los electrones del suelo neutralizan la carga positiva en el lado derecho y la esfera queda negativamente cargada. (*c*) La carga negativa permanece si el cable se desconecta antes de separar la barra. (*d*) Al quitar la barra, la esfera queda cargada negativa y uniformemente.



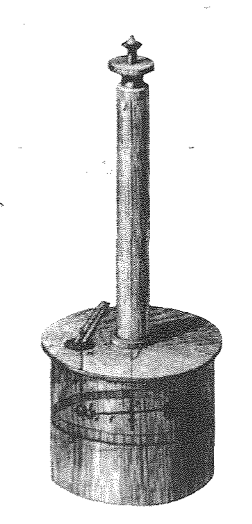


(*Izquierda*) El pararrayos de este edificio está conectado a tierra para conducir los electrones desde el suelo a las nubes cargadas positivamente a fin de neutralizarlas. (*Derecha*) Estas damas utilizan sombreros con cadenas metálicas que arrastran por el suelo, supuestamente para protegerse contra los rayos.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

22.3 ■ Ley de Coulomb



Balanza de torsión de Coulomb.

La fuerza ejercida por una carga sobre otra fue estudiada por Charles Coulomb (1736–1806) mediante una balanza de torsión de su propia invención.[1] En el experimento de Coulomb las esferas cargadas eran mucho menores que la distancia entre ellas, de modo que las cargas podían considerarse como puntuales. Coulomb utilizó el fenómeno de inducción para producir esferas igualmente cargadas y poder variar la carga depositada sobre las esferas. Por ejemplo, comenzando con una carga q_0 sobre cada esfera, podía reducir la carga a $\frac{1}{2}q_0$ conectando a tierra una de las esferas para descargarla y después poniendo las dos esferas en contacto. Los resultados de los experimentos de Coulomb y otros científicos sobre las fuerzas ejercidas por una carga puntual sobre otra se resumen en la **ley de Coulomb**:

La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las mismas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

Ley de Coulomb

La *magnitud* de la fuerza eléctrica ejercida por una carga q_1 sobre otra q_2 a la distancia r viene dada por

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \qquad \textbf{(22.2)}$$

en donde k es una constante determinada experimentalmente llamada **constante de Coulomb**, que tiene el valor

$$k = 8{,}99 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \qquad \textbf{(22.3)}$$

Si q_1 se encuentra en la posición $\mathbf{r}_1$ y q_2 en $\mathbf{r}_2$ (figura 22.6), la fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$ ejercida por q_1 sobre q_2 es



$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{k q_1 q_2}{r_{1,2}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{1,2} \qquad \textbf{(22.4)}$$

Ley de Coulomb para la fuerza ejercida por q_1 sobre q_2

Figura 22.6 Carga q_1 en la posición $\mathbf{r}_1$ y carga q_2 en $\mathbf{r}_2$, ambas respecto al origen O. La fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 está en la dirección y sentido del vector $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ si ambas cargas tienen el mismo signo, y en sentido opuesto si sus signos son contrarios.

en donde $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es el vector que apunta de q_1 a q_2 y $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}$ es un vector unitario que apunta de q_1 a q_2.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza $\mathbf{F}_{2,1}$ ejercida por q_2 sobre q_1 es de sentido contrario a la fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$. Obsérvese la semejanza entre la ley de Coulomb y la ley de Newton de la gravedad (ecuación 11.3). Ambas son leyes que dependen de la inversa del cuadrado de la distancia. Sin embargo, la fuerza gravitatoria entre dos partículas es proporcional a las masas de las partículas y es siempre atractiva, mientras que la fuerza eléctrica es proporcional a las cargas de las partículas y es repulsiva si ambas cargas tienen el mismo signo y atractiva si tienen signos contrarios.

[1] El aparato experimental de Coulomb era esencialmente el mismo que se describió en el experimento de Cavendish (capítulo 11) con las masas reemplazadas por pequeñas esferas cargadas. La atracción gravitatoria de las esferas es completamente despreciable comparada con la atracción o repulsión eléctrica producida por las cargas depositadas en las esferas por frotamiento.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 22.2

En el átomo de hidrógeno, el electrón está separado del protón por una distancia de aproximadamente $5{,}3 \times 10^{-11}$ m. ¿Cuál es la fuerza electrostática ejercida por el protón sobre el electrón?

Sustituir los valores dados en la ley de Coulomb:

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5{,}3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 8{,}19 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

Observaciones Comparada con las interacciones macroscópicas, esta fuerza es muy pequeña. Sin embargo, como la masa del electrón es tan pequeña, aproximadamente 10^{-30} kg, esta fuerza produce una aceleración enorme, $F/m = 8 \times 10^{22}\ \mathrm{m/s^2}$.

Ejercicio Dos cargas puntuales de 0,05 μC cada una están separadas por una distancia de 10 cm. Determinar la magnitud de la fuerza ejercida por una carga sobre la otra. (*Respuesta*: $2{,}25 \times 10^{-3}$ N.)

Puesto que la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria entre dos partículas varían en razón inversa con el cuadrado de su separación, la relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia que separa las partículas. Podemos, pues, comparar las intensidades relativas de estas fuerzas para partículas elementales, tales como el electrón y el protón.

EJEMPLO 22.3

Calcular la relación que existe entre las fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria ejercida entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno.

Esquema del problema Utilizaremos la ley de Coulomb con $q_1 = e$ y $q_2 = -e$ para determinar la fuerza eléctrica y la ley de gravitación de Newton con la masa del protón, $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y la masa del electrón, $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

1. Expresar las magnitudes de la fuerza eléctrica F_e y la fuerza gravitatoria F_g en función de las cargas, masas, distancia de separación r y las constantes eléctrica y de gravitación:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}, \quad F_g = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

2. Determinar la relación de ambas fuerzas. Obsérvese que la distancia de separación r se anula:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e}$$

3. Sustituir por valores numéricos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})}$$
$$= 2{,}27 \times 10^{39}$$

Observación Este resultado demuestra por qué los efectos de la gravedad no se consideran al tratar las interacciones atómicas o moleculares.

Aunque la fuerza gravitatoria es increíblemente pequeña comparada con la fuerza eléctrica y esencialmente no desempeña papel alguno a nivel atómico, la gravedad es la fuerza dominante entre sistemas grandes como planetas y estrellas que poseen números casi iguales de cargas positivas y negativas y, por tanto, se neutralizan las fuerzas eléctricas atractivas y repulsivas. La fuerza neta entre objetos astronómicos es esencialmente la fuerza de atracción gravitatoria.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Fuerza ejercida por un sistema de cargas

En un sistema de cargas, cada una de ellas ejerce una fuerza dada por la ecuación 22.4 sobre las restantes. Así, la fuerza neta sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema. Esta es una consecuencia del principio de superposición de las fuerzas.

EJEMPLO 22.4 ¡Inténtelo!

Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x; $q_1 = 25$ nC está en el origen, $q_2 = -10$ nC está en $x = 2$ m, y $q_0 = 20$ nC está en $x = 3{,}5$ m (figura 22.7). Determinar la fuerza neta ejercida por q_1 y q_2 sobre q_0.

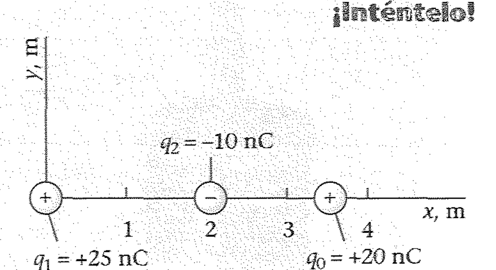


Figura 22.7

Esquema del problema La fuerza neta sobre q_0 es el vector suma de la fuerza $\mathbf{F}_{1,0}$ ejercida por q_1 y la fuerza $\mathbf{F}_{2,0}$ ejercida por q_2. Las fuerzas individuales se determinan mediante la ley de Coulomb. Obsérvese que $\hat{\mathbf{r}}_{1,0} = \hat{\mathbf{r}}_{2,0} = \mathbf{i}$, pues q_0 se encuentra a la derecha tanto de q_1 como de q_2.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Determinar la fuerza $\mathbf{F}_{1,0}$ debida a q_1.	$\mathbf{F}_{1,0} = (0{,}367\ \mu\text{N})\mathbf{i}$
2. Determinar la fuerza $\mathbf{F}_{2,0}$ debida a q_2.	$\mathbf{F}_{2,0} = (-0{,}799\ \mu\text{N})\mathbf{i}$
3. Sumar los resultados para obtener la fuerza neta.	$\mathbf{F}_{\text{neta}} = \mathbf{F}_{1,0} + \mathbf{F}_{2,0} = -(0{,}432\ \mu\text{N})\mathbf{i}$

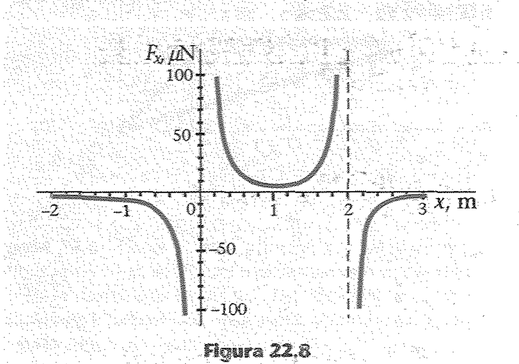


Figura 22.8

Observación La figura 22.8 muestra la fuerza F_x sobre q_0, como una función de su posición x. En las proximidades de cualquiera de las otras cargas, la fuerza sobre q_0 se debe esencialmente a la carga más próxima. Obsérvese que la fuerza está indefinida en la posición de las cargas q_1 en $x = 0$ y q_2 en $x = 2$.

Ejercicio Si q_0 se encuentra en $x = 1$ m, determinar (*a*) $\hat{\mathbf{r}}_{1,0}$, (*b*) $\hat{\mathbf{r}}_{2,0}$ y (c) la fuerza neta que actúa sobre q_0. (*Respuestas:* (a) $\mathbf{i}$, (b) $-\mathbf{i}$, (c) $(6{,}29\ \mu\text{N})\mathbf{i}$.)

Para que un sistema de cargas permanezca estacionario deben existir otras fuerzas no eléctricas actuando sobre las cargas, de modo que la fuerza resultante de todas las fuentes que actúan sobre cada carga sea cero. En el ejemplo anterior y en los siguientes supondremos la existencia de tales fuerzas, de modo que todas las cargas permanecen estacionarias.

EJEMPLO 22.5

La carga $q_1 = +25$ nC está en el origen, la carga $q_2 = -15$ nC está sobre el eje x en $x = 2$ m, y la carga $q_0 = +20$ nC está en el punto $x = 2$ m, $y = 2$ m como se indica en la figura 22.9. Determinar la fuerza resultante ΣF sobre q_0.

Esquema del problema La fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por cada una de las cargas sobre q_0. Calcularemos cada una de

www.elsolucionario.net

las fuerzas a partir de la ley de Coulomb y la escribiremos en función de sus componentes rectangulares. La figura 22.9*a* muestra la fuerza resultante sobre la carga q_0 como la suma vectorial de las fuerzas $\mathbf{F}_{1,0}$ debida a q_1 y $\mathbf{F}_{2,0}$ debida a q_2. La figura 22.9*b* muestra la fuerza neta de la figura 22.9*a* y sus componentes *x* e *y*.

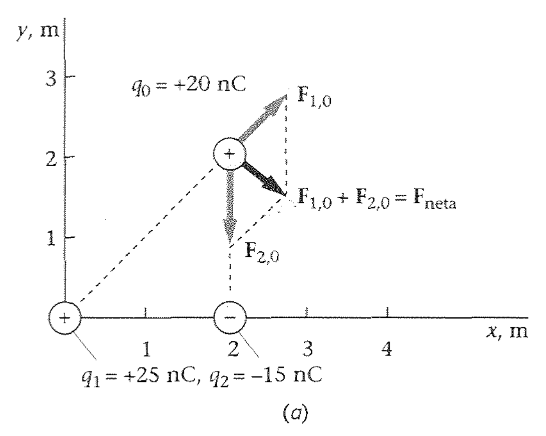


Figura 22.9

1. La fuerza resultante $\Sigma\mathbf{F}$ sobre q_0 es la suma de las fuerzas individuales:

$$\Sigma\,\mathbf{F} = \mathbf{F}_{1,0} + \mathbf{F}_{2,0}$$
$$\Sigma\,F_x = F_{1,0x} + F_{2,0x}$$
$$\Sigma\,F_y = F_{1,0y} + F_{2,0y}$$

2. La fuerza $\mathbf{F}_{1,0}$ está dirigida a lo largo de la línea dirigida de q_1 a q_0. Utilizar $r_{1,0} = 2\sqrt{2}$ m para la distancia entre q_1 y q_0 y calcular la magnitud de $\mathbf{F}_{1,0}$:

$$F_{1,0} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2\sqrt{2}\ \mathrm{m})^2} = 5{,}62 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

3. Como $\mathbf{F}_{1,0}$ forma un ángulo de 45° con los ejes *x* e *y*, sus componentes *x* e *y* son iguales entre sí:

$$F_{1,0x} = F_{1,0y} = \frac{F_{1,0}}{\sqrt{2}} = \frac{5{,}62 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}}{\sqrt{2}} = 3{,}97 \times 10^{-7}$$

4. La fuerza $\mathbf{F}_{2,0}$ ejercida por q_2 sobre q_0 es atractiva y su dirección es *y* negativa, como se muestra en la figura 22.9*a*:

$$\mathbf{F}_{2,0} = \frac{kq_2q_0}{r_{2,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{2,0}$$
$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(-15 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2\ \mathrm{m})^2}\,\mathbf{j}$$
$$= (-6{,}74 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})\mathbf{j}$$

5. Calcular los componentes de la fuerza resultante:

$$\Sigma\,F_x = F_{1,0x} + F_{2,0x} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + 0 = 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$
$$\Sigma\,F_y = F_{1,0y} + F_{2,0y} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + (-6{,}74 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) = -2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

6. La magnitud de la fuerza resultante se determina a partir de sus componentes:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2 + (-2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2} = 4{,}84 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

7. La fuerza resultante apunta hacia la derecha y hacia abajo como se muestra en la figura 22.9*b* formando un ángulo θ con el eje *x* dado por

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2{,}77}{3{,}97} = -0{,}698$$
$$\theta = -34{,}9°$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

22.4 El campo eléctrico

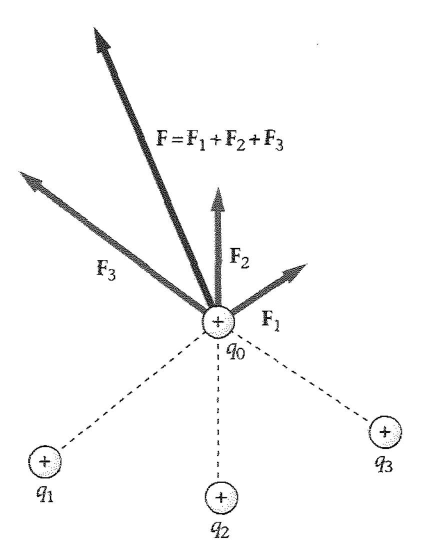


Figura 22.10 Una pequeña carga testigo q_0 en las proximidades de un sistema de cargas q_1, q_2 y q_3 experimenta una fuerza **F** proporcional a q_0. La relación $\mathbf{F}/q_0$ es el campo eléctrico **E** en la posición de la carga testigo.

La 0fuerza eléctrica ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de acción a distancia, semejante a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa sobre otra. La idea de acción a distancia presenta un problema conceptual difícil. ¿Cuál es el mecanismo según el cual una partícula puede ejercer una fuerza sobre otra a través del espacio vacío que existe entre las partículas? Supongamos que una partícula cargada situada en un punto determinado se mueve súbitamente. ¿Variaría instantáneamente la fuerza ejercida sobre las segunda partícula situada a la distancia r de la primera? Para evitar el problema de la acción a distancia se introduce el concepto de **campo eléctrico**. Una carga crea un campo eléctrico **E** en todo el espacio y este campo ejerce una fuerza sobre la otra carga. La fuerza es así ejercida *por el campo* en la posición de la segunda carga, más que por la propia primera carga que se encuentra a cierta distancia. El campo se propaga a través del espacio con la velocidad de la luz, c. Así, si una carga se mueve súbitamente, la fuerza que ejerce sobre otra carga a la distancia r no se modifica hasta que transcurre el tiempo r/c.

La figura 22.10 muestra una serie de cargas puntuales, q_1, q_2 y q_3, dispuestas arbitrariamente en el espacio. Estas cargas producen un campo eléctrico **E** en cualquier punto del espacio. Si situamos una pequeña **carga testigo** q_0 en algún punto próximo, ésta experimentará la acción de una fuerza debido a las otras cargas.[1] La fuerza resultante ejercida sobre q_0 es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre q_0 por cada una de las otras cargas del sistema. Como cada una de estas fuerzas es proporcional a q_0, la fuerza neta será proporcional a q_0. El campo eléctrico **E** en un punto se define por esta fuerza dividida por q_0[2]:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (q_0 \text{ pequeña}) \tag{22.5}$$

Definición —Campo eléctrico

La unidad SI del campo eléctrico es el newton por culombio (N/C). En la tabla 22.1 se relacionan las magnitudes de algunos de los campos eléctricos encontrados en la naturaleza.

Tabla 22.1 Algunos campos eléctricos en la naturaleza.

	E, N/C
En los cables domésticos	10^{-2}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^2
En la luz solar	10^3
Bajo una nube tormentosa	10^4
En la descarga de un relámpago	10^4
En un tubo de rayos X	10^6
En el electrón de un átomo de hidrógeno	6×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	6×10^{21}

El campo eléctrico es un vector que describe la condición en el espacio creada por el sistema de cargas puntuales. Desplazando la carga testigo q_0 de un punto a otro, podemos determinar **E** en todos los puntos del espacio (excepto el ocupado por la carga q). El campo eléctrico **E** es, por tanto, una función vectorial de la posición. La fuerza ejercida sobre una carga testigo q_0 en cualquier punto está relacionada con el campo eléctrico en dicho punto por

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{E} \tag{22.6}$$

Ejercicio Cuando se coloca una carga testigo de 5 nC en un punto determinado, sufre la acción de una fuerza de 2×10^{-4} N en la dirección de x. ¿Cuál es el campo eléctrico **E** en dicho punto? (*Respuesta*: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0 = [(2 \times 10^{-4}\ \text{N})\mathbf{i}]/(5 \times 10^{-9}\ \text{C}) = (4 \times 10^4\ \text{N/C})\mathbf{i}$.)

Ejercicio ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre un electrón situado en el punto donde el campo eléctrico $\mathbf{E} = (4 \times 10^4\ \text{N/C})\mathbf{i}$? (*Respuesta*: $(-6{,}4 \times 10^{-15}\ \text{N})\mathbf{i}$.)

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual q_i en la posición $\mathbf{r}_i$ puede calcularse a partir de la ley de Coulomb. Si situamos una pequeña carga testigo positiva q_0 en algún punto P a la distancia $r_{i,0}$ de la carga q_i, la fuerza que actúa sobre ella es

$$\mathbf{F}_{i,0} = \frac{kq_iq_0}{r_{i,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{i,0}$$

[1] La presencia de la carga q_0 cambiará generalmente la distribución original de las restantes cargas, particularmente si las cargas están depositadas sobre conductores. Sin embargo, podemos elegir q_0 suficientemente pequeña para que su efecto sobre la distribución de carga sea despreciable.

[2] Esta definición es semejante a la del campo gravitatorio terrestre, expresada en la sección 4.3 como la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre un cuerpo.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El campo eléctrico en el punto P debido a la carga q_i es, por tanto,

$$\mathbf{E}_i = \frac{kq_i}{r_{i,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{i,0} \tag{22.7}$$

Ley de Coulomb para el campo ***E*** *creado por una carga puntual*

en donde $\hat{\mathbf{r}}_{i,0}$ es un vector unitario que apunta desde la carga al **punto del campo** P. El campo eléctrico resultante debido a una distribución de cargas puntuales se determina sumando los campos originados por cada carga separadamente:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{i,0} \tag{22.8}$$

Campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales

EJEMPLO 22.6

Una carga positiva q_1 = +8 nC se encuentra en el origen y una segunda carga positiva q_2 = +12 nC está sobre el eje x a la distancia a = 4 m (figura 22.11). Determinar el campo eléctrico resultante (a) en el punto P_1 sobre el eje x en x = 7 m y (b) en el punto P_2 sobre el eje x en x = 3 m.

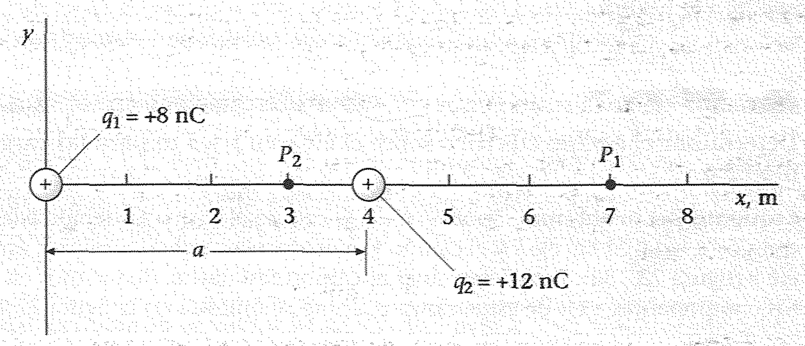


Figura 22.11

Esquema del problema Como el punto P_1 se encuentra a la derecha de ambas cargas, cada una de ellas produce un campo hacia la derecha de dicho punto. En el punto P_2, que se encuentra entre ambas cargas, la carga de 8 nC produce un campo hacia la derecha y la carga de 12 nC produce un campo hacia la izquierda. Calcularemos los campos mediante la ecuación

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{i,0}$$

En el punto P_1, ambos vectores unitarios apuntan a lo largo del eje x en la dirección positiva, de modo que $\hat{\mathbf{r}}_{1,0} = \hat{\mathbf{r}}_{2,0} = \mathbf{i}$. En el punto P_2, $\hat{\mathbf{r}}_{1,0} = \mathbf{i}$, pero el vector unitario correspondiente al campo creado por la carga de 12 nC apunta a lo largo de la dirección negativa, de modo que $\hat{\mathbf{r}}_{2,0} = -\mathbf{i}$.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) Calcular **E** en el punto P_1, utilizando $r_{1,0} = x = 7$ m y $r_{2,0} = (x - a) = 7$ m $- 4$ m $= 3$ m:

$$\mathbf{E} = \frac{kq_1}{r_{1,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{1,0} + \frac{kq_2}{r_{2,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{2,0} = \frac{kq_1}{x^2}\,\mathbf{i} + \frac{kq_2}{(x-a)^2}\,\mathbf{i}$$
$$= \frac{(8{,}99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(8\times10^{-9}\ \mathrm{C})}{(7\ \mathrm{m})^2}\,\mathbf{i} + \frac{(8{,}99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(12\times10^{-9}\ \mathrm{C})}{(3\ \mathrm{m})^2}\,\mathbf{i}$$
$$= (1{,}47\ \mathrm{N/C})\mathbf{i} + (12{,}0\ \mathrm{N/C})\mathbf{i} = (13{,}5\ \mathrm{N/C})\mathbf{i}$$

(b) Calcular **E** en el punto P_2, en donde $r_{1,0} = x = 3$ m y $r_{2,0} = a - x = 4$ m $- 3$ m $= 1$ m:

$$\mathbf{E} = \frac{kq_1}{r_{1,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{1,0} + \frac{kq_2}{r_{2,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{2,0} = \frac{kq_1}{x^2}\,\mathbf{i} + \frac{kq_2}{(a-x)^2}\,(-\mathbf{i})$$
$$= \frac{(8{,}99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(8\times10^{-9}\ \mathrm{C})}{(3\ \mathrm{m})^2}\,\mathbf{i} + \frac{(8{,}99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(12\times10^{-9}\ \mathrm{C})}{(1\ \mathrm{m})^2}\,(-\mathbf{i})$$
$$= (7{,}99\ \mathrm{N/C})\mathbf{i} - (108\ \mathrm{N/C})\mathbf{i} = (-100\ \mathrm{N/C})\mathbf{i}$$

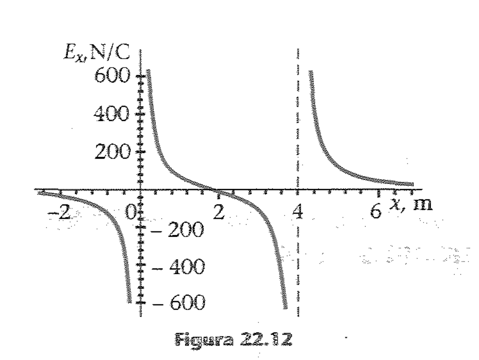


Figura 22.12

Observaciones El campo eléctrico en el punto P_2 está en la dirección x negativa, ya que la contribución al campo debida a la carga +12 nC, que está a 1 m de distancia, es superior a la debida a la carga +8 nC, que está a 3 m. A medida que nos desplazamos hacia la carga +8 nC en el origen, la magnitud del campo debida a esta carga crece y la debida a la carga +12 nC disminuye. Existe, por tanto, un punto entre las cargas en donde el campo eléctrico neto es cero. En este punto una carga testigo positiva no experimentaría una fuerza neta. La figura 22.12 muestra un gráfico de E_x en función de x para este sistema.

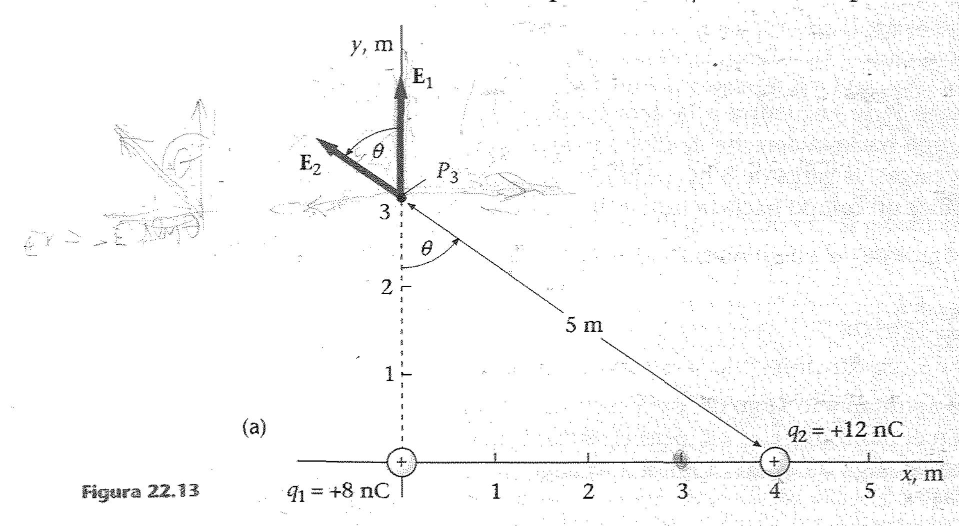
Ejercicio Determinar el punto del eje x donde el campo eléctrico es cero. (*Respuesta*: $x = 1{,}80$ m.)

EJEMPLO 22.7

¡Inténtelo!

Determinar el campo eléctrico sobre el eje y en $y = 3$ m para las cargas del ejemplo 22.6.

Esquema del problema Sobre el eje y, el campo eléctrico $\mathbf{E}_1$ debido a la carga q_1 está dirigido a lo largo del eje y y el campo $\mathbf{E}_2$ debido a la carga q_2 forma un ángulo θ con el eje y (figura 22.13*a*). Para determinar el campo resultante, deducimos en primer lugar los componentes x e y de estos campos, como se muestra en la figura 22.13*b*.



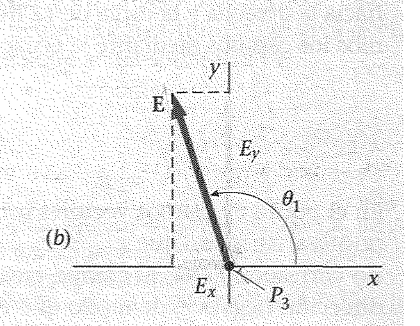


Figura 22.13

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular la magnitud del campo $\mathbf{E}_1$ debido a q_1. Determinar los componentes x e y de $\mathbf{E}_1$.	$E_1 = kq_1/y^2 = 7{,}99$ N/C, $E_{1x} = 0$, $E_{1y} = 7{,}99$ N/C
2. Calcular la magnitud del campo $\mathbf{E}_2$ debido a q_2.	$E_2 = 4{,}32$ N/C
3. Expresar los componentes x e y de $\mathbf{E}_2$ en función del ángulo θ.	$E_x = -E_2 \operatorname{sen}\theta$, $E_y = E_2 \cos\theta$
4. Calcular sen θ y cos θ.	$\operatorname{sen}\theta = 0{,}8$, $\cos\theta = 0{,}6$
5. Calcular E_{2x} y E_{2y}.	$E_{2x} = -3{,}46$ N/C, $E_{2y} = 2{,}59$ N/C
6. Determinar los componentes x e y del campo resultante $\mathbf{E}$.	$E_x = -3{,}46$ N/C, $E_y = 10{,}6$ N/C
7. Calcular la magnitud de $\mathbf{E}$ a partir de sus componentes.	$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 11{,}2$ N/C
8. Determinar el ángulo θ_1 formado por $\mathbf{E}$ con el eje x.	$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = 108°$

EJEMPLO 22.8

Una carga $+q$ se encuentra en $x = a$ y una segunda carga $-q$ en $x = -a$ (figura 22.14). (a) Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en un punto arbitrario $x > a$. (b) Determinar la forma límite del campo eléctrico para $x >> a$.

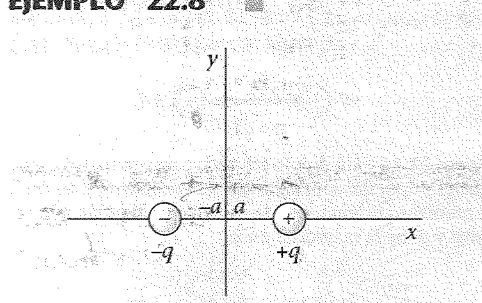


Figura 22.14

Esquema del problema Calculamos el campo eléctrico a partir de

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2}\hat{\mathbf{r}}_{i,0}$$

(ecuación 22.8). Para $x > a$, el vector unitario del campo para cada carga es $\mathbf{i}$. Las distancias son $x - a$ para la carga positiva y $x - (-a) = x + a$ para la carga negativa.

(a) 1. Calcular el campo $\mathbf{E}$ debido a las dos cargas para $x > a$: [*Nota*: La ecuación de la derecha es válida sólo para $x > a$. Para $x < a$, los signos de los dos términos se invierten. Para $-a < x < a$, ambos términos tienen signos negativos.]

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{(x-a)^2}\mathbf{i} + \frac{k(-q)}{(x+a)^2}\mathbf{i} = kq\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right]\mathbf{i}$$

2. Poner los términos incluidos entre corchetes bajo un denominador común y simplificar:

$$\mathbf{E} = kq\left[\frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}\right]\mathbf{i} = kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\mathbf{i}$$

(b) En el límite $x >> a$, podemos despreciar a^2 comparado con x^2 en el denominador:

$$\mathbf{E} = kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\mathbf{i} \approx kq\frac{4ax}{x^4}\mathbf{i} = \frac{4kqa}{x^3}\mathbf{i}$$

Observaciones La figura 22.15 muestra E_x en función de x para todo valor de x, para $q = 1$ nC y $a = 1$ cm. Lejos de las cargas, el campo viene dado por

$$\mathbf{E} = \frac{4kqa}{|x^3|}\mathbf{i}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

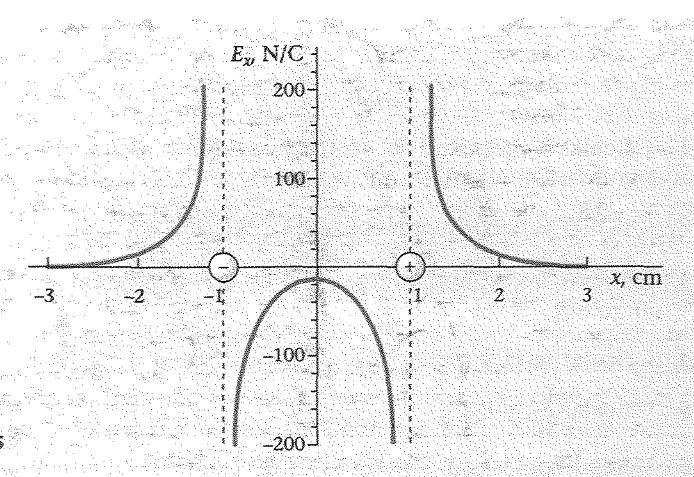


Figura 22.15

Entre las cargas, la contribución de cada una de ellas se verifica en la dirección negativa. Una expresión válida para todo valor de x es

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{(x-a)^2}\left[\frac{(x-a)\mathbf{i}}{|x-a|}\right] + \frac{k(-q)}{(x+a)^2}\left[\frac{(x+a)\mathbf{i}}{|x+a|}\right]$$

Obsérvese que los vectores unitarios (magnitudes entre corchetes) en esta expresión apuntan en la dirección apropiada para todo valor de x.

Dipolos eléctricos

Un sistema de dos cargas iguales y opuestas q separadas por una pequeña distancia L se denomina **dipolo eléctrico**. Su característica fundamental es el **momento dipolar eléctrico p**, o vector que apunta de la carga negativa a la positiva y cuya magnitud es el producto qL (figura 22.16):

$$\mathbf{p} = q\mathbf{L} \tag{22.9}$$

Definición —Momento dipolar eléctrico

$-q$ ⊖ —L→ ⊕ $+q$
$\mathbf{p} = q\mathbf{L}$

Figura 22.16 Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas iguales y opuestas separadas por una pequeña distancia L. El momento dipolar apunta de la carga negativa a la positiva y tiene la magnitud $p = qL$.

Para la configuración de la figura 22.14, $\mathbf{L} = 2a\mathbf{i}$ y el momento dipolar eléctrico es

$$\mathbf{p} = 2aq\mathbf{i}$$

En función del momento dipolar, el campo eléctrico sobre el eje del dipolo en un punto a gran distancia x posee la dirección y sentido del momento dipolar y su magnitud es

$$E = \frac{2kp}{|x^3|} \tag{22.10}$$

(Véase ejemplo 22.8). En cualquier punto alejado de un dipolo, el campo eléctrico es proporcional al momento dipolar y decrece con el cubo de la distancia. Cuando un sistema tiene una carga neta, el campo eléctrico disminuye según $1/r^2$ a grandes distancias. En un sistema con carga neta nula, el campo eléctrico disminuye rápidamente con la distancia. En el caso de un dipolo eléctrico, el campo disminuye según $1/r^3$.

22.5 ■ Líneas de campo eléctrico

El campo eléctrico puede representarse dibujando líneas que indiquen su dirección. En cualquier punto, el vector campo E es tangente a las líneas de campo eléctrico, que se llaman también **líneas de fuerza** porque muestran la dirección de la fuerza ejercida

www.elsolucionario.net

sobre una carga testigo positiva. En cualquier punto próximo a una carga positiva, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la carga. Igualmente, las líneas del campo eléctrico convergen hacia un punto ocupado por una carga negativa.

La figura 22.17 muestra las líneas de campo eléctrico de una sola carga puntual. El espaciado de las líneas está relacionado con la intensidad del campo eléctrico. A medida que nos alejamos de la carga, el campo eléctrico se debilita y las líneas se separan. Consideremos una superficie esférica de radio r con su centro en la carga. Su área es $4\pi r^2$. Si N líneas divergen desde la carga puntual, el número de líneas por unidad de área sobre una superficie esférica a la distancia r es $N/4\pi r^2$. Así, cuando la distancia crece, la densidad de las líneas de campo (el número de líneas por unidad de superficie) decrece según $1/r^2$, es decir, del mismo modo que decrece E. Por tanto, si adoptamos el convenio de dibujar un número fijo de líneas desde una carga puntual, siendo proporcional dicho número a la carga q y si dibujamos las líneas simétricamente alrededor de la carga puntual, la intensidad del campo vendrá indicada por la densidad de las líneas. Cuanto más próximas se encuentran las líneas, más intenso es el campo eléctrico.

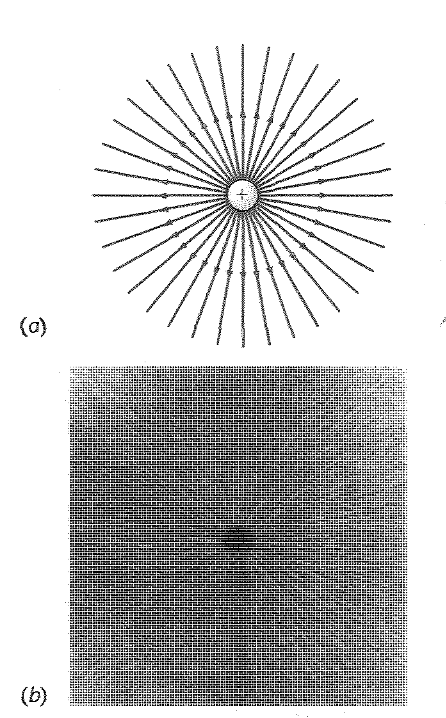


Figura 22.17 (*a*) Líneas de campo eléctrico o líneas de fuerza, de una sola carga puntual positiva. Si la carga fuera negativa, las flechas invertirían su dirección. (*b*) Las mismas líneas de campo eléctrico puestas de manifiesto por hebras de hilo suspendidos en aceite. El campo del objeto cargado en el centro induce cargas opuestas en los extremos de cada trocito de hilo, haciendo que se alineen por sí mismos paralelamente al campo.

La figura 22.18 muestra las líneas de fuerza para dos cargas puntuales positivas iguales, q, separadas por una pequeña distancia. En un punto próximo a una de las cargas, el campo se debe aproximadamente a esta carga sola, pues la otra está tan alejada que podemos despreciar su contribución al campo. En consecuencia, las líneas de campo próximas a una cualquiera de las cargas son radiales e igualmente espaciadas. Puesto que las cargas son iguales, dibujaremos un número igual de líneas saliendo de cada una de ellas. A una distancia muy grande de las cargas, los detalles del sistema carecen de importancia y el sistema se comporta como una carga puntual de magnitud $2q$. (Por ejemplo, si las dos cargas estuvieran separadas 1 mm y las observásemos desde un punto situado a 100 km, parecerían una carga única.) Así, lejos de las cargas el campo es aproximadamente igual que el engendrado por una carga puntual de magnitud $2q$ y las líneas están igualmente espaciadas aproximadamente. Simplemente observando la figura podemos deducir que el campo eléctrico que existe en el espacio entre las cargas es débil, ya que el número de líneas en esta región es muy inferior al número de líneas que existen a la derecha o a la izquierda de las cargas, en donde las líneas están más juntas. Por supuesto esta información también puede obtenerse mediante el cálculo directo del campo en los puntos de estas regiones.

El razonamiento utilizado en los ejemplos precedentes puede aplicarse para dibujar las líneas de fuerza de cualquier sistema de cargas puntuales. En un lugar próximo a cada una de las cargas, las líneas del campo poseen la misma separación y según el signo de la carga se alejan o se acercan a ella. Lejos de todas las cargas, la estructura pormenorizada del sistema no es importante, y las líneas del campo son las mismas que las correspondientes a una única carga puntual igual a la carga neta del sistema. Para una futura referencia resumimos a continuación las reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico:

1. Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas (o en el infinito) y terminan en las negativas (o en el infinito).
2. Las líneas se dibujan simétricamente saliendo o entrando en la carga.
3. El número de líneas que abandonan una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional a la magnitud de la carga.
4. La densidad de líneas (número de ellas por unidad de área perpendicular a las mismas) en un punto es proporcional al valor del campo en dicho punto.
5. A grandes distancias de un sistema de cargas, las líneas de campo están igualmente espaciadas y son radiales como si procediesen de una sola carga puntual igual a la carga neta del sistema.
6. No pueden cortarse nunca dos líneas de campo. (Si dos líneas de campo se cruzaran, ésto indicaría dos direcciones para **E** en el punto de intersección, lo cual es imposible.)

Reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico

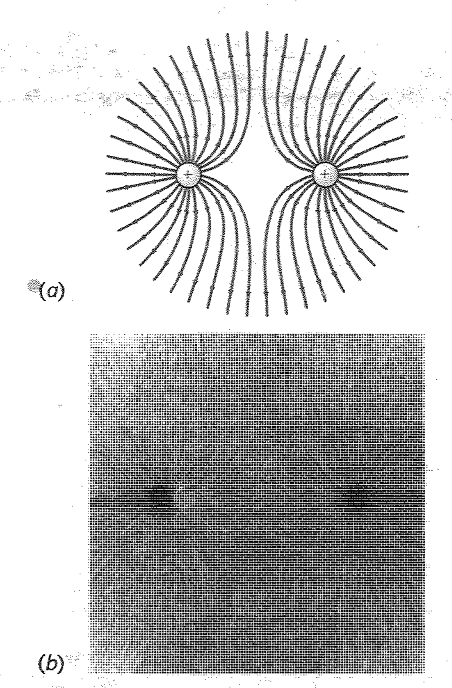


Figura 22.18 (*a*) Líneas de campo eléctrico correspondientes a dos cargas puntuales positivas. Las flechas se invertirían si ambas cargas fueran negativas. (*b*) Las líneas del mismo campo eléctrico puestas de manifiesto con hebras de hilo suspendidas en aceite.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

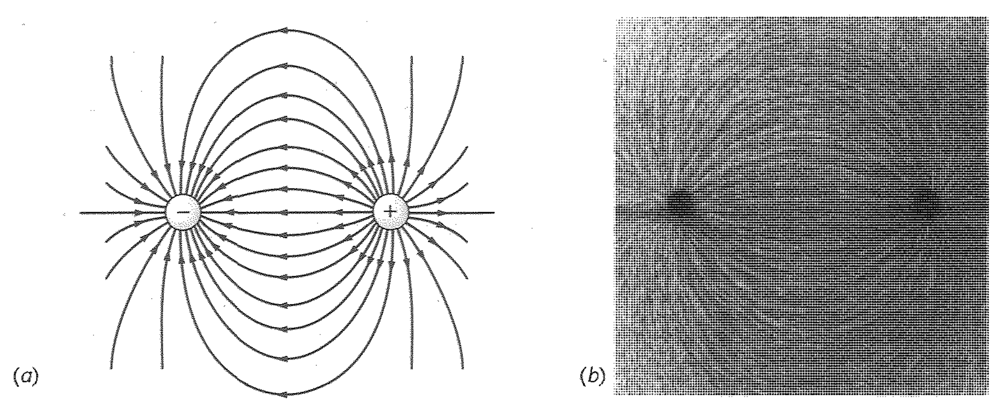


Figura 22.19 (*a*) Líneas de campo en un dipolo eléctrico. (*b*) Las mismas líneas puestas de manifiesto con hebras de hilo en aceite.

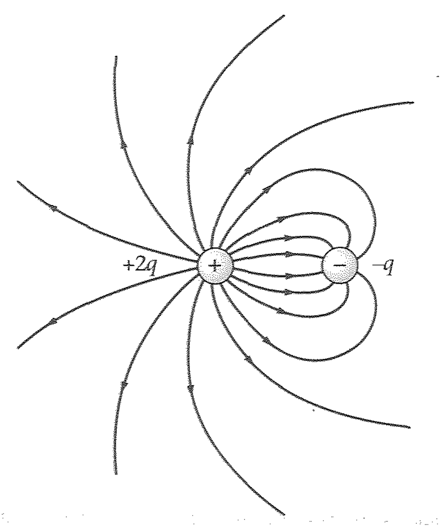


Figura 22.20 Líneas de campo eléctrico correspondientes a una carga puntual $+2q$ y otra segunda carga puntual $-q$. A distancias grandes de las cargas, las líneas son iguales a las que se obtienen con una sola carga $+q$.

En la figura 22.19 se muestran las líneas de campo eléctrico para un dipolo eléctrico. Muy cerca de la carga positiva, las líneas son radiales y dirigidas hacia fuera. Muy cerca de la carga negativa, las líneas son radiales y dirigidas hacia dentro. Puesto que las cargas tienen el mismo valor, el número de líneas que empiezan en la carga positiva es igual al número de las que terminan en la carga negativa. En este caso el campo es más intenso en la región entre las cargas, como lo indica el hecho de que la densidad de líneas del campo en esta región sea muy elevada.

La figura 22.20 muestra las líneas de campo eléctrico para una carga negativa $-q$ situada a una distancia a de otra positiva $+2q$. Puesto que la carga positiva tiene un valor doble que la carga negativa, han de salir de la carga positiva el doble de líneas que entran en la carga negativa. Es decir, la mitad de las líneas que comienzan en la carga positiva $+2q$ entran en la carga negativa $-q$ y la otra mitad abandonan el sistema. Muy lejos de las cargas, las líneas que abandonan el sistema están aproximadamente espaciadas simétricamente y apuntan radialmente hacia fuera, como si se tratara de una sola carga puntual positiva $+q$.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 22.9

En la figura 22.21 se muestran las líneas de campo correspondientes a dos esferas conductoras. ¿Cuál es el signo relativo y la magnitud de las cargas sobre las dos esferas?

Esquema del problema La carga sobre una esfera es positiva si salen más líneas que entran y negativa si entran más líneas que salen. La relación de las magnitudes de las cargas es igual a la relación del número neto de líneas que entran o salen.

Como 11 líneas de campo eléctrico salen de la esfera grande y 3 entran, el número neto de líneas que salen es 8, de modo que la carga sobre la esfera grande es positiva. En cuanto a la esfera pequeña, 8 líneas salen y ninguna entra; por tanto, las esferas poseen cargas iguales positivas. La carga de la esfera pequeña crea un campo intenso en la superficie próxima de la esfera grande que produce una acumulación de carga negativa en la esfera grande —indicada por las tres líneas de campo que entran en esta última esfera. La mayor parte de la superficie de la esfera grande posee una carga positiva y por tanto, su carga total es positiva.

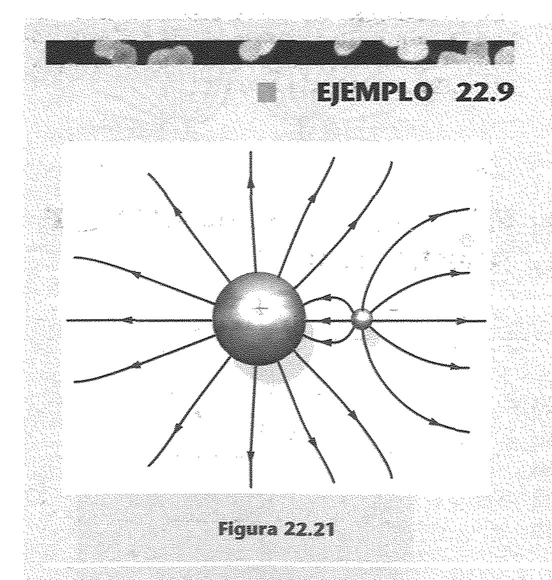


Figura 22.21

La relación establecida entre la intensidad del campo eléctrico y las líneas de campo eléctrico es válida porque el campo varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a una carga puntual. Como el campo gravitatorio de una masa puntual también varía inversamente con el cuadrado de la distancia, el concepto de líneas de fuerza también es útil para dibu-

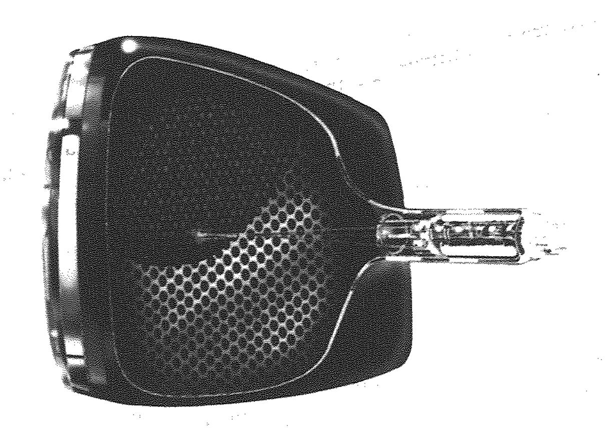
jar el campo gravitatorio. Cerca de una masa puntual, las líneas de campo gravitatorio convergen hacia la masa, del mismo modo que las líneas de campo eléctrico convergen hacia una carga negativa. Sin embargo, no hay puntos en el espacio en donde las líneas del campo gravitatorio diverjan como lo hacen las líneas de campo eléctrico cerca de una carga positiva, pues la fuerza gravitatoria es siempre atractiva y nunca repulsiva.

Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos 22.6

Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico **E**, experimenta la acción de una fuerza q**E**. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, ésta adquiere una aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

siendo m la masa de la partícula.[1] Si se conoce el campo eléctrico, la relación carga-masa de la partícula puede determinarse midiendo su aceleración. La desviación de los electrones en un campo eléctrico uniforme fue utilizada por J. J. Thomson en 1897 para demostrar la existencia de los electrones y para medir su relación carga a masa. El osciloscopio, el monitor del ordenador y el tubo de imágenes de un televisor son ejemplos de aparatos basados en el movimiento de los electrones en campos eléctricos.



Dibujo esquemático de un tubo de rayos catódicos utilizado en la televisión de color. Los haces de electrones procedentes del cañón electrónico, a la derecha, activan sustancias fosforescentes sobre la pantalla a la izquierda, dando lugar a un punto brillante cuyo color depende de la intensidad relativa de cada haz. Los campos eléctricos establecidos entre las placas deflectoras en el cañón (o bien campos magnéticos creados por bobinas) desvían los haces. Éstos barren la pantalla siguiendo una línea horizontal, se desvían hacia abajo y barren otra línea. La pantalla entera es barrida cada 1/30 s.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 22.10

Un electrón se proyecta en un campo eléctrico uniforme E = (1000 N/C)i con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = (2 \times 10^6$ m/s)i en la dirección del campo (figura 22.22). ¿Qué distancia recorrerá el electrón antes de deternerse?

Esquema del problema Como la carga del electrón es negativa, la fuerza $-e$**E** que sobre él actúa posee una dirección opuesta a la del campo. Como **E** es constante, la fuerza también lo es, y por tanto podemos utilizar las fórmulas del movimiento con aceleración constante del capítulo 2. Suponemos que el campo tiene la dirección positiva de x.

1. El desplazamiento Δx está relacionado con las velocidades inicial y final: $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$

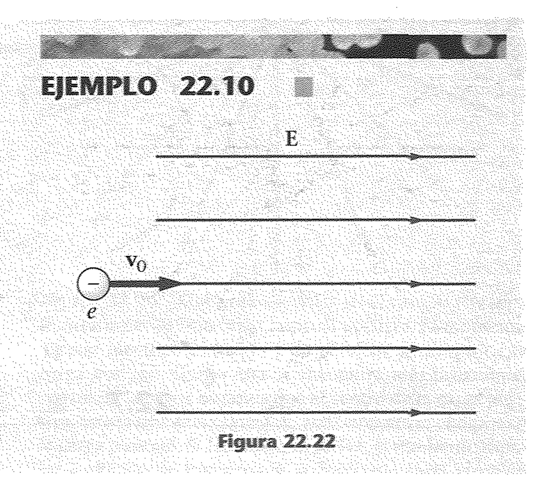


Figura 22.22

[1] Con frecuencia la velocidad de un electrón en un campo eléctrico es una fracción importante de la velocidad de la luz; en este caso, las leyes de Newton del movimiento deben sustituirse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.

 www.elsolucionario.net

2. La aceleración se obtiene de la segunda ley de Newton: $a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m}$

3. Cuando $v = 0$, el desplazamiento es: $\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - v_0^2}{2(-eE/m)} = \frac{mv_0^2}{2eE}$

$$= \frac{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2 \times 10^6\ \text{m/s})^2}{2(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(100\ \text{N/C})} = 1{,}14 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

■ **EJEMPLO 22.11**

Un electrón se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniforme E = (–2000 N/C)j con una velocidad $\mathbf{v}_0$ = (10⁶ m/s)i perpendicular al campo (figura 22.23). (a) Comparar la fuerza gravitatoria que existe sobre el electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él. (b) ¿Cuánto se habrá desviado el electrón si ha recorrido 1 cm en la dirección *x*?

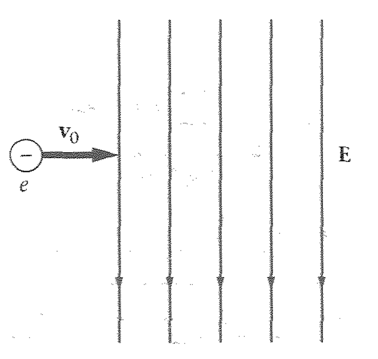


Figura 22.23

Esquema del problema (a) Calcular la relación entre la fuerza eléctrica $qE = -eE$ y la fuerza gravitatoria mg. (b) Como mg es despreciable, la fuerza sobre el electrón es $-eE$ verticalmente hacia arriba. El electrón se mueve, por tanto, con velocidad horizontal constante y se desvía hacia arriba una distancia $y = \frac{1}{2}at^2$, en donde t es el tiempo invertido en recorrer 1 cm en la dirección x.

(a) Calcular la relación entre la magnitud de la fuerza eléctrica, F_e, y la magnitud de la fuerza gravitatoria, F_g: $\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\text{C})(2000\ \text{N/C})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg})} = 3{,}6 \times 10^{13}$

(b) 1. Expresar la desviación vertical en función de la aceleración a y el tiempo t: $y = \frac{1}{2}at^2$

2. El tiempo necesario para que el electrón se desplace una distancia x con velocidad horizontal constante v_0 es: $t = \frac{x}{v_0} = \frac{10^{-2}\ \text{m}}{10^6\ \text{m/s}} = 10^{-8}\ \text{s}$

3. Utilizar este resultado para t y eE/m para a y calcular y: $y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(2000\ \text{N/C})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}(10^{-8}\ \text{s})^2$

$$= 1{,}76\ \text{cm}$$

Observaciones (a) Como es usual, la fuerza eléctrica es enorme comparada con la fuerza gravitatoria. Así, no es necesario considerar la gravedad al diseñar un tubo de rayos catódicos, por ejemplo, o para calcular la desviación del electrón en el ejemplo anterior. Un tubo de imágenes de televisión funciona igualmente bien en su posición normal que cabeza abajo, como si la gravedad no existiera. (b) La trayectoria de un electrón que se mueve en un campo eléctrico uniforme es una parábola, análogamente a la trayectoria de una masa que se mueve en un campo gravitatorio uniforme.

22.7 ■ Dipolos eléctricos en campos eléctricos

En el ejemplo 22.6 analizamos el campo eléctrico producido por un dipolo, es decir, un sistema formado por dos cargas iguales y opuestas muy próximas. Aquí consideramos el comportamiento de un dipolo en un campo eléctrico externo. Ciertas moléculas poseen momentos dipolares eléctricos permanentes debido a una distribución no uniforme de

www.elsolucionario.net

carga dentro de la molécula. Tales moléculas se llaman **moléculas polares**. Un ejemplo es la molécula HCl, formada esencialmente por un ion de hidrógeno positivo de carga $+e$ combinado con un ion de cloro negativo de carga $-e$. El centro de carga del ion positivo no coincide con el centro de carga del ion negativo, de modo que la molécula posee un momento dipolar permanente. Otro ejemplo es el agua (figura 22.24). Un campo eléctrico externo uniforme no ejerce una fuerza neta sobre un dipolo, pero aparece un par que tiende a alinear el dipolo en la dirección del campo. En la figura 22.25 vemos que el momento alrededor de la carga negativa[1] tiene la magnitud F_1L sen $\theta = qEL$ sen $\theta = pE$ sen θ. El momento está dirigido normalmente al papel, hacia dentro, de tal modo que tiende a situar el momento dipolar **p** en la dirección del campo eléctrico **E**. El momento del par puede escribirse convenientemente como el producto vectorial del momento dipolar **p** y el campo eléctrico **E**:

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{22.11}$$

Cuando el dipolo gira un ángulo $d\theta$, el campo eléctrico realiza un trabajo

$$dW = -\tau \, d\theta = -pE \text{ sen } \theta \, d\theta$$

El signo menos es debido a que el momento tiende a disminuir θ. Igualando este trabajo con la disminución de energía potencial, resulta

$$dU = -dW = +pE \text{ sen } \theta \, d\theta$$

e integrando

$$U = -pE \cos \theta + U_0$$

Es costumbre elegir como energía potencial cero la energía potencial correspondiente a una situación en la que el dipolo es perpendicular al campo eléctrico, es decir, cuando $\theta = 90°$. Entonces $U_0 = 0$ y la energía potencial del dipolo es

$$U = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{22.12}$$

Energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico

Los hornos de microondas están basados en el momento dipolar eléctrico del agua para cocer alimentos. Como todas las ondas electromagnéticas, las microondas poseen un campo eléctrico oscilante que hace vibrar los dipolos eléctricos. Las microondas de los hornos domésticos están sintonizadas con la frecuencia natural de vibración de las moléculas de agua. Estas moléculas, contenidas en los alimentos entran en resonancia con el campo eléctrico oscilante y absorben grandes cantidades de energía, lo que explica el rápido tiempo de cocción que hace tan conveniente el horno de microondas.

Las **moléculas no polares** no poseen momento dipolar eléctrico permanente. Sin embargo, todas las moléculas neutras contienen cantidades iguales de carga positiva y negativa. En presencia de un campo eléctrico externo **E**, las cargas se separan espacialmente. Las cargas positivas se mueven en la dirección de **E** y las negativas en dirección opuesta. La molécula adquiere de este modo un momento dipolar inducido paralelo al campo eléctrico externo y se dice que está **polarizada**.

En un campo eléctrico no uniforme, un dipolo eléctrico experimenta una fuerza neta, ya que el campo eléctrico tiene magnitudes distintas en los centros de la carga positiva y negativa. La figura 22.26 muestra como una carga puntual positiva polariza a una molécula no polar y después la atrae. Un ejemplo familiar es la atracción que mantiene un globo electrostáticamente cargado contra una pared. El campo no uniforme producido por la carga sobre el globo polariza las moléculas de la pared y las atrae. Una fuerza igual y opuesta se ejerce por las moléculas de la pared sobre el globo.

[1] El momento producido por dos fuerzas iguales y opuestas (sistema llamado **par**) es el mismo alrededor de cualquier punto del espacio.

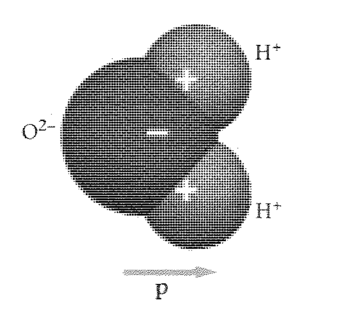


Figura 22.24 Una molécula H_2O posee un momento dipolar eléctrico permanente dirigido desde el centro de la carga negativa al centro de la carga positiva.

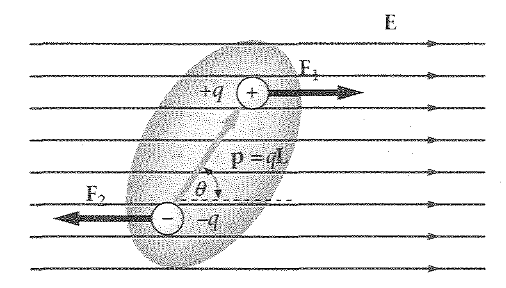


Figura 22.25 Un dipolo en un campo eléctrico uniforme experimenta fuerzas iguales y opuestas que tienden a girar el dipolo, de modo que su momento dipolar tiende a alinearse con el campo eléctrico.

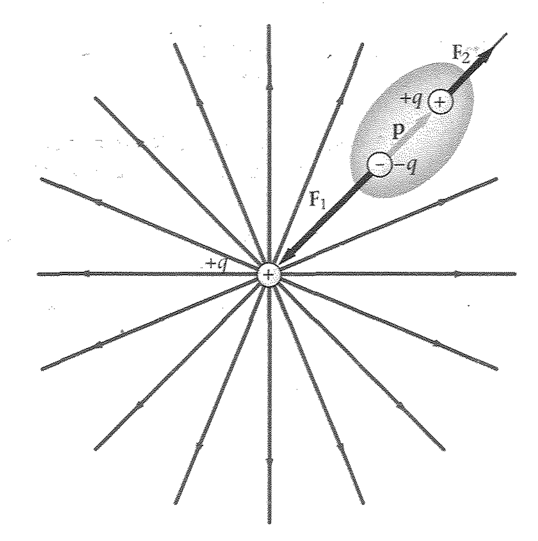


Figura 22.26 Molécula no polar en el campo eléctrico no uniforme de una carga puntual positiva. El momento dipolar eléctrico inducido **p** es paralelo al campo de la carga puntual. Como ésta se encuentra más próxima al centro de la carga negativa que al centro de la carga positiva, existe una fuerza neta de atracción entre el dipolo y la carga puntual. Si ésta fuera negativa, el momento dipolar inducido se invertiría y la molécula sería también atraída hacia la carga puntual.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

El diámetro de un átomo o molécula es del orden de 10^{-10} m = 0,1 nm. Una unidad conveniente para el momento dipolar eléctrico de los átomos y moléculas es la carga electrónica fundamental e multiplicada por la distancia de 1 nm. Por ejemplo, el momento dipolar de H_2O en estas unidades posee una magnitud de unos 0,04 e · nm.

EJEMPLO 22.12

Un dipolo con un momento de magnitud 0,02 e · nm forma un ángulo de 20° con un campo eléctrico uniforme de magnitud 3 × 10³ N/C. (figura 22.27) Determinar (a) la magnitud del momento del par que actúa sobre el dipolo y (b) la energía potencial del sistema.

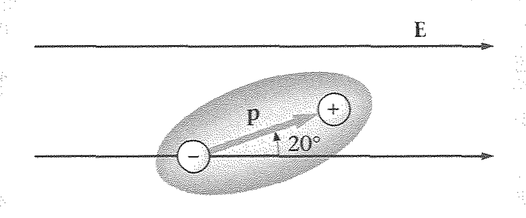


Figura 22.27

Esquema del problema El momento del par se deduce de la expresión $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ y la energía potencial de $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

(a) Calcular la magnitud del momento del par:

$$\tau = |\mathbf{p} \times \mathbf{E}| = pE \operatorname{sen}\theta = (0{,}02\ e \cdot \text{nm})(3 \times 10^3\ \text{N/C})(\operatorname{sen} 20°)$$
$$= (0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-9}\ \text{m})(3 \times 10^3\ \text{N/C})(\operatorname{sen} 20°)$$
$$= 3{,}28 \times 10^{-27}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

(b) Calcular la energía potencial:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos\theta$$
$$= -(0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-9}\ \text{m})(3 \times 10^3\ \text{N/C}) \cos 20°$$
$$= -9{,}02 \times 10^{-27}\ \text{J}$$

Resumen

1. Cuantización y conservación son propiedades fundamentales de la carga eléctrica.
2. La ley de Coulomb es la ley fundamental de la interacción entre las cargas en reposo.
3. El campo eléctrico describe la condición establecida en el espacio por una distribución de cargas.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Carga eléctrica	Existen dos clases de carga eléctrica, llamadas positiva y negativa.	
Cuantización	La carga eléctrica está cuantizada —siempre se presenta por múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga e. La carga del electrón es $-e$ y la del protón $+e$.	
Magnitud	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C	**(22.1)**
Conservación	La carga se conserva, es decir, ni se crea ni se destruye en cualquier proceso; simplemente se transfiere.	

www.elsolucionario.net

2. **Conductores y aislantes**

En los conductores, aproximadamente un electrón por átomo posee libertad de movimiento en todo el material. En los aislantes todos los electrones están ligados a los átomos próximos.

Tierra

Así se llama un conductor muy extenso que puede suministrar una cantidad ilimitada de carga (tal como el suelo terrestre).

3. **Carga por inducción**

Un conductor puede cargarse manteniendo una carga en sus proximidades que atrae o repele los electrones libres y uniendo entonces el conductor a tierra para que escapen las cargas más alejadas.

4. **Ley de Coulomb**

La fuerza ejercida por una carga q_1 sobre q_2 viene dada por

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{1,2} \qquad (22.2)$$

en donde $\hat{\mathbf{r}}_{1,2}$ es un vector unitario dirigido de q_1 a q_2.

Constante de Coulomb

$$k = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

5. **Campo eléctrico**

El campo eléctrico debido a un sistema de cargas en un punto se define como la fuerza neta ejercida por aquellas cargas sobre una carga testigo positiva q_0, dividida por q_0:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad (22.5)$$

Debido a una carga puntual

$$\mathbf{E}_i = \frac{kq_i}{r_{i,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{i,0} \qquad (22.7)$$

Debido a un sistema de cargas puntuales

El campo eléctrico debido a varias cargas es la suma vectorial de los campos debido a las cargas individuales:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{i,0} \qquad (22.8)$$

6. **Líneas de campo eléctrico**

El campo eléctrico puede representarse mediante líneas del campo eléctrico o de fuerza que se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. La intensidad del campo eléctrico viene indicada por la densidad de las líneas de fuerza.

7. **Dipolo eléctrico**

Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales pero opuestas, separadas por una pequeña distancia.

Momento dipolar

$$\mathbf{p} = q\mathbf{L}$$

en donde $\mathbf{L}$ apunta de la carga negativa a la positiva.

Campo debido a un dipolo

El campo eléctrico en un punto alejado de un dipolo es proporcional al momento dipolar y disminuye con el cubo de la distancia.

Momento del par sobre un dipolo

En un campo eléctrico uniforme, la fuerza neta que actúa sobre un dipolo es cero, pero existe un momento $\boldsymbol{\tau}$ dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Energía potencial de un dipolo

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

8. **Moléculas polares y no polares**

Las moléculas polares, tales como H_2O poseen momentos dipolares permanentes, ya que en ellas no coinciden los centros de la carga positiva y negativa. Se comportan como simples dipolos en un campo eléctrico. Las moléculas no polares carecen de momentos dipolares permanentes, pero adquieren momentos dipolares inducidos en presencia de un campo eléctrico.

Guía de resolución de problemas

Dibujar ante todo un diagrama claro que incluya las características importantes del problema. Incluir en este diagrama la localización, signo y magnitud de las cargas, así como los vectores de fuerza individuales y los vectores del campo eléctrico. Si es apropiado, representar también el vector suma de estas fuerzas o vectores de campo.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Resumen de los ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES	
1. Cargas y ley de Coulomb		
Determimar el número de electrones en una carga determinada.	El número de electrones en una carga Q es $N = Q/e$.	**Ejemplo 22.1**
Determinar la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales.	Utilizar la ley de Coulomb.	**Ejemplos 22.2, 22.3**
Determinar la fuerza eléctrica sobre una carga puntual debida a otras dos o más cargas.	Utilizar la ley de Coulomb para determinar la fuerza debida a cada carga y sumar los vectores fuerza.	**Ejemplos 22.4, 22.5**
2. El campo eléctrico		
Determinar el campo eléctrico debido a dos o más cargas puntuales.	Determinar el campo eléctrico debido a cada carga y sumar los vectores del campo eléctrico.	**Ejemplos 22.6, 22.7, 22.8**
3. Líneas de campo eléctrico		
Utilizar las líneas de campo eléctrico para determinar los signos y las magnitudes relativas de las cargas.	Las líneas tiene su origen en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas, siendo el número de líneas proporcional a la magnitud de la carga.	**Ejemplo 22.9**
4. Cargas puntuales y dipolos en los campos eléctricos		
Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico constante.	Determinar la aceleración de la partícula utilizando $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$ y después utilizar la cinemática de aceleración constante.	**Ejemplos 22.10 y 22.11**
Determinar el momento del par que actúa sobre un dipolo eléctrico.	Utilizar $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$.	**Ejemplo 22.12**
Determinar la energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico.	Utilizar $U = -pE \cos\theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.	**Ejemplo 22.12**

www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Carga eléctrica

• **1** Si el convenio de signos para las cargas se variase de modo que la carga electrónica fuese positiva y la del protón negativa, ¿debería escribirse la ley de Coulomb del mismo modo o de modo diferente?

•• **2** Comparar las propiedades de la carga eléctrica con las de la masa gravitatoria. Analizar las semejanzas y las diferencias.

• **3** Al frotar una barra de plástico con un paño de lana, aquella adquiere una carga de $-0{,}8\ \mu$C. ¿Cuántos electrones se transfieren del paño de lana a la barra de plástico?

• **4** Una carga igual a la de un número de Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) de protones se denomina un *faraday*. Calcular el número de culombios que hay en un faraday.

• **5** ¿Cuántos culombios de carga positiva existen en 1 kg de carbono? Doce gramos de carbono contienen el número de Avogadro de átomos y cada átomo posee seis protones y seis electrones.

Conductores, aislantes y cargas por inducción

• **6** ¿Pueden cargarse los aislantes por inducción?

•• **7** Un metal B de forma rectangular se conecta a tierra por medio de un interruptor S que se encuentra inicialmente cerrado (figura 22.28). Mientras la carga $+Q$ está próxima a B, se abre el interruptor S. Des-

pués se separa la carga +Q. ¿Qué ocurre con el estado de carga del metal rectangular *B*?

(a) Está positivamente cargado. (b) Está descargado.
(c) Está negativamente cargado.
(d) Puede ocurrir cualquiera de las tres afirmaciones anteriores, dependiendo de la carga de *B* antes de aproximarle la carga +Q.

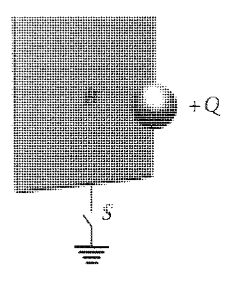


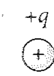
Figura 22.28 Problema 7.

•• 8 Explicar, mencionando cada etapa, cómo puede utilizarse una varilla aislante positivamente cargada para dar a una esfera de metal
(a) una carga negativa, (b) una carga positiva.
(c) ¿Puede utilizarse la misma varilla para dar a una esfera una carga positiva y a otra una carga negativa sin recargar la varilla?

•• 9 Dos esferas conductoras sin carga con sus superficies metálicas en contacto, están apoyadas sobre una gran tabla de madera bien aislada. Una barra cargada positivamente se aproxima a una de las esferas por el lado opuesto a su punto de contacto con la otra esfera.
(a) Describir las cargas inducidas sobre las dos esferas conductoras y representar las distribuciones de carga sobre ellas.
(b) Las dos esferas se alejan entre sí y la barra cargada se separa. Dibujar las distribuciones de carga sobre las esferas separadas.

Ley de Coulomb

• 10 Tres cargas, $+q$, $+Q$ y $-Q$, se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero, como muestra la figura 22.29. La fuerza neta sobre la carga $+q$ debida a las otras dos cargas es
(a) verticalmente hacia arriba. (b) verticalmente hacia abajo.
(c) cero. (d) horizontal hacia la izquierda.
(e) horizontal hacia la derecha.



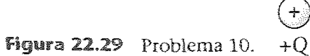


Figura 22.29 Problema 10.



• 11 Una carga $q_1 = 4{,}0$ μC está en el origen y otra carga $q_2 = 6{,}0$ μC está sobre el eje x en el punto $x = 3{,}0$ m.
(a) Hallar la fuerza ejercida sobre la carga q_2.
(b) Hallar la fuerza ejercida sobre q_1.
(c) ¿En qué diferirán estas respuestas (*a*) y (*b*), si q_2 vale $-6{,}0$ μC?

• 12 Tres cargas puntuales están en el eje x; $q_1 = -6{,}0$ μC está en $x = -3{,}0$ m, $q_2 = 4{,}0$ μC está en el origen y $q_3 = -6{,}0$ μC está en $x = 3{,}0$ m. Hallar la fuerza ejercida sobre q_1.

•• 13 Dos cargas iguales de 3,0 μC están sobre el eje y, una en el origen y la otra en $y = 6$ m. Una tercera carga $q_3 = 2{,}0$ μC está en el eje x en $x = 8$ m. Hallar la fuerza ejercida sobre q_3.

•• 14 Tres cargas, cada una de magnitud 3 nC, están en los vértices de un cuadrado de lado 5 cm. Las dos cargas en los vértices opuestos son positivas y la otra es negativa. Determinar la fuerza ejercida por estas cargas sobre una cuarta carga $q = +3$ nC situada en el vértice restante.

•• 15 Una carga de 5 μC se encuentra sobre el eje y en $y = 3$ cm y una segunda carga de $-5{,}0$ μC está sobre el eje y en $y = -3$ cm. Determinar la fuerza ejercida sobre una carga de 2 μC situada sobre el eje x en $x = 8$ cm.

•• 16 Una carga puntual de $-2{,}5$ μC está localizada en el origen. Una segunda carga puntual de 6 μC se encuentra en $x = 1$ m, $y = 0{,}5$ m. Determinar las coordenadas x e y de la posición en la cual un electrón estaría en equilibrio.

•• 17 Una carga de $-1{,}0$ μC está localizada en el origen, una segunda carga de 2,0 μC está localizada en $x = 0$, $y = 0{,}1$ m y una tercera de 4,0 μC en $x = 0{,}2$ m, $y = 0$. Determinar las fuerzas que actúan sobre cada una de las tres cargas.

•• 18 Una carga de 5,0 μC está localizada en $x = 0$, $y = 0$ y otra carga Q está localizada en $x = 4{,}0$ cm, $y = 0$. La fuerza que actúa sobre una carga de 2 μC en $x = 8{,}0$ cm, $y = 0$ es 19,7 N, apuntando en la dirección x negativa. Cuando esta carga de 2 μC se sitúa en $x = 17{,}75$ cm, $y = 0$, la fuerza que actúa sobre ella es nula. Determinar el valor de la carga Q_2.

•• 19 Cinco cargas iguales Q están igualmente espaciadas en un semicírculo de radio R como indica la figura 22.30. Determinar la fuerza que se ejerce sobre una carga q localizada en el centro del semicírculo.

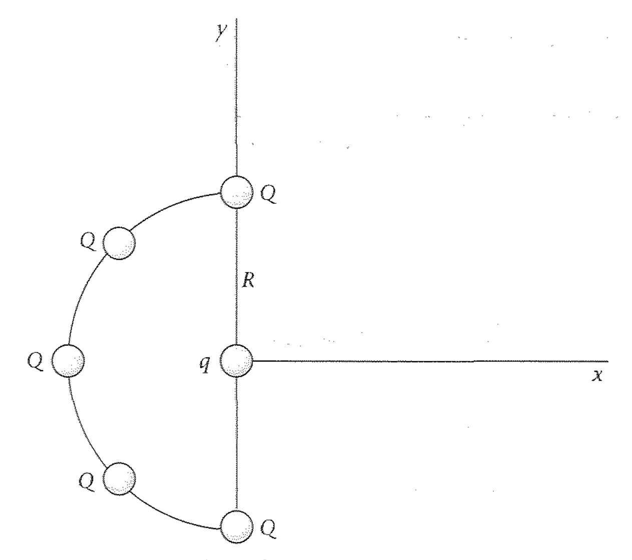


Figura 22.30 Problema 19.

••• 20 La configuración de la molécula de amoníaco es aproximadamente la de un tetraedro regular con tres iones H^+ formando la base y un ion N^{3-} en el vértice del tetraedro. La longitud de cada lado es $1{,}64 \times 10^{-10}$ m. Calcular la fuerza que actúa sobre cada ion.

El campo eléctrico

• 21 Una carga positiva que puede moverse libremente, pero que inicialmente está en reposo en un campo eléctrico **E**
(a) acelerará en dirección perpendicular a **E**.
(b) permanecerá en reposo.
(c) acelerará en dirección opuesta a **E**.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(d) acelerará en la misma dirección que **E**.
(e) no verificará ninguna de las afirmaciones anteriores.

• **22** Si cuatro cargas están localizadas en los vértices de un cuadrado como indica la figura 22.31, el campo **E** es cero en
(a) todos los puntos situados sobre los lados del cuadrado que están a mitad de camino entre las dos cargas.
(b) el punto central del cuadrado.
(c) el punto a mitad de camino entre las dos cargas superiores y en el punto a mitad de camino entre las dos cargas inferiores.
(d) ninguno de los casos anteriores.

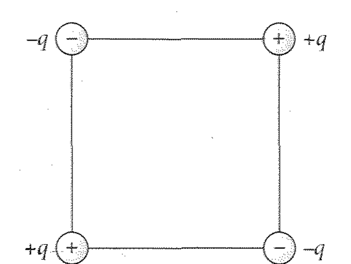


Figura 22.31 Problema 22.

•• **23** En un punto determinado del espacio, una carga Q no experimenta ninguna fuerza. Por tanto,
(a) no existen cargas próximas.
(b) si existen cargas próximas, su carga es opuesta a la de Q.
(c) si existen cargas próximas, la carga positiva total debe ser igual a la carga negativa total.
(d) ninguna de las afirmaciones anteriores es necesariamente cierta.

• **24** Una carga de 4,0 μC está en el origen. ¿Cuál es el valor y dirección del campo eléctrico sobre el eje x en
(a) $x = 6$ m y (b) $x = -10$ m?
(c) Hacer un esquema de la función E_x respecto a x tanto para valores positivos como negativos de x. (Recuérdese que E_x es negativo cuando **E** señala en el sentido negativo de las x.)

• **25** Dos cargas puntuales, cada una de ellas de +4 μC, están sobre el eje x, una en el origen y la otra en $x = 8$ m. Hallar el campo eléctrico sobre el eje x en
(a) $x = -2$ m, (b) $x = 2$ m, (c) $x = 6$ m y (d) $x = 10$ m.
(e) ¿En qué punto del eje x es cero el campo eléctrico?
(f) Hacer un esquema de E_x en función de x.

• **26** Cuando se coloca una carga testigo $q_0 = 2$ nC en el origen, experimenta la acción de una fuerza de $8{,}0 \times 10^{-4}$ N en la dirección positiva del eje de las y.
(a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen?
(b) ¿Cuál sería la fuerza que se ejercería sobre una carga de −4 nC situada en el origen?
(c) Si esta fuerza fuera debida a una carga situada sobre el eje y para $y = 3$ cm, ¿cuál sería el valor de dicha carga?

• **27** Una gota de aceite tiene una masa de 4×10^{-14} kg y una carga neta de $4{,}8 \times 10^{-19}$ C. Una fuerza eléctrica dirigida hacia arriba equilibra justamente la fuerza dirigida hacia abajo de la gravedad, de tal modo que la gota de aceite queda en reposo. ¿Cuál es la dirección y magnitud del campo eléctrico?

• **28** La Tierra tiene un campo eléctrico cerca de sus superficie que es aproximadamente 150 N/C y que está dirigido hacia abajo.
(a) Comparar la fuerza eléctrica ascendente ejercida sobre un electrón con la fuerza gravitatoria dirigida hacia abajo.
(b) ¿Qué carga debería suministrarse a una moneda de 3 g para que el campo eléctrico equilibrase su peso cerca de la superficie de la Tierra?

•• **29** Dos cargas iguales positivas de valor $q_1 = q_2 = 6{,}0$ nC están sobre el eje y en puntos $y_1 = +3$ cm e $y_2 = -3$ cm.
(a) ¿Cuál es el valor y dirección del campo eléctrico sobre el eje x en $x = 4$ cm?
(b) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre una tercera carga $q_0 = 2$ nC situada en el punto $x = 4$ cm?

•• **30** Una carga puntual de +5 μC está localizada en $x = -3{,}0$ cm y una segunda carga puntual de −8 μC está localizada en $x = +4{,}0$ cm. ¿Dónde debe situarse una tercera carga de 6 μC para que el campo eléctrico en $x = 0$ sea cero?

•• **31** Una carga puntual de −5 μC está localizada en $x = 4$ m, $y = -2$ m. Una segunda carga puntual de 12 μC está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m.
(a) Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = -1$ m, $y = 0$.
(b) Calcular la magnitud y dirección de la fuerza sobre un electrón situado en $x = -1$ m, $y = 0$.

•• **32** Dos cargas positivas iguales q están en eje y; una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$.
(a) Demostrar que el campo eléctrico en el eje x está dirigido a lo largo de dicho eje con $E_x = 2kqx(x^2 + a^2)^{-3/2}$.
(b) Demostrar que cercano al origen, cuando x es mucho menor que a, E_x vale aproximadamente $2kqx/a^3$.
(c) Demostrar que para x mucho mayor que a, E_x es aproximadamente $2kq/x^2$. Explicar por qué deberá esperarse este resultado incluso antes de ser calculado.

•• **33** Una carga puntual de 5 μC está localizada en $x = 1$ m, $y = 3$ m y otra de −4 μC está localizada en $x = 2$ m, $y = -2$ m.
(a) Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = -3$ m, $y = 1$ m.
(b) Determinar la magnitud y dirección de la fuerza sobre un protón en $x = -3$ m, $y = 1$ m.

•• **34**
(a) Demostrar que el campo eléctrico para la distribución de cargas del problema 32 tiene su máximo valor en los puntos $x = a/\sqrt{2}$ y $x = -a/\sqrt{2}$ calculando dE_x/dx y haciendo la derivada igual a cero.
(b) Hacer un esquema de la función E_x en función de x utilizando los resultados de la parte (a) de este problema y de las partes (b) y (c) del problema 32.

••• **35** Para la distribución de cargas del problema 32 el campo eléctrico en el origen es cero. Una carga de prueba q_0 situada en el origen estará por tanto en equilibrio.
(a) Estudiar la estabilidad del equilibrio para una carga de prueba positiva considerando desplazamientos pequeños del equilibrio a lo largo del eje x y desplazamientos pequeños a lo largo del eje y.
(b) Repetir la parte (a) para una carga de prueba negativa.
(c) Hallar el valor y signo de una carga q_0 que puede situarse en el origen de modo que la fuerza neta sobre cada una de las tres cargas sea cero.
(d) Considerar qué ocurre si cualquiera de las cargas se desplaza ligeramente del equilibrio.

••• **36** Dos cargas puntuales positiva $+q$ están sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$ como en el problema 32. Una cuenta de collar de masa m que transporta una carga negativa $-q$ desliza sin rozamiento a lo largo de una cuerda situada sobre el eje x.
(a) Mostrar que para pequeños desplazamientos $x \ll a$, la cuenta experimenta una fuerza de restitución proporcional a x y, por tanto, experimenta un movimiento armónico simple.
(b) Determinar el período del movimiento.

www.elsolucionario.net

Líneas de campo eléctrico

• **37** ¿Cuál (o cuáles) de las siguientes afirmaciones en relación con las líneas de campo eléctricas es (o son) falsa(s)?

(a) El número de líneas que salen de una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional a la carga.
(b) Las líneas comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.
(c) La densidad de líneas (número de líneas por unidad de área perpendicular a las mismas) es proporcional a la magnitud del campo.
(d) Las líneas de campo eléctrico se cruzan a la mitad de distancia que separa las cargas de igual magnitud y signo.

• **38** La figura 22.32 muestra las líneas de fuerza correspondientes a un sistema de dos cargas puntuales.

(a) ¿Cuáles son los valores relativos de la carga?
(b) ¿Cuáles son los signos de las cargas?
(c) ¿En qué regiones del espacio es más intenso el campo eléctrico? ¿En cuáles es más débil?

• **39** Dos cargas $+4q$ y $-3q$ están separadas por una pequeña distancia. Dibujar las líneas de campo eléctrico para este sistema.

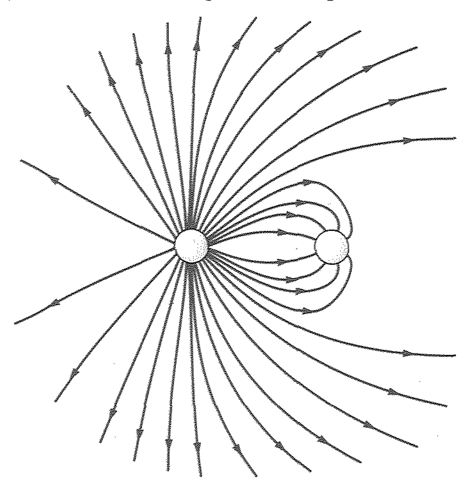


Figura 22.32 Problema 38.

• **40** Dos cargas $+q$ y $-3q$ están separadas una distancia pequeña. Dibujar las líneas de fuerza para este sistema.

• **41** Tres cargas puntuales positivas iguales están situadas en los vértices de un triángulo equilátero. Hacer un esquema de las líneas de fuerza en el plano del triángulo.

Movimiento de cargas puntuales en los campos eléctricos

• **42** La aceleración de una partícula en un campo eléctrico depende de la relación carga/masa de la partícula.

(a) Calcular e/m para un electrón.
(b) ¿Cuál es el valor y dirección de la aceleración de un electrón en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C?
(c) Cuando la velocidad de un electrón se aproxima a la velocidad de la luz c, debe utilizarse la mecánica relativista para determinar su movimiento; sin embargo, a velocidades bastante menores que c debe utilizarse la mecánica newtoniana. Calcular con la mecánica de Newton el tiempo que tarda un electrón, partiendo del reposo en el interior de un campo eléctrico de valor 100 N/C para alcanzar una velocidad de 0,01 c.
(d) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en este tiempo?

• **43**

(a) Calcular e/m para un protón y hallar su aceleración en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C.
(b) Hallar el tiempo que tarda un protón inicialmente en reposo en dicho campo en alcanzar la velocidad de $0{,}01c$ (siendo c la velocidad de la luz).

• **44** Un electrón tiene una velocidad inicial de 2×10^6 m/s en la dirección y sentido del eje de las x. Entra en el interior de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (400\ \text{N/C})\mathbf{j}$ que tiene la dirección y.

(a) Hallar la aceleración del electrón.
(b) ¿Cuánto tiempo tardará el electrón en recorrer 10 cm en la dirección x?
(c) ¿Cuál será el valor y la dirección de la desviación del electrón después de haber recorrido 10 cm en la dirección x del campo?

•• **45** Un electrón, partiendo del reposo, se acelera por la acción de un campo eléctrico uniforme de magnitud 8×10^4 N/C que se extiende hasta una distancia de 5,0 cm. Determinar la velocidad del electrón en el momento en que abandona la región del campo eléctrico uniforme.

•• **46** Un electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón estacionario. La fuerza centrípeta surge de la fuerza electrostática de atracción entre el protón y el electrón. El electrón posee una energía cinética de $2{,}18 \times 10^{-18}$ J.

(a) ¿Cuál es la velocidad del electrón?
(b) ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón?

•• **47** Una masa de 2 g localizada en una región de campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (300\ \text{N/C})\mathbf{i}$ transporta una carga Q. La masa, liberada del reposo en $x = 0$ posee una energía cinética de 0,12 J en $x = 0{,}50$ m. Determinar la carga Q.

•• **48** Una partícula sale del origen con una velocidad de 3×10^6 m/s, formando un ángulo de 35° con el eje x. Se mueve en un campo eléctrico constantes $\mathbf{E} = E_y\mathbf{j}$. Determinar E_y para que la partícula cruce el eje x en $x = 1{,}5$ cm si

(a) se trata de un electrón y (b) es un protón.

•• **49** Un electrón parte de la posición indicada en la figura 22.33 con una velocidad inicial $v_0 = 5 \times 10^6$ m/s formando un ángulo de 45° con el eje x. El campo eléctrico tiene la dirección y positiva y su magnitud es de $3{,}5 \times 10^3$ N/C. ¿Sobre cuál placa y en qué lugar chocará el electrón?

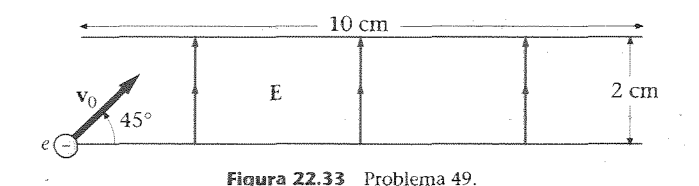


Figura 22.33 Problema 49.

•• **50** Un electrón cuya energía cinética es 2×10^{-16} J se mueve hacia la derecha a lo largo del eje de un tubo de rayos catódicos como se indica en la figura 22.34. En la región comprendida entre las placas deflectoras existe un campo eléctrico de valor $\mathbf{E} = (2 \times 10^4\ \text{N/C})\mathbf{j}$. En cualquier otro sitio $\mathbf{E} = 0$.

(a) ¿A qué distancia del eje del tubo se encuentra el electrón cuando alcanza el extremo de las placas?
(b) ¿Bajo qué ángulo respecto al eje se mueve el electrón?
(c) ¿A qué distancia del eje se encuentra el electrón cuando choca contra la pantalla fluorescente?

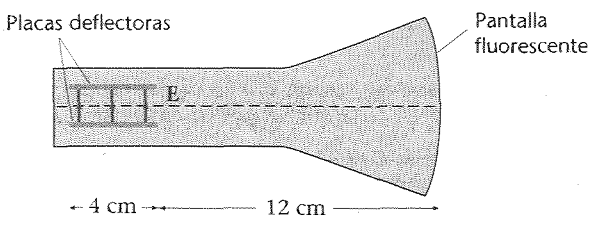


Figura 22.34 Problema 50.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Dipolos eléctricos

• **51** Dos cargas puntuales $q_1 = 2{,}0$ pC y $q_2 = -2{,}0$ pC están separadas a una distancia de 4 μm.

(a) ¿Cuál es el momento dipolar de este par de cargas?

(b) Hacer un dibujo del par e indicar la dirección y sentido del momento dipolar.

• **52** Un dipolo de momento 0,5 $e \cdot$ nm se coloca en el interior de un campo eléctrico uniforme de valor $4{,}0 \times 10^4$ N/C. ¿Cuál es el valor del momento ejercido sobre el dipolo cuando

(a) el dipolo es paralelo al campo eléctrico,

(b) el dipolo es perpendicular al campo eléctrico, y

(c) el dipolo forma un ángulo de 30° con el campo eléctrico?

(d) Determinar la energía potencial del dipolo en el campo eléctrico en cada caso.

•• **53** El campo eléctrico de un dipolo orientado a lo largo del eje x decrece en la forma $1/x^3$ en la dirección x y en la forma $1/y^3$ en la dirección y. Mediante el análisis dimensional demostrar que en cualquier dirección, el campo lejos del dipolo disminuye en la forma $1/r^3$.

•• **54** Una molécula de agua tiene su átomo de oxígeno en el origen, un núcleo de hidrógeno en $x = 0{,}077$ nm, $y = 0{,}058$ nm y el otro núcleo de hidrógeno en $x = -0{,}077$ nm, $y = 0{,}058$ nm. Si los electrones del hidrógeno se transfieren completamente al átomo de oxígeno de modo que éste adquiere una carga de $-2e$, ¿cuál será el momento dipolar de la molécula de agua? Esta caracterización de los enlaces químicos del agua como totalmente iónicos es una aproximación que sobrestima el momento dipolar de una molécula de agua.

•• **55** Un dipolo eléctrico se compone de dos cargas $+q$ y $-q$ separadas a una distancia muy pequeña $2a$. Su centro está en el eje x en $x = x_1$ y a lo largo del mismo hacia los valores positivos de las x. El dipolo está en el interior de un campo eléctrico no uniforme que tiene también la dirección x dada por $\mathbf{E} = Cx\mathbf{i}$, siendo C una constante.

(a) Hallar la fuerza ejercida sobre la carga positiva y la ejercida sobre la carga negativa y demostrar que la fuerza neta sobre el dipolo es $Cp\mathbf{i}$.

(b) Demostrar que, en general, si un dipolo de momento $\mathbf{p}$ está sobre el eje x en un campo eléctrico que tiene la dirección x, la fuerza neta sobre el dipolo viene dada aproximadamente por $(dE_x/dx)p\mathbf{i}$.

••• **56** Una carga puntual positiva $+Q$ está en el origen y un dipolo de momento $\mathbf{p}$ está a una distancia r teniendo una dirección radial respecto al origen, según se ve en la figura 22.26.

(a) Demostrar que la fuerza ejercida por el campo eléctrico de la carga puntual sobre el dipolo es atractiva con un valor aproximado de $2kQp/r^3$ (ver problema 55).

(b) Considerar ahora que el dipolo está en el origen y que una carga puntual Q está a una distancia r sobre la línea del dipolo. A partir del resultado de la parte (a) y la tercera ley de Newton, demostrar que el valor del campo eléctrico del dipolo a lo largo de la línea del dipolo y a una distancia r del mismo es aproximadamente $2kp/r^3$.

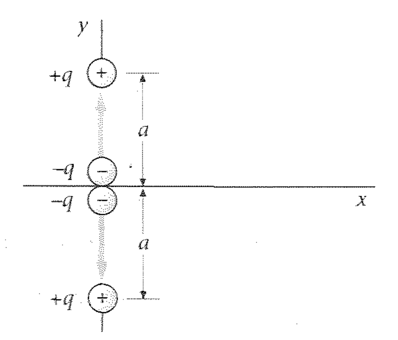


Figura 22.35 Problema 57.

••• **57** Un cuadripolo consta de dos dipolos próximos entre sí como indica la figura 22.35. La carga efectiva en el origen es $-2q$ y las otras cargas sobre el eje y en $y = a$ e $y = -a$ valen cada una $+q$.

(a) Hallar el valor del campo eléctrico en un punto sobre el eje x a gran distancia de manera que $x >> a$.

(b) Hallar el valor del campo eléctrico en un punto sobre el eje y de tal modo que $y >> a$.

Problemas generales

• **58** Un cuerpo aislante cargado y un metal descargado

(a) siempre se repelen entre sí.

(b) no ejercen fuerzas electrostáticas del uno al otro.

(c) siempre se atraen entre sí.

(d) pueden atraerse o repelerse según el signo de la carga del aislante.

• **59** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(a) Una carga positiva experimenta una fuerza electrostática atractiva hacia un conductor neutro próximo.

(b) Una carga positiva no experimenta fuerzas electrostáticas en las proximidades de un conductor neutro.

(c) Una carga positiva experimenta una fuerza repulsiva, alejándose de un conductor próximo.

(d) Cualquiera que sea la fuerza sobre una carga positiva próxima a un conductor neutro, la fuerza sobre una carga negativa estará dirigida en sentido opuesto.

(e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

• **60** ¿Cuál (si lo hay) de los diagramas representados en la figura 22.36 representa mejor un dipolo eléctrico?

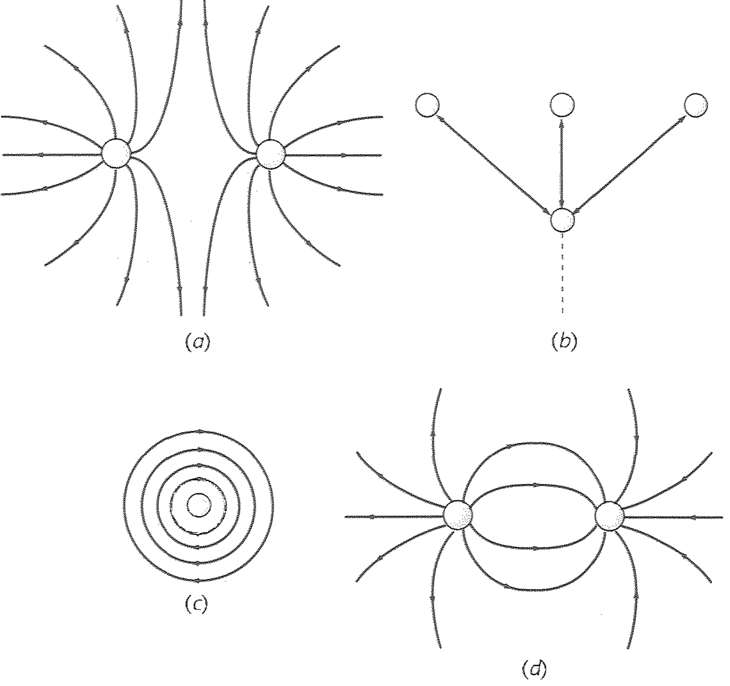


Figura 22.36 Problema 60.

•• **61** Una molécula de momento dipolar eléctrico $\mathbf{p}$ está orientada de modo que $\mathbf{p}$ forma un ángulo θ con un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$. El dipolo puede moverse libremente en respuesta a la fuerza ejercida por el campo. Describir el movimiento del dipolo. Supongamos que el campo eléctrico no es uniforme y es mayor en la dirección x. ¿Cómo se modificará el movimiento?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• **62** Verdadero o falso:

(a) El campo eléctrico de una carga puntual tiene un sentido siempre de alejamiento de la carga.
(b) Todas las cargas macroscópicas Q pueden escribirse en la forma $Q = \pm Ne$, en donde N es un número entero y e es la carga del electrón.
(c) Las líneas de campo eléctrico nunca divergen desde un punto del espacio.
(d) Las líneas de campo eléctrico nunca pueden cortarse en un punto del espacio.
(e) Todas las moléculas poseen momentos dipolares eléctricos en presencia de un campo eléctrico externo.

•• **63** Una pequeña bola no conductora y sin carga neta se suspende de un hilo. Si aproximamos a la bola una carga positiva, la bola es atraída hacia la carga. ¿A qué se debe esta atracción? ¿Qué ocurriría si la carga que se aproxima es negativa?

•• **64** Dos bolas metálicas poseen cargas $+q$ y $-q$. Explicar como se modificará la fuerza que actúa sobre una de ellas,

(a) si, permaneciendo invariable la distancia que les separa, se introducen en agua, y
(b) si una tercera bola metálica cargada se interpone entre las dos primeras. Razonar la respuesta.

•• **65** Una bola metálica está positivamente cargada. ¿Es posible que atraiga a otra bola también cargada positivamente? Razonar la respuesta.

• **66** En el espacio interestelar dos objetos cargados casi puntuales, cada uno de masa m y carga q, están separados por una distancia d y se dejan en libertad de movimiento. A esta distancia permanecen inmóviles. Determinar una expresión para q en función de m, G y k.

•• **67** Tres cargas puntuales de $-5{,}0\ \mu$C, $+3{,}0\ \mu$C y $+5{,}0\ \mu$C están localizadas a lo largo del eje x en $x = -1{,}0$ cm, $x = 0$ y $x = +1{,}0$ cm, respectivamente. Calcular el campo eléctrico en $x = 3{,}0$ cm y en $x = 15{,}0$ cm. ¿Existe algún punto sobre el eje x en donde la magnitud del campo eléctrico sea cero? Localizar dicho punto.

•• **68** Para la distribución de carga del problema 67, determinar el campo eléctrico en $x = 15{,}0$ cm como el vector suma del campo eléctrico debido a un dipolo formado por las dos cargas de $5{,}0\ \mu$C y una carga puntual de $3{,}0\ \mu$C, ambos localizados en el origen. Comparar el resultado con el obtenido en el problema 67 y explicar cualquier diferencia entre ambos.

•• **69** En el cobre existe aproximadamente un electrón libre por cada átomo. Una moneda de cobre posee una masa de 3 g.

(a) ¿Qué porcentaje de la carga libre debería extraerse de la moneda para que ésta adquiriese una carga de $15\ \mu$C?
(b) ¿Cuál sería la fuerza de repulsión entre dos monedas que portaran esta carga si estuvieran separadas una distancia de 25 cm? Suponer que las monedas son cargas puntuales.

•• **70** Dos cargas, q_1 y q_2, dan una carga total de $6\ \mu$C cuando se combinan. Cuando están separadas 3 m la fuerza ejercida por una carga sobre la otra tiene un valor de 8 mN. Hallar q_1 y q_2 si

(a) ambas son positivas de modo que se repelen entre sí y
(b) una es positiva y la otra es negativa de modo que se atraen entre sí.

•• **71** Tres cargas, $+q$, $+2q$ y $+4q$, están conectadas por cuerdas del modo indicado en la figura 22.37. Determinar las tensiones T_1 y T_2.

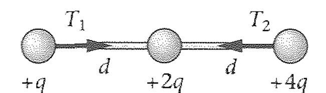


Figura 22.37 Problema 71.

•• **72** Una carga positiva Q ha de dividirse en dos cargas positivas q_1 y q_2. Demostrar que para una separación dada D, la fuerza ejercida por una carga sobre la otra es máxima si $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q$.

•• **73** Una carga Q está localizada en $x = 0$ y otra carga $4Q$ se encuentra en $x = 12{,}0$ cm. La fuerza ejercida sobre una carga de $-2\ \mu$C es cero si ésta se encuentra en $x = 4{,}0$ cm y es 126,4 N en la dirección positiva de x si se sitúa en $x = 8{,}0$ cm. Determinar la carga Q.

•• **74** Dos pequeñas esferas (cargas puntuales) separadas por una distancia de 0,60 m transportan una carga total de $200\ \mu$C.

(a) Si las dos esferas se repelen entre sí con una fuerza de 80 N, ¿cuáles son las cargas sobre las dos esferas?
(b) Si las dos esferas se atraen mutuamente con una fuerza de 80 N, ¿cuáles son las cargas sobre las dos esferas?

•• **75** Una bola de carga conocida q y masa desconocida m, inicialmente en reposo, cae libremente desde una altura en un campo eléctrico uniforme **E** dirigido verticalmente hacia abajo. La bola choca contra el suelo a una velocidad $v = 2\sqrt{gh}$. Determinar m en función de E, q y g.

•• **76** Dos cargas de $3{,}0\ \mu$C están localizadas en $x = 0$, $y = 2{,}0$ m y en $x = 0$, $y = -2{,}0$ m. Otras dos cargas Q están localizadas en $x = 4{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m y en $x = 4{,}0$, $y = -2{,}0$ m (figura 22.38). El campo eléctrico en $x = 0$, $y = 0$ es $(4{,}0 \times 10^3$ N/C)**i**. Determinar Q.

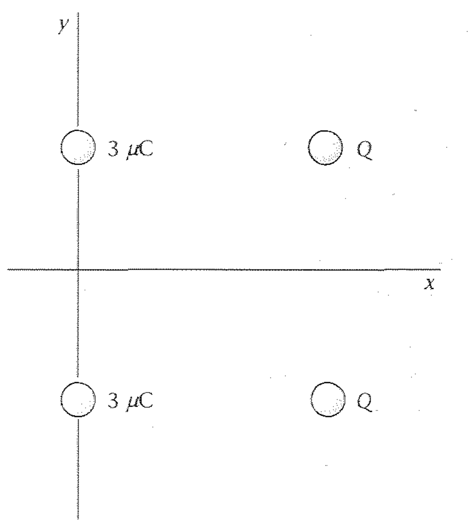


Figura 22.38 Problema 76.

•• **77** Dos pequeños conductores esféricos (cargas puntuales) idénticos separados 0,60 m, transportan una carga total de $200\ \mu$C. Se repelen mutuamente con una fuerza de 120 N.

(a) Determinar la carga sobre cada esfera.
(b) Las dos esferas se ponen en contacto eléctrico y luego se separan de modo que cada una transporta $100\ \mu$C. Determinar la fuerza ejercida por una esfera sobre la otra cuando la separación es de 0,60 m.

•• **78** Repetir el problema 77 para el caso en que las dos esferas se atraen inicialmente una a la otra con una fuerza de 120 N.

•• **79** Una carga de $-3{,}0\ \mu$C está localizada en el origen; una segunda carga de $4{,}0\ \mu$C está localizada en $x = 0{,}2$ m, $y = 0$; y una tercera carga Q está situada en $x = 0{,}32$ m, $y = 0$. La fuerza que actúa sobre la carga de $40\ \mu$C es 240N, en dirección x positiva.

(a) Determinar la carga Q.
(b) Con esta configuración de tres cargas, ¿en qué punto a lo largo de la dirección x el campo eléctrico se anula?

•• **80** Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud L. Cuando cada una de las esferas transporta la carga q, cada cuerda forma un ángulo θ con la vertical como indica la figura 22.39.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) Demostrar que la carga q viene dada por

$$q = 2L \ \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{mg \operatorname{tg} \theta}{k}}$$

en donde k es la constante de Coulomb.

(b) Determinar q si $m = 10$ g, $L = 50$ cm y $\theta = 10°$.

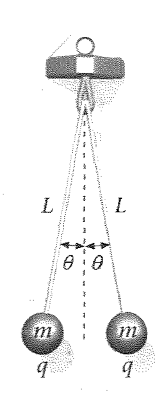


Figura 22.39 Problemas 80 y 90.

•• **81**

(a) Supongamos que en el problema 80, $L = 1{,}5$ m, $m = 0{,}01$ kg y $q = 0{,}75$ μC. ¿Cuál es el ángulo que cada cuerda forma con la vertical?

(b) Determinar el ángulo que cada cuerda forma con la vertical si una masa transporta una carga de 0,50 μC y la otra una carga de 1,0 μC.

•• **82** Cuatro cargas del mismo valor están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado L, según se ve en la figura 22.40.

(a) Hallar el valor y dirección de la fuerza ejercida sobre la carga situada en el vértice inferior izquierdo por las otras cargas.

(b) Demostrar que el campo eléctrico debido a las cuatro cargas en el punto medio de uno de los lados del cuadro está dirigido a lo largo de dicho lado hacia la carga negativa y que su valor es

$$E = k\frac{8q}{L^2}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25}\right)$$

$-q$ ○- - - - - - ○ $+q$

$+q$ ○- - - - - - ○ $-q$

Figura 22.40 Problema 82.

•• **83** La figura 22.41 muestra una palanqueta formada por dos masas idénticas m sujetas a los extremos de una barra delgada (sin masa) de longitud a con un pivote en su centro. Las masas transportan las cargas $+q$ y $-q$ y el sistema está localizado en un campo eléctrico uniforme **E**. Demostrar que para valores pequeños del ángulo θ entre la dirección del dipolo y el campo eléctrico, el sistema ejecuta un movimiento armónico simple y deducir la expresión del periodo de este movimiento.

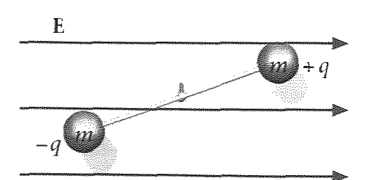


Figura 22.41 Problemas 83 y 84.

•• **84** Para la palanqueta de la figura 22.41, sea $m = 0{,}02$ kg, $a = 0{,}3$ m y $\mathbf{E} = (600$ N/C)$\mathbf{i}$. Inicialmente la palanqueta está en reposo y forma un ángulo de 60° con el eje x. Se deja entonces en libertad y cuando está momentáneamente alineada con el campo eléctrico, su energía cinética es 5×10^{-3} J. Determinar la magnitud de q.

•• **85** Un electrón (carga $-e$, masa m) y un positrón (carga $+e$, masa m) giran alrededor de su centro común de masas bajo la influencia de su fuerza atractiva de Coulomb. Determinar la velocidad v de cada partícula en función de e, m, k y su separación r.

•• **86** La separación de equilibrio entre los núcleos de la molécula iónica KBr es 0,282 nm. Las masas de los dos iones, K^+ y Br^- son muy aproximadamente iguales, $1{,}4 \times 10^{-25}$ kg, y cada uno de los dos iones transporta una carga de magnitud e. Utilizar el resultado del problema 83 para determinar la frecuencia de oscilación de una molécula de KBr en un campo eléctrico uniforme de 1000 N/C.

••• **87** Una pequeña masa (puntual) m de carga q está restringida a moverse verticalmente dentro de un cilindro estrecho y sin rozamiento (figura 22.42). En el fondo del cilindro hay una masa puntual de carga Q de igual signo que q.

(a) Demostrar que la masa m estará en equilibrio a una altura $y_0 = (kqQ/mg)^{1/2}$.

(b) Demostrar que si la masa m es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio y se deja en libertad ejecutará un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\omega = (2g/y_0)^{1/2}$.

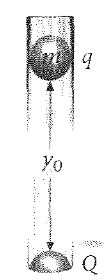


Figura 22.42 Problema 87.

••• **88** Una pequeña cuenta de masa m, portadora de una carga negativa $-q$, está restringida a moverse a lo largo de una barra delgada y sin rozamiento (figura 22.43). A una distancia L de esta barra hay una carga positiva Q. Demostrar que si la cuenta se desplaza una distancia x, en donde $x \ll L$, y se deja libremente, experimentará un movimiento armónico simple. Obtener una expresión para el período de este movimiento en función de los parámetros L, Q, q y m.

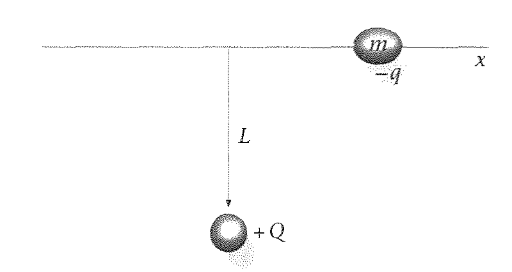


Figura 22.43 Problema 88.

••• **89** Repetir el problema 81 con el sistema localizado en un campo eléctrico uniforme de $1{,}0 \times 10^5$ N/C que apunta verticalmente hacia abajo.

••• **90** Supongamos que las dos masas del problema 80 no son iguales. Una masa es 0,01 kg, la otra 0,02 kg. Las cargas de las dos masas son 2,0 y 1,0 μC, respectivamente. Determinar el ángulo que cada una de las cuerdas que soportan las masas forma con la vertical.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

••• **91** Un péndulo simple de longitud $L = 1,0$ m y masa $M = 5,0 \times 10^{-3}$ kg se sitúa en un campo eléctrico E dirigido verticalmente. La lenteja posee una carga de $-8,0\ \mu$C. El período del péndulo es 1,2 s. ¿Cuál es la magnitud y sentido de E?

••• **92** Dos moléculas polares neutras se atraen entre sí. Supongamos que cada una de ellas posee un momento dipolar **p** y que estos dipolos están alineados a lo largo del eje x y separados una distancia d. Deducir una expresión para la fuerza de atracción en función de p y d.

••• **93** Una pequeña cuenta de masa m y carga q está restringida a deslizarse a lo largo de una barra delgada de longitud L. En los extremos de la barra existen sendas cargas Q (figura 22.44).

(a) Obtener una expresión para el campo eléctrico debido a las dos cargas Q en función de x, en donde x es la distancia contada desde el punto medio de la barra.
(b) Demostrar que si para $x << L$, la magnitud del campo es proporcional a x.
(c) Demostrar que si q es del mismo signo que Q, la fuerza que actúa sobre el objeto de masa m está siempre dirigido hacia el centro de la barra y es proporcional a x.
(d) Determinar el período de oscilación de la masa m si ésta se desplaza ligeramente una pequeña distancia del centro de la barra y luego se deja en libertad.

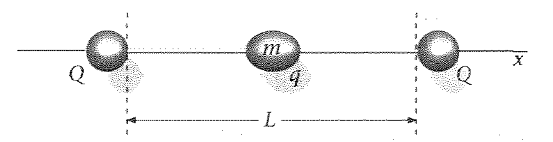


Figura 22.44 Problema 93.

••• **94** Dos cargas positivas iguales Q se encuentran sobre el eje x en $x = \frac{1}{2}L$ y $x = -\frac{1}{2}L$.

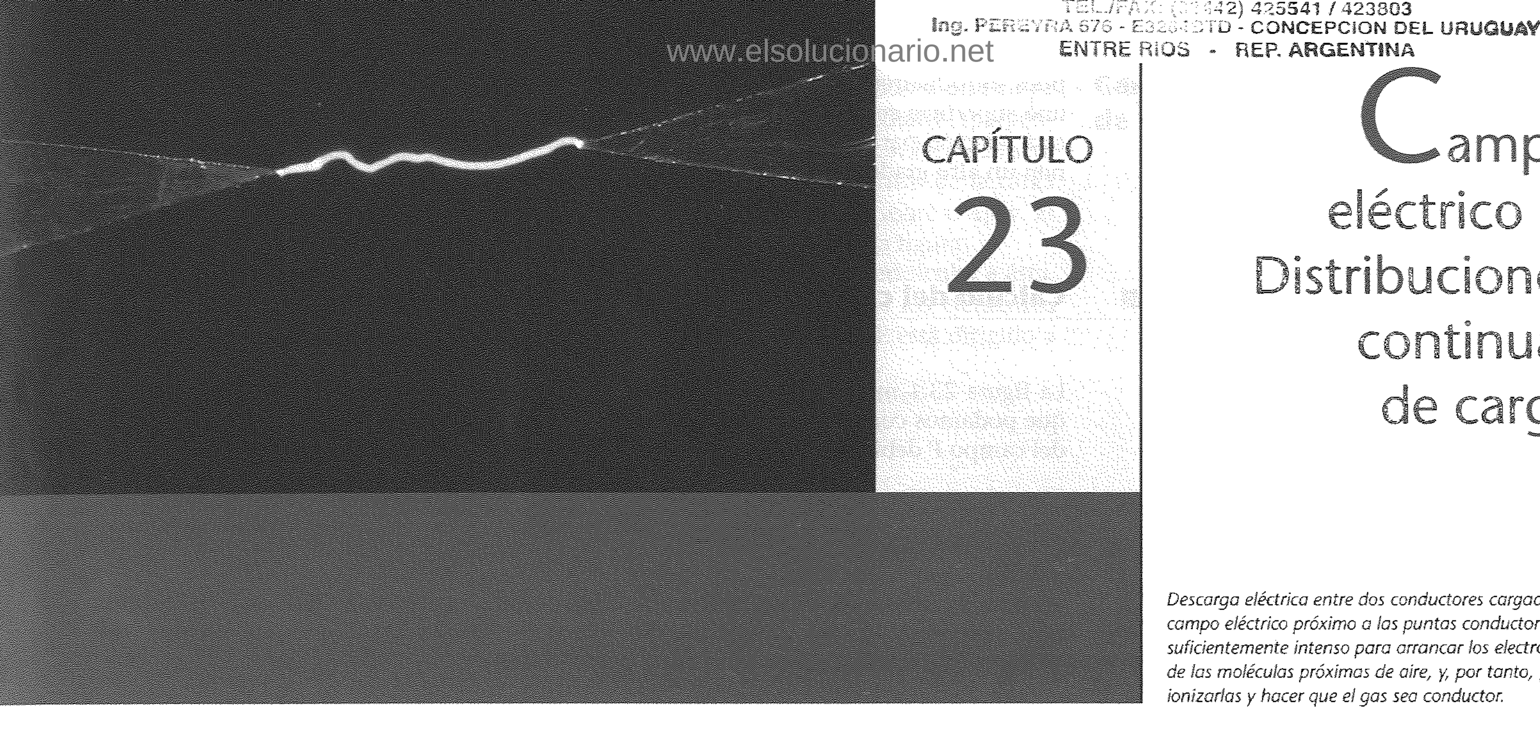
(a) Obtener una expresión para el campo eléctrico en función de y sobre el eje y.
(b) Un anillo de masa m y carga q, se mueve sobre una barra delgada y sin rozamiento a lo largo del eje y. Determinar la fuerza que actúa sobre la carga q en función de y; determinar el signo q para que esta fuerza apunte siempre hacia $y = 0$.
(c) Demostrar que para valores pequeños de y el anillo ejecuta un movimiento armónico simple.
(d) Si $Q = 5\ \mu$C, $|q| = 2\ \mu$C, $L = 24$ cm y $m = 0,03$ kg, ¿cuál es la frecuencia de la oscilación para pequeñas amplitudes?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
www.elsolucionario.net

TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO

23

Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga

Descarga eléctrica entre dos conductores cargados. El campo eléctrico próximo a las puntas conductoras es suficientemente intenso para arrancar los electrones de las moléculas próximas de aire, y, por tanto, para ionizarlas y hacer que el gas sea conductor.

www.elsolucionario.net

A escala microscópica, la carga eléctrica está cuantizada. Sin embargo, con frecuencia se presentan situaciones en las que un gran número de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse distribuida continuamente en el espacio. El uso de una densidad de carga continua para describir una distribución de un gran número de cargas discretas, es semejante al uso de una densidad de masa continua para describir el aire, el cual realmente consta de un gran número de moléculas discretas. En cualquier caso es normalmente fácil encontrar un elemento de volumen ΔV que sea suficientemente grande para contener una multitud de cargas o moléculas individuales y al mismo tiempo suficientemente pequeño para sustituir ΔV por la diferencial dV y utilizar el cálculo sin error despreciable.

La carga existente por unidad de volumen puede describirse por la **densidad de carga volúmica** ρ:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \qquad \textbf{(23.1)}$$

Frecuentemente la carga se distribuye en una capa delgada sobre la superficie de un cuerpo. En tales casos se define la **densidad de carga superficial** σ como la carga por unidad de área:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \qquad \textbf{(23.2)}$$

Análogamente, si la carga se encuentra distribuida a lo largo de una línea en el espacio, definimos la **densidad de carga lineal** λ como la carga por unidad de longitud:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \qquad \textbf{(23.3)}$$

En este capítulo veremos algunos ejemplos del uso de la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico debido a diversos tipos de distribuciones continuas de carga. Des-

 www.elsolucionario.net

pués introduciremos la ley de Gauss, que relaciona el campo eléctrico que existe sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie, y utilizaremos esta relación para calcular el campo eléctrico en ciertas distribuciones de carga que tienen un alto grado de simetría.

23.1 ■ Cálculo del campo eléctrico E mediante la ley de Coulomb

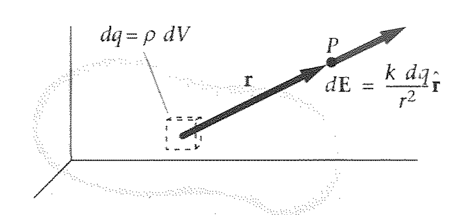


Figura 23.1 Un elemento de carga dq produce un campo $d\mathbf{E} = (k\,dq/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ en el punto P. El campo en P debido a la carga total se obtiene integrando esta expresión para toda la distribución de carga.

La figura 23.1 muestra un elemento de carga $dq = \rho\, dV$ suficientemente pequeño para que podamos considerarle como una carga puntual. El campo eléctrico $d\mathbf{E}$ en un punto del campo P debido a este elemento de carga viene dado por la ley de Coulomb:

$$d\mathbf{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

en donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta desde el elemento a dicho punto. El campo total en P se determina integrando esta expresión para la distribución de la carga completa, la cual consideramos que ocupa cierto volumen V:

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.4)}$$

Campo eléctrico debido a una distribución continua de carga

en donde $dq = \rho\, dV$. Si la carga está distribuida sobre una superficie o línea, utilizaremos $dq = \sigma\, dA$ o $dq = \lambda\, dL$ e integraremos para toda la superficie o línea.

■ Campo eléctrico E sobre el eje de una carga lineal finita

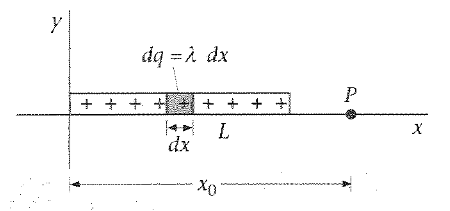


Figura 23.2 Geometría para el cálculo del campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal uniforme, de longitud L, carga Q y densidad de carga lineal $\lambda = Q/L$. Un elemento $dq = \lambda\, dx$ de la carga lineal puede considerarse como una carga puntual.

Una carga uniforme Q está distribuida a lo largo del eje x desde $x = 0$ a $x = L$ como indica la figura 23.2. La densidad de carga lineal para esta carga es $\lambda = Q/L$. Queremos determinar el campo eléctrico producido por esta carga lineal en un punto P sobre el eje x, en $x = x_0$, siendo $x_0 > L$. En la figura, hemos elegido un pequeño elemento diferencial dx que dista x del origen. El punto del campo P se encuentra a una distancia $r = x_0 - x$ de este elemento de carga. El campo eléctrico debido a este elemento de carga está dirigido a lo largo del eje x y su magnitud es, de acuerdo con la ley de Coulomb:

$$dE_x = \frac{k\,dq}{(x_0 - x)^2} = \frac{k\lambda\,dx}{(x_0 - x)^2}$$

Para determinar el campo total integraremos para toda la carga lineal completa desde $x = 0$ a $x = L$:

$$E_x = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = k\lambda \left[\frac{1}{x_0 - x}\right]_0^L$$

$$= k\lambda\left\{\frac{1}{x_0 - L} - \frac{1}{x_0}\right\} = k\lambda\left\{\frac{L}{x_0(x_0 - L)}\right\}$$

Aplicando $\lambda = Q/L$ resulta

$$E_x = \frac{kQ}{x_0(x_0 - L)} \qquad \textbf{(23.5)}$$

Como puede verse, si x_0 es mucho mayor que L, el campo eléctrico en x_0 es aproximadamente kQ/x_0^2. Es decir, si estamos suficientemente lejos de la carga lineal, ésta se comporta como una carga puntual.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Campo eléctrico E fuera del eje de una carga lineal finita

En primer lugar consideraremos el caso simple del campo eléctrico debido a una carga lineal uniforme de longitud L y carga total Q en un punto P sobre la mediatriz (perpendicular en su punto medio) de la carga lineal, como indica la figura 23.3. Hemos escogido un sistema de coordenadas tal que el origen se encuentra en el centro de la carga lineal, la carga está distribuida sobre el eje x y el punto del campo P está sobre el eje y. El elemento de carga $dq = \lambda\, dx$ y el campo $d\mathbf{E}$ que produce se muestran en la figura.

El campo tiene un componente paralelo a la carga lineal y otro perpendicular a ésta. Sin embargo, dada la simetría de la distribución cuando sumemos todos los elementos de carga de la línea, los componentes paralelos se anularán y el campo $\mathbf{E}$ está dirigido a lo largo del eje y.

La magnitud del campo producido por un elemento de carga $dq = \lambda\, dx$ es

$$|d\mathbf{E}| = \frac{k\, dq}{r^2} = \frac{k\lambda\, dx}{r^2}$$

El componente y es

$$dE_y = \frac{k\lambda\, dx}{r^2}\cos\theta = \frac{k\lambda y\, dx}{r^3} \tag{23.6}$$

en donde $\cos\theta = y/r$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$. El campo total E_y se calcula integrando desde $x = -\frac{1}{2}L$ a $x = +\frac{1}{2}L$. Dada la simetría de la distribución de carga, la contribución de cada mitad de la carga lineal al campo total es idéntica, de modo que puede obtenerse el mismo resultado integrando de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}L$ y multiplicando por 2. Es decir

$$E_y = \int_{x=-\frac{1}{2}L}^{x=+\frac{1}{2}L} dE_y = 2\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L} dE_y = 2k\lambda y\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L}\frac{dx}{r^3} \tag{23.7}$$

Esta integral es de la forma estándar que se encuentra en las tablas:

$$\int\frac{dx}{r^3} = \frac{1}{y^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{y^2}\operatorname{sen}\theta$$

En la figura vemos que $\theta = 0$ en $x = 0$, y, por tanto, sen $\theta = 0$ en el límite inferior. En el límite superior, para $x = L/2$, $\theta = \theta_0$, como se muestra en la figura 23.3. El campo es, por tanto,

$$E_y = \frac{2k\lambda y}{y^2}\operatorname{sen}\theta_0$$

o sea,

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}} \tag{23.8}$$

Campo **E** *en la mediatriz de una carga lineal finita*

en donde (según la figura 23.3) sen θ_0 está relacionado con L e y por

$$\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}}$$

Ejercicio Demostrar que cuando y es mucho mayor que L, una carga lineal finita se comporta como una carga puntual, es decir, la ecuación 23.8 se reduce a $E_y \approx kQ/y^2$.

En un punto situado a una distancia y de la carga lineal, pero no en la mediatriz, el campo tiene los componentes x e y. El cálculo de estos componentes se plantea en la sección de problemas (véase problemas 23.12 y 23.13).

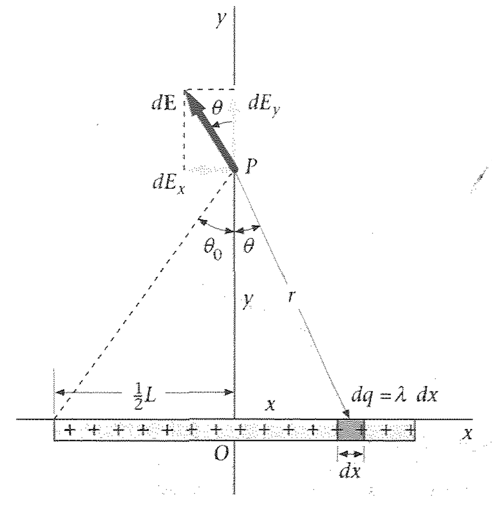
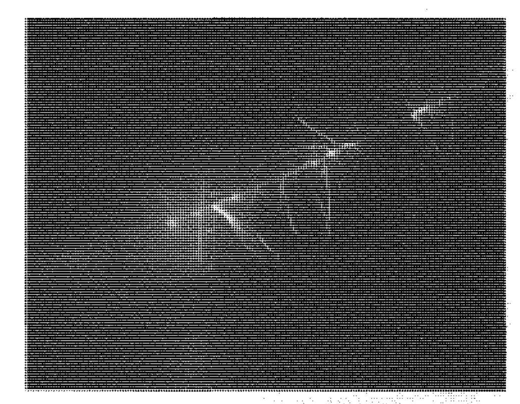


Figura 23.3 Geometría para el cálculo del campo eléctrico en un punto de la mediatriz de una carga lineal finita uniforme. Por simetría, el campo eléctrico neto es perpendicular a la carga lineal.



Líneas del campo eléctrico próximas a un largo cable. El campo eléctrico próximo a una línea de alta tensión puede ser suficiente para arrancar los electrones de las moléculas de aire, y por tanto de ionizarlas y convertir el aire en conductor. El resplandor resultante de la recombinación de los electrones libres con los iones se denomina descarga en corona.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Campo eléctrico E debido a una carga lineal infinita

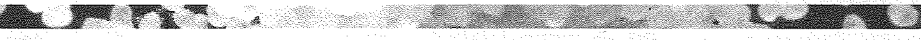
Si se considera un punto del campo muy próximo a una carga lineal o, alternativamente, la carga lineal es de gran longitud, de modo que $y << L$, el ángulo θ_0 (véase figura 23.3) es aproximadamente 90° y sen $\theta_0 \approx 1$. Así,

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \qquad (23.9)$$

*Campo **E** a una distancia y de una carga lineal infinita*

Así pues, cuando la distancia y desde la carga lineal infinita a un punto del campo crece, el campo eléctrico disminuye según $1/y$.

Ejercicio Comprobar que la ecuación 23.9 tiene las unidades correctas del campo eléctrico.



EJEMPLO 23.1

Una carga lineal de densidad lineal λ = 4,5 nC/m está distribuida sobre el eje x y se extiende de x = −5 cm a x = 5 cm. Calcular el campo eléctrico sobre el eje y, utilizando la expresión exacta

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\,\text{sen}\,\theta_0 = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}}$$

(ecuación 23.8) para (a) y = 1 cm, (b) y = 4 cm, (c) y = 40 cm. (d) Calcular el campo eléctrico sobre el eje y para y = 1,0 cm, suponiendo que la carga lineal es infinita. (e) Determinar la carga total y calcular el campo en y = 40 cm, suponiendo que la carga lineal se reduce a un punto.

Esquema del problema En la ecuación del sen θ_0 podemos expresar L e y en centímetros y así las unidades se cancelan. (d) Para determinar el campo muy próximo a la carga lineal, utilizamos $E_y = 2k\lambda/y$. (e) Determinar el campo muy lejos de la carga: para ello, usar $E_y = kQ/y^2$ con $Q = \lambda L$.

(a) Calcular E_y para y = 1 cm, λ = 4,5 nC/m y L = 0,5 cm:

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}}$$

$$= \frac{2(8{,}99\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4{,}5\times10^{-9}(\ \text{C/m}))}{0{,}01\ \text{m}}\frac{5\ \text{cm}}{\sqrt{(5\ \text{cm})^2+(1\ \text{cm})^2}}$$

$$= \frac{80{,}9\ \text{N}\cdot\text{m/C}}{0{,}01\ \text{m}}\frac{5\ \text{cm}}{\sqrt{26}\ \text{cm}}$$

$$= 7{,}93\times10^3\ \text{N/C} = 7{,}93\ \text{kN/C}$$

(b) Repetir el cálculo para y = 4 cm = 0,04 m, usando el resultado $2k\lambda$ = 80,9 N · m/C para simplificar la notación:

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}} = \frac{80{,}9\ \text{N}\cdot\text{m/C}}{0{,}04\ \text{m}}\frac{5\ \text{cm}}{\sqrt{(5\ \text{cm})^2+(4\ \text{cm})^2}}$$

$$= 1{,}58\times10^3\ \text{N/C} = 1{,}58\ \text{kN/C}$$

(c) Repetir el cálculo para y = 40 cm:

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2+y^2}} = \frac{80{,}9\ \text{N}\cdot\text{m/C}}{0{,}4\ \text{m}}\frac{5\ \text{cm}}{\sqrt{(5\ \text{cm})^2+(40\ \text{cm})^2}} = 25{,}1\ \text{N/C}$$

(d) Calcular el campo para y = 1 cm = 0,01 m debido a una carga lineal infinita:

$$E_y \approx \frac{2k\lambda}{y} = \frac{80{,}9\ \text{N}\cdot\text{m/C}}{0{,}01\ \text{m}} = 8{,}09\ \text{kN/m}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
009197

(e) Calcular la carga total λL para $L = 0{,}1$ m y utilizarla para determinar el campo de una carga puntual en $y = 4$ m:

$$Q = \lambda L = (4{,}5 \text{ nC/m})(0{,}1 \text{ m}) = 0{,}45 \text{ nC}$$

$$E_y \approx \frac{k\lambda L}{y^2} = \frac{kQ}{y^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(0{,}45 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0{,}40 \text{ m})^2} = 25{,}3 \text{ N/C}$$

Observaciones A 1 cm de la carga lineal de 10 cm de longitud, el valor aproximado de 8,09 kN/C obtenido suponiendo una carga lineal infinita, difiere del valor exacto 7,93 calculado en (a), aproximadamente en un 2%. A 40 cm de la carga lineal, el valor aproximado de 25,3 N/C, obtenido suponiendo que la carga lineal se reduce a una carga puntual, difiere del valor exacto 25,1 N/C obtenido en (c), aproximadamente en un 1%. La figura 23.4 muestra el resultado exacto para este segmento de línea de longitud 10 cm y densidad de carga 4,5 nC/m y para los casos límites de una carga lineal infinita y una carga puntual $Q = \lambda L$.

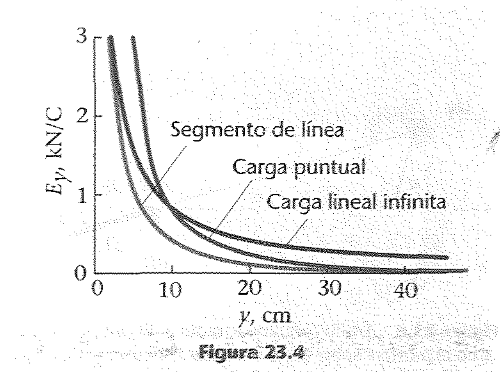


Figura 23.4

EJEMPLO 23.2 ■
¡Inténtelo!

Una carga lineal infinita de densidad lineal $\lambda = 0{,}6$ μC/m está distribuida a lo largo del eje z, y una carga puntual $q = 8$ μC se encuentra sobre el eje y en $y = 3$ m, como se indica en la figura 23.5. Determinar el campo eléctrico en el punto P del eje x, en $x = 4$ m.

Esquema del problema El campo eléctrico en este sistema se determina a partir de la superposición de los campos debidos a la carga lineal infinita y a la carga puntual. El campo de la carga lineal $\mathbf{E}_L$ apunta radialmente alejándose del eje z. Así, en el punto P, sobre el eje x, $\mathbf{E}_L$ tiene la dirección positiva del eje x. La carga puntual produce un campo $\mathbf{E}_p$ a lo largo de la línea que conecta q con el punto P. La distancia de q a P es $r = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5$ m.

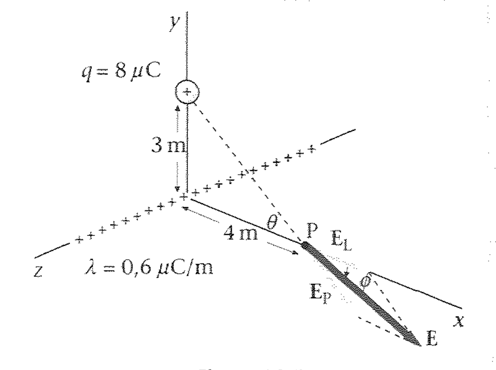


Figura 23.5

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular el campo $\mathbf{E}_L$ en el punto P debido a una carga lineal infinita.	$\mathbf{E}_L = 2{,}70$ kN/C $\mathbf{i}$
2. Determinar el campo $\mathbf{E}_p$ en el punto P debido a la carga puntual. Expresar $\mathbf{E}_p$ en función del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ que apunta de q a P.	$\mathbf{E}_p = 2{,}88$ kN/C $\hat{\mathbf{r}}$
3. Determinar los componentes x e y de $\mathbf{E}_p$.	$E_{px} = E_p(0{,}8) = 2{,}30$ kN/C $E_{py} = E_p(-0{,}6) = -1{,}73$ kN/C
4. Determinar los componentes x e y del campo total en el punto P.	$E_x = 5{,}00$ kN/C, $E_y = -1{,}73$ kN/C
5. Utilizar el resultado de la etapa 4 para calcular la magnitud del campo total.	$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 5{,}29$ kN/C
6. Utilizar el resultado de la etapa 4 para determinar el	$\phi = -19{,}1°$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Campo eléctrico E sobre el eje de una carga anular

La figura 23.6 muestra un anillo de radio a cargado uniformemente con la carga total Q. Deseamos determinar el campo eléctrico en un punto P del eje del anillo a una distancia x del centro del mismo. El campo $d\mathbf{E}$ debido a la carga elemental dq viene indicado en la figura. Este campo tiene un componente dE_x dirigido a lo largo del eje del anillo y un componente $dE_\perp$ perpendicular al eje. A partir de la simetría de la figura vemos que el campo resultante debido al anillo entero debe estar dirigido a lo largo del eje del anillo; es decir, se anulará la suma de los componentes perpendiculares. El componente axial del campo debido al elemento de carga indicado es

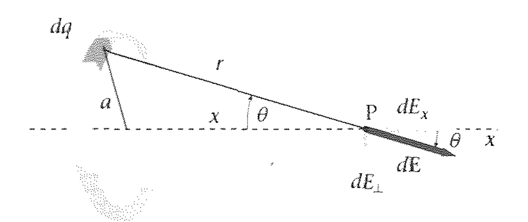


Figura 23.6 Anillo cargado de radio a. El campo eléctrico en el punto P sobre el eje x debido al elemento de carga dq posee un componente a lo largo del eje x y uno perpendicular a ese mismo eje. Cuando los componentes perpendiculares correspondientes a todos los elementos del anillo se suman, se cancelan entre sí, de tal modo que el campo neto está dirigido a lo largo del eje x.

$$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\,dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{k\,dq\,x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

en donde

$$r^2 = x^2 + a^2$$

y

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

El campo debido al anillo completo cargado es

$$E_x = \int \frac{kx\,dq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Como x no varía al integrar para los elementos de carga, podemos sacarle fuera de la integral. Por tanto,

$$E_x = \frac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \int dq$$

es decir,

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{23.10}$$

Campo eléctrico **E** *sobre el eje de una carga anular*

Ejercicio Determinar el campo sobre el eje de una carga anular cuando (a) $x = 0$ y (b) x es mucho mayor que a (*Respuestas:* (a) $E_x = 0$ para $x = 0$, (b) $E_x \approx kQ/x^2$ para $x >> a$.)

Campo eléctrico E en el eje de un disco uniformemente cargado

La figura 23.7 muestra un disco uniformemente cargado de radio R y carga total Q. Podemos calcular el campo sobre el eje del disco considerando éste como si estuviera formado por una serie de cargas anulares concéntricas. Por simetría, el campo **E** en el eje del disco está dirigido a lo largo del eje. Consideremos un anillo de radio a y anchura da como indica la figura. El área de este anillo es $dA = 2\pi a\,da$, y su carga es $dq = \sigma\,dA = 2\pi\sigma a\,da$, en donde $\sigma = Q/\pi R^2$ es la carga por unidad de área. El campo producido por este anillo viene dado por la ecuación 23.10 reemplazando Q por $dq = 2\pi\sigma a\,da$. Así resulta

$$dE_x = \frac{kx2\pi\sigma a\,da}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

El campo total producido por el disco se determina integrando esta expresión desde $a = 0$ hasta $a = R$:

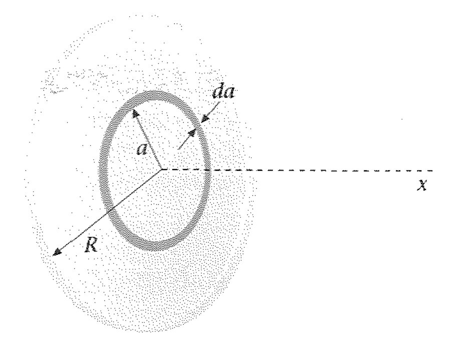


Figura 23.7 Un disco que posee una densidad de carga superficial uniforme puede considerarse como una serie de cargas anulares de radio a y espesor da que transporta cada una de ellas una carga $dq = \sigma\,dA = (Q/\pi R^2)2\pi a\,da$.

$$E_x = \int_0^R \frac{kx2\pi\sigma a\,da}{(x^2+a^2)^{3/2}} = kx\pi\sigma\int_0^R (x^2+a^2)^{-3/2}\,2a\,da$$

Esta integral es de la forma $\int u^n\,du$, con $u = x^2 + a^2$ y $n = -\frac{3}{2}$. La integración nos da

$$E_x = kx\pi\sigma\left[\frac{(x^2+a^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R = -2kx\pi\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{x}\right)$$

www.elsolucionario.net

es decir,

$$E_x = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \quad \textbf{(23.11)}$$

Campo eléctrico **E** *en el eje de un disco uniformemente cargado*

Si estamos muy lejos del disco, es lógico que éste se comporte como una carga puntual. Si meramente reemplazamos $x^2 + R^2$ por x^2 para $x >> R$ resulta $E_x \to 0$. Aunque este resultado es correcto, no nos dice nada sobre la dependencia de E_x con x para valores grandes de x. Es mejor deducir esta dependencia utilizando el desarrollo en serie del binomio $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ para $\epsilon << 1$. Aplicándolo al segundo miembro de la ecuación 23.11 resulta

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{x}{x(1 + R^2/x^2)^{1/2}} = \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2x^2} + \ldots$$

Si utilizamos sólo el primer término del desarrollo del binomio, resulta $E_x \approx 0$. Sin embargo, si utilizamos los dos primeros términos del desarrollo, la ecuación 23.11 se convierte en

$$E_x \approx 2\pi k\sigma\left(1 - 1 + \frac{R^2}{2x^2} + \ldots\right) = \frac{k\pi R^2\sigma}{x^2} = \frac{kQ}{x^2}$$

en donde $Q = \sigma\pi R^2$ es la carga total del disco.

Campo eléctrico E en las proximidades de un plano infinito de carga

El resultado importante del campo próximo a un plano infinito de carga puede obtenerse a partir de la ecuación 23.11 haciendo que R tienda a infinito o que x tienda a cero. Entonces

$$E_x = 2\pi k\sigma, \qquad x > 0 \quad \textbf{(23.12a)}$$

Campo **E** *en las proximidades de un plano infinito de carga*

Por tanto, el campo debido a una distribución de carga en un plano infinito es uniforme; es decir, el campo no depende de x. Al otro lado del plano infinito, para valores negativos de x, el campo apunta en la dirección x negativa, de modo que

$$E_x = -2\pi k\sigma, \qquad x < 0 \quad \textbf{(23.12b)}$$

Si nos desplazamos a lo largo del eje x, el campo eléctrico salta de $-2\pi k\sigma\mathbf{i}$ a $+2\pi k\sigma\mathbf{i}$ al atravesar el plano infinito de carga (figura 23.8). Existe, pues, una discontinuidad en E_x de valor $4\pi k\sigma$.

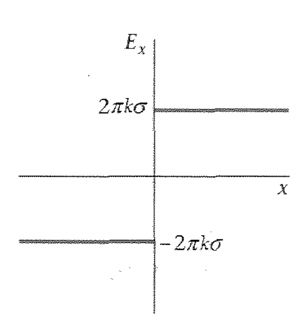
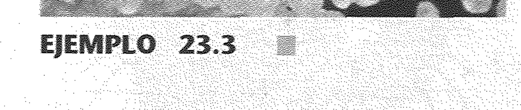


Figura 23.8 Gráfico que muestra la discontinuidad de E en un plano de carga.



EJEMPLO 23.3

Un disco de radio 5 cm, es portador de una densidad de carga superficial uniforme de valor 4 μC/m^2. Utilizando aproximaciones razonables, determinar el campo eléctrico sobre el eje del disco a distancias de (a) 0,01 cm, (b) 0,03 cm, (c) 6 m y (d) 6 cm.

Esquema del problema Para (a) y (b), el punto del campo está muy próximo al disco en comparación con su radio; por tanto, podemos suponer que el disco se comporta como un plano infinito. Para (c), el punto del campo está suficientemente lejos del disco para que éste se comporte como una carga puntual. (d) Como 6 cm es una distancia comparable al radio del disco (5 cm), debemos utilizar la expresión exacta.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) El campo eléctrico próximo al disco puede considerarse igual al creado por un plano infinito de carga:

$$E_x = 2\pi k\sigma$$
$$= 2\pi(8{,}99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(4\times10^{-6}\mathrm{C/m^2}) = 226\ \mathrm{kN/C}$$

(b) Como 0,03 cm sigue siendo una distancia muy corta aplicaremos la aproximación del plano infinito:

$$E_x = 2\pi k\sigma = 226\ \mathrm{kN/C}$$

(c) 1. Lejos del disco, el campo es aproximadamente el debido a una carga puntual:

$$E_x = \frac{kQ}{x^2}$$

2. La carga total Q es:

$$Q = \sigma\pi r^2 = (4\ \mu\mathrm{C/m^2})\pi(0{,}05\ \mathrm{m})^2 = 31{,}4\ \mathrm{nC}$$

3. Sustituir este valor en la etapa 1:

$$E_x = \frac{(8{,}99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(31{,}4\times10^{-9}\mathrm{C})}{(6\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 7{,}84\ \mathrm{N/C}$$

(d) Para $x = 6$ cm, debemos utilizar la expresión exacta de E_x:

$$E_x = 2\pi\ k\sigma\left[1-\frac{x}{\sqrt{(x^2+R^2)}}\right]$$
$$= (226\ \mathrm{kN/C})\left[1-\frac{6\ \mathrm{cm}}{\sqrt{(6\ \mathrm{cm})^2+(5\ \mathrm{cm})^2}}\right]$$
$$= (226\ \mathrm{kN/C})(1-0{,}768) = 52{,}4\ \mathrm{kN/C}$$

Figura 23.9

Observaciones Nótese que en (d) no necesitamos convertir los centímetros en metros, para determinar $x/\sqrt{x^2+R^2}$, pues las unidades se cancelan. La figura 23.9 muestra E_x en función de x, para la carga del disco en este ejemplo, para un plano infinito con la misma densidad de carga, y para una carga puntual.

Ejercicio Calcular E_x para las partes (a) y (b) con cinco cifras significativas utilizando primero la aproximación del plano infinito y después la expresión exacta (ecuación 23.11) y comparar los resultados. (*Respuestas*: (a) $E_x = 225{,}92$ kN/C y $E_x = 225{,}49$ kN/C; diferencia ~0,2%. (b) $E_x \approx 225{,}94$ kN/C y $E_x \approx 224{,}58$ kN/C; diferencia ~0,6%.)

23.2 Ley de Gauss

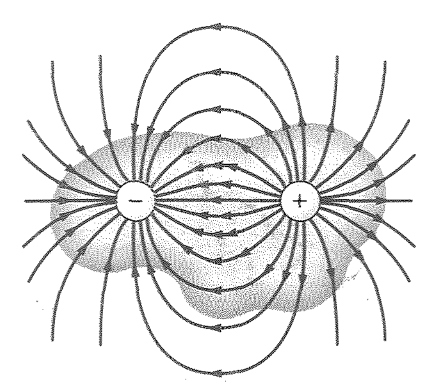


Figura 23.10 Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe donde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas.

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante las líneas de fuerza estudiadas en el capítulo 22 está relacionada con una ecuación matemática llamada ley de Gauss, que relaciona el campo eléctrico sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie. La ley de Gauss es la base de una de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, que veremos en el capítulo 32. Para cargas estáticas la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Esta ley permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita. En esta sección daremos un argumento plausible de la ley de Gauss basado en las propiedades de las líneas de campo eléctrico. En la sección 23.6 se ofrece una deducción rigurosa de la ley de Gauss.

La figura 23.10 muestra una superficie de forma arbitraria que incluye un dipolo. El número de líneas del campo eléctrico que salen de la carga positiva y cruzan la superficie, saliendo del recinto limitado por ésta, depende de donde se dibuje la superficie, pero el número es exactamente igual al número de líneas que entran en el mismo recinto y terminan en la carga negativa. Si contamos el número de líneas que sale como positivo y el número que entra como negativo, el número neto que sale o entra es cero. Para superficies que encierran otras distribuciones de carga, como ocurre en la figura 23.11, *el número neto de líneas que sale por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie*. Este es un enunciado cualitativo de la ley de Gauss.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

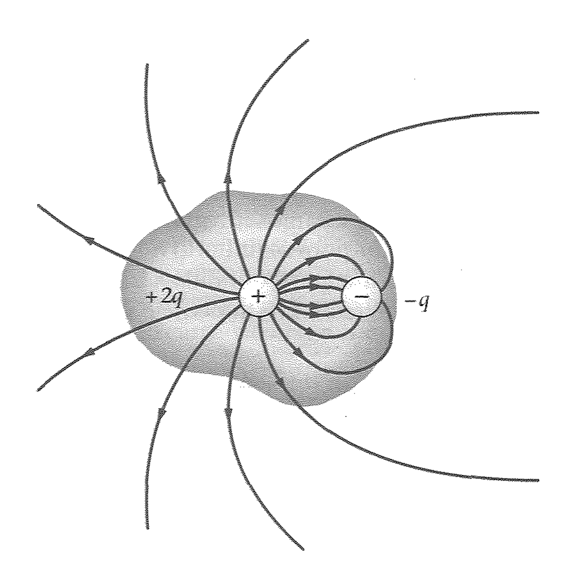


Figura 23.11 Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas $+2q$ y $-q$. Las líneas de campo que terminan en $-q$ o bien no pasan a través de la superficie o bien salen y vuelven a entrar. El número neto de las líneas que salen es el mismo que correspondería a una sola carga de valor igual a la carga neta dentro de la superficie.

Flujo eléctrico

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas del campo que atraviesa una superficie se llama **flujo eléctrico**, ϕ. Para una superficie perpendicular a **E** (figura 23.12) se define como el producto de la magnitud del campo, E, y el área A:

$$\phi = EA$$

Las unidades del flujo son $N \cdot m^2/C$. Como el campo eléctrico es proporcional al número de líneas por unidad de área, el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de fuerza que atraviesan el área.

En la figura 23.13 la superficie de área A_2 no es perpendicular al campo eléctrico **E**. Sin embargo, el número de líneas que atraviesan el área A_2 es el mismo que atraviesa el área A_1, que es perpendicular a **E**. Las áreas están relacionadas por

$$A_2 \cos\theta = A_1 \tag{23.13}$$

en donde θ es el ángulo existente entre **E** y el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ perpendicular a la superficie A_2, según está indicado. El flujo a través de una superficie no perpendicular a **E** viene definido por

$$\phi = E \cdot \hat{\mathbf{n}}A = EA\cos\theta = E_n A$$

en donde $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es el componente de **E** perpendicular, o normal, a la superficie.

La figura 23.14 muestra una superficie de forma arbitraria sobre la cual el campo **E** puede variar. Si el elemento de área que elegimos es suficientemente pequeño, podemos considerarle como un plano y la variación del campo eléctrico a través del elemento puede despreciarse. El flujo del campo eléctrico a través de este elemento es

$$\Delta\phi_i = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \, \Delta A_i$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_i$ es el vector unitario perpendicular al elemento. Si la superficie es curva, los vectores unitarios de los distintos elementos tendrán direcciones diferentes. El flujo total a través de la superficie es la suma de $\Delta\phi_i$ extendida a todos los elementos. En el límite, cuando el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma se convierte en una integral. La definición general del flujo eléctrico es, por tanto,

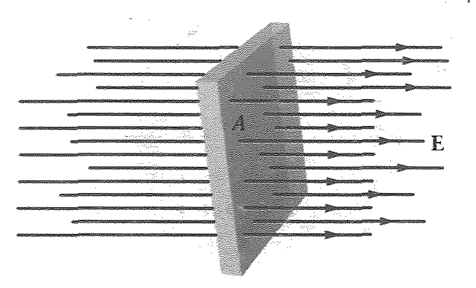


Figura 23.12 Líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico uniforme E que atraviesa un área A perpendicular al campo. El producto EA es el flujo ϕ a través del área.

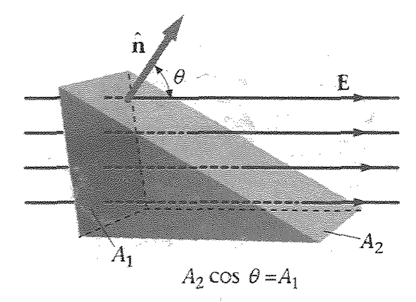


Figura 23.13 Líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico uniforme perpendicular al área A_1, pero que forma un ángulo θ con el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ normal al área A_2. Cuando **E** no es perpendicular al área, el flujo a través del área es $E_n A$, siendo $E_n = E\cos\theta$ el componente de **E** perpendicular al área. El flujo que atraviesa A_2 es el mismo que pasa por A_1.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

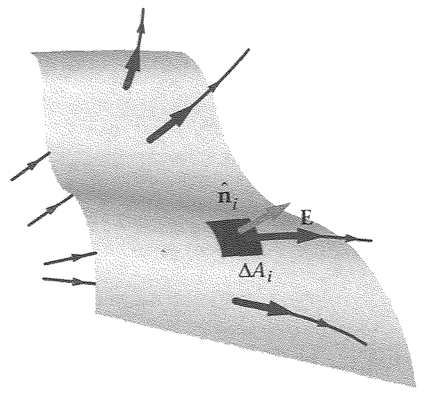


Figura 23.14 Cuando E varía en módulo o dirección, el área se divide en elementos de área pequeños ΔA_i. El flujo a través del área se calcula sumando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\,\Delta A_i$ para todos los elementos.

$$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \hat{\mathbf{n}}_i\,\Delta A_i = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dA \qquad (23.14)$$

Definición —Flujo eléctrico

en donde el índice S nos recuerda que estamos integrando sobre una superficie.

En una superficie *cerrada*, el vector normal unitario **n** se define de modo que está dirigido hacia fuera en cada punto. La integral extendida a una superficie cerrada se indica por el símbolo $\oint$. El flujo neto a través de una superficie cerrada viene dado, por tanto, por

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dA = \oint_S E_n\,dA \qquad (23.15)$$

El flujo total o neto ϕ_{neto} a través de la superficie cerrada es positivo o negativo dependiendo de que E sea predominantemente hacia fuera o hacia dentro de la superficie.

Enunciado cuantitativo de la ley de Gauss

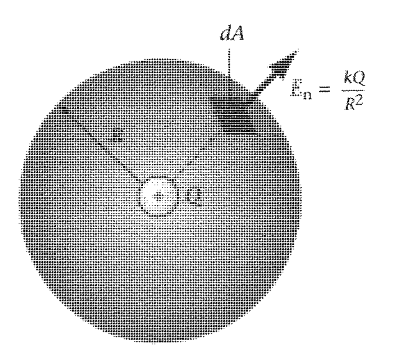


Figura 23.15 Una superficie esférica que incluye la carga puntual Q. El mismo número de líneas de campo eléctrico que pasa a través de esta superficie, atraviesa cualquier superficie que incluya Q. El flujo se calcula fácilmente para una superficie esférica. Es igual al producto de E_n por el área superfical $4\pi R^2$.

La figura 23.15 muestra una superficie esférica de radio R con su centro en la carga puntual Q. El campo eléctrico en un punto cualquiera de la superficie es perpendicular a la superficie y tiene la magnitud

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

El flujo neto a través de esta superficie esférica es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\,dA = E_n \oint_S dA$$

en donde E_n ha salido de la integral por ser constante en todos los puntos. La integral de dA extendida a toda la superficie es precisamente el área total, igual a $4\pi R^2$. Con este valor y sustituyendo kQ/R^2 por E_n se obtiene

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{kQ}{R^2}\,4\pi R^2 = 4\pi kQ \qquad (23.16)$$

Así pues, el flujo neto a través de una superficie esférica con una carga puntual en el centro es independiente del radio de la esfera y es igual a $4\pi k$ veces la magnitud de dicha carga. Esto está de acuerdo con nuestras observaciones anteriores, de que el número neto de líneas que atraviesan una superficie es proporcional a la carga neta interior a la superficie. *Este número de líneas es el mismo para cualquier superficie que encierre a la carga, cualquiera que sea su forma.* Así, el flujo neto a través de *cualquier superficie* que rodea a una carga puntual Q es igual a $4\pi kQ$.

Podemos ampliar este resultado a sistemas de más de una carga puntual. En la figura 23.16, la superficie encierra dos cargas puntuales q_1 y q_2 y existe una tercera carga puntual q_3 fuera de la superficie. Puesto que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie es el vector suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las tres cargas, el flujo neto $\phi_{\text{neto}} = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dA$ a través de la superficie es precisamente la suma de los flujos debidos a las cargas individuales. El flujo originado por la carga q_3, que está fuera de la superficie, es cero debido a que cada línea de fuerza procedente de q_3 que entra en la superficie en un punto abandona la misma en algún otro punto. El número neto de líneas a través de la superficie procedentes de una carga exterior a la superficie, es cero. El flujo a través de la superficie debido a la carga q_1 es $4\pi kq_1$ y el debido a la carga q_2 es $4\pi kq_2$. El flujo neto a través de la superficie es igual a $4\pi k(q_1 + q_2)$ que puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de los signos y valores de las dos cargas.

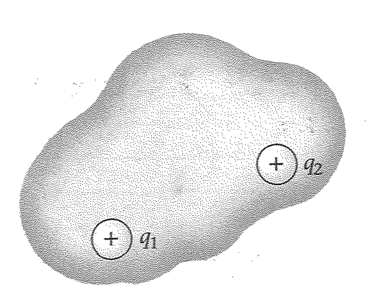


Figura 23.16 Superficie que incluye las cargas puntuales q_1 y q_2, pero no q_3. El flujo neto a través de esta superficie es $4\pi k(q_1 + q_2)$.

www.elsolucionario.net

El flujo neto a través de cualquier superficie es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n \, dA = 4\pi k Q_{\text{dentro}} \tag{23.17}$$

Ley de Gauss

Esta es la **ley de Gauss**. Su validez depende del hecho de que el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga. Esta propiedad del campo eléctrico es la que ha hecho posible dibujar un número fijo de líneas de fuerza desde una carga y conseguir que la densidad de líneas sea proporcional a la intensidad del campo.

Es costumbre escribir la constante de Coulomb k en función de otra constante ϵ_0, denominada **permitividad del espacio libre**:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{23.18}$$

Con esta notación, la ley de Coulomb se escribe

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{23.19}$$

Ley de Coulomb en función de ϵ_0

y la ley de Gauss toma la forma

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n \, dA = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{dentro}} \tag{23.20}$$

Ley de Gauss en función de ϵ_0

El valor de ϵ_0 en unidades SI es

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)} = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

La ley de Gauss es válida para todas las superficies y distribuciones de carga. Como veremos en la sección siguiente, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en algunas distribuciones especiales de carga con altos grados de simetría. La potencia real de la ley de Gauss es teórica. En los campos eléctricos que resultan de cargas estáticas o que se mueven lentamente, la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Sin embargo, la ley de Gauss es más general, pues también puede aplicarse a cargas no estáticas.

EJEMPLO 23.4

Un campo eléctrico vale $\mathbf{E} = (200\ \text{N/C})\mathbf{i}$ para $x > 0$ y $\mathbf{E} = (-200\ \text{N/C})\mathbf{i}$ para $x < 0$. Un cilindro de longitud 20 cm y radio $R = 5$ cm tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x, de modo que un extremo se encuentra en $x = +10$ cm y el otro en $x = -10$ cm (figura 23.17). (a) ¿Cuál es el flujo electrostático a través de cada extremo? (b) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie curva del cilindro? (c) ¿Cuál es el flujo neto a través de la superficie total cerrada del cilindro? (d) ¿Cuál es la carga neta interior al cilindro?

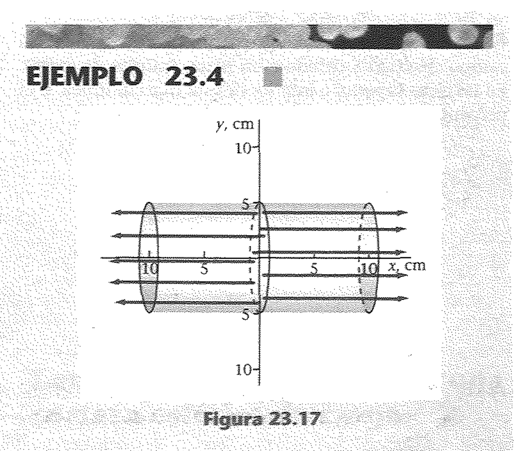


Figura 23.17

Esquema del problema El campo en ambas caras circulares del cilindro es paralelo al vector normal a la superficie con dirección hacia fuera, de modo que el flujo es EA. No hay flujo a través de la superficie curva, ya que la normal a la superficie es perpendicular a E. El flujo neto a través de la superficie cerrada está relacionado con la carga neta interior por la ley de Gauss.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(a) 1. Calcular el flujo a través de la superficie circular derecha:

$$\phi_{der} = \mathbf{E}_{der} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{der} A = (200 \text{ N/C})\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}\ (\pi)(0{,}05 \text{ m})^2 = 1{,}57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

2. Calcular el flujo a través de la superficie circular izquierda:

$$\phi_{izq} = \mathbf{E}_{izq} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{izq} A = (-200 \text{ N/C})\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i})(\pi)(0{,}05 \text{ m})^2 = +1{,}57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

(b) El flujo a través de la superficie curva es cero, ya que **E** es perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\phi_{curva} = \mathbf{E}_{curva} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{curva} A = 0$$

(c) El flujo total es la suma de flujos a través de todas las superficies:

$$\phi_{curva} = \phi_{der} + \phi_{izq} + \phi_{curva} = 1{,}57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} + 1{,}57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} + 0 = 3{,}14 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

(d) La ley de Gauss relaciona la carga interior con el flujo neto:

$$Q_{interior} = \epsilon_0 \phi_{neto} = (8{,}85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(3{,}14 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}) = 2{,}78 \times 10^{-11} \text{ C}$$

23.3 ■ Cálculo del campo eléctrico E mediante la ley de Gauss

El campo eléctrico debido a una distribución de carga altamente simétrica puede calcularse fácilmente mediante la ley de Gauss. En primer lugar determinaremos una superficie llamada **superficie gaussiana**, sobre la cual la magnitud del campo E es constante. El flujo a través de esta superficie será proporcional al campo E. La ley de Gauss relaciona este campo con la carga interior a la superficie.

■ Geometría plana

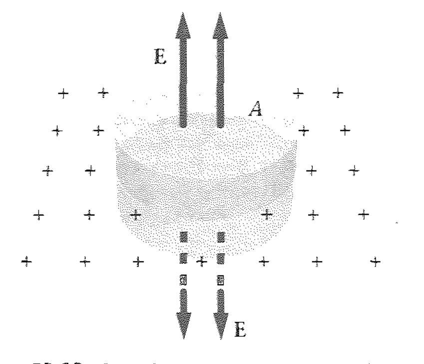


Figura 23.18 Superficie gaussiana para el cálculo del campo eléctrico E debido a un plano infinito de cargas. En las caras superior e inferior de esta caja cilíndrica, E es perpendicular a la superficie y de valor constante.

Campo eléctrico E próximo a un plano infinito de carga La figura 23.18 muestra un plano infinito de carga de densidad superficial de carga σ. Por simetría sabemos que el campo eléctrico E debe ser perpendicular al plano, dependiendo sólo de la distancia del plano al punto del campo y que ha de tener el mismo valor pero sentido opuesto en los puntos situados a la misma distancia por arriba y por debajo del plano. Escogeremos como superficie gaussiana un cilindro en forma de caja con su eje perpendicular al plano y con su centro en el plano. Suponemos que cada base del cilindro es paralela al plano y tiene un área A. En este caso, E es paralelo a la superficie cilíndrica y no existe ningún flujo que atraviese esta superficie curva. Puesto que el flujo que sale por cada cara, superior o inferior, es E_nA, el flujo total es $2E_nA$. La carga neta en el interior de la superficie es σA. A partir de la ley de Gauss se obtiene

$$\phi_{neto} = \oint E_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{interior}$$

$$2E_n A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

o sea,

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma \qquad \textbf{(23.21)}$$

Campo eléctrico **E** *próximo a un plano infinito de carga*

Este resultado coincide con el que obtuvimos con mucha mayor dificultad mediante la ley de Coulomb (ecuación 23.12a). Obsérvese que el campo es discontinuo en el plano. Si la carga se encuentra en el plano xy, el campo es $E_z = \sigma/2\epsilon_0$ justo por encima del plano y $E_z = -\sigma/2\epsilon_0$ justo por debajo del plano. La discontinuidad del campo viene dada por $\Delta E_z = \sigma/2\epsilon_0 - (-\sigma/2\epsilon_0) = \sigma/\epsilon_0$.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 23.5

Un plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma = +4{,}5\ \text{nC/m}^2$ coincide con el plano yz en el origen, y un segundo plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma = -4{,}5\ \text{nC/m}^2$ se localiza en un plano paralelo al plano yz en $x = 2$ m. Determinar el campo eléctrico en (a) $x = 1{,}8$ m y (b) $x = 5$ m.

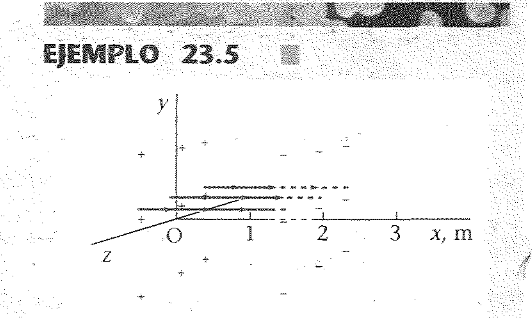


Figura 23.19

Esquema del problema Cada uno de los planos produce un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = \sigma/2\epsilon_0$. Utilizaremos la superposición para determinar el campo resultante. Entre los planos, los campos se suman, produciendo un campo neto de magnitud σ/ϵ_0 en la dirección x positiva. Para $x > 2$ m o $x < 0$, los campos apuntan en direcciones opuestas y se cancelan.

(a) 1. Calcular la magnitud del campo E producido por cada plano:
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4{,}5\times 10^{-9}\ \text{C/m}^2}{2(8{,}85\times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 254\ \text{N/C}$$

2. A $x = 1{,}8$ m, entre los planos, el campo debido a cada plano apunta en la dirección x positiva:
$$E_{x,\text{neto}} = E_1 + E_2 = 254\ \text{N/C} + 254\ \text{N/C} = 508\ \text{N/C}$$

(b) A $x = 5$ m, los campos debidos a los dos planos tienen sentidos opuestos:
$$E_{x,\text{neto}} = E_1 - E_2 = 0$$

Observaciones Las líneas de campo eléctrico comienzan en el plano positivo y terminan en el plano negativo. E es cero excepto entre los planos. Obsérvese que $E_{x,\text{neto}} = 508$ N/C, no justamente a $x = 1{,}8$ m, sino en cualquier punto entre los planos.

Geometría esférica

Para calcular el campo eléctrico debido a distribuciones de carga con simetría esférica, utilizaremos una superficie gaussiana esférica. Ilustraremos el método determinando el campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual q. Por simetría **E** será radial y su magnitud depende sólo de la distancia a la carga. Como superficie gaussiana, elegiremos una superficie esférica de radio r centrada en la carga. El componente normal de E, $E_n = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}} = E_r$, tiene el mismo valor en todos los puntos de nuestra superficie esférica. El flujo neto a través de esta superficie es, pues,

$$\phi_{\text{neto}} = \oint \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dA = \oint E_r\, dA = E_r \oint dA$$

Pero $\oint dA$ es el área total de la superficie esférica, $4\pi r^2$. Puesto que la carga total en el interior de la superficie es precisamente la carga puntual q, la ley de Gauss nos da

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

o sea,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Así pues, hemos deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. Como inicialmente dedujimos la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb (véase sección 23.6) hemos visto que ambas leyes son equivalentes para cargas estáticas.

Campo eléctrico E debido a una corteza esférica de carga

Consideremos una corteza esférica uniformemente cargada de radio R y carga total Q. Por simetría, **E** debe ser radial y su magnitud dependerá sólo de la distancia r contada desde el centro de la esfera. En la figura 23.20 hemos escogido una superficie gaussiana

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Figura 23.20 Superficie gaussiana esférica de radio $r > R$ para el cálculo del campo eléctrico exterior a una corteza esférica uniformemente cargada de radio R.

esférica de radio $r > R$. Como **E** es perpendicular a esta superficie y constante en magnitud en todos los puntos de la misma, el flujo que atraviesa la superficie es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint E_r \, dA = E_r 4\pi r^2$$

Como la carga total dentro de la superficie gaussiana es la carga total sobre la corteza, Q resulta por la ley de Gauss

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

es decir,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r > R \tag{23.22a}$$

Campo eléctrico **E** *exterior a una corteza esférica de carga*

Así pues, el campo eléctrico exterior a una corteza esférica uniformemente cargada es el mismo que si toda la carga estuviera en el centro de la corteza.

Si escogemos una superficie gaussiana esférica en el interior de la corteza, de modo que $r < R$, el flujo neto es de nuevo $E_r 4\pi r^2$, pero la carga total dentro de la esfera es cero. Por tanto, para $r < R$, la ley de Gauss nos da

$$\phi_{\text{neto}} = E_r 4\pi r^2 = 0$$

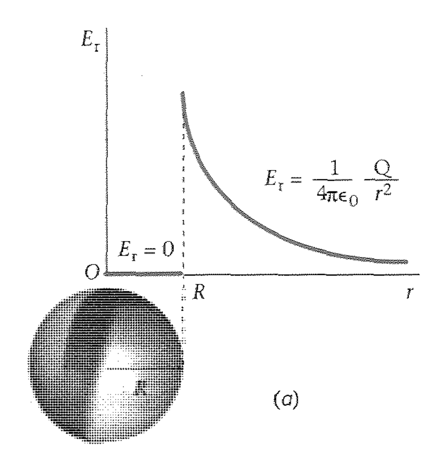
y

$$E_r = 0 \qquad r < R \tag{23.22b}$$

Campo eléctrico **E** *interior a una corteza esférica de carga*

Estos resultados pueden obtenerse por integración directa de la ley de Coulomb, pero el cálculo es mucho más difícil.

La figura 23.21 muestra la variación de E_r en función de r para esta distribución de carga. Obsérvese también que el campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde la densidad de carga superficial es σ. Justamente fuera de la corteza, para $r \approx R$, el campo eléctrico es $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$, ya que $\sigma = Q/4\pi R^2$. Como el campo justamente dentro de la corteza es cero, el campo eléctrico es discontinuo en la magnitud σ/ϵ_0 al atravesar la corteza.



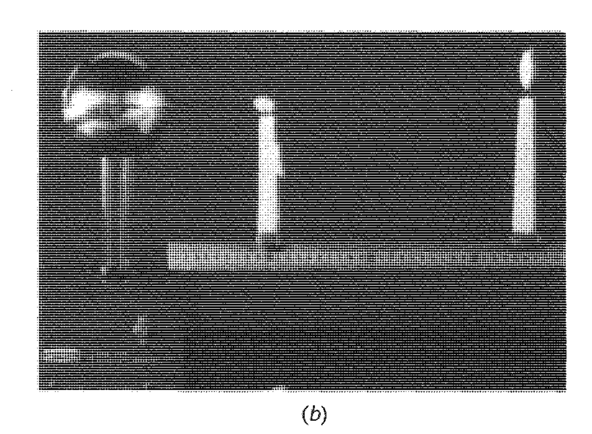


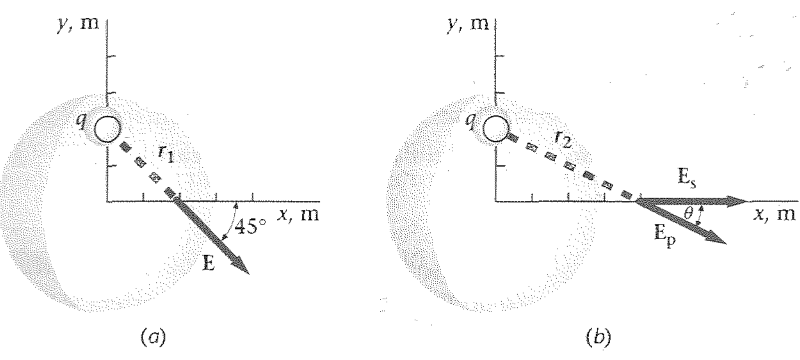
Figura 23.21 (*a*) Gráfica de E_r en función de r para una distribución de carga de una corteza esférica. El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, en donde existe una carga superficial de densidad σ. (*b*) La disminución con la distancia del campo E_r creado por una corteza esférica cargada, es evidente por el efecto del campo sobre las llamas de estas dos bujías. La corteza esférica del generador van de Graaff (aparato que será estudiado en el capítulo 24) a la izquierda posee una gran carga negativa que atrae los iones positivos de la llama de la bujía más próxima. La llama de la derecha, más alejada, no se afecta por la presencia del campo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 23.6

Una corteza esférica de radio R = 3 m tiene su centro en el origen y es portadora de una densidad de carga superficial σ = 3 nC/m^2. Una carga puntual q = 250 nC se encuentra sobre el eje y en y = 2 m. Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en (a) x = 2 m y (b) x = 4 m.

Esquema del problema Determinamos el campo debido a la carga puntual y el debido a la corteza esférica y sumamos los vectores del campo. Para (a), el punto del campo queda dentro de la corteza, de modo que el campo se debe sólo a la carga puntual (figura 23.22*a*). Para (b), el punto del campo está fuera de la corteza; por tanto, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen. Después se determina el campo debido a las dos cargas puntuales (figura 23.22*b*).



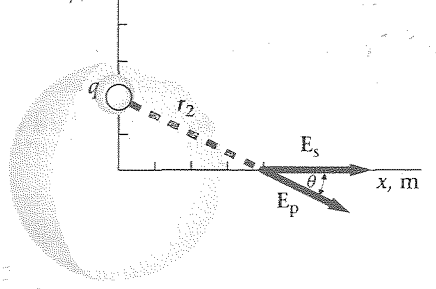


Figura 23.22

(a) 1. Dentro de la corteza $\mathbf{E}_1$ es debido sólo a la carga puntual: $\mathbf{E}_1 = \dfrac{kq}{r_1^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

2. Calcular la distancia r_1: $r_1 = \sqrt{(2\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2} = \sqrt{8}\text{ m}$

3. Utilizar r_1 para calcular la magnitud del campo: $E_1 = \dfrac{kq}{r_1^2} = \dfrac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9}\text{ C})}{(\sqrt{8}\text{ m})^2} = 281\text{ N/C}$

4. En la figura 23.22*a* puede verse que el campo forma un ángulo de −45° con el eje x: $\theta = -45°$

(b) 1. Fuera de su perímetro, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen y el campo debido a la corteza $\mathbf{E}_s$ está dirigido a lo largo del eje x: $\mathbf{E}_s = \dfrac{kQ}{x_2^2}\,\mathbf{i}$

2. Calcular la carga total Q sobre la corteza: $Q = \sigma 4\pi R^2 = (3\text{ nC/m}^2)4\pi(3\text{ m})^2 = 339\text{ nC}$

3. Utilizar Q para calcular el campo debido a la corteza: $E_s = \dfrac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(339 \times 10^{-9}\text{ C})}{(4\text{ m})^2} = 190\text{ N/C}$

4. El campo debido a la carga puntual es: $\mathbf{E}_p = \dfrac{kq}{r_2^2}\,\hat{\mathbf{r}}_2$

5. Calcular la distancia entre la carga puntual q sobre el eje y y el punto del campo en x = 4 m: $r_2 = \sqrt{(2\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} = \sqrt{20}\text{ m}$

6. Calcular la magnitud del campo debida a la carga puntual: $E_p = \dfrac{kq}{r_2^2} = \dfrac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9}\text{ C})}{(\sqrt{20}\text{ m})^2} = 112\text{ N/C}$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

7. Este campo forma un ángulo θ con el eje x, en donde:

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{-2}{\sqrt{20}}$$

8. Los componentes x e y de este campo son, por tanto:

$$E_{px} = E_p \cos\theta = (112\ \text{N/C})\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right) = 100\ \text{N/C}$$

$$E_{py} = E_p\ \text{sen}\,\theta = (112\ \text{N/C})\left(-\frac{2}{\sqrt{20}}\right) = -50\ \text{N/C}$$

9. Determinar los componentes x e y del campo eléctrico neto:

$$E_x = E_{sx} + E_{px} = 190\ \text{N/C} + 100\ \text{N/C} = 290\ \text{N/C}$$

$$E_y = E_{sy} + E_{py} = 0 - 50\ \text{N/C} = -50\ \text{N/C}$$

Observación Dados los componentes x e y de un campo, la magnitud y dirección del campo neto vienen dados por $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ y tg $\theta' = E_y/E_x$.

Campo eléctrico E debido a una esfera uniformemente cargada

EJEMPLO 23.7

Determinar el campo eléctrico (a) fuera y (b) dentro de una esfera sólida uniformemente cargada de radio R portadora de una carga Q distribuida por todo el volumen de la esfera con densidad de carga $\rho = Q/V$, siendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera.

Esquema del problema Por simetría, el campo eléctrico debe ser radial. (a) Para determinar E_r fuera de la esfera cargada, debemos elegir una superficie esférica gaussiana de radio $r > R$ (figura 23.23*a*). (b) Para determinar E_r dentro de la esfera, elegimos una superficie gaussiana esférica de radio $r < R$ (figura 23.23*b*). En cada una de estas superficies, E_r es constante. La ley de Gauss relaciona entonces E_r con la carga total dentro de la superficie.

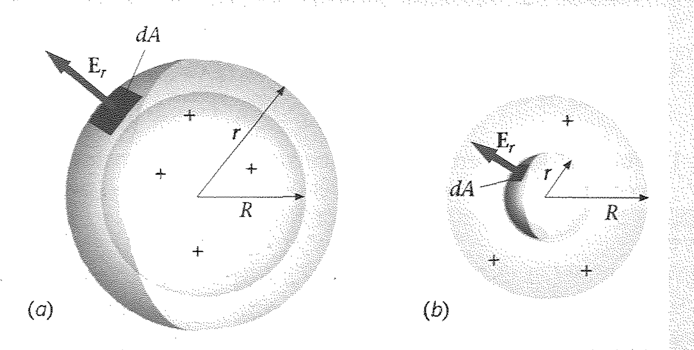


Figura 23.23

(a) 1. (Fuera) Relacionar el flujo a través de la superficie gaussiana con el campo eléctrico E_r sobre dicha superficie para $r > R$:

$$\phi_{\text{neto}} = E_r 4\pi r^2$$

2. Aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total dentro de la superficie, Q:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

3. Despejar E_r:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r > R$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

(b) 1. (Dentro) Relacionar el flujo a través de la superficie gaussiana con el campo eléctrico sobre dicha superficie para $r < R$:

$$\phi_{neto} = E_r 4\pi r^2$$

2. Aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total dentro de la superficie Q_{dentro}:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0}$$

3. La carga total dentro de la superficie es $\rho V'$, en donde $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$ es el volumen dentro de la superficie gaussiana:

$$Q_{dentro} = \rho V' = \left(\frac{Q}{V}\right)V' = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

4. Sustituir este valor de Q_{dentro} y despejar E_r:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r, \qquad r \le R$$

Observaciones La figura 23.24 muestra la variación de E_r con r para la distribución de carga en este ejemplo. Dentro de una esfera de carga, E_r crece con r. Obsérvese que E_r es continuo para $r = R$. Una esfera uniformemente cargada se utiliza a veces como modelo para describir el campo eléctrico de un núcleo atómico.

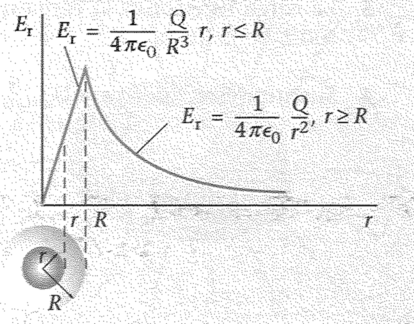


Figura 23.24

El ejemplo 23.7 nos indica que el campo eléctrico a una distancia r del centro de una esfera uniformemente cargada de radio R viene dado por

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r \ge R \tag{23.23a}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r, \qquad r \le R \tag{23.23b}$$

en donde Q es la carga total de la esfera.

Geometría cilíndrica

Para calcular el campo eléctrico debido a distribuciones de carga simétricamente cilíndricas, utilizaremos una superficie gaussiana cilíndrica. Ilustraremos este cálculo comenzando con la determinación del campo eléctrico debido a una carga lineal infinitamente larga de densidad lineal uniforme de carga, problema que se ha resuelto previamente mediante la ley de Coulomb.




EJEMPLO 23.8

Utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia r de una carga lineal infinitamente larga de densidad de carga uniforme λ.

Esquema del problema Por simetría, las líneas de campo eléctrico irradian uniformemente desde la línea de campo, hacia fuera si λ es positiva y hacia dentro si λ

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

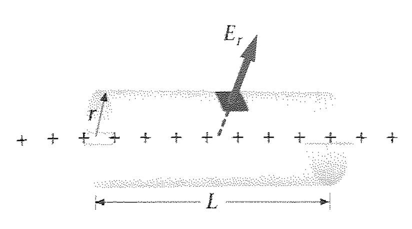


Figura 23.25

es negativa. Por tanto, elegiremos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L y radio r (figura 23.25). El campo eléctrico es, por tanto, perpendicular a la superficie cilíndrica y posee el mismo valor E_r en cualquier punto de la superficie. El flujo eléctrico es entonces igual al producto del campo eléctrico por el área de la superficie cilíndrica, que es $2\pi rL$. No hay flujo a través de las superficies planas de los extremos del cilindro, ya que en estas superficies $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$.

1. Relacionar el flujo a través de la superficie gaussiana con el campo eléctrico E_r sobre la superficie gaussiana para $r > R$:

$$\phi_{\text{neto}} = E_r \oint dA = E_r 2\pi rL$$

2. Aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total en el interior de la superficie Q_{interior}:

$$E_r 2\pi rL = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

3. La carga interior es la carga que existe sobre una longitud L de la línea:

$$Q_{\text{interior}} = \lambda L$$

4. Sustituir este valor para Q_{interior} y despejar E_r:

$$E_r 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Observación Como $1/(2\pi\epsilon_0) = 2k$, el campo es $2k\lambda/r$, equivalente a la ecuación 23.9, si sustituimos $r = y$.

Es importante destacar que para usar la ley de Gauss en el cálculo de campos eléctricos es necesaria la existencia de un alto grado de simetría, aunque sea válida para cualquier superficie que rodee cualquier distribución de cargas. En el cálculo anterior fue necesario suponer que el punto del campo estaba muy alejado de los extremos de la carga lineal, de tal modo que E_n sería constante en todos los puntos de la superficie gaussiana cilíndrica. Esto equivale a suponer que a la distancia r de la línea de carga, ésta parece ser infinitamente larga. Si la carga lineal es de longitud finita, no podemos suponer que $\mathbf{E}$ es perpendicular a la superficie cilíndrica o que E_n es constante en todos los puntos de la misma y, por tanto, no puede utilizarse la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico.

23.4 Discontinuidad de E_n

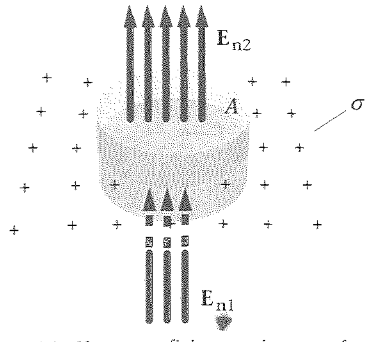


Figura 23.26 Una superficie gaussiana en forma de caja cilíndrica, con caras de área A en sus bases, posee una densidad de carga σ. El flujo neto a través de la caja es $(E_{n2} - E_{n1})A$. El campo eléctrico E_{n2} a un lado es mayor que el campo eléctrico E_{n1} en el otro en la cantidad σ/ϵ_0.

Ya hemos visto que el campo eléctrico correspondiente a un plano infinito y a una corteza esférica de carga es discontinuo en la cantidad σ/ϵ_0 en un punto donde existe una densidad de carga superficial σ. Como veremos, éste es un resultado general para el componente del campo eléctrico perpendicular a una superficie portadora de una densidad de carga σ.

La figura 23.26 muestra una superficie gaussiana cuya forma es la de un disco con caras de área A a cada lado de una superficie arbitraria portadora de una densidad de carga superficial σ. Sea E_{n2} el componente normal del campo eléctrico a un lado de la superficie y E_{n1} al otro lado, como indica la figura. Si el espesor del disco es muy pequeño comparado con el radio de las caras, podemos despreciar el flujo a través de las caras de área πR^2. El flujo neto a través de la superficie gaussiana es, por tanto, $E_{n2}A - E_{n1}A$ y la carga dentro de la superficie es σA. Según la ley de Gauss se obtiene

$$E_{n2}A - E_{n1}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

www.elsolucionario.net

es decir

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{23.24}$$

Discontinuidad de E_n en una carga superficial

que es el resultado que queríamos comprobar.

Obsérvese que no hay discontinuidad del campo eléctrico en la superficie de una esfera de carga uniforme. El campo justamente en la parte interior de la superficie de una esfera cargada es exactamente igual al campo en la parte exterior de la superficie, tal como vimos en la figura 23.24.

Carga y campo en la superficie de los conductores ■ 23.5

Todo conductor posee cargas con libertad de movimiento en el volumen que limita su superficie. En presencia de un campo eléctrico externo que actúa en el interior del conductor se produce una fuerza que da lugar a una corriente eléctrica momentánea (las corrientes eléctricas se abordarán en el capítulo 26). Sin embargo, a menos que exista una fuente de energía que mantenga esta corriente, la carga libre del conductor se redistribuye de tal modo que se crea un campo eléctrico que anula el campo externo dentro del conductor. Se dice entonces que el conductor se encuentra en **equilibrio electrostático**. Así, en el equilibrio, el campo eléctrico dentro de un conductor debe ser cero. El tiempo necesario para alcanzar el equilibrio depende del conductor. Para el cobre y otros buenos conductores, el tiempo es tan pequeño que a todos los efectos prácticos el equilibrio electrostático se alcanza instantáneamente.

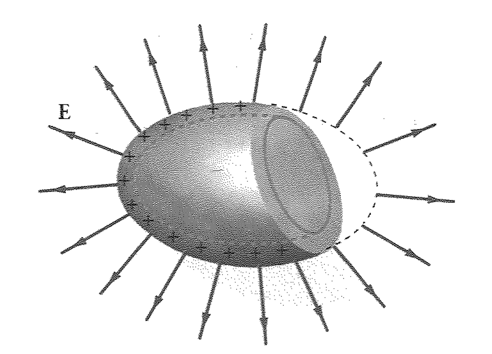


Figura 23.27 Una superficie gaussiana (línea de trazos) justo en el interior de la superficie de un conductor. Como el campo eléctrico es cero dentro del conductor en equilibrio electrostático, el flujo neto a través de esta superficie debe ser también cero.

Podemos utilizar la ley de Gauss para demostrar que toda carga eléctrica neta de un conductor reside en su superficie. Consideremos una superficie gaussiana justamente en el interior de la superficie real de un conductor en equilibrio electrostático, como indica la figura 23.27. Como el campo eléctrico es cero en todos los puntos dentro del conductor, será también cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, ya que toda ella está completamente dentro del conductor. Así pues, no hay carga neta dentro de cualquier superficie incluida completamente dentro del conductor. Si existe alguna carga neta sobre el conductor, ésta debe residir sobre la superficie del propio conductor. En la superficie de un conductor en equilibrio, el campo eléctrico **E** debe ser perpendicular a la superficie. Si existiera un componente tangencial de **E**, la carga libre del conductor se desplazaría hasta que se anulara dicho componente.

Como E_n es discontinuo en cualquier superficie debido a la magnitud σ/ϵ_0 y **E** es cero dentro del conductor, el campo justamente en el exterior del conductor vendrá dado por

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{23.25}$$

E_n justamente fuera de la superficie de un conductor

Este resultado es exactamente el doble del campo producido por un plano infinito de carga. Podemos comprender este resultado mediante la figura 23.28. La carga sobre el conductor está compuesta por dos partes: (1) la carga en la vecindad inmediata del punto P y (2) el resto de la carga. La carga próxima al punto P puede considerarse como un plano infinito y produce un campo de magnitud $\sigma/2\epsilon_0$ justo en el interior y en el exterior del conductor. El resto de la carga produce un campo de magnitud $\sigma/2\epsilon_0$ que neutraliza el campo interior del conductor. Este campo debido al resto de la carga se suma al campo debido a la carga local justamente dentro del conductor dando lugar a un campo total σ/ϵ_0.

La figura 23.29 muestra una carga puntual positiva q en el centro de una cavidad dentro de un conductor esférico. Como la carga neta debe ser nula dentro de cualquier superficie trazada dentro del conductor, debe existir una carga negativa $-q$ inducida en

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

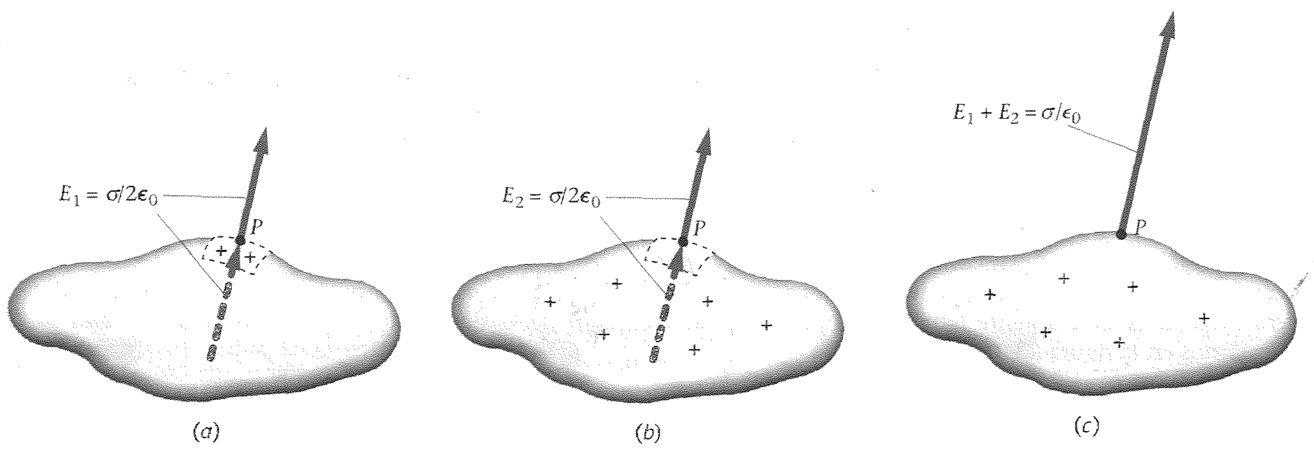
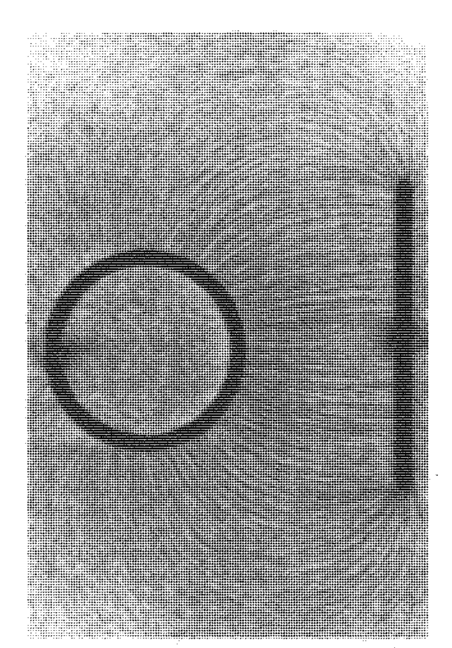


Figura 23.28 Conductor de forma arbitraria que posee una carga en su superficie. (*a*) Si el punto P está muy próximo al conductor, la carga en la vecindad de este punto se asemeja a la de una lámina plana infinita de carga. Esta carga produce un campo eléctrico de valor $\sigma/2\epsilon_0$ tanto en el interior como en el exterior del conductor, según está indicado. Dentro del conductor este campo apunta hacia abajo desde el punto P. (*b*) Puesto que el campo resultante en el interior del conductor debe ser cero, el resto de la carga debe producir un campo de igual magnitud $\sigma/2\epsilon_0$ en dirección hacia arriba. (*c*) Dentro del conductor estos campos se anulan como se indica en (*a*) y (*b*), pero fuera, en el punto P, se suman resultando $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

la superficie interior. En la figura 23.30, la carga puntual se ha desplazado de modo que ya no se encuentra en el centro de la cavidad. Las líneas de campo de la cavidad se han alterado y la densidad de carga superficial de la carga negativa inducida de la superficie interna deja de ser uniforme. Sin embargo, todas las líneas de campo siguen terminando en la carga negativa inducida. La densidad de carga superficial positiva sobre la superficie exterior no se perturba, ya que se encuentra protegida de la cavidad por el conductor.



Líneas de fuerza en el caso de un cilindro y una placa con cargas opuestas. Las líneas están indicadas por trocitos de hilo fino suspendidos en aceite. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares a los conductores y que no hay ninguna línea en el interior del cilindro.

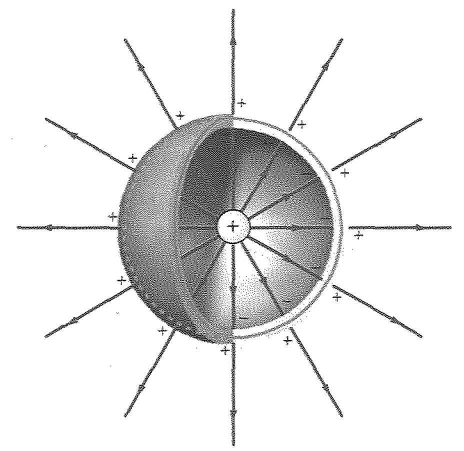


Figura 23.29 Una carga puntual q se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica de paredes gruesas. Como la carga neta dentro de la superficie gaussiana (indicada en azul) debe ser nula, existirá una carga superficial $-q$ inducida en la superficie interna de la corteza, y, como el conductor es neutro, una carga igual, pero de signo opuesto, $+q$ se induce en la superficie exterior de la corteza. Las líneas del campo eléctrico comienzan en la carga puntual, terminan en la superficie interna y comienzan de nuevo en la superficie exterior.

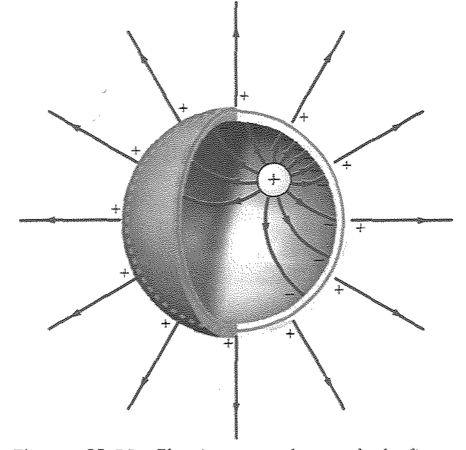


Figura 23.30 El mismo conductor de la figura 23.29 pero ahora la carga puntual no se encuentra en el centro de la esfera. La carga sobre la superficie exterior y las líneas del campo eléctrico fuera de la esfera no vienen afectadas por el cambio de posición de la carga puntual.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 23.9

Una lámina conductora cuadrada de espesor despreciable y de lado 4 m se sitúa en un campo externo uniforme E = (450 kN/C)i perpendicular a las caras de la lámina (figura 23.31). (a) Determinar la densidad de carga en cada cara de la lámina. (b) Sobre la lámina se sitúa una carga neta de 96 μC. Determinar la nueva densidad de carga sobre cada cara y el campo eléctrico próximo a cada cara, pero lejos de los bordes de la lámina.

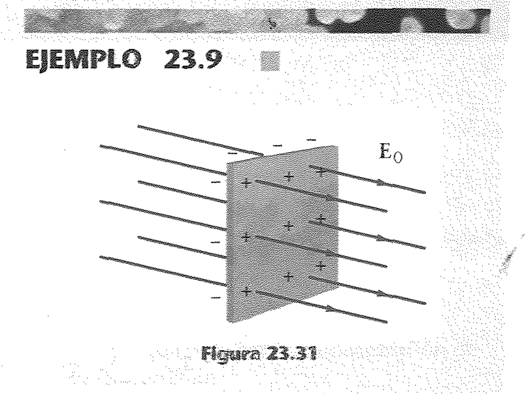


Figura 23.31

Esquema del problema (a) Determinamos la densidad de carga utilizando el valor de E_n próximo a cada superficie. (b) La carga adicional de 96 μC debe distribuirse uniformemente sobre cada cara de la lámina, de modo que el campo eléctrico interno permanezca siendo nulo. La densidad de carga neta es la suma de la densidad original más la densidad adicional.

(a) 1. La densidad de carga está relacionada con el campo justamente fuera de la superficie:

$$\sigma = \epsilon_0 E_n$$

2. En la cara derecha, E apunta hacia fuera desde la lámina, de modo que E_n = 450 kN/C. Utilizar el valor de E_n para calcular σ_D:

$$\sigma_D = \epsilon_0 E_n = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(450\ \mathrm{kN/C}) = 3{,}98 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2} = 3{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

3. En la cara izquierda, el campo eléctrico apunta hacia la lámina, de modo que E_n = −450 kN/C. Utilizar este dato para calcular σ_I:

$$\sigma_I = \epsilon_0 E_n = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(-450\ \mathrm{kN/C}) = -3{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

(b) 1. La nueva densidad de carga sobre una cara es igual a la carga original más la adicional:

$$\sigma' = \sigma + \sigma_a$$

2. La densidad de carga adicional sobre cada cara es igual a la carga total sobre la cara dividida por su área:

$$\sigma_a = \frac{Q}{A}$$

3. La carga adicional sobre cada cara es igual a la mitad de la carga total adicional (o sea 48 μC). Con este dato y las dimensiones conocidas de la lámina puede calcularse σ_a:

$$\sigma_a = \frac{Q}{A} = \frac{48\ \mu\mathrm{C}}{(4\ \mathrm{m})^2} = 3{,}0\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

4. Sumar esta densidad de carga adicional a la densidad de carga original para determinar la nueva densidad de carga:

$$\sigma_D = 3{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2} + 3{,}0\ \mu\mathrm{C/m^2} = 6{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_I = -3{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2} + 3{,}0\ \mu\mathrm{C/m^2} = -0{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

5. Utilizar estas densidades de carga para calcular el componente normal del campo eléctrico justo en la parte exterior de cada cara:

$$E_{nD} = \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} = \frac{6{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2}}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}} = 789\ \mathrm{kN/C}$$

$$E_{nI} = \frac{\sigma_I}{\epsilon_0} = \frac{-0{,}98\ \mu\mathrm{C/m^2}}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}} = -111\ \mathrm{kN/m^2}$$

Ejercicio La densidad de carga positiva, 3,0 $\mu\mathrm{C/m^2}$ sumada a cada cara es equivalente a sumar dos planos de carga positiva. (a) Determinar el campo eléctrico debido a estos dos planos fuera de las láminas. (b) Combinar este campo con el original para determinar los campos eléctricos resultantes a derecha e izquierda de la lámina. (*Respuestas:* (a) $E = \frac{1}{2}\sigma/\epsilon_0 + \frac{1}{2}\sigma/\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0 = 339$ kN/C. (b) E_D = 450 kN/C + 339 kN/C = 789 kN/C; E_I = 450 kN/C − 339 kN/C = 111 kN/C.)

Ejercicio El campo eléctrico justo en el exterior de la superficie de un conductor apunta alejándose del conductor, siendo su magnitud de 2000 N/C. ¿Cuál es la densidad de carga superficial sobre la superficie del conductor? (*Respuesta*: 17,7 $\mathrm{nC/m^2}$.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

23.6 ■ Deducción de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb

La ley de Gauss puede deducirse matemáticamente utilizando el concepto de **ángulo sólido**. Consideremos un elemento de área ΔA sobre una superficie esférica. El ángulo sólido $\Delta\Omega$ subtendido por ΔA en el centro de la esfera se define como

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

siendo r el radio de la esfera. Puesto que tanto ΔA como r^2 tienen dimensiones de longitud al cuadrado, el ángulo sólido es adimensional. La unidad de ángulo sólido es el **estereorradián** (sr). Puesto que el área total de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido total subtendido por una esfera es

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ estereorradianes}$$

Existe una estrecha analogía entre el ángulo sólido y el ángulo plano ordinario $\Delta\theta$ que se define como el cociente de un elemento de longitud de arco de circunferencia Δs dividido por el radio de la misma:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \text{ radianes}$$

El ángulo plano total subtendido por un círculo es 2π radianes.

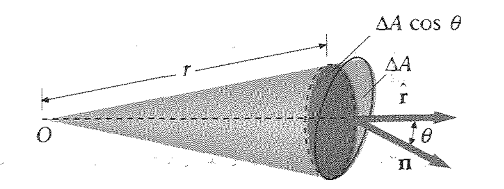


Figura 23.32 Elemento de área ΔA cuya normal no es paralela a la línea radial que va desde O hasta el centro del elemento. El ángulo sólido subtendido por este elemento en O es $(\Delta A \cos\theta)/r^2$.

En la figura 23.32 el elemento de área ΔA no es perpendicular a las líneas radiales que salen de O. El vector unidad $\hat{\mathbf{n}}$ normal al elemento de área forma un ángulo θ con el vector radial unitario $\hat{\mathbf{r}}$. En este caso, el ángulo sólido subtendido por ΔA en el punto O está definido por

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2} \qquad \textbf{(23.26)}$$

La figura 23.33 muestra una carga puntual q rodeada de una superficie de forma arbitraria. Para calcular el flujo que atraviesa esta superficie, debemos hallar $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \Delta A$ para cada elemento de área de la superficie y sumar respecto a la superficie completa. El flujo a través del elemento de área indicada es

$$\Delta\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \Delta A = \frac{kq}{r^2}\, \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \Delta A = kq\, \Delta\Omega$$

El ángulo sólido $\Delta\Omega$ es el mismo que el subtendido por el elemento de área correspondiente de una superficie esférica de cualquier radio. La suma del flujo que atraviesa la superficie entera es kq veces el ángulo sólido total subtendido por la superficie cerrada, que es 4π estereorradianes:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = kq \oint d\Omega = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(23.27)}$$

que es la ley de Gauss.

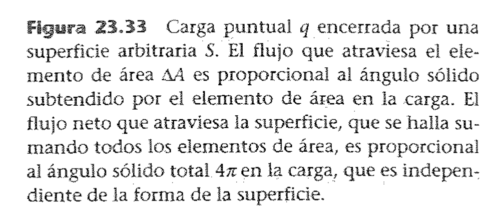
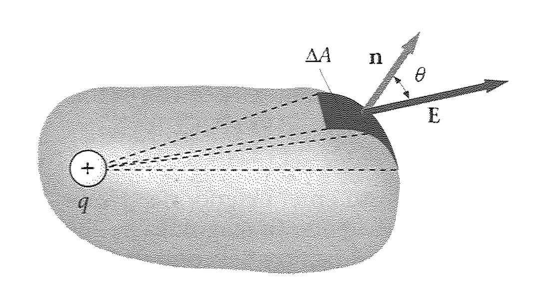


Figura 23.33 Carga puntual q encerrada por una superficie arbitraria S. El flujo que atraviesa el elemento de área ΔA es proporcional al ángulo sólido subtendido por el elemento de área en la carga. El flujo neto que atraviesa la superficie, que se halla sumando todos los elementos de área, es proporcional al ángulo sólido total 4π en la carga, que es independiente de la forma de la superficie.



www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Resumen

1. La ley de Gauss es una ley fundamental de la física que es equivalente a la ley de Coulomb de las cargas estáticas.
2. La ley de Gauss puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en distribuciones de carga de gran simetría.

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
		Definiciones y relaciones generales
$\mathbf{E} = \int_V \frac{k\,dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ (ley de Coulomb)	(23.4)	1. Campo eléctrico para una distribución de carga continua
en donde $dq = \rho\,dV$ para una carga distribuida en un determinado volumen, $dq = \sigma\,dA$ para una carga distribuida en una superficie, y $dq = \lambda\,dL$ para una carga distribuida a lo largo de una línea.		
$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \hat{\mathbf{n}}_i\,\Delta A_i = \int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$	(23.14)	2. Flujo eléctrico
$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_{\text{n}}\,dA = 4\pi k Q_{\text{dentro}}$	(23.17)	3. Ley de Gauss
El flujo neto a través de una superficie cerrada es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie.		
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$	(23.18)	4. Constante k de Coulomb y permitividad del espacio libre
$\epsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$		
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	(23.19)	5. Ley de Coulomb y ley de Gauss en función de ϵ_0
$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_{\text{n}}\,dA = \frac{1}{\epsilon_0}Q_{\text{dentro}}$	(23.20)	
En una superficie portadora de una densidad de carga superficial σ, el componente del campo eléctrico perpendicular a la superficie es discontinuo en el valor σ/ϵ_0:		6. Discontinuidad de E_n
$E_{\text{n}2} - E_{\text{n}1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	(23.24)	
En equilibrio electrostático, la carga eléctrica neta sobre un conductor reside en su superficie.		7. Carga sobre un conductor
El campo eléctrico justo fuera de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y vale σ/ϵ_0, en donde σ es la densidad de carga superficial en el punto considerado del conductor:		8. Campo **E** justo fuera de un conductor
$E_{\text{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	(23.25)	
La fuerza por unidad de área ejercida sobre la carga en la superficie de un conductor por todas las restantes cargas se denomina tensión electrostática.		
		Campos eléctricos para diversas distribuciones de carga
$E_r = \frac{2k\lambda}{r}\operatorname{sen}\theta_0$	(23.8)	En la mediatriz de una carga lineal finita
$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} = 2k\frac{\lambda}{r}$	(23.9)	En la mediatriz de una carga lineal infinita
$E_x = \frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$	(23.10)	En el eje de una carga anular
$E_x = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$	(23.11)	En el eje de un disco de carga
$E_{\text{n}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma$	(23.12), (23.21)	Cerca de un plano infinito de carga

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

En una corteza esférica de carga

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r > R \tag{23.22a}$$

$$E_r = 0, \qquad r < R \tag{23.22b}$$

En una esfera sólida de carga, según el valor de r

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r \geq R \tag{23.23a}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r, \qquad r \leq R \tag{23.23b}$$

Guía para la resolución de problemas

1. Comenzar dibujando un diagrama claro que incluya las características importantes del problema. Si se utiliza la ley de Coulomb, el esquema debe mostrar dq, el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ desde dq al punto del campo P y el campo elemental $d\mathbf{E}$. Descomponer $d\mathbf{E}$ en sus componentes y utilizar la simetría siempre que sea posible. Al determinar **E** utilizar la superposición, mostrar los vectores individuales **E** en el diagrama, junto con un sistema apropiado de coordenadas.
2. En las distribuciones de carga simétricas, es preferible determinar **E** a partir de la ley de Gauss. Indicar en un esquema la superficie gaussiana utilizada.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Ley de Coulomb	
Cálculo de **E** mediante la ley de Coulomb.	Determinar $d\mathbf{E}$ para un elemento de carga dq dado, y después integrar para toda la distribución de carga. **(Un ejemplo simple aparece en el texto de la sección 23.1.)**
2. Ley de Gauss	
Determinar la carga incluida en una superficie, conocido el valor de **E** sobre la superficie.	Calcular el flujo a través de la superficie y a continuación aplicar la ley de Gauss. **Ejemplo 23.4**
Calcular **E** mediante la ley de Gauss.	Elegir una superficie gaussiana apropiada, calcular ϕ_{neto} (en función de E), calcular Q_{dentro} y aplicar la ley de Gauss para deducir E. **Ejemplos 23.7, 23.8**
3. Determinar el campo E debido a dos o más distribuciones de carga	Determinar **E** para cada distribución por separado y sumar los vectores correspondientes para hallar el campo total. **Ejemplos 23.2, 23.3, 23.5, 23.6**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Cálculo del campo eléctrico E mediante la ley de Coulomb

• 1 Una carga lineal uniforme de densidad λ = 3,5 nC/m se distribuye desde x = 0 a x = 5 m.

(a) ¿Cuál es la carga total?

Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en

(b) x = 6 m, (c) x = 9 m y (d) x = 250 m.

(e) Determinar el campo en x = 250 m usando la aproximación de que se trata de una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido exactamente en (d).

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

• 2 Dos planos de carga verticales e infinitos son paralelos y están separados entre sí por una distancia $d = 4$ m. Determinar el campo eléctrico a la izquierda de los planos, a su derecha y entre ambos cuando

(a) cada plano posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = +3\ \mu C/m^2$ y
(b) el plano izquierdo tiene una densidad de carga $\sigma = +3\ \mu C/m^2$ y el derecho $\sigma = -3\ \mu C/m^2$. Dibujar las líneas de campo eléctrico en cada caso.

• 3 Una carga de 2,75 μC está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8,5 cm. Determinar el campo eléctrico sobre el eje en

(a) 1,2 cm, (b) 3,6 cm y (c) 4,0 m desde el centro del anillo.
(d) Determinar el campo en 4,0 m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en (c).

• 4 Un disco de radio 2,5 cm es portador de una densidad de carga superficial uniforme de 3,6 $\mu C/m^2$. Utilizando aproximaciones razonables, determinar el campo eléctrico sobre el eje a distancia de

(a) 0,01 cm, (b) 0,04 cm, (c) 5 m y (d) 5 cm.

• 5 Con el disco cargado del problema 4, calcular exactamente el campo eléctrico sobre el eje a distancia de

(a) 0,04 cm y
(b) 5 m y comparar los resultados con los correspondientes a las partes (b) y (c) del problema 4.

• 6 Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2{,}5$ cm a $x = +2{,}5$ cm y posee una densidad de carga lineal $\lambda = 6{,}0$ nC/m.

(a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico sobre el eje y en
(b) $y = 4$ cm, (c) $y = 12$ cm y (d) $y = 4{,}5$ m.
(e) Determinar el campo en $y = 4{,}5$ m suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido en (d).

• 7 Un disco de radio a se encuentra sobre el plano yz con su eje a lo largo del eje x y es portador de una densidad de carga superficial uniforme σ. Determinar el valor de x para el cual $E_x = \frac{1}{2}\sigma/2\epsilon$.

• 8 Un anillo de radio a con un centro en el origen y su eje a lo largo del eje x posee una carga total Q. Determinar E_x en

(a) $x = 0{,}2a$, (b) $x = 0{,}5a$, (c) $x = 0{,}7a$, (d) $x = a$ y (e) $x = 2a$.
(f) Utilizar los resultados obtenidos para representar E_x en función de x para ambos valores positivo y negativo de x.

• 9 Repetir el problema 8 para un disco de densidad de carga superficial uniforme σ.

•• 10 Un disco de radio 30 cm es portador de una densidad de carga uniforme σ.

(a) Comparar la aproximación $E = 2\pi k\sigma$ con la expresión exacta del campo eléctrico sobre el eje del disco (ecuación 23.11) expresando la diferencia fraccional $\Delta E/E \approx x/\sqrt{x^2+R^2}$ para las distancias $x = 0{,}1$, $x = 0{,}2$ y $x = 3$ cm.
(b) ¿A qué distancia el término despreciado es el 1 por ciento de $2\pi k\sigma$?

•• 11 Demostrar que el campo E_x sobre el eje de una carga anular de radio a tiene sus valores máximo y mínimo en $x = +a/\sqrt{2}$ y $x = -a/\sqrt{2}$. Representar E_x en función de x para ambos valores positivo y negativo de x.

•• 12 Una carga lineal de densidad de carga lineal λ está situada sobre el eje x desde $x = 0$ a $x = a$.

(a) Demostrar que el componente x del campo eléctrico en un punto sobre el eje y viene dado por

$$E_x = -\frac{k\lambda}{y} + \frac{k\lambda}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

(b) Demostrar que si la carga lineal se extiende de $x = -b$ a $x = a$, el componente x del campo eléctrico en un punto del eje y viene dado por

$$E_x = \frac{k\lambda}{\sqrt{y^2+a^2}} - \frac{k\lambda}{\sqrt{y^2+b^2}}$$

•• 13

(a) Una carga lineal finita de densidad de carga lineal uniforme λ está situada sobre el eje x desde $x = 0$ a $x = a$. Demostrar que el componente y del campo eléctrico en un punto sobre el eje y viene dado por

$$E = \frac{k\lambda}{y}\ \text{sen}\ \theta_1 = \frac{k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

en donde θ_1 es el ángulo subtendido por la carga lineal en el punto del campo.

(b) Demostrar que si la carga lineal se extiende desde $x = -b$ a $x = a$, el componente y del campo eléctrico en un punto sobre el eje y viene dado por

$$E_y = \frac{k\lambda}{y}(\text{sen}\ \theta_1 + \text{sen}\ \theta_2)$$

en donde $\text{sen}\ \theta_2 = b/\sqrt{y^2+b^2}$.

•• 14 Un anillo semicircular de radio R posee una carga de densidad lineal uniforme λ. Determinar el campo eléctrico en el centro del semicírculo.

••• 15 Una corteza delgada hemisférica de radio R posee una carga de densidad superficial uniforme σ. Determinar el campo eléctrico en el centro de la corteza hemisférica ($r = 0$).

••• 16 Una carga lineal de densidad de carga lineal λ con la forma de un cuadrado de lado L se encuentra en el plano yz con su centro en el origen. Determinar el campo eléctrico sobre el eje x a una distancia arbitraria x y comparar el resultado con el del campo que existe en el eje de un anillo cargado de radio $r = \frac{1}{2}L$ con su centro en el origen y transportando la misma carga total. (*Indicación*: Utilizar la ecuación 23.8 para conocer el campo debido a cada segmento del cuadrado.)

Ley de Gauss

•• 17 Verdadero o falso:

(a) La ley de Gauss es válida sólo en el caso de distribuciones de carga simétricas.
(b) El resultado $E = 0$ en el interior de un conductor en equilibrio puede deducirse a partir de la ley de Gauss.

•• 18 Además de la carga total dentro de una superficie, ¿qué información adicional es necesaria para aplicar la ley de Gauss a la determinación del campo eléctrico?

••• 19 ¿Es el campo eléctrico E de la ley de Gauss sólo aquella parte del campo eléctrico debido a la carga dentro de una superficie o hay que tener en cuenta el campo eléctrico total debido a todas las cargas tanto dentro como fuera de la superficie?

• 20 Consideremos un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (2\ \text{kN/C})\mathbf{i}$.

(a) ¿Cuál es el flujo de este campo a través de un cuadrado de 10 cm de lado cuyo plano es paralelo al plano yz?
(b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa el mismo cuadrado si la normal a su plano forma un ángulo de 30° con el eje x?

• 21 Una sola carga puntual $q = +2\ \mu C$ está en el origen. Una superficie esférica de 3,0 m de radio tiene su centro en el eje x en el punto $x = 5$ m.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(a) Dibujar las líneas de fuerza correspondientes a la carga puntual. ¿Hay líneas que entran en la superficie esférica?
(b) ¿Cuál es el número neto de líneas que salen de la superficie esférica contando las que entran como negativas?
(c) ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

• 22 Un campo eléctrico vale E = (300 N/C)**i** para $x > 0$ y E = (−300 N/C)**i** para $x < 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 4 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está situado a lo largo del eje x de modo que una de las caras está en $x = +10$ cm y la otra en $x = -10$ cm.
(a) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada cara?
(b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la superficie curvada del cilindro?
(c) ¿Cuál es el flujo neto saliente que atraviesa toda la superficie cilíndrica?
(d) ¿Cuál es la carga neta en el interior del cilindro?

• 23 Una carga puntual positiva q está en el centro de un cubo de arista L. Se dibujan saliendo de la carga puntual un gran número N de líneas de fuerza.
(a) ¿Cuántas de estas líneas pasan a través de la superficie del cubo?
(b) ¿Cuántas líneas pasan a través de cada cara admitiéndose que ninguna de ellas corta las aristas o vértices?
(c) ¿Cuál es el flujo neto hacia fuera del campo eléctrico a través de la superficie cúbica?
(d) Utilizar argumentos de simetría para hallar el flujo del campo eléctrico que atraviesa una cara del cubo.
(e) ¿Alguna de estas respuestas variaría si la carga estuviera en el interior del cubo pero no en su centro?

• 24 Medidas cuidadosas del campo eléctrico en la superficie de una caja negra indican que el flujo saliente neto a través de la superficie de la caja es 6,0 kN · m²/C.
(a) ¿Cuál es la carga neta en el interior de la caja?
(b) Si el flujo saliente neto a través de la superficie de la caja fuese cero, ¿podría obtenerse la conclusión de que no hay ninguna carga en el interior de la caja? ¿Por qué sí o por qué no?

• 25 Una carga puntual $q = +2$ μC está en el centro de una esfera de 0,5 m de radio.
(a) Hallar el área superficial de la esfera.
(b) Hallar el valor del campo eléctrico en los puntos situados en la superficie de la esfera.
(c) ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de la esfera?
(d) ¿Variaría la respuesta dada a la parte (c) si se moviese la carga puntual de modo que estuviese dentro de la esfera pero no en el centro?
(e) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa un cubo de 1 m de arista que circunscribe la esfera?

• 26 Dado que la ley de Newton de la gravedad y la ley de Coulomb poseen la misma dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia es posible determinar una expresión análoga a la ley de Gauss para los campos gravitatorios. El campo gravitatorio g es la fuerza por unidad de masa para una masa testigo m_0. Por tanto, para una masa m en el origen, el campo gravitatorio g en una posición r es

$$\mathbf{g} = -\frac{Gm}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Calcular el flujo del campo gravitatorio a través de una superficie esférica de radio r centrada en el origen y demostrar que la ecuación análoga gravitatoria de la ley de Gauss es $\phi_{\text{neto}} = -4\pi G m_{\text{interna}}$.

•• 27 Una carga de 2 μC está 20 cm por encima del centro de un cuadrado de arista 40 cm. Determinar el flujo a través del cuadrado. (*Indicación*: No integrar.)

•• 28 En una región particular de la atmósfera terrestre, se ha medido el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra resultando ser de 150 N/C a una altura de 250 m y de 170 N/C a 400 m, en ambos casos dirigido hacia abajo. Calcular la densidad de carga volúmica de la atmósfera suponiendo que es uniforme entre 250 y 400 m. (Puede despreciarse la curvatura de la Tierra. ¿Por qué?)

Distribuciones esféricas de carga

•• 29 Explicar por qué el campo eléctrico crece con r, en lugar de disminuir según $1/r^2$ cuando nos desplazamos hacia fuera desde el centro interior de una distribución esférica de carga de densidad volúmica de carga constante.

• 30 Una corteza esférica de radio R_1 posee una carga total q_1 uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior posee una carga q_2 uniformemente distribuida en su superficie.
(a) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$.
(b) ¿Cuál deberá ser el cociente de las cargas q_1/q_2 y su signo relativo para que el campo eléctrico sea cero para $r > R_2$?
(c) Hacer un esquema de las líneas de fuerza para el caso indicado en la parte (b).

• 31 Una corteza esférica de radio 6 cm posee una densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 9$ nC/m².
(a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en (b) $r = 2$ cm, (c) $r = 5{,}9$ cm, (d) $r = 6{,}1$ cm y (e) $r = 10$ cm.

•• 32 Una esfera de radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho = 450$ nC/m³.
(a) ¿Cuál es la carga total de la esfera? Determinar el campo eléctrico en (b) $r = 2$ cm, (c) $r = 5{,}9$ cm, (d) $r = 6{,}1$ cm y (e) $r = 10$ cm.
Comparar las respuestas con las del problema 31.

•• 33 Consideremos dos esferas conductoras concéntricas (figura 23.24). La esfera exterior es hueca y sobre ella se ha depositado una carga $-7Q$. La esfera interior es sólida y sobre ella hay un depósito de carga $+2Q$.
(a) ¿Cómo está distribuida la carga sobre la esfera exterior? Es decir, ¿cuánta carga hay en la superficie exterior y cuánta en la superficie interior?
(b) Supongamos que se conecta un alambre entre ambas esferas. Una vez alcanzado el equilibrio electrostático, ¿cuánta carga total existe sobre la esfera exterior? ¿cuánta carga hay ahora en la superficie exterior de esta esfera y cuánta carga en su superficie interna? ¿Cambia el campo eléctrico en la superficie de la esfera interna al conectar el cable? ¿Si es así, cómo cambia?
(c) Supongamos que volvemos a las condiciones iniciales de (a) con $+2Q$ en la esfera interior y $-7Q$ en la exterior. Conectamos ahora la esfera exterior a tierra con un cable y luego lo desconectamos. ¿Qué carga total existirá sobre la esfera exterior? ¿Cuánta carga tendremos sobre la superficie interna de la esfera exterior y cuánta sobre la superficie externa?

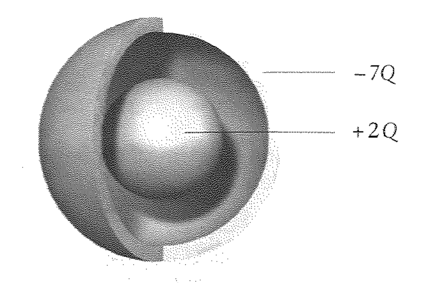


Figura 23.34 Problema 33.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 34 Una esfera no conductora de radio R = 0,1 m posee una carga volúmica uniforme de densidad ρ = 2,0 nC/m^3. La magnitud del campo eléctrico en $r = 2R$ es 1883 N/C. Determinar la magnitud del campo eléctrico en $r = 0{,}5R$.

•• 35 Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad de carga volúmica proporcional a la distancia desde el centro: $\rho = Ar$ para $r \leq R$, siendo A una constante; $\rho = 0$ para $r > R$.

(a) Hallar la carga total sobre la esfera sumando las cargas en cortezas de espesor dr y volumen $4\pi r^2\, dr$.
(b) Hallar el campo eléctrico E_r, tanto en el interior como en el exterior de la distribución de carga y representar E_r en función de r.

•• 36 Repetir el problema 35 para una esfera sólida cuya densidad de carga volúmica sea igual a $\rho = B/r$ para $r < R$ y $\rho = 0$ para $r > R$.

•• 37 Repetir el problema 35 para el caso de una esfera sólida de densidad de carga volúmica $\rho = C/r^2$ para $r < R$ y $\rho = 0$ para $r > R$.

••• 38 La densidad de carga en una región del espacio es esféricamente simétrica y viene dada por $\rho(r) = Ce^{-r/a}$ cuando $r < R$ y $\rho = 0$ cuando $r > R$. Determinar el campo eléctrico en función de r.

••• 39 Una corteza esférica no conductora y maciza de radio interior a y de radio exterior b posee una densidad ρ de carga volúmica uniforme.

(a) Calcular la carga total y
(b) el campo eléctrico en todos los puntos.

••• 40 Una carga puntual de +5 nC está localizada en el origen. Esta carga está rodeada por una distribución simétricamente esférica de carga negativa dada por $\rho(r) = Ce^{-r/a}$.

(a) ¿Cuál es el valor de la constante C si la carga total del sistema es nula?
(b) ¿Cuál es el campo eléctrico en $r = a$?

••• 41 Una esfera sólida no conductora de radio a con su centro en el origen tiene una cavidad esférica de radio b con su centro en el punto $x = b$, $y = 0$, $z = 0$ como se muestra en la figura 23.35. La esfera contiene una densidad de carga volúmica uniforme ρ. Demostrar que el campo eléctrico en la cavidad es uniforme y viene dado por $E_x = \rho b/3\epsilon_0$, $E_y = 0$. (*Indicación*: Sustituir la cavidad por esferas de igual densidad de carga positiva y negativa.)

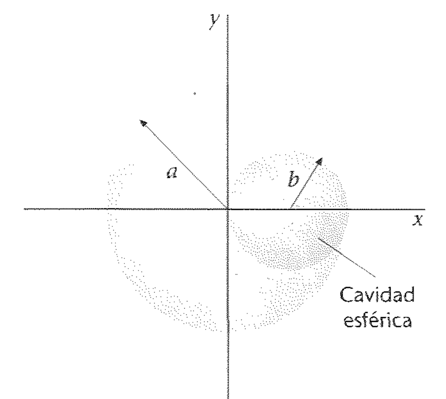


Figura 23.35 Problema 41.

Distribuciones cilíndricas de carga

•• 42 Demostrar que el campo eléctrico debido a una corteza cilíndrica uniformemente cargada e infinitamente larga de radio R y que posee una densidad de carga superficial σ, viene dado por

$$E_r = 0 \qquad \text{cuando } r < R \qquad \textbf{(23.28a)}$$

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{cuando } r > R \qquad \textbf{(23.28b)}$$

en donde $\lambda = 2\pi R\sigma$ es la carga por unidad de longitud sobre la corteza.

••• 43 Una corteza cilíndrica de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga superficial uniforme σ = 9 nC/m^2.

(a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en
(b) r = 2 cm, (c) r = 5,9 cm, (d) r = 6,1 cm y (e) r = 10 cm.
(Utilizar los resultados del problema 42.)

•• 44 Un cilindro no conductor infinitamente largo de radio R posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho(r) = \rho_0$. Demostrar que el campo eléctrico viene dado por

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}, \qquad r > R \qquad \textbf{(23.29a)}$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r, \qquad r < R \qquad \textbf{(23.29b)}$$

en donde $\lambda = \rho\pi R^2$ es la carga por unidad de longitud.

•• 45 Un cilindro de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme ρ = 300 nC/m^3.

(a) ¿Cuál es la carga total del cilindro? Utilizar las fórmulas dadas en el problema 44 para determinar el campo eléctrico en un punto equidistante de los extremos en
(b) r = 2 cm, (c) r = 5,9 cm, (d) r = 6,1 cm y (e) r = 10 cm.
Comparar los resultados con los del problema 43.

•• 46 Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1, mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2.

(a) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$.
(b) ¿Cuál deberá ser el cociente σ_2/σ_1 y el signo relativo de ambas para que el campo eléctrico sea cero cuando $r > R_2$? ¿Cuál es entonces el campo eléctrico entre las cortezas?
(c) Hacer un esquema de las líneas de fuerza en el caso indicado en la parte (b).

•• 47 La figura 23.36 muestra una porción de un cable concéntrico infinitamente largo en sección transversal. El conductor interno posee una carga de 6 nC/m; el conductor externo está descargado.

(a) Determinar el campo eléctrico para todos los valores de r, en donde r es la distancia desde el eje del sistema cilíndrico.
(b) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?

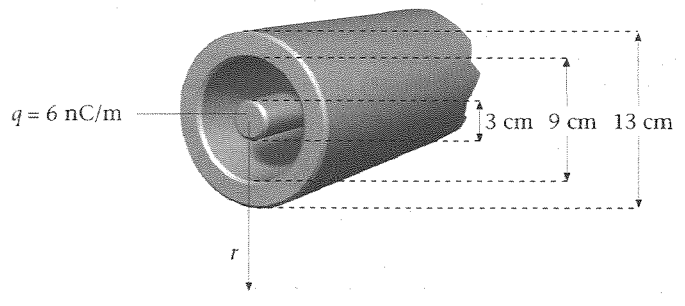


Figura 23.36 Problemas 47 y 51.

•• 48 Repetir el problema 44 para una cilindro con densidad volúmica de carga

(a) $\rho(r) = ar$ y (b) $\rho = Cr^2$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 49 Repetir el problema 44 con $\rho = C/r$.

••• 50 Una corteza cilíndrica no conductora, gruesa e infinitamente larga, de radio interior a y radio exterior b, posee una densidad de carga volúmica uniforme ρ. Determinar el campo eléctrico en todos sus puntos.

••• 51 Supongamos que el cilindro interno de la figura 23.36 está construido con un material no conductor y posee una distribución de carga volúmica dada por $\rho(r) = C/r$, en donde $C = 200$ nC/m^3. El cilindro externo es metálico.

(a) Determinar la carga por metro que posee el cilindro interno.
(b) Calcular el campo eléctrico para todos los valores de r.

Carga y campo en superficies conductores

• 52 Una moneda está en el interior de un campo eléctrico externo de valor 1,6 kN/C cuya dirección es perpendicular a sus caras.

(a) Hallar las densidades de carga en cada cara de la moneda suponiendo que son planas.
(b) Si el radio de la moneda es 1 cm, ¿cuál es la carga total en una cara?

• 53 Un bloque metálico sin carga tiene caras cuadradas de 12 cm de lado. Se coloca dentro de un campo eléctrico externo que es perpendicular a sus caras. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico, si la carga total inducida sobre una de las caras del bloque es 1,2 nC?

• 54 Una carga de 6 nC se coloca uniformemente sobre una lámina cuadrada de material no conductor de 20 cm de lado situado en el plano yz.

(a) ¿Cuál es la densidad superficial de carga σ?
(b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico a la derecha y a la izquierda de la lámina?
(c) Se coloca la misma carga sobre un bloque cuadrado conductor de 20 cm de lado y 1 mm de espesor. ¿Cuál es la densidad cuadrada de carga σ? (Admitir que la carga se distribuye por sí misma de modo uniforme en las superficies cuadradas del bloque.)
(d) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo a la derecha y a la izquierda de cada cara del bloque?

• 55 Una corteza conductora esférica con una carga neta cero tiene un radio interior a y un radio exterior b. Se coloca una carga puntual q en el centro de la corteza.

(a) Utilizar la ley de Gauss y las propiedades de los conductores en equilibrio para hallar el campo eléctrico en cada una de las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $b < r$.
(b) Dibujar las líneas de campo eléctrico para este caso.
(c) Determinar la densidad de carga en la superficie interna ($r = a$) y en la superficie externa ($r = b$) de la corteza.

•• 56 El campo eléctrico justo por encima de la superficie de la Tierra, medido experimentalmente es de 150 N/C, dirigido hacia abajo. ¿Qué carga total sobre la Tierra está implicada en esta medida?

•• 57 Una carga puntual positiva de magnitud 2,5 μC, se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica sin carga, de radio interior 60 cm y de radio exterior 90 cm.

(a) Determinar las densidades de carga sobre las superficies interior y exterior de la corteza y la carga total sobre cada superficie.
(b) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto.
(c) Repetir (a) y (b) para el caso en que una carga neta de +3,5 μC se sitúa sobre la corteza.

•• 58 Si la magnitud de un campo eléctrico en la atmósfera es 3×10^6 N/C, el aire se ioniza y comienza a conducir la electricidad. Este fenómeno se denomina descarga dieléctrica. Una carga de 18 μC se sitúa sobre una esfera conductora. ¿Cuál es el radio mínimo de una esfera que puede soportar esta carga sin que se produzca la descarga dieléctrica?

•• 59 Una lámina conductora cuadrada con lados de 5 m es portadora de una carga neta de 80 μC.

(a) Determinar la densidad de carga sobre cada cara de la lámina y el campo eléctrico justo en el exterior de una cara de la lámina.
(b) La lámina se sitúa a la derecha de un plano infinito no conductor, cargado con una densidad de 2,0 μC/m^2 y de modo que las caras de la lámina son paralelas al plano. Determinar el campo eléctrico sobre cada cara de la lámina lejos de los bordes y la densidad de carga sobre cada cara.

•• 60 Suponer que se pincha un pequeño orificio a través de la pared de una corteza esférica delgada y uniformemente cargada, cuya densidad de carga superficial es σ. Determinar el campo eléctrico próximo al centro del orificio.

Problemas generales

• 61 Verdadero o falso:

(a) Si no existe ninguna carga en una región del espacio, el campo eléctrico debe ser cero en todos los puntos de una superficie que rodea la región citada.
(b) El campo eléctrico en el interior de una corteza esférica uniformemente cargada es cero.
(c) El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es siempre cero.
(d) Si la carga neta sobre un conductor es cero, la densidad de carga debe ser cero en todos los puntos de la superficie.

• 62 Si el campo eléctrico E es cero en todos los puntos de una superficie cerrada, ¿es necesariamente cero el flujo neto a través de la superficie? ¿Qué significa entonces la carga neta dentro de la superficie?

• 63 Una carga puntual $-Q$ se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica de radio interior R_1 y radio exterior R_2 como indica la figura 23.37. La carga sobre la superficie interna de la corteza es

(a) $+Q$. (b) cero. (c) $-Q$.
(d) dependiente de la carga total depositada en la corteza.

www.elsolucionario.net

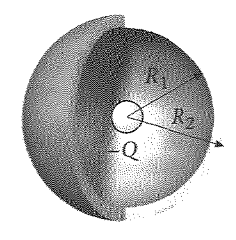


Figura 23.37 Problema 63–67.

• 64 En la configuración de la figura 23.37, la carga sobre la superficie exterior de la corteza es

(a) $+Q$. (b) cero. (c) $-Q$.
(d) dependiente de la carga total depositada en la corteza.

•• 65 Supongamos que la carga total sobre la corteza conductora de la figura 23.37 es cero. En consecuencia, el campo eléctrico para $r < R_1$ y $r > R_2$ apunta

(a) hacia fuera desde el centro de la corteza en ambas regiones.
(b) hacia el centro de la corteza en ambas regiones.
(c) hacia el centro de la corteza para $r < R_1$ y es cero para $r > R_2$.
(d) hacia fuera desde el centro de la corteza para $r < R_1$ y es cero para $r > R_2$.

www.elsolucionario.net

•• **66** Si la corteza conductora de la figura 23.37 se conecta a tierra, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) La carga de la superficie interna de la corteza es $+Q$ y la de la superficie exterior es $-Q$.
(b) La carga de la superficie interna de la corteza es $+Q$ y la de la superficie exterior es cero.
(c) La carga en ambas superficies de la corteza es $+Q$.
(d) La carga en ambas superficies de la corteza es cero.

•• **67** Con la configuración descrita en el problema 66, con la corteza conductora conectada a tierra, el campo eléctrico para $r < R_1$ y $r > R_2$ apunta:

(a) hacia fuera desde el centro de la corteza en ambas regiones.
(b) hacia el centro de la corteza en ambas regiones.
(c) hacia el centro de la corteza para $r < R_1$ y es cero para $r > R_2$.
(d) hacia el centro de la corteza para $r < R_1$ y es cero para $r > R_1$.

•• **68** Si el flujo neto a través de una superficie cerrada es cero, ¿significa esto que el campo eléctrico E es cero en todos los puntos de la superficie? ¿Significa que la carga neta dentro de la superficie es cero?

•• **69** La ecuación 23.8 correspondiente al campo eléctrico en la mediatriz de una carga lineal finita es diferente de la ecuación 23.11 que corresponde al campo eléctrico próximo a una carga lineal infinita; sin embargo, la ley de Gauss ofrece el mismo resultado en estos dos casos. Explicar.

•• **70** Verdadero o falso: El campo eléctrico es discontinuo en todos los puntos en los cuales la densidad de carga es discontinua.

•• **71** Consideremos las tres esferas metálicas concéntricas de la figura 23.38. La esfera I es sólida con el radio R_1. La esfera II es hueca con el radio R_2 más interno y el radio R_3 externo. La esfera III es hueca con radio R_4 más interno y radio R_5 externo. Inicialmente las tres esferas tienen una carga en exceso nula. A continuación situamos una carga $-Q_0$ sobre la esfera I y una carga positiva $+Q_0$ sobre la esfera III.

(a) Una vez que las cargas han alcanzado el equilibrio, el campo eléctrico en el espacio comprendido entre las esferas I y II, ¿está dirigido *hacia* el centro, *se aleja* del centro o ninguna de ambas cosas?
(b) ¿Cuánta carga existirá sobre la superficie interna de la esfera II? Especificar su signo.
(c) ¿Cuánta carga existirá sobre la superficie externa de la esfera II?
(d) ¿Cuánta carga existirá sobre la superficie interna de la esfera III?
(e) ¿Cuánta carga existirá sobre la superficie externa de la esfera III?
(f) Representar E en función de r.

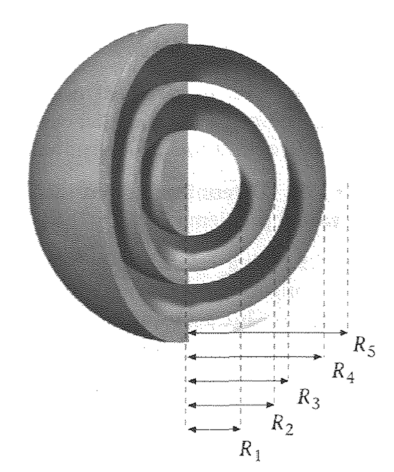


Figura 23.38 Problema 71.

•• **72** Un primer modelo del átomo de hidrógeno considera que el átomo estaba formado por un protón en forma de una esfera cargada de radio R con un electrón en una órbita de radio r_0 *dentro* del protón como indica la figura 23.39.

(a) Utilizar la ley de Gauss para obtener la magnitud de E en la posición del electrón. Dar la respuesta en función de e (carga del protón), r_0 y R.
(b) Determinar la frecuencia de revolución f en función de r_0 y la velocidad del electrón v.
(c) ¿Cuál es la fuerza sobre el electrón en función de m, v y r_0?
(d) ¿Cuál es la frecuencia f en función de m, e, R, ϵ_0 y r_0?

(Cada una de las respuestas no necesita incluir todas las magnitudes especificadas.)

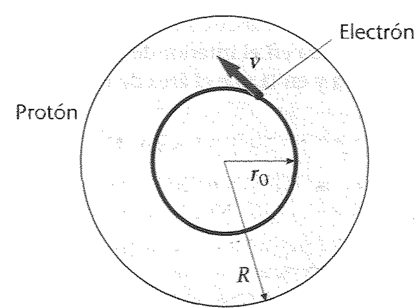


Figura 23.39 Problema 72.

•• **73** Sobre el plano yz tenemos una carga superficial no uniforme. En el origen, la densidad de carga superficial es $\sigma = 3{,}10\ \mu C/m^2$. En el espacio existen otras distribuciones de carga. Justo a la derecha del origen, el componente x del campo eléctrico es $E_x = 4{,}65 \times 10^5$ N/C. ¿Cuál es el valor de E_x justo a la izquierda del origen?

•• **74** Una carga lineal infinita de densidad lineal uniforme $\lambda = -1{,}5\ \mu C/m$ es paralela al eje y en $x = -2$ m. Una carga puntual de 1,3 μC está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m. Determinar el campo eléctrico en $x = 2$ m, $y = 1{,}5$ m.

•• **75** Dos planos infinitos de carga son paralelos entre sí y paralelos al plano yz. Uno de ellos corresponde a $x = -2$ m y su densidad superficial de carga es $\sigma = -3{,}5\ \mu C/m^2$. El otro corresponde a $x = 2$ m y $\sigma = 6{,}0\ \mu C/m^2$. Determinar el campo eléctrico para

(a) $x < -2$ m, (b) $-2 \text{ m} < x < 2$ m y (c) $x > 2$ m.

•• **76** Una corteza cilíndrica infinitamente larga, coaxial con el eje y tiene un radio de 15 cm. Posee una densidad superficial y uniforme de carga $\sigma = 6\ \mu C/m^2$. Una corteza esférica de radio 25 cm está centrada sobre el eje x en $x = 50$ cm y posee una densidad superficial y uniforme de carga $\sigma = -12\ \mu C/m^2$. Calcular la magnitud y dirección del campo eléctrico en

(a) el origen; (b) $x = 20$ cm, $y = 10$ cm y (c) $x = 50$ cm, $y = 20$ cm.

(Véase el problema 42.)

•• **77** Un plano infinito situado en el plano de coordenadas xz posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma_1 = 65$ nC/m^2. Un segundo plano infinito, portador de una densidad de carga uniforme $\sigma_2 = 45$ nC/m^2 corta el plano xz en el eje z y forma un ángulo de 30° con el plano xz como indica la figura 23.40. Determinar el campo eléctrico en el plano xy en

(a) $x = 6$ m, $y = 2$ m y (b) $x = 6$ m, $y = 5$ m.

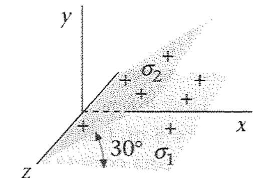


Figura 23.40 Problema 77.

•• **78** Un anillo de radio R transporta una densidad de carga positiva uniforme λ. En la figura 23.41 se muestra un punto P que se

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

encuentra en el plano del anillo pero que no es su centro. Considerar dos elementos del anillo, de longitudes s_1 y s_2 (indicados en la figura) y que se encuentran a las distancias r_1 y r_2 del punto *P*.

(a) ¿Cuál es la relación entre las cargas de estos elementos? ¿Cuál de ellas genera un campo mayor en el punto *P*?
(b) ¿Cuál es la dirección del campo debido a estos elementos en el punto *P*? ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico total en el punto *P*?
(c) Suponer que el campo eléctrico debido a una carga puntual varía en la forma $1/r$ en lugar de $1/r^2$. ¿Cuál sería el campo eléctrico en el punto *P* debido a los elementos que se muestran?
(d) ¿Qué diferencias existirían en las respuestas dadas si el punto *P* se encontrara en el interior de una corteza con una distribución de carga esférica y en la que el área de los elementos fuera s_1 y s_2?

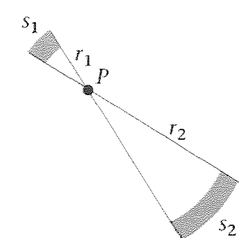


Figura 23.41 Problema 78.

•• **79** Un anillo de radio *R* que se encuentra en el plano horizontal (*xy*) posee una carga *Q* distribuida uniformemente en toda su longitud. Una masa *m* posee una carga *q* de signo opuesto al de *Q*.

(a) ¿Cuál es el valor mínimo de $|q|/m$ para que la masa *m* se encuentre en equilibrio bajo la acción de las fuerzas gravitatoria y electrostática?
(b) Si $|q|/m$ es el doble del valor calculado en (a), ¿dónde se encuentra la masa al alcanzar el equilibrio?

•• **80** Una barra de plástico, no conductora, larga y delgada, se dobla formando un bucle de radio *R*. Entre los extremos de la barra queda un hueco de longitud *l* ($l << R$). Una carga *Q* se distribuye por igual sobre la barra.

(a) Indicar la dirección del campo eléctrico en el centro del bucle.
(b) Determinar la magnitud del campo eléctrico en el centro del bucle.

•• **81** Una barra de longitud *L* se encuentra en dirección perpendicular a una carga lineal uniforme e infinitamente larga de densidad de carga λ C/m (figura 23.42). El extremo más próximo de la barra a la carga lineal dista de ésta la longitud *d*. La barra posee una carga total *Q* distribuida uniformemente en toda su longitud. Determinar la fuerza que la carga lineal infinitamente larga ejerce sobre la barra.

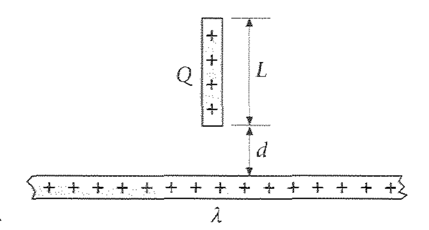


Figura 23.42 Problema 81.

•• **82** Una esfera sólida de 1,2 m de diámetro con su centro sobre el eje *x* en $x = 4$ m, transporta una carga volúmica uniforme de densidad $\rho = 5$ μC/m³. Una corteza esférica concéntrica con la esfera tiene un diámetro de 2,4 m y una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = -1{,}5$ μC/m². Calcular la magnitud y dirección del campo eléctrico en

(a) $x = 4{,}5$ m, $y = 0$; (b) $x = 4{,}0$ m, $y = 1{,}1$ m y (c) $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m.

•• **83** Un plano infinito de carga de densidad superficial $\sigma_1 = 3$ μC/m² es paralelo al plano *xz* en $y = -0{,}6$ m. Un segundo plano infinito de densidad superficial de carga $\sigma_2 = -2$ μC/m² es paralelo al plano *yz* en $x = 1$ m. Una esfera de radio 1 m con su centro en el plano *xy* en la intersección de los planos cargados ($x = 1$ m, $y = -0{,}6$ m) posee una densidad de carga superficial $\sigma_3 = -3$ μC/m². Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico sobre el eje *x* en

(a) $x = 0{,}4$ m y (b) $x = 2{,}5$ m.

•• **84** Un plano infinito paralelo al plano de coordenadas *yz* en $x = 2$ m posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 2$ μC/m². Una carga lineal infinita de densidad uniforme $\lambda = 4$ μC/m pasa por el origen formando un ángulo de 45° con el eje *x* en el plano *xy*. Una esfera de densidad de carga volúmica $\rho = -6$ μC/m³ y radio 0,8 m está centrada sobre el eje *x* en $x = 1$ m. Calcular la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el plano *xy* en $x = 1{,}5$ m, $y = 0{,}5$ m.

•• **85** Una carga lineal infinita λ está localizada a lo largo del eje *z*. Una masa *m* que posee una carga *q* de signo opuesto al de λ, se encuentra en una órbita circular en el plano *xy* alrededor de la carga lineal. Deducir una expresión para el periodo de la órbita en función de *m*, *q*, *R* y λ, en donde *R* es el radio de la órbita.

•• **86** Un anillo de radio *R* que se encuentra en el plano *yz* posee una carga Q uniformemente distribuida en toda su longitud. En el centro del anillo se encuentra una partícula de masa *m* que posee una carga *q*.

(a) Demostrar que si $x << R$, el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo es proporcional a *x*.
(b) Determinar la fuerza que actúa sobre la masa *m* en función de *x*.
(c) Demostrar que si damos a *m* un pequeño desplazamiento en la dirección *x*, verificará un movimiento armónico simple. Calcular el período de dicho movimiento.

•• **87** Cuando las cargas Q y *q* del problema 86 son 5 μC y −5 μC, respectivamente, y el radio del anillo es 8,0 cm, la masa *m* oscila alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia angular de 21 rad/s. Determinar la frecuencia angular de oscilación de la masa si el radio del anillo se duplica a 16 cm y todos los demás parámetros permanecen sin modificar.

•• **88** Dadas las condiciones iniciales del problema 87, determinar la frecuencia angular de oscilación de la masa si el radio del anillo se duplica a 16 cm, mientras que la densidad de carga lineal en el anillo permanece constante.

•• **89** Un cilindro no conductor de radio 1,2 m y longitud 2,0 m posee una carga de 50 μC uniformemente distribuida en todo el cilindro. Determinar el campo eléctrico *sobre el eje del cilindro* a una distancia de

(a) 0,5 m, (b) 2,0 m y (c) 20 m desde el centro del cilindro.

•• **90** Una carga lineal uniforme de densidad λ se encuentra sobre el eje *x* entre $x = 0$ y $x = L$. Su carga total es $Q = 8$ nC. El campo eléctrico en $x = 2L$ es 600 N/C **i**. Determinar el campo eléctrico en $x = 3L$.

•• **91** Determinar la densidad lineal de carga, λ (en C/m) de la carga lineal del problema 90.

••• **92** Una esfera uniformemente cargada de radio *R* está centrada en el origen con una carga *Q*. Determinar la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada, orientada radialmente y con una carga total *q* con sus extremos en $r = R$ y $r = R + d$.

••• **93** Dos cargas lineales uniformes e iguales de longitud *L* están situadas sobre el eje *x* separadas una distancia *d* como indica la figura 23.43.

(a) ¿Cuál es la fuerza que una carga lineal ejerce sobre la otra?
(b) Demostrar que cuando $d >> L$, la fuerza tiende al resultado esperado $k(\lambda L)^2/d^2$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

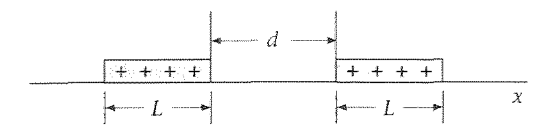


Figura 23.43 Problema 93.

••• **94** Un dipolo **p** está localizado a una distancia r de una carga lineal infinitamente larga con una densidad de carga lineal y uniforme λ. Suponer que el dipolo está alineado con el campo producido por la carga lineal. Determinar la fuerza que actúa sobre el dipolo.

••• **95** Suponer que la carga existente sobre la barra en el problema 81 viene dada por $\lambda(y) = ay^2$, en donde y es la distancia medida desde el punto medio de la barra y la carga total sobre ésta es Q.

(a) Determinar la constante a.
(b) Determinar la fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre un elemento de carga $\lambda(y)\, dy$.
(c) Integrar la fuerza obtenida en la parte (b) entre $-L/2$ y $L/2$ para obtener la fuerza total que actúa sobre la barra.

••• **96** Repetir el problema 95 con la carga sobre la barra siendo $\lambda(y) = by$, en donde y se mide desde el punto medio de la barra con la dirección positiva de y hacia arriba.

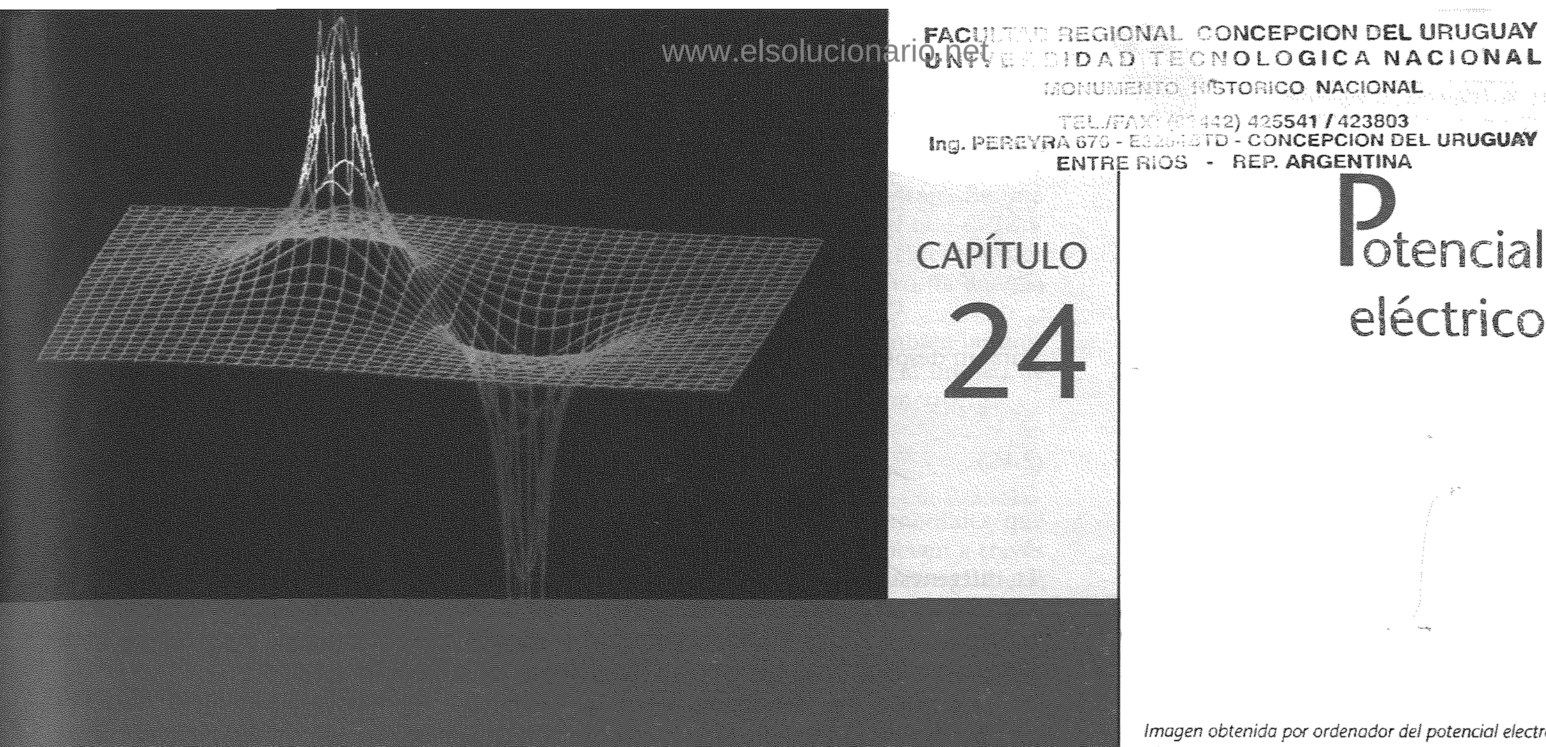
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO 24

Potencial eléctrico

Imagen obtenida por ordenador del potencial electrostático en el plano de un dipolo eléctrico. El potencial debido a cada carga es proporcional a la carga e inversamente proporcional a la distancia.

www.elsolucionario.net

La fuerza eléctrica entre dos cargas está dirigida a lo largo de la línea que une las dos cargas y depende de la inversa del cuadrado de su separación, lo mismo que la fuerza gravitatoria entre dos masas. Como la fuerza gravitatoria, la fuerza eléctrica es conservativa. Existe, por tanto, una función energía potencial U asociada con la fuerza eléctrica. Si situamos una carga de ensayo q_0 en un campo eléctrico, su energía potencial es proporcional a q_0. La energía potencial por unidad de carga es una función de la posición en el espacio de la carga y se denomina potencial eléctrico.

Diferencia de potencial ■ 24.1

En general, cuando una fuerza conservativa **F** actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\ell$, la variación de la función energía potencial dU viene definida por (ecuación 6.21b)

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

La fuerza ejercida por un campo eléctrico **E** sobre una carga puntual q_0 es

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$$

Cuando la carga experimenta un desplazamiento $d\ell$ en un campo eléctrico **E**, la variación de energía potencial electrostática es

$$dU = -q_0\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad (24.1)$$

La variación de energía potencial es proporcional a la carga testigo q_0. La variación de energía potencial *por unidad de carga* se denomina **diferencia de potencial** dV:

 www.elsolucionario.net

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{24.2a}$$

Definición. Diferencia de potencial

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b, el cambio de potencial

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{24.2b}$$

Definición. Diferencia de potencial finita

La diferencia de potencial $V_b - V_a$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando ésta se desplaza del punto a al punto b. ΔV es también el trabajo positivo por unidad de carga que debe realizarse contra el campo eléctrico para desplazar la carga de a a b.

La función V se denomina **potencial eléctrico** o simplemente **potencial**. Como el campo eléctrico, el potencial V es una función de la posición. Al contrario que el campo eléctrico, V es una función escalar, mientras que E es una función vectorial. Del mismo modo que la energía potencial U, sólo tiene importancia el *cambio* de potencial V. Tenemos la libertad de elegir el potencial de modo que sea cero en el punto que más nos convenga, lo mismo que hacíamos con la energía potencial. Si el potencial eléctrico y la energía potencial de una carga testigo se eligen de modo que sean iguales a cero en el mismo punto, ambas magnitudes están relacionadas por

$$U = q_0 V \tag{24.3}$$

Relación entre energía potencial U potencial V

Continuidad de V

En el capítulo 23 decíamos que el campo eléctrico presentaba la discontinuidad σ/ϵ_0 en un punto donde existe una densidad de carga superficial σ. En cambio, la función potencial es continua en todos los puntos del espacio. Podemos comprobarlo a partir de su definición. Consideremos un campo eléctrico en la dirección x, $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i}$. La variación de potencial viene dada por la ecuación 24.2a:

$$\begin{aligned} dV &= -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_x\mathbf{i} \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) \\ &= -E_x\,dx \end{aligned}$$

Consideremos dos puntos próximos x_1 y x_2. Si V_1 es el potencial en x_1 y V_2 el potencial en x_2, la diferencia de potencial puede escribirse en la forma

$$\Delta V = (E_x)_m\,\Delta x = (E_x)_m\,(x_2 - x_1)$$

en donde $(E_x)_m$ es el valor medio del campo eléctrico entre los dos puntos. Cuando x_2 se aproxima a x_1, la diferencia de potencial ΔV se aproxima a cero en tanto $(E_x)_m$ no es infinito. La función potencial V es, por tanto, continua en cualquier punto no ocupado por una carga puntual. Físicamente, si una carga testigo se desplaza una distancia Δx, el trabajo realizado por el campo se aproxima a cero cuando Δx tiende a cero, siempre que el campo eléctrico no sea infinito.

Unidades

Como el potencial eléctrico es la energía potencial electrostática por unidad de carga, la unidad SI para el potencial y diferencia de potencial es el julio por culombio, llamada **voltio** (V):

$$1\ \text{V} = 1\ \text{J/C} \tag{24.4}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Como la diferencia de potencial se mide en voltios, a veces se le llama **voltaje**. En una batería de automóvil de 12 voltios, el terminal positivo tiene un potencial que es 12 V mayor que el del terminal negativo. Si a esta batería se conecta un circuito externo y por él circula una carga de un culombio desde el terminal positivo al negativo, la energía potencial de la carga disminuye en $Q\,\Delta V = (1\text{C})(12\text{ V}) = 12\text{ J}$.

En la ecuación 24.2 se observa que las dimensiones de potencial son también las mismas que las del campo eléctrico multiplicado por la distancia. Así pues, la unidad de campo eléctrico E, el newton por culombio, es también igual al voltio por metro:

$$1\text{ N/C} = 1\text{ V/m} \qquad \textbf{(24.5)}$$

En física atómica y nuclear se trata frecuentemente con partículas elementales que poseen cargas de magnitud e, tales como electrones y protones que se mueven a través de diferencias de potencial de miles o incluso millones de voltios. Como la energía tiene dimensiones del producto carga eléctrica por potencial eléctrico, una unidad conveniente de energía es el producto de la carga del electrón e por un voltio. Esta unidad se llama **electrón-voltio**. La conversión de electrón-voltios en julios se obtiene expresando la carga electrónica en culombios:

$$1\text{ eV} = 1{,}6\times10^{-19}\text{ C}\cdot\text{V} = 1{,}6\times10^{-19}\text{ J} \qquad \textbf{(24.6)}$$

Electrón-voltio

Por ejemplo, un electrón que se desplaza del terminal negativo al positivo de una batería de 12 V, aumenta su energía potencial en 12 eV.

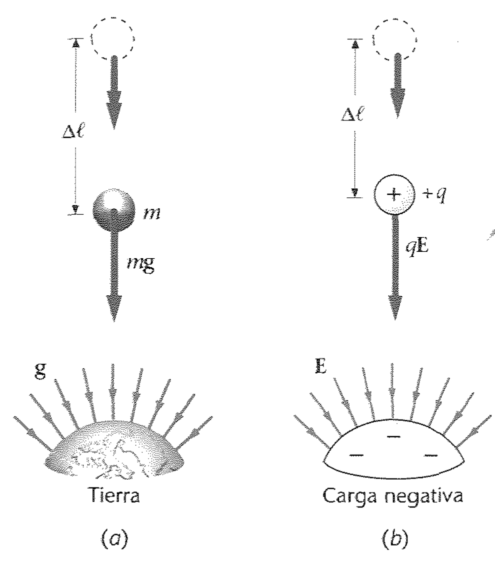


Figura 24.1 (*a*) El trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre una masa disminuye la energía potencial gravitatoria. (*b*) El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga positiva $+q$ disminuye la energía potencial electrostática.

Potencial y líneas de campo eléctrico

Si situamos una carga testigo positiva q_0 en un campo eléctrico **E** y la dejamos en libertad, se acelerará en la dirección de **E** a lo largo de la línea del campo. La energía cinética de la carga se incrementará y su energía potencial disminuirá. Así, la carga se mueve hacia una región de menor energía potencial del mismo modo que un cuerpo masivo cae hacia una región de menor energía potencial gravitatoria (figura 24.1). Así, como se indica en la figura 24.2:

Las líneas del campo eléctrico señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico.

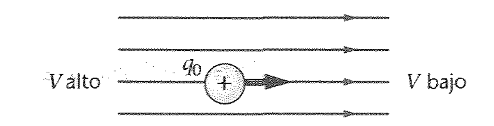


Figura 24.2 Las líneas del campo eléctrico apuntan en la dirección del potencial decreciente. Cuando una carga testigo positiva q_0 se sitúa en un campo eléctrico, acelera en la dirección del campo. Su energía cinética crece y su energía potencial disminuye.

EJEMPLO 24.1

Un campo eléctrico apunta en la dirección x positiva siendo su magnitud constante de 10 N/C = 10 V/m. Determinar el potencial en función de x, suponiendo que $V = 0$ para $x = 0$.

1. Por definición, el cambio de potencial dV está relacionado con el desplazamiento $d\boldsymbol{\ell}$ y el campo **E**:
$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -(10\text{ V/m})\mathbf{i}\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k}) = -(10\text{ V/m})\,dx$$
2. Integrar dV:
$$V = \int dV = \int -(10\text{ V/m})\,dx = -(10\text{ V/m})x + V_0$$
3. La constante de integración V_0 se determina haciendo $V = 0$ en $x = 0$:
$$V(0) = V_0 = 0$$
4. El potencial es, por tanto:
$$V = -(10\text{ V/m})x$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Observación El potencial es cero para $x = 0$ y disminuye a razón de 10 V/m en la dirección positiva x.

Ejercicio Repetir este ejemplo para el campo eléctrico $\mathbf{E} = (10\ \text{V/m}^2)x\mathbf{i}$. (*Respuesta:* $V(x) = -(5\ \text{V/m}^2)x^2$.)

24.2 ■ Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

El potencial eléctrico a una distancia r de una carga puntual q en el origen puede calcularse a partir del campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Para un desplazamiento radial infinitesimal $d\boldsymbol{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}}$, la variación de potencial es

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{kq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot dr\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{kq}{r^2}\,dr$$

Integrando se obtiene

$$V = +\frac{kq}{r} + V_0 \qquad \textbf{(24.7)}$$

Potencial debido a una carga puntual

en donde V_0 es una constante de integración.

Es costumbre definir el potencial cero a una distancia infinita de la carga puntual (es decir, para $r = \infty$). Por tanto, la constante V_0 es cero y el potencial a una distancia r de la carga puntual es

$$V = \frac{kq}{r}, \qquad V = 0 \text{ a } r = \infty \qquad \textbf{(24.8)}$$

Potencial de Coulomb

El potencial dado por la ecuación 24.8 se denomina **potencial de Coulomb**. Es positivo o negativo según el signo de la carga q.

La energía potencial U de una carga testigo q_0 situada a una distancia r de la carga puntual q es

$$U = q_0 V = \frac{kq_0 q}{r}, \qquad U = 0 \text{ en } r = \infty \qquad \textbf{(24.9)}$$

Energía potencial electrostática de un sistema de dos cargas

Esta es la energía potencial electrostática del sistema de dos cargas con la condición $U = 0$ a separación infinita. Si dejamos libre una carga testigo previamente en reposo a una distancia r de q (y mantenemos q fija en el origen), la carga de ensayo se acelerará alejándose (suponiendo que q tiene el mismo signo que q_0). Su energía cinética a gran distancia de q será kq_0q/r. Alternativamente, el trabajo que debemos hacer en contra del campo eléctrico para llevar una carga testigo q_0 desde una gran distancia hasta la distancia r de q es kq_0q/r (figura 24.3).

La elección de la energía potencial electrostática de dos cargas igual a cero a una distancia infinita es semejante a la que hicimos en nuestro estudio de la gravedad en el capítulo 11 según la cual la energía potencial de dos masas puntuales era cero cuando las masas estaban muy separadas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

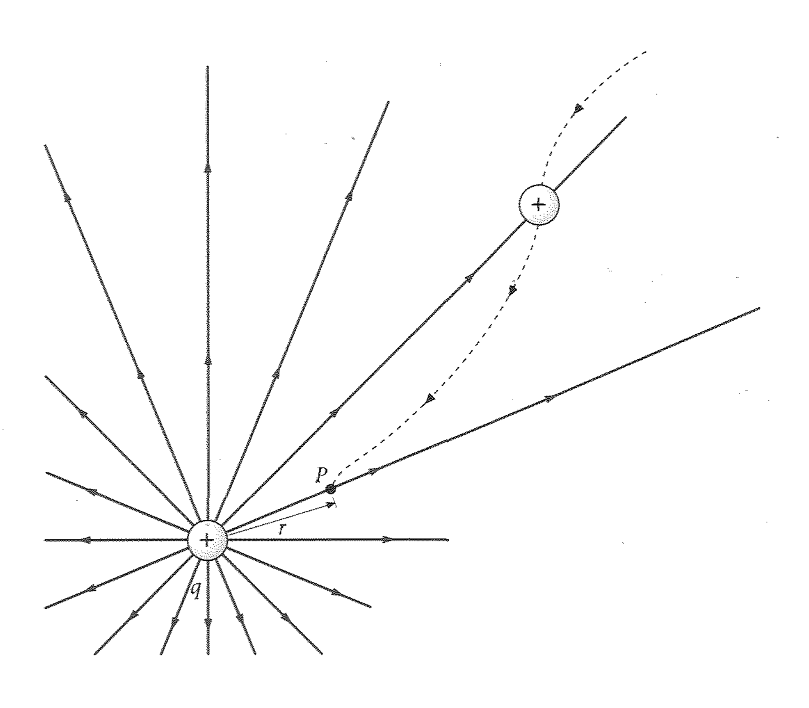


Figura 24.3 El trabajo necesario para llevar una carga testigo q_0 desde el infinito hasta el punto P a una distancia r de una carga q en el origen es kq_0q/r. El trabajo por unidad de carga es kq/r, que es el potencial eléctrico en el punto P respecto a un potencial cero en el infinito. Si la carga testigo se libera desde el punto P, el campo eléctrico realiza el trabajo kq_0q/r sobre la carga cuando ésta se mueve hasta el infinito.

EJEMPLO 24.2

(a) ¿Cuál es el potencial eléctrico a una distancia $r = 0{,}529 \times 10^{-10}$ m de un protón? (Esta es la distancia media entre el protón y el electrón en el átomo de hidrógeno.) (b) ¿Cuál es la energía potencial del electrón y el protón a esta separación?

(a) Utilizar $V = kq/r$ para calcular el potencial V debido al protón:

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{ke}{r} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{0{,}529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}$$

$$= 27{,}2\ \mathrm{J/C} = 27{,}2\ \mathrm{V}$$

(b) Utilizar $U = q_0V$, siendo $q_0 = -e$, para calcular la energía potencial electrostática:

$$U = q_0V = (-e)(27{,}2\ \mathrm{V}) = -27{,}2\ \mathrm{eV}$$

Observaciones Si el electrón estuviera en reposo a esta distancia del protón, serían necesarios 27,2 eV para separarle del átomo. Sin embargo, el electrón posee una energía cinética igual a 13,6 eV, de modo que su energía total en el átomo es 13,6 eV – 27,2 eV = –13,6 eV. Por consiguiente, la energía necesaria para extraer el electrón del átomo es 13,6 eV. Esta energía se llama energía de ionización.

Ejercicio ¿Cuál es la energía potencial el electrón y el protón en unidades SI? (*Respuesta*: $-4{,}35 \times 10^{-18}$ J.)

EJEMPLO 24.3

En la fisión nuclear, un núcleo de uranio-235 captura un neutrón y se escinde en dos núcleos más ligeros. A veces, los dos productos de la fisión son un núcleo de bario (carga 56*e*) y un núcleo de kriptón (carga 36*e*). Suponer que estos núcleos son cargas puntuales positivas separadas una distancia $r = 14{,}6 \times 10^{-15}$ m. Calcular la energía potencial de este sistema de dos cargas en electrón-voltios.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Esquema del problema La energía potencial de dos cargas puntuales separadas una distancia r es $U = kq_1q_2/r$. Para determinar esta energía en electrón-voltios calculamos el potencial debido a una de las cargas kq_1/r en voltios y multiplicamos por la otra carga.

1. La ecuación 24.9 expresa la energía potencial de las dos cargas:

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{k(56e)(36e)}{r}$$

2. Se saca el factor común e y se sustituyen los valores conocidos:

$$U = \frac{k(56e)(36e)}{r} = e\,\frac{ke(56)(36)}{r}$$

$$= e\,\frac{(8{,}99\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1{,}6\times10^{-19}\ \mathrm{C})(56)(36)}{14{,}6\times10^{-15}\ \mathrm{m}}$$

$$= e(1{,}99\times10^{8}\ \mathrm{V}) = 199\ \mathrm{MeV}$$

Observaciones Como distancia de separación r se ha escogido la suma de los radios de los dos núcleos. Después de la fisión, los dos núcleos se separan por repulsión electrostática. Su energía potencial original de 199 MeV se convierte en energía cinética y energía térmica. En el proceso de fisión se liberan dos o tres neutrones. En una reacción en cadena, uno o más de estos neutrones producen la fisión de otro núcleo de uranio. La energía media desprendida en las reacciones en cadena de este tipo es del orden de 200 MeV por núcleo, como la calculada en este ejemplo.

El potencial en un punto debido a diversas cargas puntuales es igual a la suma de los potenciales debidos a cada carga por separado. (Este es un resultado del principio de superposición del campo eléctrico. El trabajo realizado por el campo eléctrico neto es la suma de los trabajos realizados por los campos eléctricos debidos a cada una de las cargas por separado.) El potencial debido a un sistema de cargas puntuales q_i, será por tanto:

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} \qquad \textbf{(24.10)}$$

Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

en donde la suma debe extenderse a todas las cargas y r_i es la distancia desde la carga i al punto P donde deseamos calcular el potencial.

EJEMPLO 24.4

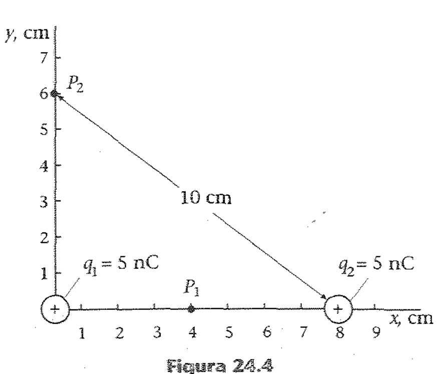


Figura 24.4

Dos cargas puntuales positivas e iguales de magnitud +5 nC se encuentran sobre el eje x. Una está en el origen y la otra en x = 8 cm. Determinar el potencial (a) en el punto P_1 sobre el eje x en x = 4 cm y (b) en el punto P_2 sobre el eje y en y = 6 cm.

Esquema del problema Las dos cargas puntuales positivas sobre el eje x se muestran en la figura 24.4 y el potencial debe determinarse en los puntos P_1 y P_2.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(a) 1. Utilizar la ecuación 24.10 para expresar V en función de las distancias r_1 y r_2 a las cargas:

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}$$

2. El punto P_1 se encuentra a 4 cm de cada carga y las dos cargas son iguales:

$$r_1 = r_2 = r = 0{,}04 \text{ m}$$

$$q_1 = q_2 = q = 5 \times 10^{-9} \text{ C}$$

3. Utilizar estos valores para determinar el potencial en el punto P_1:

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{2kq}{r}$$

$$= \frac{2 \times (8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0{,}04 \text{ m}}$$

$$= 2250 \text{ V}$$

(b) El punto P_2 se encuentra a 6 cm de una carga y a 10 cm de la otra. Utilizar estos valores para determinar el potencial en el punto P_2:

$$V = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0{,}06 \text{ m}} + \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0{,}10 \text{ m}}$$

$$= 749 \text{ V} + 450 \text{ V} \approx 1200 \text{ V}$$

Observaciones En (a), el campo eléctrico es cero en el punto medio entre las cargas, pero el potencial no es nulo. Se necesita trabajo para transportar una carga testigo a este punto desde una larga distancia, ya que el campo eléctrico es sólo cero en la posición final.



EJEMPLO 24.5

Una carga puntual q_1 está en el origen y una segunda carga puntual q_2 está sobre el eje x en $x = a$, como indica la figura 24.5. Determinar el potencial en cualquier punto del eje x.

Esquema del problema El potencial total es la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas por separado. La distancia de q_1 a cualquier punto es $r_1 = |x|$ y la distancia de q_2 a cualquier punto es $r_2 = |x - a|$.

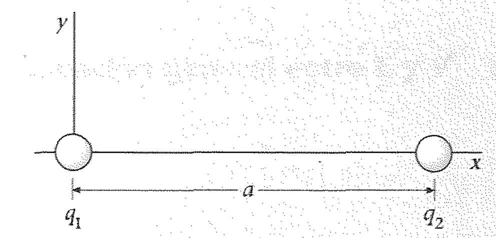


Figura 24.5

1. Escribir el potencial como una función de las distancias a las dos cargas:

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{kq_1}{|x|} + \frac{kq_2}{|x-a|}$$

2. A la derecha de ambas cargas, $|x| = x$ y $|x - a| = x - a$:

$$V = \frac{kq_1}{x} + \frac{kq_2}{x-a}, \qquad x > a$$

Entre las cargas, $|x| = x$ y $|x - a| = a - x$:

$$V = \frac{kq_1}{x} + \frac{kq_2}{a-x}, \qquad 0 < x < a$$

A la izquierda de ambas cargas, $|x| = -x$ y $|x - a| = a - x$:

$$V = -\frac{kq_1}{x} + \frac{kq_2}{a-x}, \qquad x < 0$$

Observación La figura 24.6 muestra V en función de x para cargas iguales. El potencial es siempre positivo y se hace infinito en la posición de cada una de las cargas.

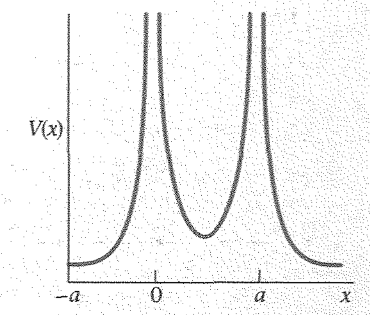


Figura 24.6

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 24.6

Un dipolo eléctrico consta de una carga positiva $+q$ sobre el eje x en $x = +a$ y una carga negativa $-q$ sobre el eje x en $x = -a$ (figura 24.7). Determinar el potencial sobre el eje x a una gran distancia del dipolo ($x >> a$), si el momento dipolar es $2qa$.

Figura 24.7

Esquema del problema El potencial es la suma de los potenciales de cada carga por separado. Para $x > a$, la distancia a la carga positiva es $x - a$ y la distancia a la carga negativa es $x + a$.

1. Para $x > a$, el potencial debido a las dos cargas es: $$V = \frac{kq}{x-a} + \frac{k(-q)}{x+a} = \frac{2kqa}{x^2 - a^2}$$

2. Para $x >> a$, podemos despreciar a^2 respecto a x^2 en el denominador. Así tenemos: $$V \approx \frac{2kqa}{x^2} = \frac{kp}{x^2}, \qquad x >> a \tag{24.11}$$

Observaciones Lejos del dipolo, el potencial disminuye según $1/r^2$, comparado con $1/r$ para el potencial de una carga puntual. En la primera página de este capítulo se muestra un gráfico tridimensional del potencial en la proximidad de las cargas.

24.3 ■ Determinación del campo eléctrico a partir del potencial

Si el potencial es conocido, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico. Consideremos un pequeño desplazamiento $d\ell$ en un campo eléctrico arbitrario **E**. La variación de potencial es

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_\ell \, d\ell \tag{24.12}$$

en donde E_ℓ es el componente de **E** paralelo al desplazamiento. Por tanto,

$$E_\ell = -\frac{dV}{d\ell} \tag{24.13}$$

Si el desplazamiento $d\ell$ es perpendicular al campo eléctrico, el potencial no varía. La variación más grande de V se produce cuando el desplazamiento $d\ell$ está dirigido a lo largo de **E**. Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuyo módulo es igual a la derivada de la función con respecto a la distancia en dicha dirección, se denomina **gradiente** de la función. El campo eléctrico **E** es opuesto al gradiente del potencial V. Las líneas de campo señalan en la dirección de máxima disminución de la función potencial.

Si el potencial depende sólo de x, no habrá cambios en los desplazamientos en las direcciones y o z y, por tanto, **E** debe permanecer en la dirección x. Para un desplazamiento en la dirección x, $d\boldsymbol{\ell} = dx\,\mathbf{i}$ y la ecuación 24.12 se convierte en

$$dV(x) = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\mathbf{E} \cdot dx\,\mathbf{i} = -E_x \, dx$$

Por tanto

$$E_x = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{24.14}$$

De un modo semejante, para una distribución de carga simétrica esféricamente, el potencial puede ser una función exclusiva de la distancia radial r. Los desplazamientos perpendiculares a la dirección radial no producen cambio en $V(r)$ y, por tanto, el campo eléctrico debe ser radial. Un desplazamiento en la dirección radial se expresa en la forma $d\boldsymbol{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}}$. Por tanto, la ecuación 24.12 será

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
009197

$$dV(r) = -\mathbf{E} \cdot d\ell = -\mathbf{E} \cdot dr\,\hat{\mathbf{r}} = -E_r\,dr$$

y

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr} \qquad (24.15)$$

Si conocemos el potencial o el campo eléctrico en una región del espacio, podemos utilizar una de estas magnitudes para calcular la otra. Con frecuencia es más fácil de calcular el potencial, porque se trata de una función escalar, mientras que el campo eléctrico es una función vectorial. Obsérvese que no es posible calcular **E** si sólo conocemos el valor de V en un punto; es necesario conocer V en una región del espacio para calcular **E**.

EJEMPLO 24.7

Determinar el campo eléctrico para la función potencial eléctrico $V(x)$ dada por $V(x) = 100\text{ V} - (25\text{ V/m})x$.

Esta función potencial depende sólo de x. El campo eléctrico resulta aplicando la ecuación 24.14:

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx}\,\mathbf{i} = +(25\text{ V/m})\mathbf{i}$$

Observaciones Este campo eléctrico es uniforme y tiene la dirección x. Obsérvese que la constante 100 V en la expresión de $V(x)$ no tiene efecto alguno sobre el campo eléctrico. El campo eléctrico no depende de la elección del cero para la función potencial.

Ejercicio (a) ¿En qué punto es $V = 0$ en este ejemplo? (b) Escribir la función potencial correspondiente al mismo campo eléctrico en $V = 0$ en $x = 0$. (*Respuestas*: (a) $x = 4$ m, (b) $V = -(25\text{ V/m})x$.)

Relación general entre E y *V*

OPCIONAL

En notación vectorial, el gradiente de V se escribe **grad** V. Por tanto,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\ V \qquad (24.16)$$

En general, la función potencial puede depender de x, y y z. Los componentes rectangulares del campo eléctrico están relacionados con las derivadas parciales del potencial respecto a x, y o z, mientras las otras variables se mantienen constantes. Por ejemplo, el componente x del campo eléctrico viene dado por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (24.17a)$$

De igual modo, los componentes y y z del campo eléctrico están relacionados con el potencial por

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (24.17b)$$

y

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (24.17c)$$

Así, la ecuación 24.16 en coordenadas rectangulares es

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\ V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \qquad (24.18)$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

24.4 Cálculo de V para distribuciones continuas de carga

El potencial debido a una distribución continua de carga puede calcularse eligiendo un elemento de carga dq que puede considerarse como una carga puntual y convirtiendo el sumatorio de la ecuación 24.10 en una integral:

$$V = \int \frac{k\,dq}{r} \tag{24.19}$$

Potencial debido a una distribución de carga continua

Esta ecuación supone que $V = 0$ a una distancia infinita de las cargas y, por tanto, no puede utilizarse cuando la carga se encuentra en el infinito, como ocurre en el caso de las distribuciones artificiales de carga, por ejemplo, una carga lineal infinita o un plano de carga infinito.

Potencial V sobre el eje de un anillo cargado

Consideremos un anillo uniformemente cargado de radio a y carga Q, como indica la figura 24.8. Sea dq un elemento de carga del anillo. La distancia desde este elemento de carga al punto del campo P sobre el eje del anillo es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Como esta distancia es la misma para todos los elementos de carga sobre el anillo, puede sacarse fuera de la integral en la ecuación 24.19. El potencial en el punto P debido al anillo es pues,

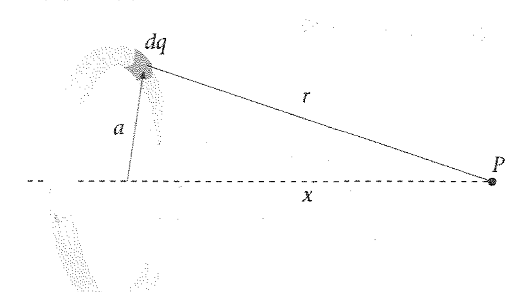


Figura 24.8 Geometría para el cálculo del potencial eléctrico en un punto situado en el eje de un anillo de radio a uniformemente cargado.

$$V = \int \frac{k\,dq}{r} = \int \frac{k\,dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq$$

o bien

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{24.20}$$

Potencial sobre el eje de un anillo uniformemente cargado

Obsérvese que cuando x es mucho mayor que a, el potencial se aproxima a kQ/x, es decir, el mismo valor que el correspondiente a una carga puntual en el origen.

EJEMPLO 24.8 ¡Inténtelo!

Un anillo de radio 4 cm está situado en el plano yz con su centro en el origen. El anillo posee una carga uniforme de 8 nC. Una pequeña partícula de masa m = 6 mg = 6×10^{-6} kg y carga q_0 = 5 nC se sitúa en x = 3 cm y se deja en libertad. Determinar la velocidad de la carga cuando se encuentra a gran distancia del anillo.

Esquema del problema Cuando la partícula se mueve a lo largo del eje x, su energía potencial disminuye y su energía cinética crece. Cuando la partícula está muy alejada del origen, su energía potencial es cero y por el principio de conservación de la energía, su energía cinética es igual a la energía potencial original. La velocidad final se determina a partir de la energía cinética final.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Utilizar $U = q_0V$ con el valor de V dado por la ecuación 24.20 para calcular la energía potencial de la carga puntual a una distancia de 3 cm desde el centro del anillo.	$U = q_0V = \frac{kQq_0}{\sqrt{x^2+a^2}} = 7{,}19 \times 10^{-6}$ J

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

2. Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía, escribir una ecuación para la energía cinética de la partícula cuando está lejos del anillo.

$$U_f + E_{c_f} = U_i + E_{c_i}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = 7{,}9 \times 10^6 \text{ J} + 0$$

3. Despejar la velocidad v.

$$v = 1{,}55 \text{ m/s}$$

Ejercicio ¿Cuál es la energía potencial de la partícula cuando se encuentra a la distancia $x = 9$ cm? (*Respuesta:* $3{,}65 \times 10^{-6}$ J.)

El potencial *V* sobre el eje de un disco uniformemente cargado

Utilizaremos ahora el resultado obtenido para el potencial sobre el eje de una carga anular para calcular el potencial existente sobre el eje de un disco uniformemente cargado.

EJEMPLO 24.9

Determinar el potencial sobre el eje de un disco de radio *R* que posee una carga total *Q* distribuida uniformemente sobre su superficie.

Esquema del problema Tomaremos como eje x el eje del disco y consideraremos el disco como una serie concéntrica de cargas anulares. La figura 24.9 muestra uno de estos anillos de radio a y anchura da. El área de este anillo es $2\pi a\, da$ y su carga es $dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi a\, da$, en donde $\sigma = Q/\pi R^2$ es la densidad superficial de carga. El potencial en un punto P sobre el eje x debido a este elemento anular de carga viene dado por la ecuación 24.20. Integrando de $a = 0$ a $a = R$ determinaremos el potencial debido al disco.

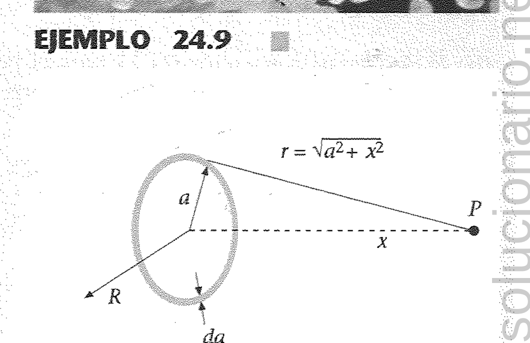


Figura 24.9

1. Expresar el potencial dV en el punto P debido al anillo cargado de radio a:

$$dV = \frac{k\, dq}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{k\sigma 2\pi a\, da}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

2. Integrar desde $a = 0$ a $a = R$:

$$V = \int_0^R \frac{k\sigma 2\pi a\, da}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = k\sigma\pi \int_0^R (x^2 + a^2)^{-1/2}\, 2a\, da$$

3. La integral es de la forma $\int u^n\, du$, con $u = x^2 + a^2$ y $n = -1/2$:

$$\int_0^R (x^2 + a^2)^{-1/2}\, 2a\, da = \left.\frac{(x^2 + a^2)^{+1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_{a=0}^{a=R} = 2[(x^2 + R^2)^{1/2} - x]$$

4. Utilizar este resultado para determinar V:

$$V = 2\pi k\sigma[(x^2 + R^2)^{1/2} - x]$$

Comprobación del resultado Para determinar como varía el potencial con x, para $x >> R$, expresaremos $V = 2\pi k\sigma x[(1 + R^2/x^2)^{1/2} - 1]$ y utilizaremos la fórmula del desarrollo del binomio

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} + \ldots$$

Por tanto,

$$V \approx 2\pi k\sigma x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} + \ldots - 1\right] = \frac{k(\sigma\pi R^2)}{x} = \frac{kQ}{x}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Según el ejemplo 24.9 el potencial sobre el eje de un disco uniformemente cargado es

$$V = 2\pi k\sigma\,[(x^2 + R^2)^{1/2} - x] \tag{24.21}$$

Potencial sobre el eje de un disco cargado



EJEMPLO 24.10 **Calcular el campo eléctrico sobre el eje de (a) un anillo uniformemente cargado y (b) un disco uniformemente cargado a partir de las funciones del potencial obtenidas anteriormente para estas distribuciones de carga.**

Esquema del problema Como V depende sólo de x, el campo eléctrico tiene un solo componente x, dado por $E_x = -dV/dx$.

(a) 1. Expresar la ecuación 24.20 para el potencial sobre el eje de un anillo cargado uniformemente:

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} = kQ(x^2 + a^2)^{-1/2}$$

2. Calcular $-dV/dx$ para determinar E_x:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = +\tfrac{1}{2}\,kQ(x^2 + a^2)^{-3/2}(2x) = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

(b) 1. Expresar la ecuación 24.21 para el potencial sobre el eje de un disco cargado uniformemente:

$$V = 2\pi k\sigma\,[(x^2 + R^2)^{1/2} - x]$$

2. Calcular $-dV/dx$ para determinar E_x:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\pi k\sigma\,[\tfrac{1}{2}(x^2 + a^2)^{-1/2}2x - 1]$$

$$= 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

Observaciones Los resultados de (a) y (b) coinciden con las ecuaciones 23.10 y 23.11 que fueron calculadas directamente a partir de la ley de Coulomb.

Potencial V debido a un plano infinito de carga

Si R se hace muy grande, nuestro disco se aproxima a un plano infinito. Cuando R se aproxima al infinito, la función potencial (ecuación 24.21) se aproxima también a un valor infinito. Sin embargo, obtuvimos la ecuación 24.21 a partir de la 24.19, según la cual $V = 0$ en el infinito y, por tanto, la ecuación 24.21 no puede utilizarse. Para distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito, debemos elegir $V = 0$ en algún punto finito y no en el infinito. Para estos casos, determinamos en primer lugar el campo eléctrico **E** (por integración directa o mediante la ley de Gauss) y luego calculamos el potencial a partir de su definición, $dV = -\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$. Si se trata de un plano infinito de carga de densidad σ situado en el plano yz, el campo eléctrico para valores positivos de x viene dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\mathbf{i} = 2\pi k\sigma\mathbf{i}$$

El potencial es, por tanto,

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -(2\pi k\sigma\mathbf{i})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = -2\pi k\sigma\,dx$$

Integrando resulta

$$V = V_0 - 2\pi k\sigma x$$

en donde la constante arbitraria V_0 es el potencia en $x = 0$. Obsérvese que el potencial disminuye con la distancia al plano y tiende a $-\infty$ cuando x se aproxima a $-\infty$. Por tanto,

www.elsolucionario.net

no podemos escoger un potencial nulo para $x = \infty$. Para un valor de x negativo, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -2\pi k\sigma\mathbf{i}$$

de modo que

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = +2\pi k\sigma\, dx$$

y el potencial es

$$V = V_0 + 2\pi k\sigma x$$

Como x es negativo, el potencial disminuye de nuevo con la distancia al plano y tiende a $-\infty$ cuando x se aproxima a $-\infty$. Para valores positivos o negativos de x, el potencial se expresa en la forma

$$V = V_0 - 2\pi k\sigma|x| \qquad \textbf{(24.22)}$$

Potencial próximo a un plano infinito de carga

La figura 24.10 muestra este potencial en función de x.

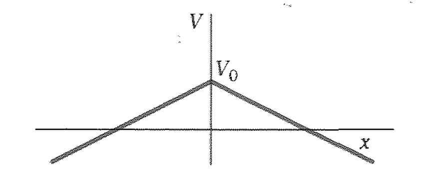


Figura 24.10 Representación gráfica de V en función de x para un plano infinito de carga en el plano yz. El potencial es continuo $x = 0$, aunque el campo eléctrico no lo sea.



EJEMPLO 24.11

Un plano infinito de densidad de carga σ se encuentra en el plano yz en $x = 0$ y una carga puntual q está sobre el eje x en $x = a$ (figura 24.11). Determinar el potencial en un punto P a una distancia r de la carga puntual para $x > 0$ (es decir, a la derecha del plano de carga).

Esquema del problema El potencial total es igual a la suma del potencial debido al plano y el potencial debido a la carga puntual. Como no podemos elegir $V = 0$ para $r = \infty$, debemos incluir una constante arbitraria en nuestra expresión de $V(r)$ para una carga puntual. Como tenemos dos constantes, les llamaremos V_{01} y V_{02}. Podemos escoger libremente el cero de potencial en cualquier punto finito que nos convenga. En este ejemplo, elegiremos $V = 0$ en el origen.

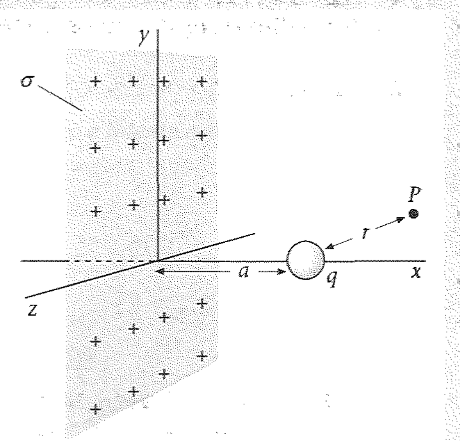


Figura 24.11

1. El potencial debido al plano viene dado por la ecuación 24.22 con $|x| = x$: $V_{\text{plano}} = V_{01} - 2\pi k\sigma x, \quad V_{01} = \text{constante}$

2. La ecuación 24.7 nos da el potencial debido a una carga puntual: $V_{\text{punto}} = \dfrac{kq}{r} + V_{02}, \quad V_{02} = \text{constante}$

3. Sumar los resultados anteriores para determinar el potencial total V: $V = V_{\text{plano}} + V_{\text{punto}} = V_{01} - 2\pi kx + \dfrac{kq}{r} + V_{02}$

4. Elegimos $V = 0$ en el origen; es decir en $x = 0$ y $r = a$. Esta elección determina $V_{01} + V_{02}$: $V = 0 = V_{01} - 2\pi k\sigma(0) + \dfrac{kq}{a} + V_{02}$

   o

   $V_{01} + V_{02} = -\dfrac{kq}{a}$

5. Aplicar este valor de $V_{01} + V_{02}$ en la expresión general de V: $V = -2\pi k\sigma x + \dfrac{kq}{r} - \dfrac{kq}{a}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Observaciones En coordenadas rectangulares, $r = [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$; por tanto,

$$V = -2\pi k\sigma x + \frac{kq}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{kq}{a}$$

Ejercicio Determinar V para $x < 0$. (*Respuesta:*

$$V = 2\pi k\sigma x + \frac{kq}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{kq}{a}.)$$

El potencial V en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga

A continuación determinaremos el potencial debido a una corteza esférica de radio R y carga Q distribuida uniformemente en su superficie. Estamos interesados en hallar el potencial en todos los puntos en el interior y en el exterior de la corteza. Puesto que esta distribución de carga es de extensión finita, podríamos calcular el potencial por integración directa de la ecuación 24.19, pero esta integración es compleja. Como el campo eléctrico para esta distribución de carga se obtiene fácilmente mediante la ley de Gauss, es mejor determinar el potencial a partir del campo eléctrico conocido, mediante la expresión $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$.

Fuera de la corteza esférica el campo eléctrico es radial y es el mismo que si toda la carga fuera puntual en el origen:

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

El cambio de potencial correspondiente a un desplazamiento $d\boldsymbol{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}}$ fuera de la corteza es, por tanto,

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{kQ}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot dr\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{kQ}{r^2}\,dr$$

Integrando se obtiene

$$V = \frac{kQ}{r} + V_0$$

en donde V_0 es el potencial para $r = \infty$. Eligiendo el potencial nulo para $r = \infty$ resulta

$$V = \frac{kQ}{r}, \qquad r > R$$

Dentro de la corteza esférica, el campo eléctrico es cero. La variación de potencial en cualquier desplazamiento dentro de la corteza es, por tanto, cero. Así pues, el potencial será constante en todos los puntos dentro de la corteza. Cuando r se aproxima a R desde el exterior de la corteza, el potencial se aproxima a kQ/R. Por tanto, el valor constante de V en el interior debe ser kQ/R para que V varíe de modo continuo. Así,

$$V = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R}, & r \le R \\[2mm] \dfrac{kQ}{r}, & r \ge R \end{cases} \qquad \textbf{(24.23)}$$

Potencial debido a una corteza esférica

Figura 24.12 Potencial eléctrico de una corteza esférica uniformemente cargada de radio R en función de la distancia r al centro de la corteza. Dentro de ella el potencial tiene valor constante kQ/R. Fuera de la corteza el potencial es el mismo que el originado por una carga puntual en el centro de la esfera.

Esta función potencial se representa en la figura 24.12.

Un error frecuente es pensar que el potencial debe ser cero en el interior de una corteza esférica porque el campo eléctrico es cero. Realmente, el campo eléctrico nulo implica simplemente que el potencial no varía. Consideremos una corteza esférica con un pequeño orificio, de modo que podemos mover una carga testigo dentro y fuera de la corteza. Si

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

desplazamos la carga testigo desde una distancia infinita hasta la corteza, el trabajo por unidad de carga que debemos realizar es kQ/R. Dentro de la corteza no hay campo eléctrico y por lo tanto no es necesario realizar ningún trabajo para mover la carga de prueba en el interior de la corteza. La cantidad total de trabajo por carga que se necesita para llevar la carga de prueba desde el infinito hasta cualquier punto en el interior de la corteza coincide con el trabajo necesario para llevarla hasta la corteza de radio R, que es kQ/R. Por consiguiente, el potencial es kQ/R en todos los puntos del interior de la corteza.

Ejercicio ¿Cuál es el potencial de una corteza esférica de radio 10 cm que posee una carga de 6 μC? (*Respuesta*: $5{,}39 \times 10^5$ V = 539 kV.)

EJEMPLO 24.12 ¡Inténtelo!

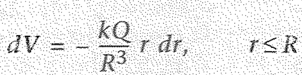
En un modelo se considera que un protón es una esfera de carga de densidad volúmica uniforme de radio R y carga total Q. El campo eléctrico dentro de la esfera viene dado por la ecuación 23.23b,

$$E_r = k\frac{Q}{R^3}\,r$$

Determinar el potencial V dentro y fuera de la esfera.

Esquema del problema Fuera de la esfera, la carga se comporta como si fuera puntual, de modo que el potencial es $V = kQ/r$. Dentro de la esfera, V puede determinarse integrando $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$. La constante de integración se determina exigiendo que V sea continuo para $r = R$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Expresar el potencial V para $r \geq R$.	$V = \dfrac{kQ}{r}, \quad r \geq R$
2. Para $r \leq R$, determinar dV a partir de $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$	 $dV = -\dfrac{kQ}{R^3}\,r\,dr, \quad r \leq R$
3. Determinar la integral indefinida de la expresión obtenida en la etapa 2. No olvidar la constante de integración V_0.	$V = -\dfrac{kQ}{2R^3}\,r^2 + V_0$
4. Igualar la expresión deducida en la etapa 3 con la deducida en 1 para $r = R$ y obtener la constante de integración.	$V_0 = \dfrac{3kQ}{2R}$
5. Aplicar el valor de V_0 en la expresión deducida en la etapa 3 y obtener $V(r)$ para $r \leq R$.	$V(r) = \dfrac{kQ}{2R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right), \quad r \leq R$

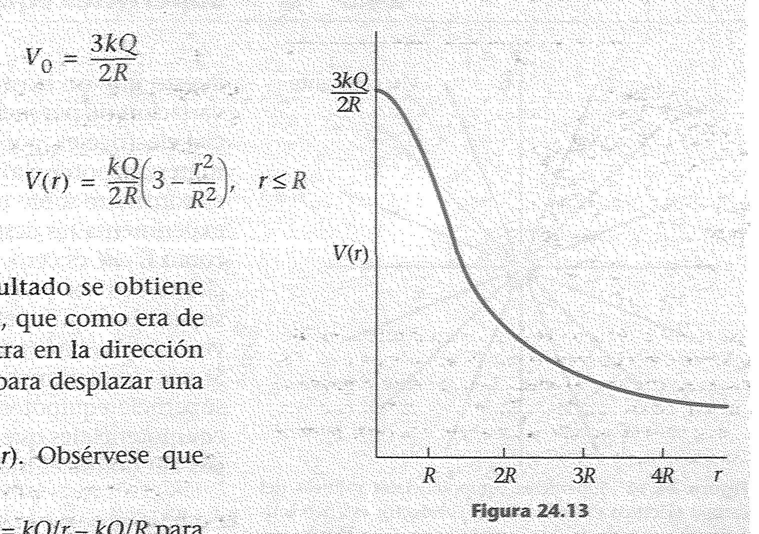


Figura 24.13

Comprobación del resultado Sustituyendo $r = R$ en el resultado se obtiene $V(R) = kQ/R$, como el lógico. Para $r = 0$, $V(0) = 3kQ/2R = 1{,}5\,kQ/R$, que como era de esperar es mayor que $V(R)$, ya que el campo eléctrico se encuentra en la dirección radial positiva para $r < R$ y, por tanto, debe realizarse un trabajo para desplazar una carga testigo de $r = R$ a $r = 0$.

Observaciones La figura 24.13 muestra $V(r)$ en función de (r). Obsérvese que ambos $V(r)$ y $E_r = -dV/dr$ son continuos en todos sus puntos.

Ejercicio ¿Cuánto vale $V(r)$ si elegimos $V(R) = 0$? (*Respuesta:* $V(r) = kQ/r - kQ/R$ para $r \geq R$; $V(r) = \frac{1}{2}\,(kQ/R)(1 - r^2/R^2)$ para $r \leq R$.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

El potencial *V* debido a una carga lineal infinita

Calcularemos ahora el potencial debido a una carga lineal uniforme infinita. Supongamos que la carga por unidad de longitud sea λ. Puesto que esta distribución de carga se extiende hasta el infinito, determinaremos el potencial a partir del campo eléctrico. En el capítulo 23 vimos que el campo eléctrico producido por una carga lineal infinita apunta en la dirección que le aleja de la línea (si λ es positivo) y viene expresado por $E_r = 2k\lambda/r$. El cambio de potencial para un desplazamiento $d\ell$ es, por tanto,

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_r\, dr = -\frac{2k\lambda}{r}\, dr$$

Integrando, resulta

$$V = V_0 - 2k\lambda \ln r \qquad \textbf{(24.24)}$$

Para una carga lineal positiva las líneas del campo eléctrico se alejan de la línea y el potencial disminuye al aumentar la distancia a la línea de carga. Para valores grandes de r el potencial disminuye sin límite. Por tanto no puede tomarse el potencial como cero para $r = \infty$. (No puede escogerse el valor cero para $r = 0$, pues cuando r se aproxima a cero, $\ln r$ tiende a $-\infty$). En su lugar, se elige como potencial cero el correspondiente a cierta distancia $r = a$. Sustituyendo $r = a$ en la ecuación 24.24 y haciendo $V = 0$ se obtiene

$$V = 0 = V_0 - 2k\lambda \ln a$$

o sea,

$$V_0 = 2k\lambda \ln a$$

Por tanto, la ecuación 24.24 se convierte en

$$V = 2k\lambda \ln a - 2k\lambda \ln r$$

es decir,

$$V = -2k\lambda \ln \frac{r}{a} \qquad \textbf{(24.25)}$$

Potencial debido a una carga lineal

www.elsolucionario.net

24.5 ■ Superficies equipotenciales

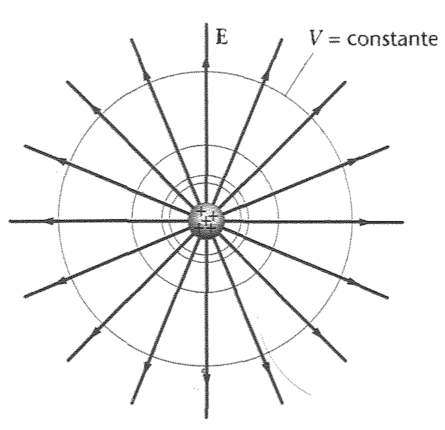


Figura 24.14 Superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico exteriores a un conductor esférico uniformemente cargado. Las superficies equipotenciales son esféricas. Las líneas de fuerza son radiales y perpendiculares a las superficies equipotenciales.

Puesto que no existe campo eléctrico dentro de un conductor en equilibrio estático, la variación de potencial de un punto a otro en el interior del conductor es cero. El potencial eléctrico es, por tanto, el mismo a través del conductor, es decir, éste ocupa un **volumen equipotencial** y su superficie es una **superficie equipotencial**. Como el potencial es constante sobre una superficie de este tipo, el cambio de V cuando una carga testigo experimenta un desplazamiento $d\ell$ paralelo a la superficie es $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$. Por tanto, como $\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ es cero, las líneas del campo eléctrico que surgen de la superficie equipotencial deben ser perpendiculares a la superficie. Las figuras 24.14 y 24.15 muestran las superficies equipotenciales próximas a un conductor esférico y a otro no esférico. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares en todos los puntos a estas superficies. Si nos desplazamos una corta distancia $d\ell$ a lo largo de la línea del campo, desde una superficie equipotencial a otra, el potencial se modifica en $dV = -E\, d\ell$. Las superficies equipotenciales que poseen una diferencia de potencial fija entre ellas están más apretadas allí donde es mayor el campo eléctrico.

www.elsolucionario.net

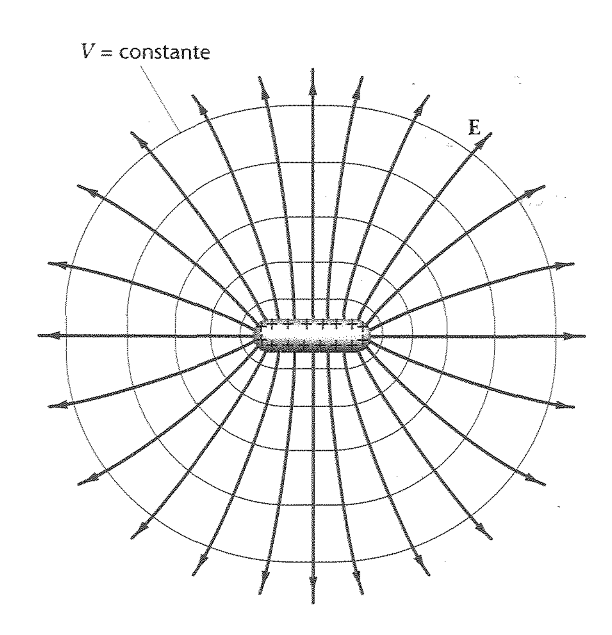


Figura 24.15 Superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico exteriores a un conductor no esférico. Las líneas del campo eléctrico son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales.

EJEMPLO 24.13

Un conductor esférico hueco descargado posee un radio interno a y un radio externo b. En el centro de la cavidad esférica existe una carga puntual $+q$. Determinar el potencial $V(r)$ en cualquier punto, suponiendo que $V = 0$ para $r = \infty$.

Esquema del problema Obtenemos el potencial de la expresión $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_r\, dr$. Dentro de la cavidad, $E_r = kq/r^2$, de modo que V es de la forma $V = kq/r + V_0$. El conductor posee un volumen equipotencial, de modo que V es constante para $a \le r \le b$. Las líneas de campo dentro de la cavidad deben terminar en la superficie más interna de aquélla, de modo que esta superficie posee una carga inducida $-q$. Como la corteza está descargada, una carga positiva $+q$ está sobre la superficie exterior. Las tres cargas, q en el centro, $-q$ en la superficie interna y $+q$ en la superficie externa, producen un campo $E_r = kq/r^2$ para $r > b$, de modo que el potencial para $r > b$ es $V = kq/r$.

1. Fuera de la corteza, $V(r)$ es igual al producido por una carga puntual q en el origen. Eligiendo $V = 0$ para $r = \infty$, tenemos:

$$V(r) = \frac{kq}{r}, \qquad r \ge b$$

2. En $r = b$, el potencial es kq/b. El valor de V permanece con este valor constante en toda la corteza:

$$V(r) = \frac{kq}{b}, \qquad a \le r \le b$$

3. Dentro de la cavidad, V es igual al producido por una carga puntual q en el origen, pero la constante arbitraria no puede ser igual a cero, pues V ya se ha elegido igual a cero para $r = \infty$:

$$V(r) = \frac{kq}{r} + V_0, \qquad r \le a$$

4. La constante V_0 viene determinada por la condición de que V es continua en $r = a$; es decir, V debe ser kq/b en $r = a$:

$$V(a) = \frac{kq}{a} + V_0 = \frac{kq}{b}$$

o

$$V_0 = \frac{kq}{b} - \frac{kq}{a}$$

5. Utilizar este valor de V_0 para determinar $V(r)$ para $r \le a$:

$$V(r) = \frac{kq}{r} + \frac{kq}{b} - \frac{kq}{a}, \qquad r \le a$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Observaciones La figura 24.16 muestra el potencial eléctrico en función de la distancia al centro de la cavidad. Dentro del material conductor, donde $a \leq r \leq b$, el potencial tiene el valor constante kq/b. Fuera de la corteza, el potencial es el mismo que el producido por una carga puntual. Obsérvese que $V(r)$ es continuo en todas partes. El campo eléctrico es discontinuo en las superficies conductoras, como se muestra en la pendiente discontinua de $V(r)$ en $r = a$ y $r = b$.

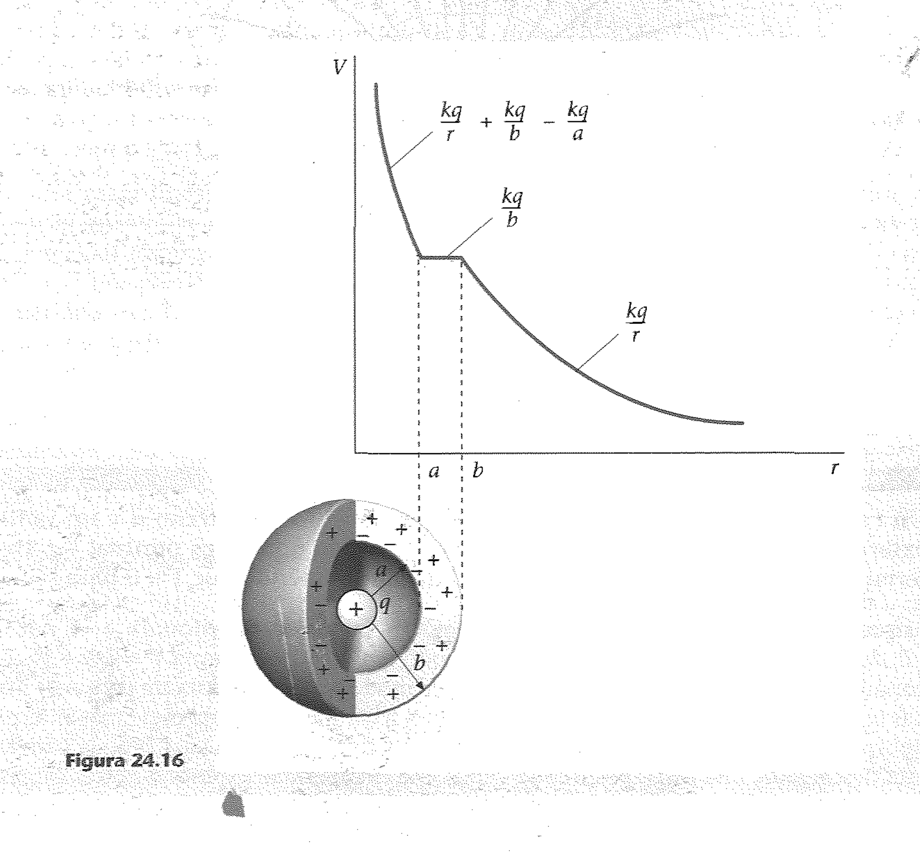


Figura 24.16

www.elsolucionario.net

En general, dos conductores que están separados en el espacio no estarán al mismo potencial. La diferencia de potencial entre los conductores depende de sus formas geométricas, de su separación y de la carga neta situada sobre cada conductor. Cuando se ponen en contacto dos conductores, la carga situada en ellos se distribuye por sí misma, de modo que en equilibrio electrostático el campo eléctrico es cero en el interior de ambos conductores. En este caso los dos conductores en contacto pueden considerarse como un solo conductor con una sola superficie equipotencial. Si ponemos en contacto un conductor esférico cargado con un segundo conductor esférico descargado, la carga fluirá hacia el conductor neutro, hasta que ambos conductores se encuentren al mismo potencial. Si los conductores son idénticos, la carga se repartirá por igual entre ambos. Si los conductores posteriormente se separan, cada uno poseerá la mitad de la carga original y ambos se encontrarán al mismo potencial.

Generador de Van de Graaff

En la figura 24.17, un pequeño conductor que posee una carga positiva q está situado en el interior de una cavidad de otro segundo conductor más grande. En el equilibrio, el campo eléctrico es cero en el interior del material conductor de ambos conductores. Las líneas de fuerza que salen de la carga positiva q deben terminar en la superficie interna del conductor grande. Esto deberá ocurrir sin que importe qué carga está situada en el conductor mayor, el conductor pequeño en la cavidad está a un potencial más alto debido a que las líneas del campo eléctrico van desde este conductor hasta el conductor ma-

www.elsolucionario.net

yor. Si a continuación se conectan los conductores, por ejemplo con un alambre conductor fino, *toda* la carga situada originalmente en el conductor más pequeño fluirá hacia el otro mayor. Cuando se rompa la conexión, no habrá ninguna carga en el conductor pequeño situado en el interior de la cavidad y tampoco existirán líneas de campo entre los conductores. La carga positiva transferida desde el conductor menor al mayor reside completamente en la superficie exterior de éste. Si ponemos más carga positiva sobre el conductor menor en la cavidad y de nuevo conectamos los conductores con un alambre fino, transferiremos de nuevo toda la carga al conductor exterior. Este procedimiento puede repetirse indefinidamente. Se utiliza este método para producir grandes potenciales en el generador de Van de Graaff, en el cual se lleva carga hacia la superficie interior de un conductor esférico muy grande mediante una cinta transportadora continua (figura 24.18). Para llevar la carga a la esfera exterior desde el fondo a la parte superior de la cinta donde el potencial es muy elevado debe realizarse trabajo mediante un motor que transporta la cinta. Cuanto mayor sea la carga neta situada en el conductor exterior, mayor será su potencial y mayor el campo eléctrico fuera del conductor. Un acelerador de Van de Graaff es un dispositivo que utiliza el campo eléctrico intenso producido por un generador de Van de Graaff para acelerar partículas positivas, tales como protones.

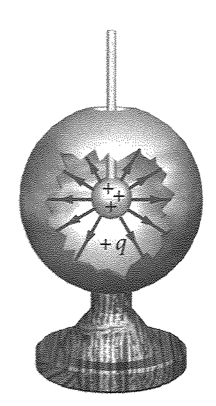
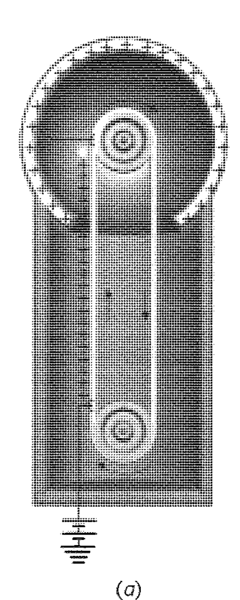
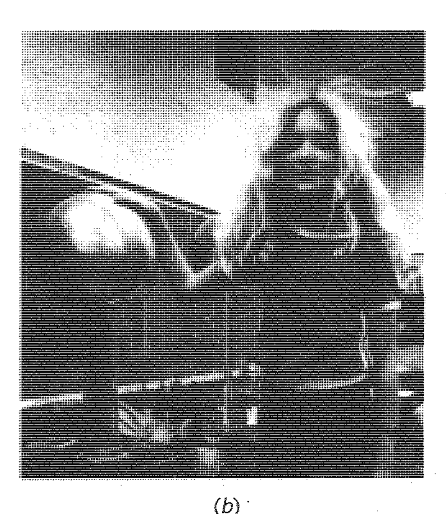


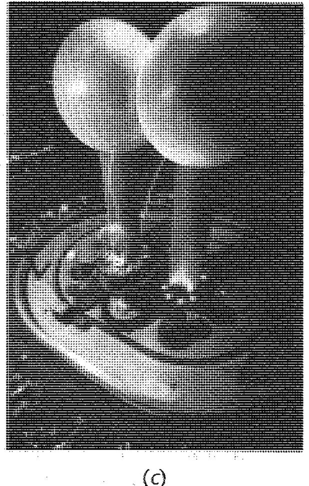
Figura 24.17 Conductor pequeño que posee una carga positiva en el interior de un conductor más grande.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 24.18 (*a*) Diagrama esquemático de un generador de Van de Graaff. La carga escapa por las puntas de un conductor afilado cerca del fondo del aparato y es captada por la cinta. En la parte superior la carga abandona la cinta y pasa a otro peine metálico conectado a un gran conductor esférico. (*b*) La muchacha ha sido cargada a un potencial muy elevado por contacto con un generador de demostración Van de Graaff, mientras está de pie sobre un bloque aislante. Su cabello adquiere la carga suficiente para que se repela electrostáticamente. Debe tenerse cuidado para acumular la carga gradualmente y evitar una descarga rápida, que sería dolorosa. (*c*) Estos grandes generadores de Van de Graaff en el museo de ciencias de Boston producen descargas espectaculares sobre la jaula de alambre conectada a tierra donde se encuentra el operador.

www.elsolucionario.net

Ruptura dieléctrica

Muchos materiales no conductores se ionizan en campos eléctricos muy altos y se convierten en conductores. Este fenómeno, llamado **ruptura dieléctrica**, tiene lugar cuando la intensidad del campo eléctrico es $E_{max} \approx 3 \times 10^6$ V/m = 3 MN/C. Este fenómeno limita el potencial máximo que puede obtenerse en un generador de Van de Graaff. La magnitud del campo eléctrico para el cual tiene lugar la ruptura del dieléctrico en un material se denomina **resistencia dieléctrica** de dicho material. Para el aire vale aproximadamente 3 MV/ m. La descarga a través del aire resultante de la ruptura dieléctrica se denomina **descarga en arco.** Las descargas eléctricas que se experimentan al tocar el pomo metálico de una puerta después de andar sobre una alfombra en tiempo seco es un ejemplo familiar de descarga en arco. Esto ocurre preferentemente en tiempo seco, porque el aire húmedo conduce la carga a medida que se adquiere. El relámpago es un ejemplo de descarga en arco que se verifica a gran escala durante una tormenta.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 24.14

Un conductor esférico tiene un radio de 2 m. (a) ¿Cuál es la carga máxima que puede situarse sobre la esfera sin que se produzca la ruptura dieléctrica? (b) ¿Cuál es el potencial máximo de la esfera?

Esquema del problema (a) Para determinar la carga máxima relacionamos la carga con el campo eléctrico y establecemos que éste es igual a la resistencia dieléctrica del aire, E_{max}. (b) El potencial máximo se determina entonces a partir de la carga máxima calculada en (a).

(a) 1. La densidad superficial de carga sobre el conductor, σ, está relacionada con el campo eléctrico justo en el exterior del conductor:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

2. Igualar este campo con E_{max}:

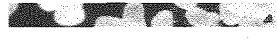
$$E_{max} = 3 \times 10^6 \text{ N/C} = \frac{\sigma_{max}}{\epsilon_0}$$

3. La carga máxima Q se obtiene de σ_{max}:

$$Q = 4\pi R^2 \sigma_{max} = 4\pi R^2 (\epsilon_0 E_{max})$$
$$= 4\pi(2 \text{ m})^2(8{,}85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(3 \times 10^6 \text{ N/C})$$
$$= 1{,}33 \times 10^{-3} \text{ C}$$

(b) Utilizar esta carga máxima para calcular el máximo potencial de la esfera:

$$V_{max} = \frac{kQ_{max}}{R} = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}33 \times 10^{-3} \text{ C})}{2 \text{ m}}$$
$$= 5{,}98 \times 10^6 \text{ V}$$



EJEMPLO 24.15

Dos conductores esféricos cargados, de radios R_1 = 6 cm y R_2 = 2 cm, están separados por una distancia mucho mayor de 6 cm y conectados por un alambre conductor. Una carga total Q = +80 nC se sitúa sobre una de las esferas. (a) ¿Cuál es el campo eléctrico próximo a la superficie de cada esfera? (Suponer que la carga sobre el cable de conexión es despreciable.)

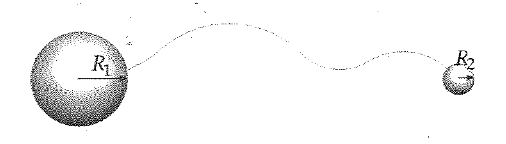


Figura 24.19

Esquema del problema La carga total se distribuirá con q_1 sobre la esfera 1 y q_2 sobre la esfera 2, de tal forma que las esferas estarán al mismo potencial. Utilizaremos $V = kq/r$ para el potencial de cada esfera, ya que ambas están muy separadas.

(a) 1. El campo eléctrico en la superficie de cada esfera está relacionado con la carga sobre la esfera y su radio:

$$E_1 = \frac{kq_1}{R_1^2} \quad \text{y} \quad E_2 = \frac{kq_2}{R_2^2}$$

2. La conservación de la carga nos da una relación entre las cargas q_1 y q_2:

$$q_1 + q_2 = Q = 80 \text{ nC}$$

3. La igualación del potencial de las esferas nos da una segunda relación para las cargas q_1 y q_2:

$$\frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2}$$

$$q_1 = \frac{R_1}{R_2} q_2 = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} q_2 = 3q_2$$

4. Combinar estos resultados y deducir q_1 y q_2:

$$q_1 = 60 \text{ nC}$$
$$q_2 = 20 \text{ nC}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

5. Utilizar estos resultados para calcular los campos eléctricos en la superficie de las esferas:

$$E_1 = \frac{kq_1}{R_1^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(60 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(0{,}06\ \mathrm{m})^2} = 150\ \mathrm{kN/C}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{R_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(0{,}02\ \mathrm{m})^2} = 450\ \mathrm{kN/C}$$

(b) Calcular el potencial común de las esferas a partir de la expresión kq/R:

$$V_1 = \frac{kq_1}{R_1} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(60 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0{,}06\ \mathrm{m}} = 8{,}99\ \mathrm{kV}$$

Comprobación del resultado Si usamos la esfera 2 para calcular V obtenemos $V_2 = kq_2/R_2 = (8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})/0{,}02\ \mathrm{m} = 8{,}99 \times 10^3\ \mathrm{V}$. Puede realizarse otra comprobación adicional teniendo en cuenta que el campo eléctrico en la superficie de cada esfera es proporcional a su densidad de carga. Como el radio de la esfera 1 es tres veces mayor que el de la esfera 2, el área de su superficie es 9 veces el de la esfera 2. Y como posee 3 veces la carga de la esfera 2, su densidad de carga es $\frac{1}{3}$ de la correspondiente a esta esfera. Por tanto, el campo de la esfera 1 será $\frac{1}{3}$ del correspondiente a la esfera 2, que es lo que hemos obtenido anteriormente.

Cuando una carga se sitúa sobre un conductor de forma no esférica, como el de la figura 24.20*a*, la superficie de éste será equipotencial, pero la densidad superficial de carga y el campo eléctrico, justamente en el exterior del conductor, variarán de un punto a otro. Cerca de un punto de radio de curvatura pequeño, tal como el punto A de la figura, la densidad de carga superficial y el campo eléctrico serán grandes, mientras que cerca de un punto de radio de curvatura grande como el B, estas magnitudes serán pequeñas. Podemos entender esto cualitativamente considerando los extremos del conductor como si fueran esferas de radios distintos. Sea σ la densidad de carga superficial. El potencial de una esfera de radio r es

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{24.26}$$

Como el área de una esfera es $4\pi r^2$, la cara sobre una esfera viene relacionada con la densidad de carga por $q = 4\pi r^2\sigma$. Sustituyendo q por esta expresión en la ecuación 24.26 resulta

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi r^2\sigma}{r} = \frac{r\sigma}{\epsilon_0}$$

y despejando σ obtenemos

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{r} \tag{24.27}$$

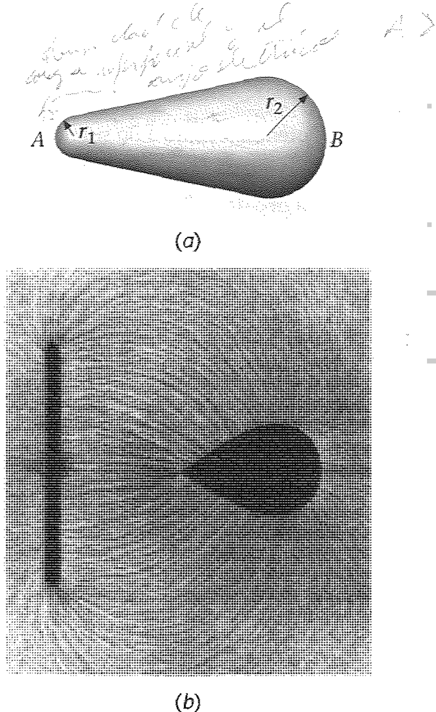


Figura 24.20 (*a*) Conductor no esférico. Al cargarle eléctricamente, se producirá un campo eléctrico más intenso cerca del punto A, donde el radio de curvatura es pequeño, que cerca del punto B, donde el radio de curvatura es grande. (*b*) Líneas de campo eléctrico próximas a un conductor y una placa cuyas caras son iguales y opuestas. Las líneas se indican mediante trocitos de hilo suspendidos en aceite. El campo eléctrico es más intenso cerca de los puntos de menor radio de curvatura, como los bordes de la placa y la parte izquierda puntiaguda del conductor.

Como ambas "esferas" poseen el mismo potencial, la de menor radio tendrá mayor densidad superficial de carga. Y como $E_n = \sigma/\epsilon_0$, el campo eléctrico es mayor en los puntos sobre el conductor donde el radio de curvatura es mínimo.

En el caso de un conductor de forma arbitraria, el potencial para el cual se produce la ruptura del dieléctrico depende del radio más pequeño de curvatura de una parte cualquiera del conductor. Si el conductor tiene puntas de radio de curvatura muy pequeño, la ruptura del dieléctrico se producirá con potenciales relativamente bajos. En el generador de Van de Graaff, la carga se transfiere a la cinta de transporte por conductores de bordes afilados próximos al fondo de la cinta y se extrae mediante conductores de iguales características situados en la parte alta de la misma (figura 20.18*a*). Los pararrayos situados en lo alto de un gran edificio extraen la carga de una nube próxima antes de que el potencial de la nube alcance un valor destructivamente grande.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Resumen

1. El potencial eléctrico, definido como la energía potencial electrostática por unidad de carga, es un importante concepto físico derivado que está relacionado con el campo eléctrico.
2. Como el potencial es una magnitud escalar, frecuentemente es más fácil de calcular que el vector campo eléctrico. Una vez conocido V, puede determinarse el valor de E.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Diferencia de potencial	La diferencia de potencial $V_b - V_a$ se define como el trabajo por unidad de carga, cambiando de signo, que realiza el campo eléctrico cuando una carga testigo se desplaza del punto a al punto b: $$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad (24.2b)$$
Diferencia de potencial para desplazamientos infinitesimales	$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad (24.2a)$$
2. Potencial eléctrico	
Potencial debido a una carga puntual	$$V = \frac{kq}{r} + V_0 \qquad (V = V_0 \text{ en } r = \infty) \qquad (24.7)$$
Potencial de Coulomb	$$V = \frac{kq}{r} \qquad (V = 0 \text{ en } r = \infty) \qquad (24.8)$$
Potencial debido a un sistema de cargas puntuales	$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} \qquad (V = 0 \text{ en } r = \infty) \qquad (24.10)$$
Potencial debido a distribuciones continuas de carga	$$V = \int \frac{k\,dq}{r} \qquad (V = 0 \text{ en } r = \infty) \qquad (24.19)$$ Esta expresión puede utilizarse sólo si la distribución de carga está contenida en un volumen finito, de modo que el potencial puede considerarse nulo en el infinito.
Potencial y líneas del campo eléctrico	Las líneas del campo eléctrico señalan en la dirección del potencial eléctrico decreciente.
Continuidad del potencial eléctrico	La función potencial V es continua en todos los puntos del espacio.
3. Determinar el campo eléctrico a partir del potencial	El campo eléctrico apunta en la dirección de la máxima disminución del potencial. $$E_\ell = -\frac{dV}{d\ell} \qquad (24.13)$$
Gradiente	Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuya magnitud es igual a la derivada de dicha función respecto a la distancia en la dirección indicada se llama gradiente de la función. El campo eléctrico E es el gradiente negativo del potencial V.
E en la dirección x	$$E_x = -\frac{dV(x)}{dx} \qquad (24.14)$$
Campo eléctrico radial	$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr} \qquad (24.15)$$
4. Relación general entre E y V (opcional)	$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \qquad (24.18)$$
5. Unidades	
V y ΔV	La unidad SI de potencial y diferencia de potencial es el voltio (V): $$1\text{ V} = 1\text{ J/C} \qquad (24.4)$$
Campo eléctrico	$$1\text{ N/C} = 1\text{ V/m} \qquad (24.5)$$
Electrón-voltio	El electrón-voltio (eV) es la energía potencial de una partícula de carga e en un punto donde el potencial es 1 voltio: $$1\text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\text{ J} \qquad (24.6)$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$U = \frac{kq_0q}{r} = q_0V \qquad (U = 0 \text{ en } r = \infty)$$	(24.9)	6. **Energía potencial de dos cargas puntuales**
		7. **Funciones potenciales**
$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$	(24.20)	Sobre el eje de un anillo uniformemente cargado
$$V = 2\pi k\sigma[(x^2 + R^2)^{1/2} - x]$$	(24.21)	Sobre el eje de un disco uniformemente cargado
$$V = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\|x\| = V_0 - 2\pi k\sigma\|x\|$$	(24.22)	Próximo a un plano infinito de carga
$$V = \begin{cases} \frac{kQ}{r}, & r \geq R \\ \frac{kQ}{R}, & r \leq R \end{cases}$$	(24.23)	Para una corteza esférica de carga
$$V = -2k\lambda \ln \frac{r}{a}, \qquad V = 0 \text{ en } r = a$$	(24.25)	Para una línea infinita de carga

8. **Carga sobre un conductor no esférico**

En un conductor de forma arbitraria, la densidad de carga superficial σ es máxima en los puntos donde el radio de curvatura es mínimo.

9. **Ruptura dieléctrica**

La cantidad de carga que puede depositarse sobre un conductor viene limitada por el hecho de que las moléculas del medio que le rodea se ionizan en campos eléctricos muy intensos y el medio se hace conductor.

Resistencia dieléctrica

La intensidad del campo eléctrico para la cual tiene lugar la ruptura dieléctrica en un material, se denomina resistencia dieléctrica de este material. Para el aire es

$$E_{max} \approx 3 \times 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ MV/m}$$

Guía de resolución de problemas

1. Dibujar un diagrama claro que incluya las características importantes del problema, incluyendo la localización y valor de las cargas en el sistema. Generalmente es útil indicar las superficies equipotenciales y las líneas del campo eléctrico.
2. El potencial debido a un sistema de cargas puntuales puede calcularse a partir de $V = \sum kq_i/r_i$.
3. El potencial debido a un sistema continuo y finito de cargas puede calcularse a partir de $V = \int k\, dq/r$. Si el campo eléctrico es conocido, el potencial puede determinarse de $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Potencial y campo eléctrico	
Calcular la variación del potencial eléctrico V, dado el campo eléctrico **E**.	Utilizar $dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ e integrar. **Ejemplos 24.1, 24.12 y 24.13**
Determinar **E** dado el potencial V.	Utilizar $E_x = -dV(x)/dx$ para un potencial que depende sólo de x o, bien $E_r = -dV(r)/dr$ para una distribución de carga esféricamente simétrica. **Ejemplos 24.7, 24.10**
Determinar el potencial V para cargas discretas:	
Carga puntual	Utilizar $V = kq/r$. **Ejemplo 24.2**
Sistema de cargas puntuales	Utilizar $V = \sum_i kq_i/r_i$. **Ejemplos 24.4, 24.5, 24.6**
Determinar V para una distribución de carga continua.	Integrar sobre la distribución de carga ($V = \int kdq/r$) o calcular V a partir del campo eléctrico $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$. **Ejemplos 24.9, 24.12, 24.13**
Determinar V para un sistema que incluye cargas puntuales y distribuciones de carga continua.	Utilizar $V_{puntual} = (kq/r) + V_i$ para cada carga puntual (en donde V_i es una constante diferente para cada carga, determinada por la elección del cero para V). Luego, se suma el potencial debido a las cargas puntuales y el potencial debido a las distribuciones de carga continua. **Ejemplo 24.11**

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

2. Potencial y energía		
Determinar la energía potencial de un sistema de dos cargas.	Utilizar $U = kq_1q_2/r$.	**Ejemplos 24.2, 24.3**
Determinar la variación de energía cinética ΔE_c cuando una carga se mueve a través de una región de potencial eléctrico.	Utilizar la conservación de la energía, $\Delta E_c + \Delta U = 0$, en donde $\Delta U = q\,\Delta V$.	**Ejemplo 24.8**
3. Conductores		
Determinar el potencial en problemas donde intervienen conductores.	Utilizar el hecho de que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial y que V es constante en todas partes dentro de un conductor.	**Ejemplo 24.12**
Determinar la carga máxima sobre un conductor antes de la ruptura dieléctrica.	Utilizar $\sigma_{max} = \epsilon_0 E_{max}$, en donde E_{max} para el aire es igual a 3 MN/C.	**Ejemplo 24.14**
Repartición de la carga entre conductores	Si dos conductores están en contacto, se encuentran al mismo potencial. Esta condición determina la relación de carga sobre los conductores.	**Ejemplo 24.15**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
••• Desafiante, para alumnos avanzados

Potencial y diferencia de potencial

• **1** Un campo eléctrico uniforme de valor 2 kN/C está en la dirección x. Se deja en libertad una carga puntual $Q = 3\ \mu$C inicialmente en reposo en el origen.

(a) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V(4\text{ m}) - V(0)$?
(b) ¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga desde $x = 0$ hasta $x = 4$ m?
(c) ¿Cuál es la energía cinética de la carga cuando está en $x = 4$ m?

Calcular el potencial $V(x)$ si se toma $V(x)$ como

(d) cero para $x = 0$ **(e)** 4 kV para $x = 0$ y **(f)** cero para $x = 1$ m.

• **2** Un plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma = +2{,}5\ \mu\text{C/m}^2$ se encuentra en el plano yz.

(a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico expresada en newtons por culombio? ¿En voltios por metro? ¿Cuál es la dirección de E para valores positivos de x?
(b) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V_b - V_a$ cuando el punto b se encuentra en $x = 20$ cm y el punto a está en $x = 50$ cm?
(c) ¿Cuánto trabajo se necesita para que un agente externo desplace una carga testigo $q_0 = +1{,}5$ nC del punto a al b?

• **3** Dos placas conductoras paralelas poseen densidades de carga iguales y opuestas de modo que el campo eléctrico entre ellas es aproximadamente uniforme. La diferencia de potencial entre las placas es 500 V y están separadas 10 cm. Se deja en libertad un electrón desde el reposo en la placa negativa.

(a) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico entre las placas? ¿Cuál placa está a potencial más elevado, la positiva o la negativa?
(b) Hallar el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando el electrón se mueve desde la placa negativa a la positiva. Expresar la respuesta en electrón-voltios y en julios.
(c) ¿Cuál es la variación de energía potencial del electrón cuando se mueve desde la placa negativa hasta la positiva? ¿Cuál es su energía cinética cuando llega a la placa positiva?

Potencial eléctrico y energía potencial

• **4** Explicar la diferencia entre potencial eléctrico y energía potencial electrostática.

• **5** Una carga positiva se deja libre desde el reposo en un campo eléctrico. ¿Se moverá hacia una región de mayor o menor potencial eléctrico?

•• **6** Un núcleo de litio y una partícula α están en reposo. El núcleo de litio tiene una carga de $+3e$ y una masa de 7 u; la partícula alfa tiene una carga de $+2e$ y una masa de 4 u. ¿Cuál de los métodos siguientes acelerará a ambos con la misma energía cinética?

(a) Acelerarles a través de la misma diferencia de potencial eléctrico.
(b) Acelerar la partícula a través del potencial V_1 y el núcleo de litio a través de $\frac{2}{3}V_1$.
(c) Acelerar la partícula α través del potencial V_1 y el núcleo de litio a través de $\frac{7}{4}V_1$.
(d) Acelerar la partícula α través del potencial V_1 y el núcleo de litio a través de $(2 \times 7)/(3 \times 4)V$.
(e) Ninguno de los anteriores.

• **7** Una carga positiva de valor 2 μC está en el origen.

(a) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto a 4 m del origen respecto al valor $V = 0$ en el infinito?
(b) ¿Cuánto trabajo debe ser realizado por un agente exterior para llevar la carga de 3 μC desde el infinito hasta $r = 4$ m admitiendo que se mantiene fija en el origen la carga de 2 μC?
(c) ¿Cuánto trabajo deberá ser realizado por un agente exterior para llevar la carga de 2 μC desde el infinito hasta el origen si la carga de 3 μC se coloca primeramente en $r = 4$ m y luego se mantiene fija?

www.elsolucionario.net

•• **8** La distancia entre los iones K^+ y Cl^- en el KCl es $2{,}80 \times 10^{-10}$ m. Calcular la energía necesaria para separar los dos iones considerando que se trata de cargas puntuales inicialmente en reposo. Expresar la respuesta en eV.

•• **9** Dos masas idénticas m que poseen cargas iguales q están separadas por una distancia d. Demostrar que si ambas se liberan simultáneamente, sus velocidades, cuando están separadas por una gran distancia, son $v/\sqrt{2}$, en donde v es la velocidad que una de las masas alcanzaría a una gran distancia de la otra, si la primera se dejara en libertad y la segunda se mantuviera fija.

•• **10** En un acelerador de Van de Graaff se liberan los protones desde el reposo a un potencial de 5 MV y se desplazan a través de una región sometida al vacío con potencial cero.
(a) Calcular la velocidad de los protones de 5 MeV.
(b) Si la variación de potencial transcurre *uniformemente* a lo largo de una distancia de 2,0 m, calcular el campo eléctrico acelerador.

•• **11** Un cañón de electrones dispara estas partículas contra la pantalla de un tubo de televisión. Los electrones parten del reposo y se aceleran dentro de una diferencia de potencial de 30 000 V. ¿Cuál es la energía de los electrones al chocar contra la pantalla, expresada
(a) en electrón-voltios y (b) en julios?
(c) ¿Cuál es la velocidad de los electrones al chocar con la pantalla del tubo de televisión?

•• **12**
(a) Deducir una expresión para la distancia de máxima aproximación de una partícula α con la energía cinética E a un núcleo masivo de carga Ze. Suponer que el núcleo está fijo en el espacio.
(b) Determinar la distancia de máxima aproximación de una partícula a un núcleo de oro; la carga del núcleo de oro es de 79 e. Despreciar el retroceso del núcleo de oro.

Sistemas de cargas puntuales

• **13** Cuatro cargas puntuales de 2 μC se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 4 m de lado. Calcular el potencial en el centro del cuadrado (tomando como potencial cero el correspondiente al infinito) si
(a) todas las cargas son positivas,
(b) tres de las cargas son positivas y la otra negativa y
(c) dos son positivas y las otras dos negativas.

• **14** Tres cargas puntuales están en el eje x: q_1 en el origen, q_2 en $x = 3$ m y q_3 en $x = 6$ m. Calcular el potencial en el punto $x = 0$, $y = 3$ m si
(a) $q_1 = q_2 = q_3 = 2\ \mu$C, (b) $q_1 = q_2 = 2\ \mu$C y $q_3 = -2\ \mu$C y
(c) $q_1 = q_3 = 2\ \mu$C y $q_2 = -2\ \mu$C.

• **15** Los puntos A, B y C están en los vértices de un triángulo equilátero de 3 m de lado. Cargas iguales positivas de 2 μC están en A y B.
(a) ¿Cuál es el potencial del punto C?
(b) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de 5 μC desde el infinito hasta el punto C si se mantienen fijas las otras cargas?
(c) Responder a las partes (a) y (b) si la carga situada en B se sustituye por una carga de $-2\ \mu$C.

• **16** Una esfera de radio 60 cm tiene su centro en el origen. A lo largo del ecuador de esta esfera se sitúan cargas iguales de 3 μC a intervalos de 60°.
(a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el origen?
(b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en su polo norte?

• **17** Dos cargas puntuales q y q' están separadas por una distancia a. En un punto a la distancia $a/3$ de q y a lo largo de la línea que une las dos cargas, el potencial es cero. Determinar la relación q/q'.

•• **18** Dos cargas positivas $+q$ están en el eje x en $x = +a$ y $x = -a$.
(a) Hallar el potencial $V(x)$ como una función de x para todos los puntos situados en el eje x.
(b) Representar $V(x)$ en función de x.
(c) ¿Cuál es el significado del mínimo de esta curva?

•• **19** Se sitúa una carga puntual de $+3e$ en el origen y una segunda carga de $-2e$ en el eje x a la distancia $x = a$.
(a) Dibujar la función potencial $V(x)$ en función de x para todo valor de x.
(b) ¿Para qué punto o puntos es $V(x)$ igual a cero?
(c) ¿Cuál es el trabajo que hay que realizar para llevar una tercera carga $+e$ al punto $x = \frac{1}{2}a$ sobre el eje x?

Determinación del campo eléctrico a partir del potencial

• **20** Si el potencial eléctrico es constante en toda una región del espacio, ¿qué podemos decir del campo eléctrico en esa región?

• **21** ¿Si E es conocido en solo un punto, puede determinarse el valor de V en ese punto?

• **22** ¿En qué dirección podemos movernos respecto a un campo eléctrico, de modo que el potencial eléctrico no varíe?

• **23** Un campo eléctrico uniforme tiene el sentido de las x negativas. Los puntos a y b están en el eje x, a en $x = 2$ m y b en $x = 6$ m.
(a) ¿Es positiva o negativa la diferencia de potencial $V_b - V_a$?
(b) Si el valor de $V_b - V_a$ es 10^5 V, ¿cuál es el valor del campo eléctrico E?

• **24** El potencial debido a una distribución particular de carga se mide en diversos puntos a lo largo del eje x como se muestra en la figura 24.21. ¿Para qué valor (o valores) en el intervalo $0 < x < 10$ m es $E_x = 0$?

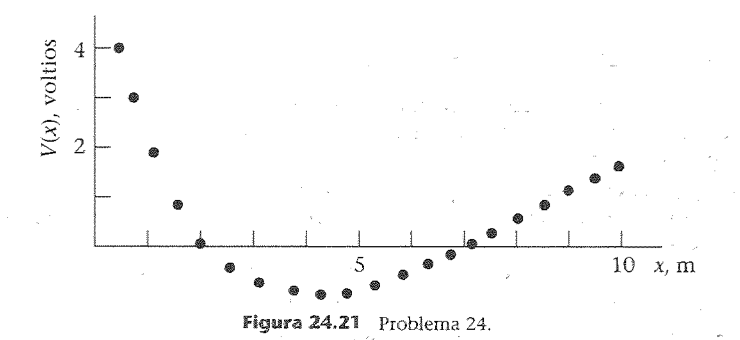


Figura 24.21 Problema 24.

• **25** Una carga puntual $q = 3{,}00\ \mu$C se encuentra en el origen.
(a) Determinar el potencial V sobre el eje x en $x = 3{,}00$ m y en $x = 3{,}01$ m.
(b) ¿Crece o decrece el potencial cuando x crece? Calcular $-\Delta V/\Delta x$, siendo ΔV la variación de potencial desde $x = 3{,}00$ m a $x = 3{,}01$ m y $\Delta x = 0{,}01$ m.
(c) Determinar el campo eléctrico en $x = 3{,}00$ m y comparar su valor con el de $-\Delta V/\Delta x$ hallado en la parte (b).
(d) Determinar el potencial (con tres cifras significativas) en el punto $x = 3{,}00$ m, $y = 0{,}01$ m y comparar el resultado con el potencial sobre el eje x en $x = 3{,}00$ m. Analizar el significado de este resultado.

• **26** Una carga de $+3{,}00\ \mu$C está en el origen y otra de $-3{,}00\ \mu$C está en el eje x en $x = 6{,}00$ m.
(a) Hallar el potencial en el eje x en el punto $x = 3{,}00$ m.
(b) Hallar el campo eléctrico en el eje x en $x = 3{,}00$ m.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(c) Hallar el potencial en el eje x en $x = 3{,}01$ m y calcular $-\Delta V/\Delta x$, siendo ΔV la variación de potencial desde $x = 3{,}00$ m hasta $x = 3{,}01$ m y $\Delta x = 0{,}01$ m. Comparar el resultado con la respuesta de la parte (b).

• 27 Un campo eléctrico uniforme se encuentra en la dirección x negativa. Los puntos a y b se encuentran sobre el eje x, a en $x = 2$ m y b en $x = 6$ m.
(a) ¿Es positiva o negativa la diferencia de potencial $V_b - V_a$?
(b) Si el valor de $V_b - V_a$ es 10^5 V, ¿cuál es la magnitud E del campo eléctrico?

• 28 En la expresión siguiente, V está en voltios y x en metros. Hallar E_x cuando
(a) $V(x) = 2000 + 3000x$; (b) $V(x) = 4000 + 3000x$;
(c) $V(x) = 2000 - 3000x$ y
(d) $V(x) = -2000$, independiente de x.

• 29 El potencial eléctrico en una cierta región del espacio viene dado por $V(x) = C_1 + C_2x^2$, en donde V se expresa en voltios, x en metros y C_1 y C_2 son constantes positivas. Hallar el campo eléctrico E en esta región. ¿En qué dirección está E?

•• 30 Una carga q está en $x = 0$ y otra carga $-3q$ está en $x = 1$ m.
(a) Determinar $V(x)$ para un punto cualquiera del eje x.
(b) Determinar los puntos sobre el eje x en los cuales el potencial es nulo.
(c) ¿Cuál es el campo eléctrico en estos puntos?
(d) Dibujar $V(x)$ en función de x.

•• 31 Un campo eléctrico viene dado por $E_x = 2{,}0x^3$ kN/C. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos del eje x situados en $x = 1$ m y $x = 2$ m.

•• 32 Tres cargas iguales se encuentran sobre el plano xy. Dos de ellas están sobre el eje y en $y = -a$ e $y = +a$, y la tercera está sobre el eje x en $x = a$.
(a) ¿Cuál es el potencial $V(x)$ debido a estas cargas en un punto sobre el eje x?
(b) Determinar E_x a lo largo del eje x a partir de la función potencial $V(x)$. Comprobar las respuestas de (a) y (b) en el origen y en $x = \infty$ para ver si se obtienen los resultados esperados.

Relación general entre E y V (opcional)

••• 33 El potencial eléctrico en una región del espacio viene dado por $V = (2\ \text{V/m}^2)x^2 + (1\ \text{V/m}^2)yz$. Determinar el campo eléctrico en el punto $x = 2$ m, $y = 1$ m, $z = 2$ m.

••• 34 Un potencial viene dado por

$$V(x, y, z) = \frac{kQ}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}$$

(a) Determinar los componentes E_x, E_y, E_z del campo eléctrico por derivación de esta función potencial.
(b) ¿Qué simple distribución de carga puede ser responsable de este potencial?

Cálculo de V para distribuciones continuas de carga

•• 35 En el cálculo de V para un anillo de carga, ¿es importante que la carga Q se distribuya uniformemente alrededor del anillo? Si no fuera uniforme, ¿serían diferentes los valores de V o E_x?

•• 36
(a) Dibujar $V(x)$ en función de x para el anillo uniformemente cargado en el plano yz dado en la ecuación 24.20.
(b) ¿En qué punto es máximo $V(x)$?
(c) ¿Cuánto vale E_x en este punto?

• 37 Una carga de $q = +10^{-8}$ C está distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de 12 cm de radio.
(a) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo en el exterior de la corteza y justo en el interior de la misma?
(b) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico justo en el exterior y justo en el interior de la corteza?
(c) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el centro de la corteza? ¿Cuál es el campo eléctrico en dicho punto?

• 38 Un disco de radio 6,25 cm posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 7{,}5\ \text{nC/m}^2$. Determinar el potencial sobre el eje del disco a una distancia
(a) 0,5 cm, (b) 3,0 cm y (c) 6,25 cm del disco.

• 39 Una carga lineal infinita de densidad lineal $\lambda = 1{,}5\ \mu$C/m se encuentra sobre el eje z. Suponiendo que $V = 0$ a 2,5 m, determinar el potencial a distancias de
(a) 2,0 m, (b) 4,0 m y
(c) 12 m de la línea

•• 40 Deducir la ecuación 24.21 integrando el campo eléctrico E_x a lo largo del eje del disco (véase ecuación 23.11).

•• 41 Una barra de longitud L posee una carga Q uniformemente distribuida a lo largo de su longitud. La barra se encuentra alineada sobre el eje y con su centro en el origen.
(a) Determinar el potencial en función de la posición a lo largo del eje x.
(b) Demostrar que el resultado obtenido en (a) se reduce a $V = kQ/x$ para $x >> L$.

•• 42 Un disco de radio R posee una distribución de carga superficial dada por $\sigma = \sigma_0 R/r$.
(a) Determinar la carga total sobre el disco.
(b) Determinar el potenical sobre el eje del disco a una distancia x de su centro.

•• 43 Repetir el problema 42 si la densidad de carga superficial es $\sigma = \sigma_0 e^{-r/a}$, en donde a es una constante.

•• 44 Una barra de longitud L posee una carga Q uniformemente distribuida a lo largo de su longitud. La barra se encuentra alineada sobre el eje y con un extremo en el origen. Determinar el potencial en función de la posición a lo largo del eje x.

•• 45 Un disco de radio R posee una densidad de carga $+\sigma_0$ para $r < a$ y una densidad de carga igual pero opuesta, $-\sigma_0$ para $a < r < R$. La carga total existente sobre el disco es cero.
(a) Determinar el potencial a una distancia x a lo largo del eje del disco.
(b) Obtener una expresión aproximada para $V(x)$, cuando $x >> R$.

•• 46 Utilizar el resultado obtenido en el problema 45(a) para calcular el campo eléctrico a lo largo del eje del disco. A continuación calcular el campo eléctrico por integración directa mediante la ley de Coulomb.

•• 47 Una barra de longitud L posee una carga Q distribuida uniformemente a lo largo de su longitud. La barra yace a lo largo del eje x con su centro en el origen.
(a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en función de la posición a lo largo del eje x para $x > L/2$?
(b) Demostrar que para $x >> L/2$ el resultado se reduce al debido a una carga puntual Q.

•• 48 Una corteza conductora esférica de radio interior b y radio exterior c rodea concéntricamente una pequeña esfera metálica de

www.elsolucionario.net

radio $a < b$. La esfera metálica tiene una carga positiva Q. La carga total sobre la corteza esférica conductora es $-Q$.

(a) ¿Cuál es el potencial de la corteza esférica?
(b) ¿Cuál es el potencial de la esfera metálica?

•• **49** Dos conductores muy largos que forman una corteza cilíndrica coaxial poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la exterior tiene un radio b y carga $-q$. La longitud de cada corteza cilíndrica es L. Hallar la diferencia de potencial entre las dos capas de la corteza.

•• **50** Una esfera uniformemente cargada tiene un potencial de 450 V en su superficie. A una distancia radial de 20 cm de esta superficie, el potencial es 150 V. ¿Cuál es el radio de la esfera y cuál es la carga de ésta?

•• **51** Consideremos dos láminas paralelas infinitas de carga, una en el plano yz y la otra a una distancia $x = a$.

(a) Hallar el potencial en todos los puntos del espacio, con $V = 0$ en $x = 0$, si las láminas llevan una densidad de carga positiva igual $+\sigma$.
(b) Hacer lo mismo si las densidades de carga son iguales y opuestas, siendo la lámina del plano yz la que tiene la carga positiva.

•• **52** Demostrar que para $x >> R$, el potencial sobre el eje de un disco de carga se aproxima a kQ/x, en donde $Q = \sigma\pi R^2$ es la carga total sobre el disco. (*Indicación*: Escribir $(x^2 + R^2)^{1/2} = x(1 + R^2/x^2)^{1/2}$ y utilizar la expresión del binomio.)

•• **53** En el ejemplo 24.12 se obtuvo la expresión

$$V(r) = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

para el potencial en el interior de una esfera sólida de densidad constante de carga, determinando en primer lugar el campo eléctrico. En este problema hay que deducir la misma expresión por integración directa. Consideremos una esfera de radio R que contiene una carga Q uniformemente distribuida. Queremos determinar V para cualquier punto $r < R$.

(a) Determinar la carga q' en el interior de una esfera de radio r y el potencial V_1 en r debido a esta parte de la carga.
(b) Determinar el potencial dV_2 en r debido a la carga en una corteza de radio r' y espesor dr' siendo $r' > r$.
(c) Integrar la expresión obtenida en (b) desde $r' = r$ a $r' = R$ para obtener V_2.
(d) Determinar el potencial total V en r mediante la suma $V = V_1 + V_2$.

••• **54** Una esfera no conductora de radio R posee una densidad de carga $\rho = \rho_0 r/R$, en donde ρ_0 es una constante.

(a) Demostrar que la carga total es igual a $Q = \pi R^3\rho_0$.
(b) Demostrar que la carga total en el interior de una esfera de radio $r < R$ es igual a $q = Qr^4/R^4$.
(c) Utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico E_r para cualquier punto.
(d) Utilizar $dV = -E_r\, dr$ para calcular el potencial V en cualquier punto, suponiendo que $V = 0$ para $r = \infty$. (Recordar que V es una función continua en $r = R$.)

Superficies equipotenciales y ruptura dieléctrica

• **55** Dos esferas metálicas cargadas, A y B, se conectan mediante un alambre, siendo A mayor que B (figura 24.22). La magnitud del potencial eléctrico de la esfera A es

(a) mayor que el correspondiente a la superficie de la esfera B.
(b) menor que el correspondiente a la superficie de la esfera B.
(c) el mismo que el correspondiente a la superficie de la esfera B.
(d) mayor que, o menor que, el correspondiente a la superficie de la esfera B, según los radios de las esferas.
(e) mayor que, o menor que, el correspondiente a la superficie de la esfera B, según la carga de las esferas.



Figura 24.22 Problema 55.

•• **56** La figura 24.23 muestra dos placas metálicas paralelas mantenidas a potenciales de 0 y 60 V. Equidistante entre las placas hay una esfera de cobre. Dibujar las superficies equipotenciales y las líneas de campo entre las dos placas.

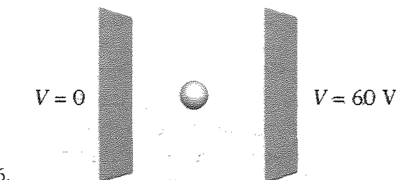


Figura 24.23 Problema 56.

•• **57** La figura 24.24 muestra una esfera metálica con una carga $-Q$ y una carga puntual $+Q$. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales en la proximidad de este sistema de cargas.

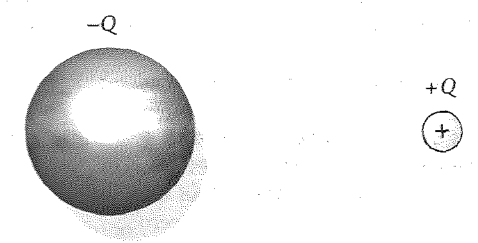


Figura 24.24 Problemas 57 y 58.

•• **58** Repetir el problema 57 cambiando la carga de la esfera metálica a $+Q$.

•• **59** Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales cercanas y alejadas del conductor de la figura 24.20*a*, suponiendo que el conductor posee cierta carga Q.

•• **60** Dos cargas positivas iguales están separadas por una pequeña distancia. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales de este sistema.

• **61** Una hoja infinita de carga tiene una densidad superficial de 3,5 μC/m^2 de carga. ¿A qué distancia están entre sí los planos equipotenciales cuya diferencia de potencial es 100 V?

• **62** Una carga puntual $q = -\frac{1}{9} \times 10^{-8}$ C está en el origen. Considerando que el potencial es cero para $r = \infty$, situar las superficies equipotenciales a intervalos de 20 V desde 20 hasta 100 V y hacer un esquema a escala. ¿Están igualmente separadas estas superficies?

• **63**

(a) Determinar la carga neta máxima que puede situarse sobre un conductor esférico de radio 16 cm antes de que se produzca la ruptura dieléctrica en el aire.
(b) ¿Cuál es el potencial de la esfera cuando posee esta carga máxima?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• 64 Determinar la densidad de carga superficial máxima σ_{max} que puede existir sobre un conductor antes de que ocurra la ruptura dieléctrica del aire.

•• 65 Dos esferas conductoras se cargan y se sitúan muy separadas una de otra y se conectan mediante un cable delgado alargado (figura 24.25). La esfera mayor tiene un diámetro doble al de la menor. ¿Qué esfera tiene el campo eléctrico mayor cerca de su superficie? ¿En qué factor es mayor que el campo de la superficie en la otra esfera?

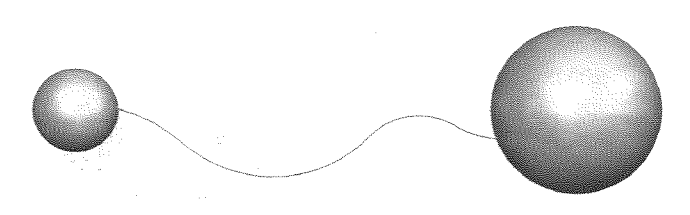


Figura 24.25 Problema 65.

•• 66 Dos esferas conductoras se cargan y se sitúan muy separadas una de otra y se conectan mediante un cable delgado alargado. El radio de la esfera menor es de 5 cm y el de la mayor, 12 cm. El campo eléctrico en la superficie de la esfera mayor es 200 kV/m. Determinar la densidad superficial de carga en cada esfera.

•• 67 Dos conductores en forma de corteza esférica concéntrica poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la corteza exterior tiene un radio b y carga $-q$. Hallar la diferencia de potencial entre las cortezas, $V_a - V_b$.

•• 68 Dos esferas metálicas idénticas sin carga, conectadas mediante un alambre, se sitúan próximas a dos esferas semejantes con cargas iguales y opuestas, como se indica en la figura 24.26.
(a) Dibujar las líneas de campo eléctrico entre las esferas 1 y 3 y entre las esferas 2 y 4.
(b) ¿Qué podemos decir de los potenciales V_1, V_2, V_3 y V_4 de las esferas?
(c) Si las esferas 3 y 4 están conectadas por un alambre, demostrar que la carga final sobre cada una de ellas sería cero.

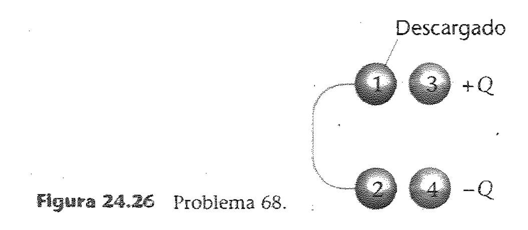


Figura 24.26 Problema 68.

Problemas generales

• 69 Dos cargas puntuales positivas e iguales $+Q$ se encuentran sobre el eje x. Una se encuentra en $x = -a$ y la otra en $x = +a$. En el origen
(a) $E = 0$ y $V = 0$.
(b) $E = 0$ y $V = 2kQ/a$.
(c) $E = (2kQ^2/a^2)$ **i** y $V = 0$.
(d) $E = (2kQ^2/a^2)$ **i** y $V = 2kQ/a$.
(e) ninguno de los anteriores es correcto.

• 70 La medida de un potencial electrostático resulta ser $V(x,y,z) = 4|x| + V_0$, en donde V_0 es una constante. La distribución de carga responsable de este potencial es
(a) un hilo cargado uniformemente en el plano xy.
(b) una carga puntual en el origen.
(c) una lámina cargada uniformemente en el plano xy.
(d) una esfera cargada uniformemente de radio $1/\pi$ en el origen.

• 71 Dos cargas puntuales de igual magnitud, pero de signo opuesto se encuentran sobre el eje x; $+Q$ se encuentra en $x = -a$ y $-Q$ en $x = +a$. En el origen,
(a) $E = 0$ y $V = 0$.
(b) $E = 0$ y $V = 2kQ/a$.
(c) $E = (2kQ^2/a^2)$ **i** y $V = 0$.
(d) $E = (2kQ^2/a^2)$ **i** y $V = 2kQ/a$.
(e) ninguno de los anteriores es correcto.

•• 72 Verdadero o falso:
(a) Si el campo eléctrico es cero en una región del espacio, el potencial eléctrico debe ser también cero en dicha región.
(b) Si el potencial eléctrico es cero en una región del espacio, el campo eléctrico debe también ser cero en dicha región.
(c) Si el potencial eléctrico es cero en un punto, el campo eléctrico debe también ser cero en dicho punto.
(d) Las líneas de campo eléctrico siempre apuntan a regiones de menor potencial.
(e) El valor del potencial eléctrico puede escogerse igual a cero en cualquier punto conveniente.
(f) En electrostática, la superficie de un conductor es una superficie equipotencial.
(g) La ruptura dieléctrica tiene lugar en el aire cuando el potencial es 3×10^6 V.

•• 73
(a) V es constante sobre una superficie conductora. ¿Significa esto que σ es constante?
(b) Si E es constante sobre una superficie conductora, ¿significa esto que σ es constante? ¿Significa que V es constante?

• 74 Un dipolo eléctrico está formado por una carga positiva de $4{,}8 \times 10^{-19}$ C separada de una carga negativa de igual magnitud por $6{,}4 \times 10^{-10}$ m. ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico en un punto situado a $9{,}2 \times 10^{-10}$ m de cada una de las dos cargas?
(a) 9,4 V. (b) Cero. (c) 4,2 V. (d) $5{,}1 \times 10^9$ V. (e) 1,7 V.

• 75 Un campo eléctrico viene dado por **E** $= ax$**i**, donde **E** se expresa en newtons por culombio, x en metros y a es una constante positiva.
(a) ¿Cuáles son las unidades SI de a?
(b) ¿Cuánto trabajo se realiza por este campo sobre una carga puntual positiva q_0 cuando se mueve la carga desde el origen hasta un punto cualquiera x?
(c) Hallar la función potencial $V(x)$, tal que $V = 0$ en $x = 0$.

• 76 Dos cargas positivas $+q$ están sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$.
(a) Determinar el potencial para cualquier punto sobre el eje x.
(b) Utilizar los resultados de (a) para determinar el campo eléctrico en cualquier punto del eje x.

• 77 Si una esfera conductora ha de cargarse hasta un potencial de 10 000 V, ¿cuál es el radio más pequeño posible de la esfera, tal que el campo eléctrico no exceda la resistencia dieléctrica del aire?

• 78 Una esfera de aluminio aislada, de radio 5,0 cm, se encuentra a un potencial de 400 V. ¿Cuántos electrones se han extraído de la esfera para llevarle a este potencial?

• 79 Una carga puntual Q se encuentra en el origen. Una partícula de masa $m = 0{,}002$ kg transporta una carga de 4,0 μC. La partícula se deja libre desde el reposo a $x = 1{,}5$ m. Su energía cinética es 0,24 J al pasar por el punto $x = 1{,}0$ m. Determinar la carga Q.

• 80 Una cuña conductora está cargada eléctricamente a un potencial V respecto a una gran lámina conductora (figura 24.27).
(a) Dibujar las líneas del campo eléctrico y las equipotenciales de esta configuración. ¿En dónde es máximo el campo $|E|$ a lo largo del eje x?

www.elsolucionario.net

(b) Un electrón de masa m_e abandona la lámina con velocidad cero. ¿Cuál es su velocidad v cuando alcanza la cuña? (Prescindir del efecto de la gravedad.)

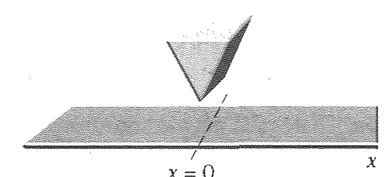


Figura 24.27 Problema 80.

•• **81** Un generador de Van de Graaff tiene una diferencia de potencial de 1,25 MV entre la cinta y la esfera exterior. La carga se suministra a una velocidad de 200 μC/s. ¿Qué potencia mínima se necesita para accionar la cinta móvil?

•• **82** Una carga puntual positiva $+Q$ está localizada en el punto $x = -a$.

(a) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una segunda carga puntual igual y positiva $+Q$ desde el infinito a $x = +a$?

Si tenemos dos cargas iguales positivas en $x = -a$ y $x = +a$,

(b) ¿cuánto trabajo se requiere para desplazar una tercera carga desde el infinito hasta el origen?

(c) ¿cuánto trabajo es necesario para mover la carga $-Q$ desde el origen hasta el punto $x = 2a$ a lo largo de una trayectoria semicircular (figura 24.28).

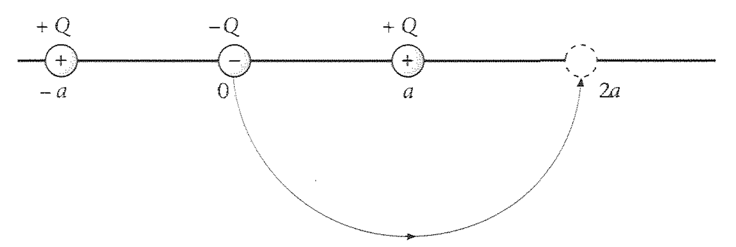


Figura 24.28 Problema 82.

•• **83** Una carga de 2 nC está uniformemente distribuida alrededor de un anillo de radio 10 cm que tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x. Una carga puntual de 1 nC está localizada en $x = 50$ cm. Determinar el trabajo necesario para desplazar la carga puntual al origen en julios y en electrón voltios.

•• **84** Los centros de dos esferas metálicas de radio 10 cm están separados 50 cm sobre el eje x. Las esferas son inicialmente neutras, pero una carga Q se transfiere de una esfera a la otra, creando una diferencia de potencial entre las esferas de 100 V. Un protón se libera desde el reposo en la superficie de la esfera positivamente cargada y se mueve hacia la esfera cargada negativamente. ¿A qué velocidad choca contra la esfera negativa?

•• **85** Un conductor esférico de radio R_1 está cargado a 20 kV. Cuando se conecta mediante un fino y largo alambre a una segunda esfera conductora situada lejos de él, su potencial cae a 12 kV. ¿Cuál es el radio de la segunda esfera?

•• **86** Un anillo cargado uniformemente, de radio a y carga Q, se encuentra sobre el plano yz con su eje a lo largo del eje x. Una carga puntual Q' se sitúa sobre el eje x en $x = 2a$.

(a) Determinar el potencial en cualquier punto del eje x debido a la carga total $Q + Q'$.

(b) Determinar el campo eléctrico para cualquier punto sobre el eje x.

•• **87** Una esfera metálica centrada en el origen posee una carga superficial de densidad $\sigma = 24{,}6$ nC/m^2. En $r = 2{,}0$ m, el potencial es 500 V y la magnitud del campo eléctrico es 250 V/m. Determinar el radio de la esfera metálica.

•• **88** A lo largo del eje de un disco uniformemente cargado, en un punto situado a 0,6 m del centro del disco, el potencial es 80 V y la magnitud del campo eléctrico es 80 V/m; a una distancia de 1,5 m, el potencial es 40 V y la magnitud del campo eléctrico es 23,5 V/m. Determinar la carga total residente en el disco.

•• **89** Después de caminar sobre una alfombra en un día seco, es habitual que una persona al tocar un cuerpo metálico o a otra persona produzca una chispa de unos 2 mm. Estimar la diferencia de potencial entre los dos cuerpos antes de que salte la chispa.

•• **90** Cuando el uranio ^{235}U captura un neutrón, se descompone en dos núcleos y emite varios neutrones que pueden producir la división de otros núcleos de uranio. Admitir que los productos de fisión son núcleos con cargas igual a $+46e$ y que estos núcleos están en reposo justo después de la fisión y están separados en el doble de su radio, $2R \approx 1{,}3 \times 10^{-14}$ m.

(a) Calcular la energía potencial electrostática de los fragmentos de fisión. Este valor es aproximadamente el de la energía liberada por fisión.

(b) ¿Cuántas fisiones por segundo se necesitan para producir 1 MW de potencia en un reactor?

•• **91** El ^{210}Po radiactivo emite partículas alfa de carga $+2e$ y energía 5,30 MeV. Admitir que en el instante después de formarse y de escapar del núcleo la partícula alfa está a una distancia R del centro del núcleo hijo ^{206}Pb cuya carga es $+82e$. Calcular R considerando que la energía potencial electrostática de las dos partículas a esta separación es igual a 5,30 MeV. (Despreciar el tamaño de la partícula α.)

•• **92** Dos grandes planos paralelos poseen unas densidades de carga iguales y opuestas de valor σ. Tienen un área A y están separados por una distancia d.

(a) Calcular la diferencia de potencial entre los planos.

(b) Entre los dos planos se inserta una lámina conductora de la misma área y espesor a que no posee una carga neta. Calcular la diferencia de potencial entre los dos planos originales y dibujar las líneas de campo en la región comprendida entre ambos.

•• **93** Un anillo cargado uniformemente con una carga total de 100 μC y un radio de 0,1 m yace en el plano yz con su centro en el origen. Una regla de metro tiene una carga puntual de 10 μC en el extremo marcado con el 0 y una carga puntual de 20 μC en el extremo marcado con 100 cm. ¿Qué trabajo hay que realizar para transportar la regla de metro desde una distancia muy grande hasta una posición a lo largo del eje x con el extremo marcado con 0 en $x = 0{,}2$ m y el otro extremo en $x = 1{,}2$ m?

•• **94** Tres grandes placas conductoras paralelas entre sí tienen conectadas la cara exterior por medio de un alambre. La placa del medio está aislada y posee una densidad de carga σ_1 sobre la superficie superior y σ_2 sobre la superficie inferior, siendo $\sigma_1 + \sigma_2 = 12$ μC/m^2. Esta placa dista 1 mm de la placa superior y 3 mm de la placa del fondo. Determinar σ_1 y σ_2.

••• **95** Una carga puntual q_1 está en el origen y una segunda carga puntual q_2 está sobre el eje x en $x = a$, como en el ejemplo 24.5.

(a) Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje x a partir de la función potencial dada en dicho ejemplo.

(b) Determinar el potencial en un punto cualquiera del eje y.

(c) Utilizar el resultado de (b) para calcular el componente y del campo eléctrico sobre el eje y. Comparar el resultado así obtenido con el que resulta directamente de la ley de Coulomb.

••• **96** Una partícula de masa m que posee una carga positiva q está restringida a moverse a lo largo del eje x. En los puntos $x = -L$ y $x = L$ hay dos cargas anulares de radio L (figura 24.29). Cada anillo está centrado sobre el eje x y localizado en un plano perpendicular al mismo, siendo ambos portadores de la misma carga positiva Q.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) Obtener una expresión del potencial entre las cargas anulares en función de x para $-L < x < L$.
(b) Demostrar que en esta región $V(x)$ pasa por un mínimo para $x = 0$.
(c) Demostrar que para $x << L$, el potencial es de la forma $V(x) = V(0) + \alpha x^2$.
(d) Deducir una expresión para la frecuencia angular de oscilación de la masa m si se desplaza ligeramente del origen y se deja libre.

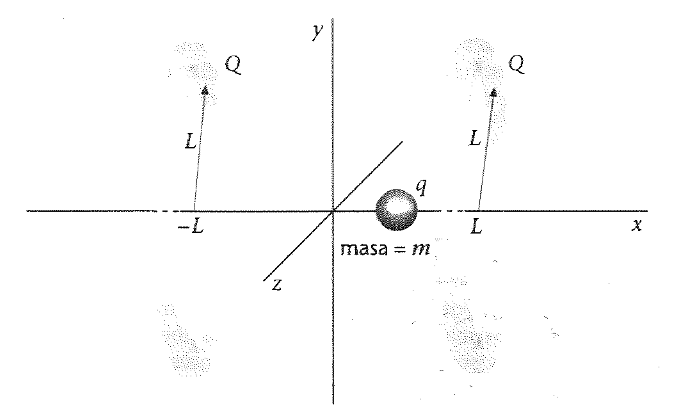


Figura 24.29 Problema 96.

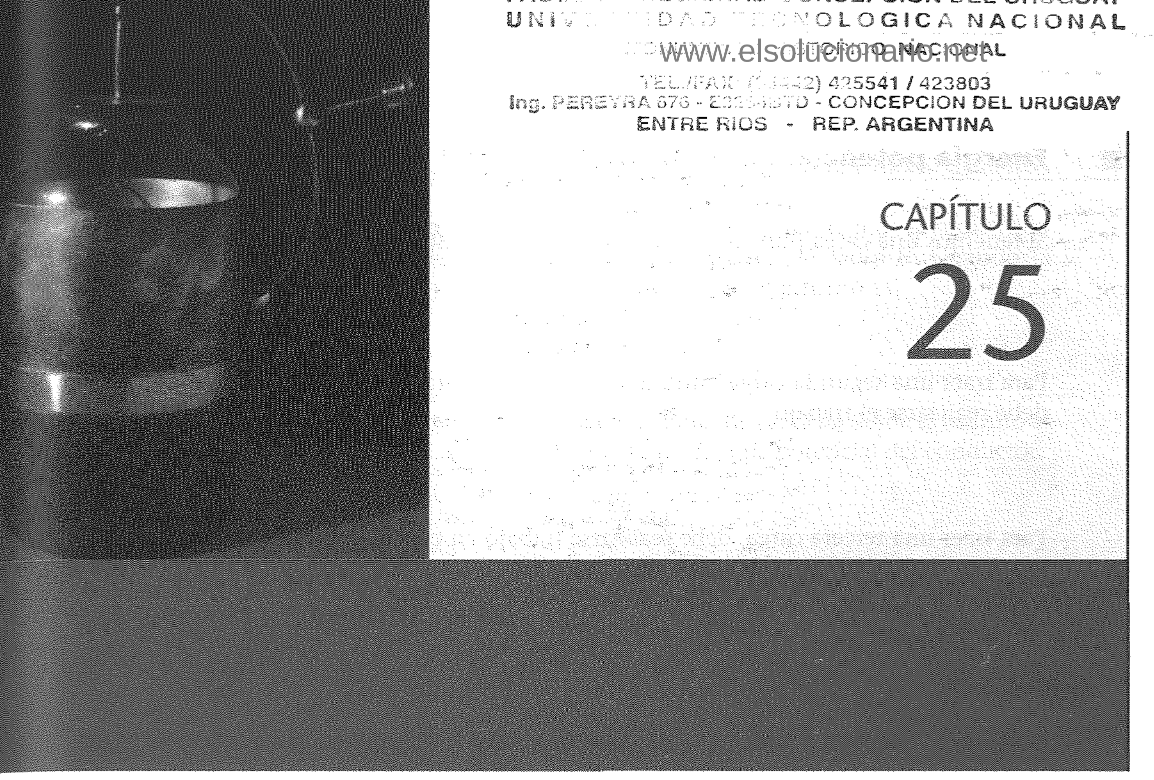
••• **97** Tres cortezas conductoras esféricas y concéntricas poseen radios a, b y c, siendo $a < b < c$. Inicialmente, la corteza interna está descargada, la del medio posee una carga positiva Q y la exterior una carga negativa $-Q$.

(a) Determinar el potencial eléctrico de las tres cortezas.
(b) Si las cortezas interna y externa se conectan mediante un alambre que está aislado al pasar a través de la corteza media, ¿cuál es el potencial eléctrico de cada una de las tres cortezas y cuál es la carga final de cada corteza?

••• **98** Consideremos dos cortezas metálicas esféricas y concéntricas de radios a y b, siendo $b > a$. La corteza exterior posee una carga Q, pero la corteza interior está conectada a tierra. Esto significa que la corteza interior posee un potencial cero y que las líneas de campo eléctrico abandonan la corteza exterior y se dirigen al infinito, pero otras se dirigen desde la corteza externa a la interna. Determinar la carga en la corteza interna.

www.elsolucionario.net

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
www.elsolucionario.net
TEL/FAX (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO 25

Energía electrostática y capacidad

Condensador de tipo botella de Leyden.

www.elsolucionario.net

Si transportamos una carga puntual q desde un lugar muy alejado a una región donde existen presentes otras cargas, debemos realizar un trabajo qV, en donde V es el potencial en la posición final debido a las cargas próximas. El trabajo realizado se almacena en forma de energía potencial electrostática. La energía potencial electrostática de un sistema de cargas es el trabajo total necesario para constituir el sistema.

Al situar una carga sobre un conductor aislado, el potencial del conductor crece. El cociente entre la carga y el potencial se llama **capacidad** del conductor. Un dispositivo útil para almacenar carga y energía es el condensador, formado por dos conductores muy próximos, pero aislados uno del otro. Conectados a una diferencia de potencial, tal como una batería, los conductores adquieren cargas iguales y opuestas. El cociente entre la magnitud de la carga sobre cada conductor y la diferencia de potencial entre los conductores es la capacidad del condensador. Los condensadores tienen muchas aplicaciones. El mecanismo de iluminación ("flash") de las cámaras fotográficas posee un condensador que almacena la energía necesaria para proporcionar un destello súbito de luz. Los condensadores también se utilizan en los circuitos de sintonización de radios, televisores, etc., permitiéndoles operar a frecuencias específicas.

El primer condensador fue la botella de Leyden, un recipiente de vidrio recubierto exterior e interiormente con láminas de oro. Fue inventada en el siglo XVIII en la Universidad de Leyden (Holanda) cuando uno de los experimentadores que estaban estudiando los efectos de las cargas eléctricas sobre las personas y los animales tuvo la idea de almacenar una gran cantidad de carga en una botella de agua. Para ello sostenía la botella en una mano mientras la carga procedente de un generador electrostático era conducida hasta el agua por medio de una cadena. Cuando trató de sacar la cadena del agua con la otra mano sufrió una sacudida eléctrica que le dejó inconsciente. Benjamin Franklin comprobó que el dispositivo para almacenar cargas no debía tener necesariamente la forma de botella y utilizó en su lugar vidrios de ventana recubiertos de hojas metálicas, que se llamaron vidrios de Franklin. Con varios de estos vidrios conectados en paralelo, Franklin almacenó una gran carga y con ello trató de matar un pavo. En su lugar, sufrió él mismo una fuerte descarga. Más tarde, Franklin escribió: "Trataba de matar un pavo y por poco no maté un ganso".

 www.elsolucionario.net

25.1 Energía potencial electrostática

Si tenemos una carga puntual q_1, el potencial a una distancia $r_{1,2}$ viene dado por

$$V = \frac{kq_1}{r_{1,2}}$$

Para traer una segunda carga puntual q_2 desde una distancia infinita a una distancia $r_{1,2}$, debe realizarse el trabajo

$$W_2 = q_2 V = \frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}}$$

Para traer una tercera carga, debe realizarse trabajo en contra del campo eléctrico producido por ambas cargas, q_1 y q_2. El trabajo necesario para transportar una tercera carga q_3 a una distancia $r_{1,3}$ de q_1 y una distancia $r_{2,3}$ de q_2 es

$$W_3 = \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}}$$

El trabajo total para reunir las tres cargas puntuales es la **energía potencial electrostática** U del sistema de las tres cargas

$$U = \frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}} \qquad (25.1)$$

Esta cantidad de trabajo es independiente del orden en el cual las cargas se transportan hasta alcanzar sus posiciones finales. En general:

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una separación infinita hasta sus posiciones finales.

Energía potencial electrostática de un sistema

Los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación 25.1 pueden escribirse en la forma

$$\frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} = q_1\left(\frac{kq_2}{r_{1,2}} + \frac{kq_3}{r_{1,3}}\right) = q_1 V_1$$

en donde V_1 es el potencial debido a las cargas q_2 y q_3. De igual modo, el segundo y tercer términos representan el producto de la carga q_3 por el potencial debido a las cargas q_1 y q_2, y el primero y tercer términos representan el producto de la carga q_2 por el potencial debido a las cargas q_1 y q_3. Así, podemos expresar la ecuación 25.1 en la forma

$$\begin{aligned} U &= \frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}} + \frac{kq_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{2,3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{kq_2}{r_{1,2}} + \frac{kq_3}{r_{1,3}}\right) + q_2\left(\frac{kq_3}{r_{2,3}} + \frac{kq_1}{r_{1,2}}\right) + q_3\left(\frac{kq_1}{r_{1,3}} + \frac{kq_2}{r_{2,3}}\right)\right] \end{aligned}$$

La energía potencial electrostática U de un sistema de n cargas puntuales es por tanto,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \qquad (25.2)$$

Energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

en donde V_i es el potencial en la posición de la carga i producido por todas las demás cargas.

La ecuación 25.2 describe también la energía potencial electrostática de una distribución continua de carga. Consideremos un conductor esférico de radio R. Cuando la esfera transporta una carga q, su potencial relativo a $V = 0$ en el infinito es

$$V = \frac{kq}{R}$$

El trabajo necesario para transportar una cantidad adicional de carga dq desde el infinito al conductor es $V\,dq$. Este trabajo es igual al incremento de energía potencial del conductor:

$$dU = V\,dq = \frac{kq}{R}\,dq$$

La energía potencial total U es la integral de dU cuando q crece desde cero a su valor final Q. Integrando desde $q = 0$ a $q = Q$, se obtiene:

$$U = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2}QV \qquad \textbf{(25.3)}$$

en donde $V = kQ/R$ es el potencial sobre la superficie de la esfera cargada. Aunque la ecuación 25.3 se ha deducido para un conductor esférico, es válida para cualquier conductor. El potencial de un conductor es proporcional a su carga q, es decir, $V = \alpha q$, en donde α es una constante. Por tanto, el trabajo necesario para transportar una carga adicional dq desde el infinito al conductor es $V\,dq = \alpha q\,dq$, y el trabajo total necesario para depositar la carga Q sobre el conductor es $\frac{1}{2}\alpha Q^2 = \frac{1}{2}QV$. Si tenemos una serie de n conductores con el conductor i al potencial V_i con la carga Q_i, la energía potencial electrostática es

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i \qquad \textbf{(25.4)}$$

Energía potencial electrostática de un sistema de conductores

EJEMPLO 25.1

Los puntos A, B, C y D son los vértices de un cuadrado de lado a, como indica la figura 25.1. (a) Calcular el trabajo necesario para situar una carga q positiva en cada vértice del cuadrado, determinando por separado el trabajo correspondiente al transporte de cada carga a su posición final. (b) Demostrar que la ecuación 25.2 expresa el trabajo total.

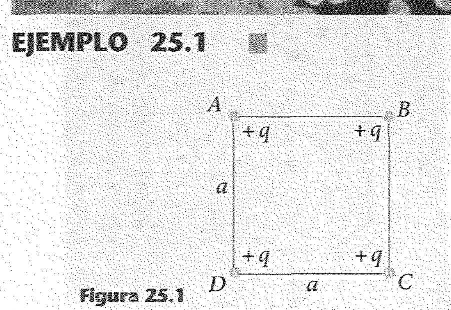


Figura 25.1

Esquema del problema Para situar la primera carga en el punto A no se necesita trabajo alguno, ya que el potencial en este punto es cero cuando las otras tres cargas están en el infinito. A medida que cada carga adicional ocupa su puesto, debe realizarse el trabajo correspondiente a la presencia de las cargas previas.

(a) 1. Situar la primera carga en A. Para ello, el trabajo necesario W_A es nulo:

$$W_A = 0$$

2. Transportar la segunda carga al punto B. El trabajo requerido es $W_B = qV_A$, en donde V_A es el potencial en B debido a la primera carga en A a la distancia a:

$$W_B = qV_A = q\left(\frac{kq}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}$$

3. $W_C = qV_C$, en donde V_C es el potencial en C debido a la presencia de q en A a la distancia $\sqrt{2}a$ y q en B a la distancia a:

$$W_C = qV_C = q\left(\frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a}\right) = \frac{kq^2}{\sqrt{2}a} + \frac{kq^2}{a}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

4. Consideraciones semejantes permiten calcular el trabajo W_D necesario para transportar la cuarta carga al punto D:

$$W_D = qV_D = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a}\right) = \frac{2kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a}$$

5. Sumando las contribuciones individuales, se obtiene el trabajo total necesario para reunir las cuatro cargas:

$$W_{\text{total}} = W_A + W_B + W_C + W_D = \frac{4kq^2}{a} + \frac{2kq^2}{\sqrt{2}a} = (4+\sqrt{2})\frac{kq^2}{a}$$

(b) Calcular el trabajo total a partir de la ecuación 25.2. Existen cuatro términos idénticos, uno para cada carga:

$$W_{\text{total}} = U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V_i = \frac{1}{2}\left[4\times q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a}\right)\right]$$

$$= \frac{4kq^2}{a} + \frac{2kq^2}{\sqrt{2}a} = (4+\sqrt{2})\frac{kq^2}{a}$$

Observación El W_{total} es la energía total electrostática de la distribución de carga.

Ejercicio (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para transportar una quinta carga positiva q del infinito al centro del cuadrado? (b) ¿Cuál es el trabajo total requerido para reunir el sistema de cinco cargas? (*Respuestas:* (a) $4\sqrt{2}\,kq^2/a$, (b) $(4+5\sqrt{2})kq^2/a$.)

25.2 Capacidad

El potencial (relativo al potencial cero en el infinito) de un simple conductor aislado, portador de una carga Q, es proporcional a esta carga y depende del tamaño y forma del conductor. En general, cuanto mayor es el conductor, mayor es la cantidad de carga que puede almacenar para un determinado potencial. Por ejemplo, el potencial de un conductor esférico de radio R, portador de una carga Q es

$$V = \frac{kQ}{R}$$

El cociente entre la carga Q y el potencial V de un conductor aislado es su capacidad C:

$$C = \frac{Q}{V} \tag{25.5}$$

Definición —Capacidad

Esta magnitud mide la "capacidad" de almacenar carga para una determinada diferencia de potencial. Como el potencial es siempre proporcional a la carga, esta relación no depende de Q o V, sino sólo del tamaño y forma del conductor. La capacidad de un conductor esférico es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \tag{25.6}$$

La unidad SI de capacidad es el culombio por voltio y se denomina **faradio** (F) en honor al gran físico experimental inglés, Michael Faraday:

$$1\text{ F} = 1\text{ C/V} \tag{25.7}$$

Como el faradio es una unidad relativamente grande, se utilizan frecuentemente los submúltiplos como el microfaradio (1 μF = 10^{-6} F) o el picofaradio (1 pF = 10^{-12} F). Como la capacidad se mide en faradios y R en metros, la ecuación 25.6 nos dice que la unidad SI de permitividad del espacio libre, ϵ_0, se expresa en faradios por metro:

$$\epsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\text{ F/m} = 8{,}85\text{ pF/m} \tag{25.8}$$

www.elsolucionario.net

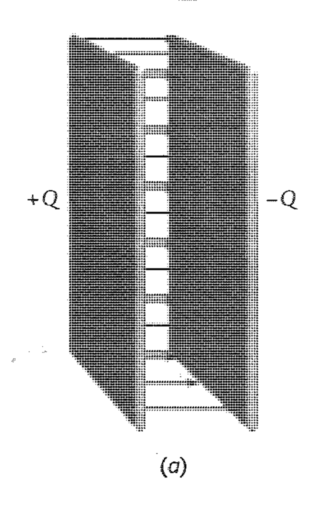
Ejercicio Determinar el radio de un conductor esférico que tiene la capacidad de 1 faradio. (*Respuesta*: 8,99 × 10^9 m, que es aproximadamente 1400 veces el radio de la Tierra.)

El ejercicio anterior nos muestra que el faradio es ciertamente una unidad muy grande.

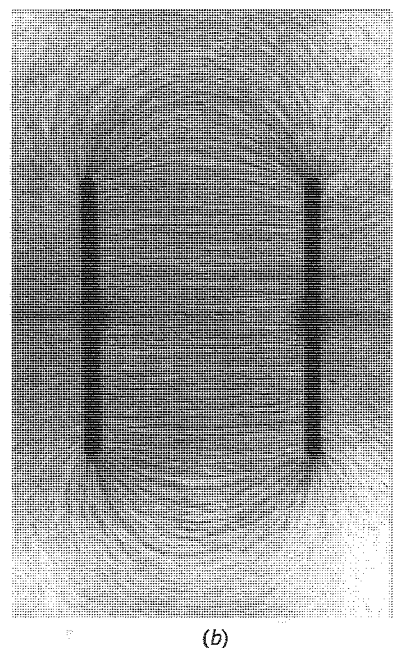
Ejercicio Una esfera de capacidad C_1 posee una carga de 20 μC. Si la carga se incrementa a 60 μC, ¿cuál es su nueva capacidad C_2? (*Respuesta*: $C_2 = C_1$. La capacidad no depende de la carga. Si la carga se triplica, el potencial de la esfera se triplica también y la relación Q/V, que depende sólo del radio de la esfera, permanece invariable.)

Condensadores

Un sistema de dos conductores portadores de cargas iguales y opuestas constituye un **condensador**. Habitualmente un condensador se carga transfiriendo una carga Q de un conductor al otro, con lo cual uno de los conductores queda con la carga $+Q$ y el otro con $-Q$. La capacidad del dispositivo se define por el cociente Q/V, en donde Q es la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores y V la magnitud de la diferencia de potencial entre los conductores.[1] Para calcular la capacidad, situamos cargas iguales y opuestas sobre los conductores y después determinamos la diferencia de potencial V a partir del campo eléctrico E entre ellos.



(*a*)



(*b*)

Figura 25.2 (*a*) Las líneas del campo eléctrico entre las placas de un condensador plano están igualmente espaciadas, lo que indica que el campo es uniforme en dicha zona. (*b*) Las líneas de campo eléctrico entre las placas de un condensador plano pueden visualizarse mediante pequeñas porciones de hilo suspendidas en aceite.

Condensador de placas paralelas Un condensador común es el **condensador de placas paralelas**, formado por dos grandes placas conductoras paralelas. En la práctica, las placas pueden ser láminas metálicas muy finas, separadas y aisladas una de otra por una lámina delgada de plástico. Este "sandwich" se arrolla para ahorrar espacio. Sea A el área de cada placa y d la distancia de separación, que es pequeña comparada con la longitud y anchura de las placas. Situamos una carga $+Q$ sobre una placa y $-Q$ sobre la otra. Estas cargas se atraen entre sí y se distribuyen uniformemente sobre las superficies interiores de las placas. Como las placas están muy próximas, el campo en cualquier punto entre ellas (excluyendo los puntos próximos a los bordes) es aproximadamente igual al campo debido a dos planos de carga infinitos, iguales y opuestos. Cada placa contribuye con un campo uniforme de magnitud $E = \sigma/2\epsilon_0$ (ecuación 23.21) resultando así un campo total $E = \sigma/\epsilon_0$, siendo $\sigma = Q/A$ la carga por unidad de área en cada una de las placas. Como el campo que existe entre las placas de este condensador es uniforme (figura 25.2), la diferencia de potencial entre las placas es igual al campo multiplicado por la separación de las placas, d:

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \qquad \textbf{(25.9)}$$

La capacidad del condensador de placas paralelas es, por tanto,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad \textbf{(25.10)}$$

Capacidad de un condensador de placas paralelas

Obsérvese que como V es proporcional a Q, la capacidad no depende de Q ni de V. En un condensador de placas paralelas, la capacidad es proporcional a la superficie de las placas e inversamente proporcional a la distancia de separación. En general la capacidad depende del tamaño, forma y geometría de los conductores y del medio aislante que les separa.

[1] Cuando hablamos de la carga de un condensador, nos referimos a la carga en cualquiera de los conductores. El uso de V en lugar de ΔV para la diferencia de potencial entre las placas es habitual y simplifica muchas de las ecuaciones relacionadas con la capacidad.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

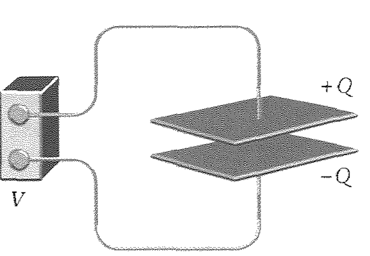


Figura 25.3 Cuando los conductores de un condensador se conectan a los terminales de una batería, ésta transfiere carga de un conductor al otro hasta que la diferencia de potencial entre los conductores es igual a la que existe entre los terminales de la batería. La carga transferida es proporcional a la diferencia de potencial.

Cuando un condensador se conecta a una batería[1], como se muestra en la figura 25.3, la carga se transfiere de un conductor a otro hasta que la diferencia de potencial entre los conductores es igual a la diferencia de potencial entre los terminales de la batería. La cantidad de carga transferida es $Q = CV$.



EJEMPLO 25.2

Un condensador de placas paralelas está formado por dos conductores cuadrados de lado 10 cm separados por 1 mm de distancia. (a) Calcular su capacidad. (b) Si este condensador está cargado con 12 V, ¿cuánta carga se transfiere de una placa a la otra?

Esquema del problema La capacidad C viene determinada por el área y la separación de las placas. Una vez calculado C, la carga correspondiente a un determinado voltaje V se encuentra a partir de la definición de capacidad $C = Q/V$.

(a) Determinamos la capacidad a partir de la ecuación 25.10:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,85\ \text{pF/m})(0,1\ \text{m})^2}{0,001\ \text{m}} = 88,5\ \text{pF}$$

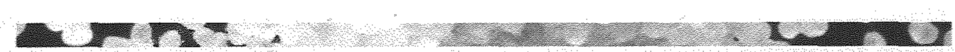
(b) La carga transferida se determina a partir de la definición de capacidad:

$$Q = CV = (88,5\ \text{pF})(12\ \text{V}) = 1,06 \times 10^{-9}\ \text{C} = 1,06\ \text{nC}$$

Observaciones Q es la magnitud de la carga sobre cada placa del condensador. En este caso, Q corresponde aproximadamente a $6,6 \times 10^9$ electrones.

Ejercicio ¿Qué dimensiones deberían tener las placas del ejemplo para que la capacidad sea de 1 F? (*Respuesta:* $A = 1,13 \times 10^8\ \text{m}^2$ que corresponde a un cuadrado de 10,6 km de lado.)

Condensador cilíndrico Un condensador cilíndrico consta de un pequeño cilindro o alambre conductor de radio r_1 y una corteza cilíndrica mayor de radio r_2 concéntrica con la anterior. Un cable coaxial, como el utilizado en la televisión por cable puede considerarse como un condensador cilíndrico. La capacidad por unidad de longitud de un cable coaxial es importante en la determinación de las características de transmisión del cable.

EJEMPLO 25.3

Determinar la expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico formado por dos conductores de longitud L. Un cilindro tiene de radio r_1 y el otro es una corteza cilíndrica coaxial de radio interno r_2, siendo $r_1 < r_2 << L$ como indica la figura 25.4.

[1] En el capítulo 26 estudiaremos las baterías con mayor amplitud. Aquí nos basta con saber que una batería es un dispositivo que almacena y suministra energía eléctrica y mantiene una diferencia de potencial constante V entre sus terminales.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Esquema del problema Disponemos la carga $+Q$ en el conductor interno y la carga $-Q$ en el conductor externo y calculamos la diferencia de potencial $V = V_1 - V_2$ a partir del campo eléctrico entre los conductores, el cual se deduce de la ley de Gauss. Como el campo eléctrico depende de r, debemos integrar para determinar la diferencia de potencial.

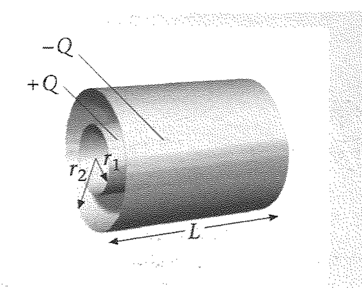
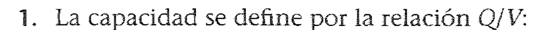


Figura 25.4



1. La capacidad se define por la relación Q/V: $\quad C = Q/V$

2. V está relacionado con el campo eléctrico entre las cortezas: $\quad dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_r\, dr$

3. Para determinar E_r escogemos una superficie cilíndrica gaussiana de radio r entre los conductores ($r_1 < r < r_2$). El área de la superficie gaussiana es, por tanto, $2\pi rL$. La ley de Gauss nos da:

$$\oint_S E_n\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

$$E_r 2\pi rL = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

4. Despejar E_r: $\quad E_r = \dfrac{1}{2\pi L\epsilon_0}\dfrac{Q}{r}$

5. Integrar para determinar $V = V_1 - V_2$:

$$V = V_1 - V_2 = \int_{r_2}^{r_1} dV = \int_{r_2}^{r_1} -E_r\, dr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} +E_r\, dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

6. Del resultado anterior se deduce C: $\quad C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}$

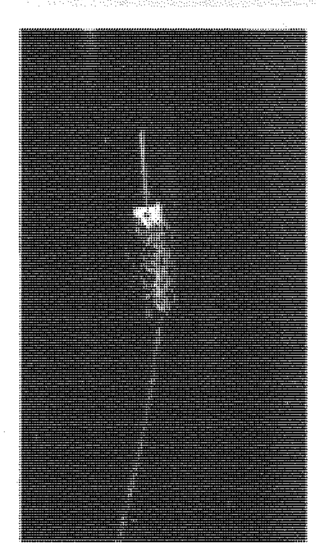
Observaciones La capacidad de un condensador cilíndrico es proporcional a la longitud de los conductores.

Ejercicio ¿Cómo se modifica la capacidad si el potencial a través de un condensador cilíndrico se incrementa de 20 a 80 V? (*Respuesta*: La capacidad de un condensador no depende del potencial. Para aumentar V hay que incrementar la carga Q. La relación Q/V depende sólo de la geometría del condensador.)

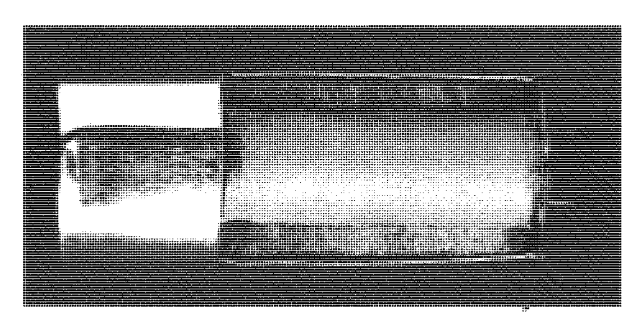
El ejemplo 25.3 nos muestra que la capacidad de un condensador cilíndrico es

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)} \qquad \textbf{(25.11)}$$

Capacidad de un condensador cilíndrico



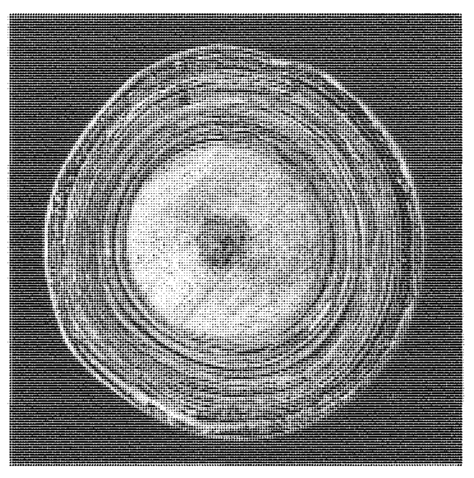
Un cable coaxial es un condensador largo cilíndrico que posee un alambre sólido como conductor interno y un blindaje de alambre trenzado como conductor externo. En este caso se ha desprendido la cubierta exterior de caucho para que puedan verse los conductores y el aislante de plástico blanco que los separa.



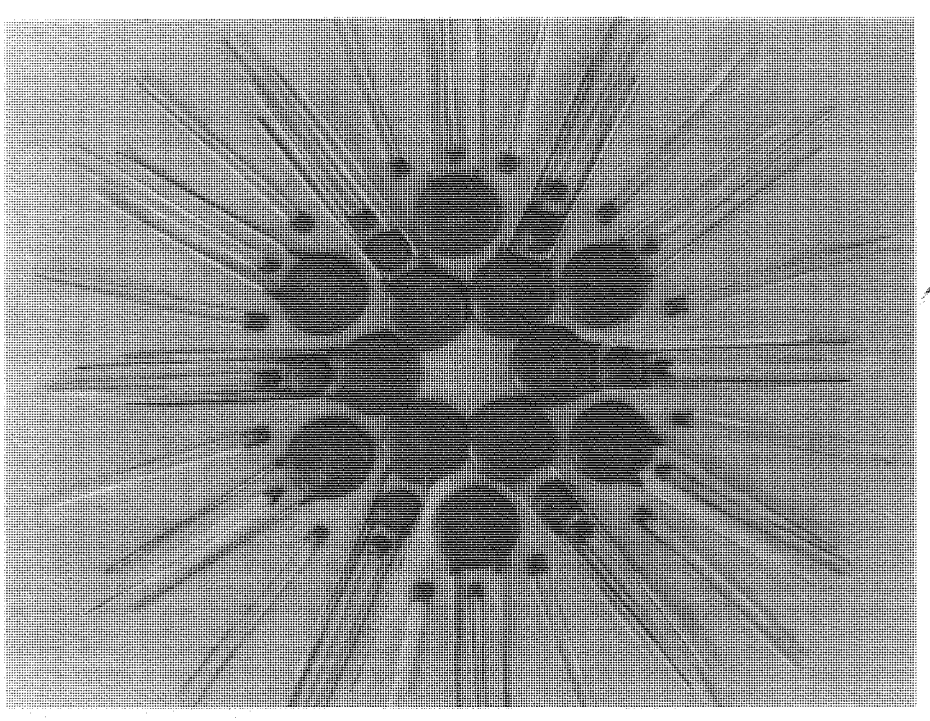
Corte transversal de un condensador de 200 μF utilizado en una lámpara de descarga electrónica.

www.elsolucionario.net

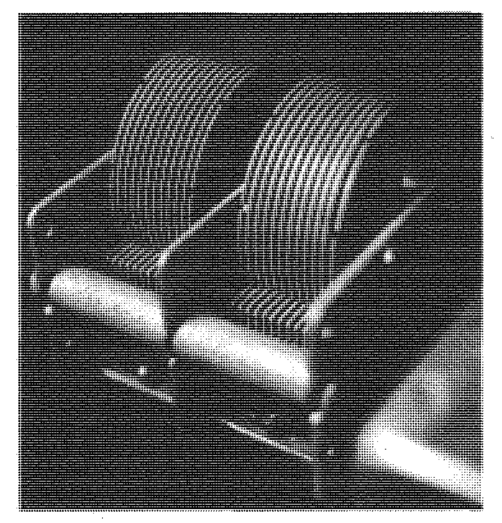
 www.elsolucionario.net



Sección transversal de un condensador de lámina arrollada.



Condensadores cerámicos de uso en los circuitos electrónicos.



Condensador variable con espaciado de aire, muy utilizado en los circuitos de sintonía de los antiguos aparatos de radio. Las placas semicirculares giran entre las placas fijas, cambiando la cantidad de área superficial enfrentada y, por tanto, la capacidad.

www.elsolucionario.net

25.3 Almacenamiento de la energía eléctrica

+ + + + + + + + + +

dq $V = \frac{q}{C}$

− − − − − − − − − −

Figura 25.5 Cuando una pequeña cantidad de carga dq se mueve desde el conductor negativo hacia el conductor positivo su energía potencial se incrementa en $dU = V\,dq$, donde V es la diferencia de potencial entre los conductores.

Durante la carga de un condensador, una carga positiva del conductor cargado negativamente se transfiere al conductor cargado positivamente. Parte de este trabajo queda almacenado en forma de energía potencial electrostática.

Sea q la carga transferida al cabo de cierto tiempo durante el proceso. La diferencia de potencial es entonces $V = q/C$. Si se transfiere ahora una pequeña cantidad adicional de carga dq desde el conductor negativo a potencial cero hasta el conductor positivo a un potencial V (figura 25.5), la energía potencial de la carga se incrementa en

$$dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

El incremento total de energía potencial U es la suma o integral de estas cargas dU cuando q crece desde cero a su valor final Q (figura 25.6):

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Esta energía potencial es la energía almacenada en el condensador. Utilizando $C = Q/V$ podemos expresar esta energía de varios modos:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \textbf{(25.12)}$$

Energía almacenada en un condensador

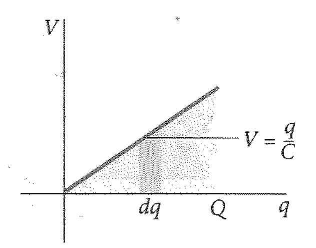


Figura 25.6 El trabajo necesario para cargar un condensador resulta ser la integral de $V\,dq$ desde la carga original $q = 0$ hasta la carga final $q = Q$. Este trabajo es igual al área $\frac{1}{2}Q(Q/C)$ encerrada debajo de la curva.

Ejercicio Un condensador de 15 μF se carga a 60 V. ¿Cuánta energía puede almacenar este condensador? (*Respuesta*: 0,027 J.)

Ejercicio Deducir la expresión de la energía electrostática almacenada en un condensador (ecuación 25.12) a partir de la ecuación 25.4 utilizando $Q_1 = +Q$, $Q_2 = -Q$ y $V = V_1 - V_2$.

Un condensador se carga usualmente conectándole a una batería, que mantiene una diferencia de potencial V entre sus terminales. El trabajo realizado por la batería al ceder la carga Q al condensador es QV, que es el doble de la energía almacenada en el condensador. El trabajo adicional realizado por la batería se disipa en forma de calor en los cables de conexión o por radiación.[1]



EJEMPLO 25.4

Un condensador de placas paralelas y cuadradas, de lado 14 cm y separadas 2,0 mm se conecta a una batería y se carga a 12 V. Se desconecta entonces la batería del condensador y la separación de las placas se incrementa a 3,5 mm. (a) ¿Cuál es la carga del condensador? (b) ¿Cuánta energía se almacenó originalmente en el condensador? (c) ¿En cuánto se incrementó la energía al modificar la separación de las placas?

Esquema del problema (a) La carga depositada sobre el condensador puede calcularse a partir de la capacidad y luego utilizarse para calcular la energía en (b). (c) Al separar el condensador de la batería, la carga permanece constante sobre las placas. El crecimiento de la energía se determina a partir de la carga y el nuevo potencial para calcular la nueva energía, de la cual restaremos la energía original.

(a) 1. La carga del condensador es igual al producto de C por V: $Q = CV$

2. Calcular la capacidad del condensador de placas paralelas: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8{,}85\text{ pF/m})(0{,}14\text{ m})^2}{0{,}002\text{ m}} = 86{,}7\text{ pF}$

3. Sustituir en la etapa 1 para calcular Q: $Q = CV = (86{,}7\text{ pF})(12\text{ V}) = 1{,}04\text{ nC}$

(b) Calcular la energía original almacenada: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(1{,}04\text{ nC})(12\text{ V}) = 6{,}24\text{ nJ}$

(c) 1. Una vez separado el condensador de la batería, la carga sobre las placas permanece constante. El potencial entre las placas es igual al producto del campo E por la separación de aquéllas: $V = Ed$

2. Como E no se modifica y la diferencia de potencial es 12 V cuando la separación de las placas es 2,0 mm, la diferencia de potencial cuando la separación es 3,5 mm será: $V' = (12\text{ V})\frac{3{,}5\text{ mm}}{2{,}0\text{ mm}} = 21\text{ V}$

3. Para $d = 3{,}5$ mm, con $V' = 21$ V, la energía almacenada es: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(1{,}04\text{ nC})(21\text{ V}) = 10{,}92\text{ nJ}$

4. Restar la energía original para determinar el incremento: $\Delta U = 10{,}92\text{ nJ} - 6{,}24\text{ nJ} = 4{,}68\text{ nJ}$

[1] En la sección 26.6 veremos que si el condensador está conectado a una batería por cables de resistencia R, la mitad de la energía suministrada por la batería se disipa en forma de calor en los cables.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

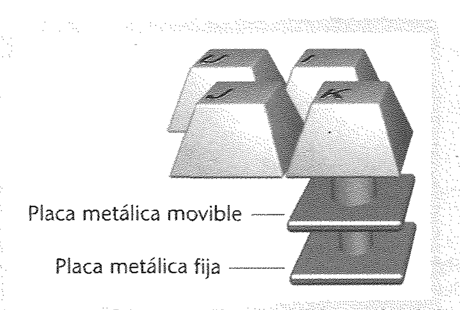


Figura 25.7 Interruptor de capacidades en el teclado de un ordenador. Una placa metálica acoplada a cada tecla actúa como tope de un condensador. Al oprimir la tecla disminuye la separación entre la placa superior y la inferior y crece la capacidad, lo cual pone en marcha el circuito electrónico del ordenador que actúa en consecuencia.

Observaciones La energía adicional calculada en la parte (c) procede del trabajo realizado por el agente responsable del aumento de separación de las placas, las cuales se atraen entre sí.

La figura 25.7 muestra este efecto en un interruptor.

Ejercicio Determinar la energía original del condensador de este ejemplo directamente de $U = \frac{1}{2}CV^2$. (*Respuesta*: 6,24 nJ.)

Ejercicio (a) Determinar la nueva capacidad C' en este ejemplo cuando la separación de las placas es 3,5 mm. (b) Utilizar el resultado de (a) para calcular la nueva energía a partir de $U = Q^2/2C'$. (*Respuestas*: (a) $C' = 49{,}6$ pF (b) $U = 10{,}92$ nJ.)

Es interesante resolver la parte del ejemplo 25.4 por un camino distinto. Como las placas de un condensador poseen cargas opuestas, se ejercen entre sí fuerzas atractivas. Para aumentar la separación de las placas tendrá que realizarse un trabajo en contra de estas fuerzas. Supongamos que se fija la placa inferior y desplazamos la superior. La fuerza que actúa sobre esta placa superior es igual al producto de la carga sobre la placa multiplicada por el campo eléctrico *debido a la placa inferior.* Este campo es igual a la mitad del campo total existente entre las placas, ya que la carga sobre la placa superior también contribuye igualmente al campo. Cuando la diferencia de potencial es de 12 V y la separación es de 2 mm, el campo total entre las placas es

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12\text{ V}}{2\text{ mm}} = 6\text{ V/mm} = 6\text{ kV/m}$$

La fuerza ejercida sobre la placa superior por la placa inferior es, por tanto,

$$F = QE' = Q(\tfrac{1}{2}E) = (1{,}04\text{ nC})(3\text{ kV/m}) = 3{,}12\ \mu\text{N}$$

El trabajo que debe realizarse para desplazar la placa superior una distancia $\Delta d = 1{,}5$ mm es, por tanto,

$$W = F\,\Delta d = (3{,}12\ \mu\text{N})(1{,}5\text{ mm}) = 4{,}68\text{ nJ}$$

Este trabajo es igual al incremento de energía almacenada.

Energía del campo electrostático

En el proceso de carga de un condensador se crea un campo eléctrico entre las placas. El trabajo necesario para cargar el condensador puede considerarse como el requerido para crear el campo eléctrico. Es decir, la energía almacenada en el condensador reside en el campo eléctrico y por ello se llama **energía del campo electrostático**.

Consideremos un condensador de placas paralelas. Es posible relacionar la energía almacenada en el condensador con el campo eléctrico E entre las placas. La diferencia de potencial entre las placas está relacionada con el campo eléctrico por $V = Ed$ en donde d es su separación. La capacidad viene dada por $C = \epsilon_0 A/d$ (ecuación 25.10). La energía almacenada es

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2(Ad)$$

El producto Ad es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador que contiene el campo eléctrico. La energía por unidad de volumen es la **densidad energética** u_e cuyo valor en un campo eléctrico E es

www.elsolucionario.net

$$u_e = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (25.13)$$

Densidad de energía de un campo electrostático

Así, la energía por unidad de volumen del campo electrostático es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. *Aunque la ecuación 25.13 se ha obtenido considerando el campo eléctrico comprendido entre las placas de un condensador de placas paralelas, el resultado es válido para cualquier campo eléctrico.* Siempre que exista un campo eléctrico en el espacio, la energía electrostática por unidad de volumen viene dada por la ecuación 25.13.

Ejercicio (a) Calcular la densidad energética u_e en el ejemplo 25.4 cuando la separación de las placas es 2,0 mm. (b) Demostrar que el incremento de energía del ejemplo 25.4 es igual al producto de u_e por el incremento de volumen (Δ vol) entre las placas. (*Respuestas:* (a) $u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = 159{,}3\ \mu\text{J/m}^3$, (b) $\Delta\text{vol} = A\,\Delta d = 2{,}94 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$, $u_e\,\Delta\text{vol} = 4{,}68$ nJ, de acuerdo con el ejemplo 25.4.)

Para comprobar el carácter general de la ecuación 25.13 calcularemos la energía del campo electrostático de un conductor esférico de radio R que transporta una carga Q. La energía potencial electrostática en función de la carga Q y el potencial V viene dado por la ecuación 25.12:

$$U = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2}QV \qquad (25.14)$$

Es posible obtener este mismo resultado considerando la densidad energética de un campo eléctrico, dada por la ecuación 25.13. Cuando el conductor es portador de una carga Q, el campo eléctrico es radial y viene dado por

$$E_r = 0, \qquad r < R \text{ (dentro del conductor)}$$

$$E_r = \frac{kQ}{r^2}, \qquad r > R \text{ (fuera del conductor)}$$

Como el campo eléctrico es simétricamente esférico, elegimos una corteza esférica como volumen elemental. Si el radio de la corteza es r y su espesor dr, el volumen es $d\mathcal{V} = 4\pi r^2\,dr$ (figura 25.8). La energía dU de este elemento de volumen es

$$dU = u_e\,d\mathcal{V} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2)4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\,\epsilon_0\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2(4\pi r^2\,dr) = \frac{1}{2}\,(4\pi\epsilon_0 k^2)Q^2\,\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\,kQ^2\,\frac{dr}{r^2}$$

en donde hemos utilizado $4\pi\epsilon_0 = 1/k$. Como el campo eléctrico es cero para $r < R$, la energía total del campo eléctrico puede obtenerse integrando desde $r = R$ a $r = \infty$:

$$U = \int u_e\,d\mathcal{V} = \frac{1}{2}\,kQ^2\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\,k\,\frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2}\,Q\,\frac{kQ}{R} = \frac{1}{2}\,QV \qquad (25.15)$$

que es la misma ecuación 25.12.

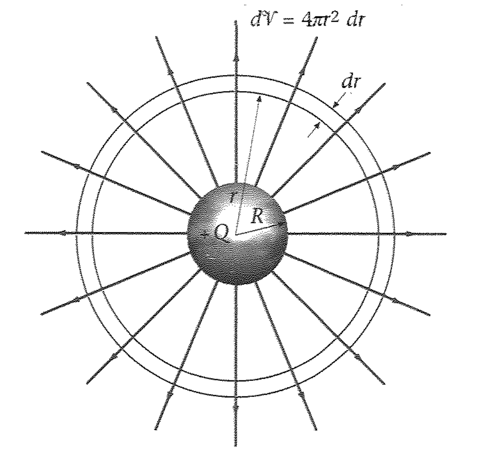


Figura 25.8 Geometría para el cálculo de la energía electrostática de un conductor esférico con carga Q. El volumen del espacio comprendido entre r y $r + dr$ es igual a $d\mathcal{V} = 4\pi r^2\,dr$. La energía del campo electrostático en este elemento de volumen es $u_e d\mathcal{V}$, en donde $u_e = \frac{1}{2}\,\epsilon_0 E^2$ es la densidad de energía.

www.elsolucionario.net

Combinaciones de condensadores ■ 25.4

Frecuentemente se utilizan dos o más condensadores en combinación. Cuando dos condensadores se conectan como indica la figura 25.9, de tal modo que las placas superiores de los dos condensadores están unidas por un alambre conductor y, por tanto, a un potencial común V_a y las placas inferiores están también conectadas entre sí y están a un potencial común V_b, se dice que los condensadores están conectados en **paralelo**. (En los circuitos eléctricos, un condensador se indica por el símbolo ⊣⊢.) Cuando los conden-

 www.elsolucionario.net

sadores están conectados en paralelo, la diferencia de potencial es la misma entre las placas de cada condensador.

En la figura 25.10 se muestran dos condensadores conectados de modo que la magnitud de la carga en ambos es la misma. Esta conexión de condensadores se llama en **serie**. La diferencia de potencial a través de la combinación en serie es la suma de las diferencias de potencial a través de los condensadores individuales.

Condensadores en paralelo

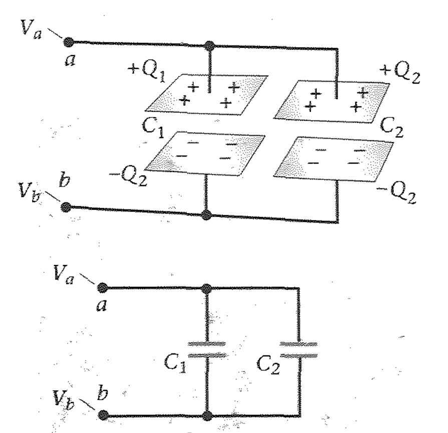


Figura 25.9 Dos condensadores en paralelo. Las placas superiores están conectadas juntas y se encuentran, por tanto, al mismo potencial V_a; las placas inferiores están igualmente conectadas entre sí y, por tanto, tienen el potencial común, V_b.

En la figura 25.9 se supone que los puntos a y b están conectados a una batería o a algún otro dispositivo que mantiene una diferencia de potencial $V = V_a - V_b$ entre las placas de cada condensador. Si las capacidades son C_1 y C_2, las cargas Q_1 y Q_2 almacenadas sobre las placas vienen dadas por

$$Q_1 = C_1 V$$

y

$$Q_2 = C_2 V$$

La carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

Una combinación de condensadores en un circuito puede reemplazarse por un solo condensador que almacene la misma cantidad de carga para una determinada diferencia de potencial. Decimos entonces que el condensador sustituto posee una **capacidad equivalente**. La capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es el cociente de la carga total almacenada y la diferencia de potencial

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \tag{25.16}$$

Así pues, la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades individuales. Cuando añadimos un segundo condensador en paralelo, incrementamos la capacidad, ya que esencialmente el área del conductor crece, permitiendo que una carga mayor se almacene con la misma diferencia de potencial.

El mismo razonamiento puede extenderse a tres o más condensadores conectados en paralelo, como indica la figura 25.11:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \tag{25.17}$$

Capacidad equivalente de condensadores en paralelo

Condensadores en serie

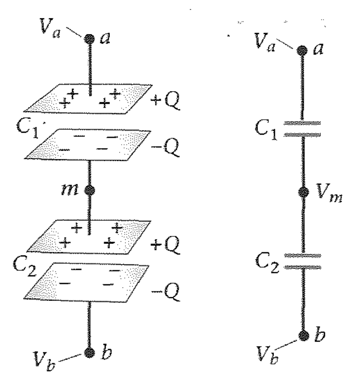


Figura 25.10 Dos condensadores en serie. La carga es la misma en cada condensador.

La figura 25.10 muestra dos condensadores en serie. Cuando los puntos a y b se conectan a los terminales de una batería, se establece una diferencia de potencial $V = V_a - V_b$ entre los dos condensadores. Si una carga $+Q$ se deposita sobre la carga superior, del primer condensador, el campo eléctrico producido por dicha carga inducirá una carga negativa igual a $-Q$ sobre su placa inferior. Esta carga procede de los electrones extraídos de la placa superior del segundo condensador. Por tanto, existirá una carga igual a $+Q$ en la placa superior del segundo condensador y una carga correspondiente $-Q$ en su placa inferior. La diferencia de potencial a través del primer condensador es

$$V_1 = V_a - V_m = \frac{Q}{C_1}$$

en donde V_m es el potencial de las placas adyacentes y el cable de conexión. De igual modo, la diferencia de potencial a través del segundo condensador es

$$V_2 = V_m - V_b = \frac{Q}{C_2}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La diferencia de potencial entre los dos condensadores en serie es la suma de estas diferencias de potencial:

$$V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad \textbf{(25.18)}$$

La capacidad equivalente de dos condensadores en serie es

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \qquad \textbf{(25.19)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 25.18 y 25.19, resulta

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \textbf{(25.20)}$$

Esta ecuación puede generalizarse para tres o más condensadores conectados en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \qquad \textbf{(25.21)}$$

Capacidad equivalente de condensadores en serie

Ejercicio Dos condensadores tienen capacidades de 20 μF y 30 μF. Determinar la capacidad equivalente de estos condensadores cuando están conectados (a) en paralelo, (b) en serie. (*Respuestas*: (a) 50 μF, (b) 12 μF.)

Obsérvese que en el ejercicio anterior la capacidad equivalente de los dos condensadores en serie es menor que la capacidad de cada uno de ellos. Obsérvese también que la adición de un condensador en serie incrementa $1/C_{eq}$, lo cual significa que la capacidad equivalente C_{eq} disminuye.

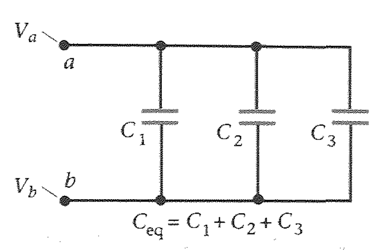
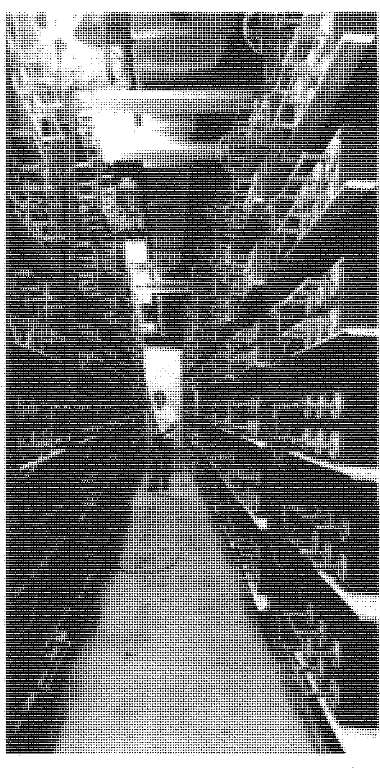


Figura 25.11 Tres condensadores en paralelo. El efecto de sumar un condensador en paralelo a un circuito, consiste en aumentar la capacidad efectiva.



Banco de condensadores para almacenar energía en el láser de impulsos Nova utilizado en los Lawrence Livermor Laboratories para el estudio de la fusión.



EJEMPLO 25.5

Un condensador de 2 μF y otro de 4 μF se conectan en serie con una batería de 18 V. Determinar la carga depositada sobre los condensadores y la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos.

Esquema del problema La figura 25.12*a* muestra el circuito de este ejemplo y la figura 25.12*b* muestra el condensador equivalente que posee la misma carga $Q = C_{eq}V$. Una vez determinada la carga, podemos calcular la caída de potencial a través de cada condensador.

2 μF 4 μF +Q −Q +Q −Q 18 V

C_{eq} +Q −Q 18 V

Figura 25.12 (*a*) (*b*)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

1. La carga de cada condensador es igual a la carga del condensador equivalente: $Q = C_{eq}V$

2. La capacidad equivalente de los condensadores en serie se determina mediante la expresión: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2\ \mu F} + \frac{1}{4\ \mu F} = \frac{3}{4\ \mu F}$

   $C_{eq} = \frac{4}{3}\ \mu F$

3. Utilizar este valor para determinar la carga Q: $Q = C_{eq}V = (\frac{4}{3}\ \mu F)(18\ V) = 24\ \mu C$

4. Utilizar el resultado de Q para calcular el potencial a través del condensador de 2 μF: $V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{24\ \mu C}{2\ \mu F} = 12\ V$

5. Utilizar de nuevo el resultado de Q para calcular el potencial a través del condensador de 4 μF: $V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{24\ \mu C}{4\ \mu F} = 6\ V$

Comprobación del resultado Obsérvese que la suma de estas diferencias de potencial es lógicamente 18 V.

EJEMPLO 25.6
¡Inténtelo!

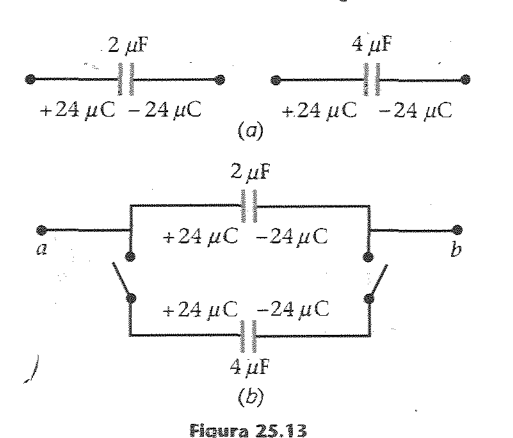


Figura 25.13

Los dos condensadores del ejemplo 25.5 se separan de la batería y se desconectan cuidadosamente uno de otro, de modo que la carga sobre las placas no se altere, como indica la figura 25.13*a*. Se conectan de nuevo, pero ahora uniendo entre sí las placas positivas por un lado y las negativas por otro, como muestra la figura 25.13*b*. Determinar la diferencia de potencial entre los condensadores y la carga sobre cada uno de ellos cuando los interruptores están cerrados.

Esquema del problema Cuando los dos condensadores se desconectan de la batería, transportan cargas iguales de 24 μC. Una vez se cierran los interruptores S_1 y S_2 en el nuevo circuito, los condensadores están en paralelo entre los puntos a y b. La diferencia de potencial a través de ambos condensadores es la misma y la capacidad equivalente del sistema es $C_{eq} = C_1 + C_2$. Las dos placas positivas forman un solo conductor de carga $Q = 48\ \mu C$ y las placas negativas forman un conductor de carga $-Q = -48\ \mu C$. Por tanto, la diferencia de potencial es $V = Q/C_{eq}$ y las cargas de los dos condensadores son $Q_1 = C_1V$ y $Q_2 = C_2V$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Escribir V en función de C_{eq} y la carga total Q.	$V = \frac{Q}{C_{eq}}$
2. Evaluar la capacidad equivalente.	$C_{eq} = 6\ \mu F$
3. Calcular V a partir de C_{eq} y la carga $Q = 48\ \mu C$.	$V = 8\ V$
4. Utilizar V para determinar la carga sobre cada condensador.	$Q_1 = 16\ \mu C$, $Q_2 = 32\ \mu C$

Comprobación del resultado Obsérvese que $Q_1 + Q_2 = Q = 48\ \mu C$, como es lógico.

Ejercicio Determinar la energía almacenada en los condensadores antes y después de su conexión. (*Respuesta*: $U_i = q^2/2C_1 + q^2/2C_2$, en donde $q = 24\ \mu C$. Así, $U_i = 216\ \mu J$. $U_f = Q_1^2/2C_1 + Q_2^2/2C_2 = 192\ \mu J$. Obsérvese que "se han perdido" 24 μJ en forma de calor en los cables o por radiación térmica al exterior.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 25.7

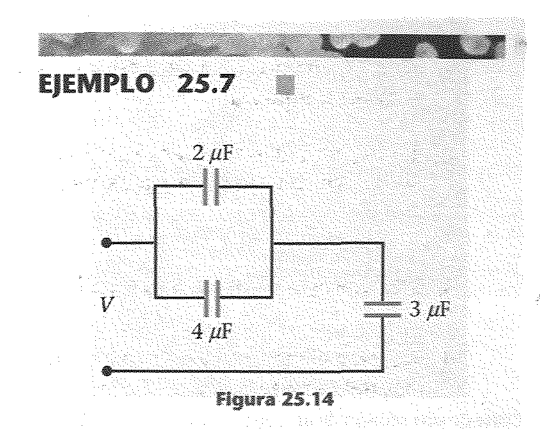
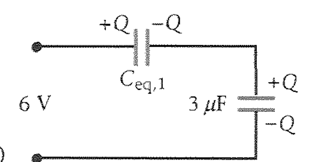


Figura 25.14

(a) Determinar la capacidad equivalente del circuito formado por los tres condensadores de la figura 25.14. (b) Determinar la carga sobre cada condensador y la caída de voltaje a su través cuando el sistema se conecta a una batería de 6 V.

Esquema del problema (a) Los condensadores de 2 y 4 μF están conectados en paralelo y ambos a su vez conectados en serie con el condensador de 3 μF. Determinaremos en primer lugar la capacidad equivalente de los condensadores de 2 y 4 μF (figura 25.15*a*) y después combinaremos este resultado con el condensador de 3 μF para obtener la capacidad equivalente final (25.15*b*). (b) La carga del condensador de 3 μF es la suministrada por la batería $Q = C_{eq}V$, como se indica en la figura 25.15*a*.



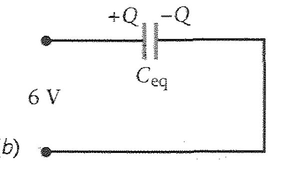


Figura 25.15 (*a*) (*b*)

(a) 1. La capacidad equivalente de los dos condensadores en paralelo es la suma de sus capacidades individuales:

$$C_{eq,1} = C_1 + C_2 = 2\ \mu F + 4\ \mu F = 6\ \mu F$$

2. Determinar la capacidad equivalente de un condensador de 6 μF con otro de 3 μF conectado en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} = \frac{1}{2\ \mu F}$$

$$C_{eq} = 2\ \mu F$$

(b) 1. Determinar la carga Q suministrada por la batería. Esta es también la carga depositada en el condensador de 3 μF:

$$Q = C_{eq}V = (2\ \mu F)(6\ V) = 12\ \mu C$$

2. La caída de potencial a través del condensador de 3 μF es Q/C:

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{12\ \mu C}{3\ \mu F} = 4\ V$$

3. La caída de potencial a través de la combinación en paralelo $V_{2,4}$ es $Q/C_{eq,1}$:

$$V_{2,4} = \frac{Q}{C_{eq,1}} = \frac{12\ \mu C}{6\ \mu F} = 2\ V$$

4. La carga sobre cada uno de los condensadores en paralelo se deduce de $Q_i = C_iV_{2,4}$ en donde $V_{2,4} = 2$ V:

$$Q_2 = C_2V_{2,4} = (2\ \mu F)(2\ V) = 4\ \mu C$$

$$Q_4 = C_4V_{2,4} = (4\ \mu F)(2\ V) = 8\ \mu C$$

Comprobación del resultado La caída de voltaje a través de la combinación en paralelo (2 V), más la correspondiente al condensador de 3 μF (4 V) es igual al voltaje de la batería. Además, la suma de las cargas de los condensadores en paralelo (4 μC + 8 μC) es igual a la carga total (12 μC) sobre el condensador de 3 μF.

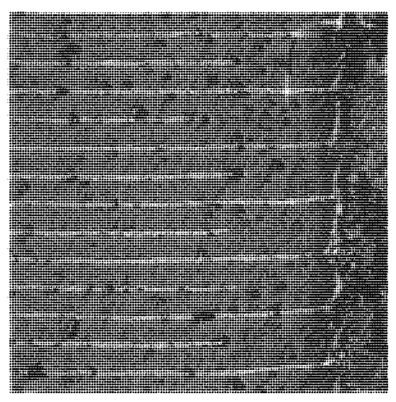
Ejercicio Determinar la energía almacenada en cada condensador. (*Respuesta*: $U_2 = 4\ \mu J$, $U_3 = 24\ \mu J$, $U_4 = 8\ \mu J$. Obsérvese que $U_2 + U_3 + U_4 = 36\ \mu J = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}C_{eq}V^2$.)

Dieléctricos ■ 25.5

Un material no conductor, como, por ejemplo, el vidrio, el papel o la madera, se denomina **dieléctrico**. Michael Faraday descubrió que cuando el espacio entre los dos conductores de un condensador se ve ocupado por un dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor κ que es característico del dieléctrico. La razón de este incremento es que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se debilita por causa del dieléctrico. Así, para una carga determinada sobre las placas, la diferencia de potencial se reduce y la relación Q/V se incrementa.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net


Corte de una sección de un condensador de múltiples capas con un dieléctrico cerámico. Las líneas blancas son los bordes de las placas conductoras.

Si el campo eléctrico original entre las placas de un condensador sin dieléctrico es E_0, el campo en el dieléctrico insertado entre las placas es

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \tag{25.22}$$

Campo eléctrico en el interior de un dieléctrico

donde κ es la **constante dieléctrica**. En un condensador de placas paralelas de separación d, la diferencia de potencial entre las placas es

$$V = Ed = \frac{E_0 d}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa}$$

siendo V la diferencia de potencial con dieléctrico y $V_0 = E_0 d$ la diferencia de potencial original sin dieléctrico. La nueva capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\kappa} = \kappa\frac{Q}{V_0}$$

es decir,

$$C = \kappa C_0 \tag{25.23}$$

Efecto de un dieléctrico sobre la capacidad

en donde $C_0 = Q/V_0$ es la capacidad original. La capacidad de un condensador de placas paralelas lleno de un dieléctrico de constante κ es, por tanto,

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d} \tag{25.24}$$

en donde

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 \tag{25.25}$$

es la **permitividad** del dieléctrico.

En la exposición anterior hemos supuesto que la carga sobre las placas del condensador no cambiaba cuando se introducía el dieléctrico. Esto es cierto si el condensador se carga y después se separa de la fuente (la batería) antes de insertar el dieléctrico. Si el dieléctrico se inserta durante el proceso de carga, la batería suministra más carga para mantener la diferencia de potencial original. La carga total sobre las placas es $Q = \kappa Q_0$. En cualquier caso, la capacidad (Q/V) se incrementa en el factor κ.

Ejercicio El condensador de 88,5 pF del ejemplo 25.2 se llena con un dieléctrico de constante $\kappa = 2$. (a) Determinar la nueva capacidad. (b) Determinar la carga sobre el condensador con el dieléctrico, si aquél se conecta a una batería de 12 V. (*Respuestas*: (a) 177 pF, (b) 2,12 nC.)

Ejercicio El condensador del ejercicio anterior se carga a 12 V sin el dieléctrico y a continuación se desconecta de la batería. Entonces se inserta el dieléctrico de constante $\kappa = 2$. Determinar los nuevos valores de (a) la carga Q, (b) del voltaje V y (c) la capacidad C. (*Respuestas*: (a) $Q = 1{,}06$ nC, que es invariable; (b) $V = 6$ V; (c) $C = 177$ pF.)

Los dieléctricos no sólo incrementan la capacidad de un condensador, sino que además proporcionan un medio para separar las placas conductoras paralelas y además elevar la diferencia de potencial a la cual tiene lugar la ruptura dieléctrica.[1] Consideremos un condensador de placas paralelas formado por dos hojas de metal separadas por una lámina delgada de plástico. El plástico permite que las hojas metálicas se encuentren

[1] Recuérdese (capítulo 24) que para campos eléctricos del orden de 3×10^6 V/m, el aire se ioniza y se convierte en conductor.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 25.1 **Constantes dieléctricas y resistencias a la ruptura del dieléctrico de diversos materiales.**

Material	Constante dieléctrica κ	Resistencia del dieléctrico, kV/mm
Aceite de transformador	2,24	12
Aire	1,00059	3
Baquelita	4,9	24
Mica	5,4	10–100
Neopreno	6,9	12
Papel	3,7	16
Parafina	2,1–2,5	10
Plexigás	3,4	40
Poliestireno	2,55	24
Porcelana	7	5,7
Vidrio (Pyrex)	5,6	14

muy próximas sin llegar a ponerse en contacto eléctrico y como la resistencia del plástico a la ruptura es mayor que la del aire, se pueden alcanzar mayores diferencias de potencial. La tabla 25.1 relaciona la constante dieléctrica y la resistencia a la ruptura del dieléctrico de algunas sustancias aislantes. Obsérvese que para el aire, $\kappa \approx 1$, de modo que para la mayor parte de los casos no necesitamos distinguir entre el aire y el vacío.



EJEMPLO 25.8

Un condensador plano tiene unas placas cuadradas de lado 10 cm y una separación de 4 mm. Un bloque dieléctrico de constante $\kappa = 2$ tiene la misma área que las placas. ¿Cuál es la capacidad (a) sin dieléctrico? (b) ¿Cuál es la capacidad si el bloque dieléctrico llena el espacio entre las placas? (c) ¿Cuál es la capacidad si un bloque dieléctrico de espesor 3 mm se inserta en el espaciado de 4 mm?

Esquema del problema La capacidad del condensador sin dieléctrico, C_0, se determina a partir del área y espaciado de las placas (figuras 25.16*a*). Cuando el condensador se llena con un dieléctrico κ (figura 25.16*b*) la capacidad es $C = \kappa C_0$ (ecuación 25.25). Si el dieléctrico sólo llena parcialmente el condensador (figura 25.16*c*), calcularemos la diferencia de potencial V para una determinada carga Q y después aplicaremos la definición de capacidad, $C = Q/V$.

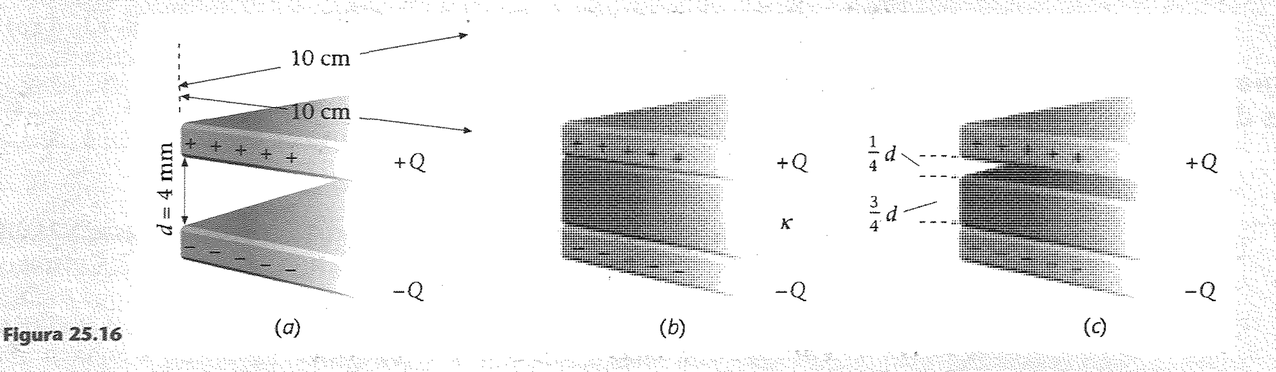


Figura 25.16

(a) Si no hay dieléctrico, la capacidad C_0 viene dada por la ecuación 25.10:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8{,}85 \text{ pF/m})(0{,}1 \text{ m})^2}{0{,}004 \text{ m}} = 22{,}1 \text{ pF}$$

(b) Cuando el condensador se llena con un dieléctrico κ, su capacidad C se incrementa en el factor κ:

$$C = \kappa C_0 = (2)(22{,}1 \text{ pF}) = 44{,}2 \text{ pF}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(c) 1. La nueva capacidad está relacionada con la carga original Q y la nueva diferencia de potencial V:

$$C = \frac{Q}{V}$$

2. La diferencia de potencial entre las placas es la suma de la diferencia de potencial del hueco más la diferencia de potencial del bloque dieléctrico:

$$V = V_{\text{hueco}} + V_{\text{bloque}} = E_{\text{hueco}}\,(\tfrac{1}{4}d) + E_{\text{bloque}}\,(\tfrac{3}{4}d)$$

3. El campo en el hueco fuera del conductor es el campo original E_0:

$$E_{\text{hueco}} = E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

4. El campo en el bloque dieléctrico viene reducido por el factor κ:

$$E_{\text{bloque}} = \frac{E_0}{\kappa}$$

5. Combinando los dos resultados anteriores se obtiene V en función de κ. Obsérvese que la diferencia de potencial original es $V_0 = E_0 d$

$$V = E_0(\tfrac{1}{4}d) + \frac{E_0}{\kappa}(\tfrac{3}{4}d) = E_0 d\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\kappa}\right) = V_0\left(\frac{\kappa+3}{4\kappa}\right)$$

6. Usar $C = Q/V$ para determinar la nueva capacidad en función de la capacidad original, $C_0 = Q/V_0$:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0(\kappa+3)/4\kappa} = \frac{Q}{V_0}\left(\frac{4\kappa}{\kappa+3}\right)$$

$$= C_0\left(\frac{4\kappa}{\kappa+3}\right) = (22{,}1\text{ pF})(\tfrac{8}{5}) = 35{,}4\text{ pF}$$

Comprobación del resultado La ausencia de un dieléctrico corresponde a $\kappa = 1$. En este caso, nuestro resultado de la etapa final en (c) se reduciría a $C = C_0$, como es lógico. Supongamos que el bloque dieléctrico fuera un bloque conductor. En un conductor $E = 0$, de modo que según la ecuación 25.22, κ sería igual a infinito. Para valores muy grandes de κ, la magnitud $4\kappa/(\kappa + 3)$ es aproximadamente igual a 4, de modo que el resultado de la etapa final de (c) se aproximaría a $4C_0$. Un bloque conductor extiende simplemente la placa del condensador y por tanto, la separación de las placas con el dieléctrico conductor en posición sería $\frac{1}{4}d$. Esto significa que C sería $4C_0$, como en el caso de valores muy grandes de κ.

Observaciones Los resultados de este ejemplo son independientes de la posición vertical del dieléctrico o bloque conductor entre las placas.

www.elsolucionario.net

Energía almacenada en presencia de un dieléctrico

La energía almacenada en un condensador de placas paralelas es

$$U = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}CV^2$$

Si expresamos la capacidad C en función del área y la separación de las placas, y la diferencia de voltaje V en función del campo eléctrico y la separación de las placas, se obtiene

$$U = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\epsilon A}{d}\right)(Ed)^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2(Ad)$$

La magnitud Ad es el volumen entre las placas que contiene el campo eléctrico. La energía por unidad de volumen es, por tanto,

$$u_e = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2 \qquad (25.26)$$

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 25.9

Dos condensadores de placas paralelas, cada uno con una capacidad de $C_1 = C_2 = 2\ \mu F$, están conectados en paralelo a través de una batería de 12 V. Determinar (a) la carga sobre cada condensador y (b) la energía total almacenada en los condensadores.

A continuación, los condensadores se desconectan de la batería y entre las placas del condensador C_2 se inserta un dieléctrico de constante $\kappa = 2{,}5$. En estas condiciones, determinar (c) la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador, (d) la carga depositada sobre cada uno de ellos y (e) la energía total almacenada por ambos.

Esquema del problema (a y b) La carga Q y la energía total U pueden determinarse para cada condensador a partir de su capacidad C y voltaje V. (c) Después de desconectar los condensadores de la batería, la carga total sobre ellos no se modifica. Cuando se inserta el dieléctrico en uno de los condensadores, su capacidad C_2 cambia. El potencial a través de la combinación en paralelo, puede determinarse a partir de la carga total y de la capacidad equivalente.

(a) La carga de cada condensador se determina a partir de su capacidad C y voltaje V:

$$Q = CV = (2\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = 24\ \mu\text{C}$$

(b) 1. La energía almacenada en cada condensador se determina a partir de su capacidad C y voltaje V:

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(2\ \mu\text{F})(12\ \text{V})^2 = 144\ \mu\text{J}$$

2. La energía total es doble a la almacenada en cada condensador:

$$U_{total} = 2U = 288\ \mu\text{J}$$

(c) 1. El potencial a través de la combinación en paralelo está relacionado con Q_{total} y la capacidad equivalente, C_{eq}:

$$V = \frac{Q_{total}}{C_{eq}}$$

2. La capacidad C_2 del condensador con el dieléctrico se incrementa en el factor κ. La capacidad equivalente es la suma de las capacidades:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = C_1 + \kappa C_1 = (2\ \mu\text{F}) + (2{,}5)(2\ \mu\text{F})$$
$$= 2\ \mu\text{F} + 5\ \mu\text{F} = 7\ \mu\text{F}$$

3. La carga total sigue siendo 48 μC. Sustituir este valor en Q_{total} y C_{eq} para calcular V:

$$V = \frac{Q_{total}}{C_{eq}} = \frac{48\ \mu\text{C}}{7\ \mu\text{F}} = 6{,}86\ \text{V}$$

(d) La carga de cada condensador se deduce de nuevo a partir de su capacidad y voltaje V:

$$Q_1 = C_1V = (2\ \mu\text{F})(6{,}86\ \text{V}) = 13{,}7\ \mu\text{C}$$
$$Q_2 = C_2V = (5\ \mu\text{F})(6{,}86\ \text{V}) = 34{,}3\ \mu\text{C}$$

(e) 1. La energía almacenada en cada condensador se determina de su nueva capacidad C y nuevo voltaje V:

$$U_1 = \tfrac{1}{2}C_1V^2 = \tfrac{1}{2}(2\ \mu\text{F})(6{,}86\ \text{V})^2 = 47{,}1\ \mu\text{J}$$
$$U_2 = \tfrac{1}{2}C_2V^2 = \tfrac{1}{2}(5\ \mu\text{F})(6{,}86\ \text{V})^2 = 118\ \mu\text{J}$$

2. Sumar estas energías para obtener la energía total almacenada:

$$U = U_1 + U_2 = 47{,}1\ \mu\text{J} + 118\ \mu\text{J} = 165\ \mu\text{J}$$

Comprobación del resultado Cuando se introduce el dieléctrico en uno de los condensadores, el campo se debilita y la diferencia de potencial disminuye. Como los dos condensadores se conectan en paralelo, del otro condensador fluye la carga necesaria para que la diferencia de potencial sea la misma entre ambos condensadores. Obsérvese que el condensador con el dieléctrico posee una carga mayor, pero cuando las cargas calculadas para cada condensador en (d) se suman, $Q_1 + Q_2 = 13{,}7\ \mu\text{C} + 34{,}3\ \mu\text{C} = 48\ \mu\text{C}$, que coincida con la suma original.

Observaciones La energía total de 165 μJ es menor que la energía original de 288 μJ. Al insertar el dieléctrico se realiza un trabajo sobre su soporte. Si el dieléctrico se extrae, se realizará el trabajo $W = 288\ \mu\text{J} - 165\ \mu\text{J} = 123\ \mu\text{J}$ y este trabajo se almacena en forma de energía potencial electrostática.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



EJEMPLO 25.10
¡Inténtelo!

Determinar (a) la carga sobre cada condensador y (b) la energía total almacenada en los condensadores del ejemplo 25.9, si el dieléctrico se inserta en uno de los condensadores mientras la batería está todavía conectada.

Esquema del problema Como la batería está todavía conectada, la diferencia de potencial entre los condensadores sigue siendo 12 V. Esta condición determina la carga y la energía almacenada en cada condensador. El subíndice 1 se refiere al condensador sin dieléctrico y el subíndice 2 al condensador con dieléctrico.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

	Etapas	*Respuestas*
(a)	Calcular la carga sobre cada condensador a partir de $Q = CV$ utilizando el resultado $C_1 = 2\ \mu F$ y $C_2 = 5\ \mu F$ deducido en el ejemplo 25.9.	$Q_1 = C_1V = 24\ \mu V$ $Q_2 = C_2V = 60\ \mu V$
(b) 1.	Calcular la energía almacenada en cada condensador a partir de $U = \frac{1}{2}CV^2$. Comprobar los resultados mediante $Q = \frac{1}{2}QV$.	$U_1 = 144\ \mu J \qquad U_2 = 360\ \mu J$
2.	Sumar los resultados de U_1 y U_2 para obtener la energía final.	$U_{total} = 504\ \mu J$

Observaciones Nótese que Q_2 es 2,5 veces mayor que su valor antes de insertar el dieléctrico (ya que $\kappa = 2{,}5$). La batería suministra esta carga adicional a fin de mantener una diferencia de potencial fija. Debido al trabajo realizado por la batería para suministrar esta carga, la energía total del sistema es mayor con el dieléctrico insertado (504 μJ) que sin dieléctrico (288 μJ).

25.6 ■ Estructura molecular de un dieléctrico

El centro de la carga negativa coincide con el centro de la carga positiva

E

p

(a) (b)

Figura 25.17 Diagramas esquemáticos de las distribuciones de carga de un átomo o molécula no polar. (*a*) En ausencia de un campo eléctrico externo, el centro de la carga positiva coincide con el centro de la carga negativa. (*b*) En presencia de un campo eléctrico externo, los centros de la carga positiva y negativa se desplazan produciendo un momento dipolar inducido en la dirección del campo externo.

Un dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas de un condensador porque sus moléculas producen un campo eléctrico adicional de sentido opuesto al del campo externo producido por las placas. Este campo eléctrico se debe a los momentos dipolares eléctricos de las moléculas del dieléctrico.

Aunque los átomos y moléculas son eléctricamente neutros, son afectados por los campos eléctricos debido a que contienen cargas positivas y negativas que pueden responder a campos externos. Un átomo puede considerarse como un núcleo muy pequeño, cargado positivamente, rodeado por una nube electrónica, cargada negativamente. En algunos átomos y moléculas la nube electrónica es esféricamente simétrica, de modo que su "centro de cargas" está en el centro del átomo o molécula, coincidiendo con la carga positiva. Un átomo o molécula de este tipo posee un momento dipolar cero y se llama no polar. Sin embargo, en presencia de un campo eléctrico externo la carga positiva y la carga negativa experimentan fuerzas en direcciones opuestas. Las cargas positivas y negativas se separan hasta que la fuerza atractiva que ellas ejercen entre sí equilibran las fuerzas debidas al campo eléctrico externo (figura 25.17). Se dice entonces que la molécula está polarizada y que se comporta como un dipolo eléctrico.

En algunas moléculas (por ejemplo, HCl y H_2O), los centros de la carga positiva y negativa no coinciden incluso en ausencia de un campo eléctrico externo. Como vimos en el capítulo 22, estas moléculas polares tienen un momento dipolar eléctrico permanente.

Cuando un dieléctrico se sitúa en el campo de un condensador, sus moléculas se polarizan de modo que se produce un momento dipolar neto paralelo al campo. Si las moléculas son polares, sus momentos dipolares, orientados originalmente al azar tienden a

www.elsolucionario.net

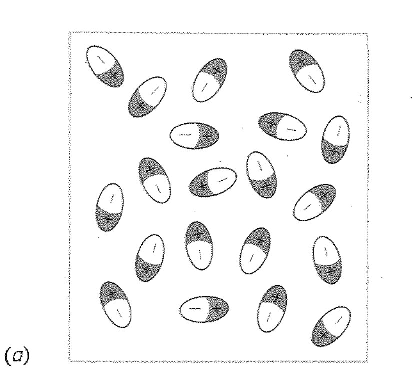
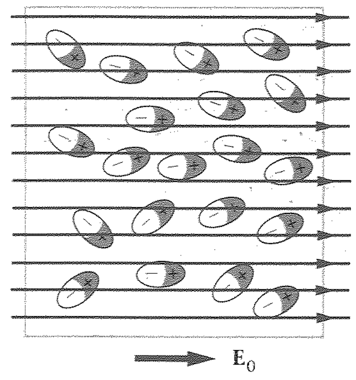



Figura 25.18 (*a*) Dipolos eléctricos orientados al azar en ausencia de un campo eléctrico externo. (*b*) En presencia de un campo externo los dipolos se alinean paralelamente al campo de modo parcial.

alinearse debido al par de fuerzas ejercido por el campo.[1] Si las moléculas no son polares, el campo induce momentos dipolares que son paralelos al campo. En cualquier caso, las moléculas del dieléctrico se polarizan en la dirección del campo externo (figura 25.18).

El efecto neto de la polarización de un dieléctrico homogéneo en un condensador es la creación de una carga superficial sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas, como se indica en la figura 25.19. Esta carga superficial, ligada al dieléctrico, se denomina **carga ligada** porque está unida a las moléculas del dieléctrico y no puede desplazarse como la carga libre que existe sobre las placas conductoras del condensador. La carga ligada produce un campo eléctrico opuesto a la dirección del engendrado por la carga libre de los conductores. Así, el campo eléctrico neto entre las placas se debilita como indica la figura 25.20.

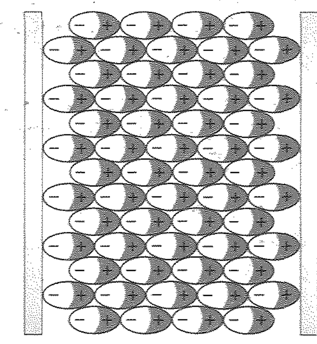


Figura 25.19 Cuando se sitúa un dieléctrico sobre las placas de un condensador, el campo eléctrico polariza sus moléculas. El resultado es una carga ligada a la superficie del dieléctrico que produce su propio campo, el cual se opone al campo externo. El campo eléctrico entre las placas es así debilitado por el dieléctrico.

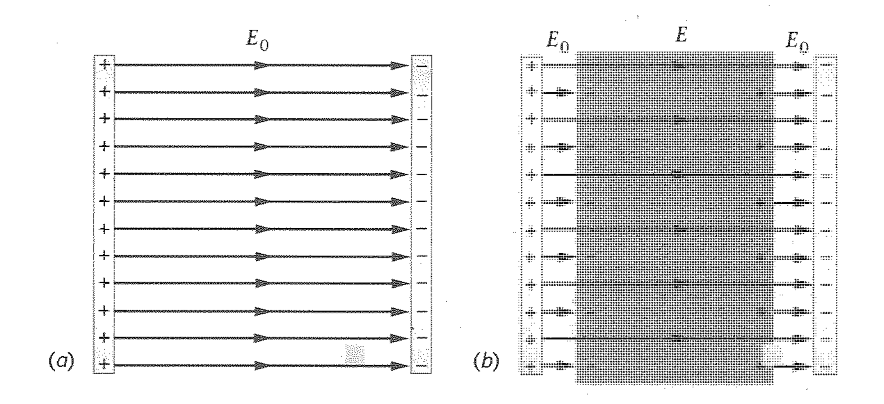


Figura 25.20 Campo eléctrico entre las placas de un condensador (*a*) sin dieléctrico y (*b*) con un dieléctrico. La carga eléctrica sobre el dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas.

EJEMPLO 25.11

Un átomo de hidrógeno está formado por un núcleo de un protón de carga $+e$ y un electrón de carga $-e$. La distribución de carga del átomo es esféricamente simétrica de modo que el átomo es no polar. Consideremos un modelo en el cual el átomo de hidrógeno consiste en una carga puntual positiva $+e$ en el centro de una nube esférica cargada uniformemente de radio R y carga total $-e$. Demostrar que cuando un átomo se sitúa en un campo eléctrico externo uniforme E, el momento dipolar inducido es proporcional a E, es decir, $p = \alpha E$, en donde α se llama polarizabilidad.

[1] El grado de alineamiento depende del campo externo y de la temperatura. Aproximadamente es proporcional a pE/kT, en donde pE es la energía máxima de un dipolo en un campo E y kT es la energía térmica característica.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

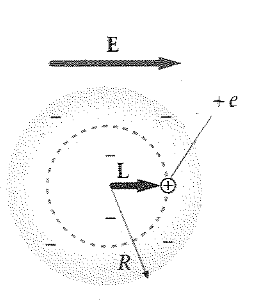


Figura 25.21

Esquema del problema En el campo externo, la carga positiva se desplaza del centro de la nube en una cantidad L tal que la fuerza ejercida por el campo $e\mathbf{E}$ está equilibrado por la fuerza ejercida por la nube negativa $e\mathbf{E}'$, en donde $\mathbf{E}'$ es el campo debido a la nube (figura 25.21). Utilizaremos la ley de Gauss para determinar E' y después calcularemos el momento dipolar inducido $\mathbf{p} = e\mathbf{L}$.

1. Expresar la magnitud del momento dipolar inducido en función de e y L:

$$p = eL$$

2. Podemos determinar L calculando el campo E' debido a la nube cargada negativamente a una distancia L desde el centro. Usamos la ley de Gauss para calcular E'. Escogemos una superficie gaussiana esférica de radio L concéntrica con la nube. Entonces E' es constante sobre esta superficie:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint E_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

$$E'(4\pi L^2) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^2} Q_{\text{interior}}$$

3. La carga dentro de la esfera de radio L es igual a la densidad de carga multiplicada por el volumen:

$$Q_{\text{interior}} = \rho \, \frac{4}{3} \pi L^3 = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \, \frac{4}{3} \pi L^3 = -e\frac{L^3}{R^3}$$

4. Reemplazar Q_{interior} por el valor deducido en la etapa anterior para calcular E':

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^2} Q_{\text{interior}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left(-e\frac{L^3}{R^3}\right) = -e\,\frac{L}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

5. Despejar L:

$$L = \frac{-4\pi\epsilon_0 R^3 E'}{e}$$

6. E' es negativo porque está dirigido hacia dentro sobre la superficie gaussiana. Sobre la carga positiva, E' apunta a la izquierda, de modo que $E' = -E$:

$$E' = -E$$

7. Aplicando estos resultados en L y E' expresamos p en función del campo externo E:

$$p = eL = -4\pi\epsilon_0 R^3 E' = 4\pi\epsilon_0 R^3 E$$

Observaciones La distribución de la carga negativa en un átomo de hidrógeno, obtenida de la teoría cuántica, es esféricamente simétrica, pero la densidad de carga disminuye exponencialmente con la distancia, en lugar de ser uniforme. No obstante, el cálculo anterior demuestra que el momento dipolar es realmente proporcional al campo externo, $p = \alpha E$ y la polarizabilidad es del orden de $4\pi\epsilon_0 R^3$, en donde R es el radio del átomo o molécula. La constante dieléctrica κ puede estar relacionada con la polarizabilidad y con el número de moléculas por unidad de volumen.

Magnitud de la carga ligada

La densidad de la carga ligada σ_b sobre las superficies del dieléctrico está relacionada con la constante dieléctrica κ y la densidad de carga libre σ_f sobre las placas. Consideremos un bloque dieléctrico entre las placas de un condensador de placas paralelas como indica la figura 25.22. Si las placas del condensador están muy próximas, de modo que el bloque es muy delgado, el campo eléctrico interior al dieléctrico debido a las densidades de cargas ligadas $+\sigma_b$ a la derecha y $-\sigma_b$ a la izquierda es igual al campo debido a dos densidades de cargas planas infinitas. El campo E_b tiene así el valor

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Este campo está dirigido hacia la izquierda y se resta del campo eléctrico E_0 debido a la densidad de carga libre situada en las placas del condensador. El campo original E_0 tiene el valor

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

El valor del campo resultante E es así la diferencia de estos valores. Es también igual a E_0/κ:

$$E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{\kappa}$$

o sea,

$$E_b = E_0\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{\kappa - 1}{\kappa}E_0$$

Escribiendo σ_b/ϵ_0 en lugar de E_b y σ_f/ϵ_0 en lugar de E_0, tenemos

$$\sigma_b = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\,\sigma_f = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\sigma_f \qquad \textbf{(25.27)}$$

La densidad de carga ligada σ_b es así siempre menor que la densidad de carga libre σ_f situada en las láminas del condensador y es cero si $\kappa = 1$, que es el caso de carencia de dieléctrico. Para un bloque conductor $\kappa = \infty$ y $\sigma_b = \sigma_f$.

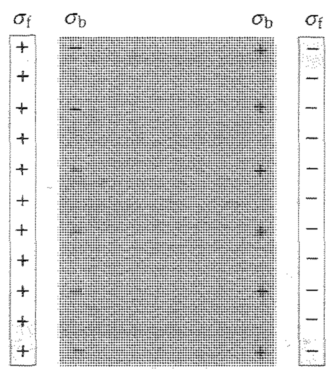
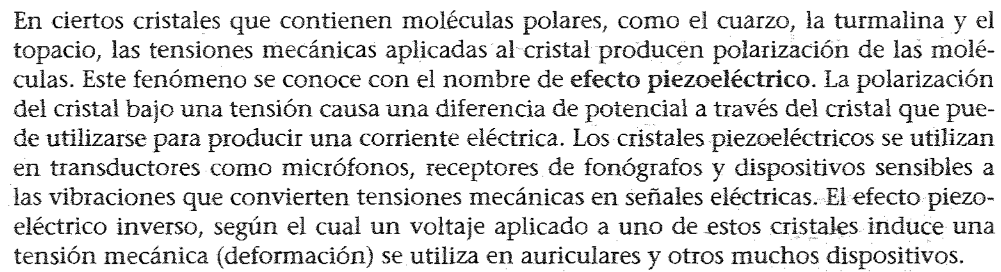


Figura 25.22 Condensador de placas paralelas con un bloque dieléctrico entre las placas. Si éstas se encuentran próximas, cada una de las cargas superficiales puede considerarse como un plano infinito de carga. El campo eléctrico debido a la carga libre sobre las placas está dirigido hacia la derecha y su magnitud es $E_0 = \sigma_f/\epsilon_0$. El campo debido a la carga ligada está dirigido hacia la izquierda y su magnitud es $E_b = \sigma_b/\epsilon_0$.

Efecto piezoeléctrico

OPCIONAL



En ciertos cristales que contienen moléculas polares, como el cuarzo, la turmalina y el topacio, las tensiones mecánicas aplicadas al cristal producen polarización de las moléculas. Este fenómeno se conoce con el nombre de **efecto piezoeléctrico**. La polarización del cristal bajo una tensión causa una diferencia de potencial a través del cristal que puede utilizarse para producir una corriente eléctrica. Los cristales piezoeléctricos se utilizan en transductores como micrófonos, receptores de fonógrafos y dispositivos sensibles a las vibraciones que convierten tensiones mecánicas en señales eléctricas. El efecto piezoeléctrico inverso, según el cual un voltaje aplicado a uno de estos cristales induce una tensión mecánica (deformación) se utiliza en auriculares y otros muchos dispositivos.

Debido a que la frecuencia natural de vibración del cuarzo se encuentra en el intervalo de las radiofrecuencias, y su curva de resonancia es muy aguda,[1] se utiliza ampliamente para estabilizar osciladores de radiofrecuencias y construir relojes de gran precisión.

www.elsolucionario.net

Resumen

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
La energía potencial electrostática de un sistema de cargas es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una separación infinita a sus posiciones finales.		**1. Energía potencial electrostática**
$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$	**(25.2)**	De cargas puntuales
$U = \frac{1}{2}QV$	**(25.3)**	De un conductor con carga Q en el potencial V
$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i$	**(25.4)**	De un sistema de conductores

[1] La resonancia en los circuitos de corriente alterna (c.a.), que será analizada en el capítulo 31, es análoga a la resonancia mecánica, que fue tratada en el capítulo 14.

 www.elsolucionario.net

Energía almacenada en un condensador $$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \quad (25.12)$$

Densidad de energía en un campo eléctrico $$u_e = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2 \quad (25.26)$$

2. Condensador Un condensador es un dispositivo que almacena carga y energía. Consta de dos conductores próximos y aislados entre sí que transportan cargas iguales y opuestas.

3. Capacidad $$C = \frac{Q}{V} \quad (25.5)$$

Conductor aislado — Q es su carga total, V su potencial.

Condensador — Q es la magnitud de la carga sobre cada conductor, V es la diferencia de potencial.

Conductor esférico aislado $$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (25.6)$$

Condensador de placas paralelas $$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (25.10)$$

Condensador cilíndrico $$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)} \quad (25.11)$$

4. Capacidad equivalente

Condensadores en paralelo — Cuando dos o más condensadores se conectan en paralelo, el voltaje es el mismo a través de cada uno de ellos y sus capacidades se suman

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \quad (25.17)$$

Condensadores en serie — Cuando los condensadores están en serie, la carga almacenada es la misma en cada uno de ellos y las caídas de voltaje se suman:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \quad (25.21)$$

5. Dieléctrico

Comportamiento macroscópico — Un dieléctrico es un material no conductor. Cuando un dieléctrico se inserta entre las placas de un condensador, el campo eléctrico dentro del mismo se debilita y la capacidad se incrementa en el factor κ, la constante dieléctrica.

Imagen microscópica — El campo en el dieléctrico de un condensador se debilita porque los momentos dipolares de las moléculas (preexistentes o inducidos) tienden a alinearse a lo largo del campo y producen un campo eléctrico que se opone al campo externo. El momento dipolar alineado del dieléctrico es proporcional al campo externo.

Campo eléctrico $$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad (25.22)$$

Capacidad $$C = \kappa C_0 \quad (25.23)$$

Permitividad $$\epsilon = \kappa\epsilon_0 \quad (25.25)$$

Usos de un dieléctrico

1. Aumenta la capacidad
2. Aumenta la ruptura dieléctrica
3. Separa físicamente los conductores

6. Efecto piezoeléctrico (opcional) En ciertos cristales polares, una tensión mecánica polariza las moléculas induciendo un voltaje a través del cristal. Inversamente, la aplicación de un voltaje induce una tensión mecánica (deformación) en el cristal.

Guía de resolución de problemas

1. Dibujar un diagrama claro que incluya las características importantes del problema. Comprobar que son correctas las conexiones en serie o en paralelo entre condensadores. Cuando sea conveniente, indicar la carga sobre las placas de un condensador, así como los dieléctricos entre las mismas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

2. Para determinar la capacidad de un condensador, situar una carga $+Q$ sobre un conductor y $-Q$ sobre el otro. Después calcular el campo eléctrico entre los conductores y con él determinar la diferencia de potencial entre los conductores. La capacidad es $C = Q/V$.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES	
1. Energía		
Determinar la energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales.	Usar $U = \frac{1}{2}\sum q_i V_i$.	**Ejemplo 25.1**
2. Condensadores simples		
Determinar la capacidad de un condensador de placas paralelas.	Usar $C = \epsilon_0 A/d$.	**Ejemplo 25.2**
Determinar la capacidad de cualquier condensador.	Situar las cargas $+Q$ y $-Q$ sobre los dos conductores y determinar el campo eléctrico E entre ellos. Calcular la diferencia de potencial integrando $dV = -\mathbf{E}\, d\boldsymbol{\ell}$ de un conductor al otro.	**Ejemplo 25.3**
Determinar la carga sobre un condensador.	La carga viene dada por $Q = CV$.	**Ejemplo 25.2**
Determinar la energía almacenada en un condensador.	Usar $U = \frac{1}{2}Q^2/C = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$.	**Ejemplos 25.4, 25.8, 25.6**
3. Combinaciones de condensadores		
Calcular la capacidad equivalente.	Combinar las unidades en serie o en paralelo más pequeñas de la red, usando $C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots$ (paralelo) y $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + \ldots$ (serie). Reajustar las unidades en serie y en paralelo hasta que el circuito se reduce a un solo condensador.	**Ejemplos 25.5, 25.6, 25.7**
4. Condensadores con dieléctricos		
Determinar la capacidad de un condensador provisto de un dieléctrico.	La capacidad es $C = \kappa C_0$, en donde C_0 es la capacidad sin dieléctrico.	**Ejemplos 25.8, 25.9**
Calcular la capacidad de un condensador parcialmente lleno de un dieléctrico o con más de un tipo de dieléctrico.	Determinar la diferencia de potencial V para una carga determinada Q y después usar $C = Q/V$.	**Ejemplo 25.8**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Energía potencial electrostática

• 1 Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x: q_1 en el origen, q_2 en $x = 3$ m y q_3 en $x = 6$ m. Determinar la energía potencial electrostática de esta distribución de carga si
(a) $q_1 = q_2 = q_3 = 2\ \mu$C, **(b)** $q_1 = q_2 = 2\ \mu$C y $q_3 = -2\ \mu$C y **(c)** $q_1 = q_3 = 2\ \mu$C y $q_2 = -2\ \mu$C.

• 2 En los vértices de un triángulo equilátero de lado 2,5 m se encuentran las cargas q_1, q_2 y q_3. Determinar la energía potencial electrostática de esta distribución de carga si
(a) $q_1 = q_2 = q_3 = 4{,}2\ \mu$C, **(b)** $q_1 = q_2 = 4{,}2\ \mu$C y $q_3 = -4{,}2\ \mu$C, **(c)** $q_1 = q_2 = -4{,}2\ \mu$C y $q_3 = +4{,}2\ \mu$C.

• 3 ¿Cuál es la energía potencial electrostática de un conductor esférico aislado de radio 10 cm cargado a 2 kV?

•• 4 Cuatro cargas puntuales de magnitud 2 μC se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado 4 m. Determinar la energía potencial electrostática si
(a) todas las cargas son negativas,
(b) tres de las cargas son positivas y una es negativa y
(c) dos son positivas y dos negativas.

•• 5 En los vértices de un cuadrado centrado en el origen hay distribuidas cuatro cargas del modo siguiente: q en $(-a, +a)$; $2q$ en (a, a); $-3q$ en $(a, -a)$; y $6\,q$ en $(-a, -a)$. Una quinta carga $+q$ se sitúa en el origen y se deja libre desde el reposo. Determinar su velocidad cuando se encuentra a gran distancia del origen.

•• 6 Cuatro partículas idénticas, cada una de carga Q, se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado L. Las partículas se liberan de una en una ordenadamente en sentido horario alrededor del cuadrado. Cada partícula se libera cuando la anterior ha alcanzado su velocidad final a gran distancia del cuadrado. ¿Cuál es la energía cinética final de

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) la primera partícula liberada, (b) la segunda partícula liberada, (c) la tercera y (d) la cuarta?
(e) ¿Cuál sería la energía cinética final de cada partícula si las cuatro se liberasen simultáneamente? ¿Depende ello de que las partículas tengan o no masas idénticas?

Capacidad

• **7** Si se duplica el voltaje establecido entre las placas paralelas de un condensador plano, su capacidad
(a) se duplica. (b) se reduce a la mitad. (c) permanece invariable.

• **8** Si la carga de un conductor esférico aislado se duplica, su capacidad
(a) se duplica. (b) se reduce a la mitad. (c) permanece invariable.

• **9** Un conductor esférico aislado de radio 10 cm se carga a 2kV.
(a) ¿Cuánta carga se deposita sobre el conductor?
(b) ¿Cuál es la capacidad de la esfera?
(c) ¿Cómo se modificaría la capacidad de la esfera si se cargase a 6 kV?

• **10** Un condensador tiene una carga de 30 μC. La diferencia de potencial entre los conductores es de 400 V. ¿Cuál es su capacidad?

• **11**
(a) Si un condensador de placas paralelas posee una separación de 0,15 mm, ¿cuál debe ser su superficie para que la capacidad sea de 1 F?
(b) Si las placas fueran cuadradas, ¿cuál sería la longitud de sus lados?

Almacenamiento de energía eléctrica

• **12** Verdadero o falso: La energía electrostática por unidad de volumen en un punto es proporcional al cuadrado del campo eléctrico en ese punto.

• **13** Si la diferencia de potencial de un condensador de placas paralelas se duplica variando la separación de las placas sin modificar la carga, ¿en qué factor cambia la energía eléctrica almacenada?

•• **14** Sin modificar su capacidad se reduce a la mitad la carga de un condensador. ¿Qué fracción de su energía almacenada se extrae del condensador junto con su carga?

•• **15** Un condensador de aire de placas paralelas se conecta a una batería de voltaje constante. Si la separación entre las placas del condensador se duplica mientras el condensador permanece conectado a la batería, la energía almacenada en el condensador
(a) se cuadriplica. (b) se duplica. (c) permanece invariable.
(d) se reduce a la mitad de su valor anterior.
(e) se reduce a la cuarta parte de su valor anterior.

•• **16** Si el condensador del problema 15 se desconecta de la batería antes de que se duplique la separación entre las placas, la energía almacenada en el condensador después de la separación
(a) se cuadriplica. (b) se duplica. (c) permanece invariable.
(d) se reduce a la mitad de su valor anterior.
(e) se reduce a la cuarta parte de su valor anterior.

• **17**
(a) Un condensador de 3 μF se carga a 100 V. ¿Cuánta energía se almacena en el condensador?
(b) ¿Cuánta energía adicional se necesita para cargar el condensador desde 100 a 200 V?

• **18** Se carga un condensador de 10 μF hasta $Q = 4$ μC.
(a) ¿Cuánta energía almacena?
(b) Si se elimina la mitad de la carga, ¿cuánta energía resta?

• **19**
(a) Hallar la energía almacenada en un condensador de 20 pF cuando se carga hasta 5 μC.
(b) ¿Cuánta energía adicional se requiere para aumentar la carga desde 5 hasta 10 μC?

• **20** Determinar la energía por unidad de volumen que existe en un campo eléctrico igual a la resistencia dieléctrica del aire (3 MV/m).

• **21** Un condensador de placas paralelas tiene las placas de 2 m^2 de área y una separación de 1,0 mm. Se carga hasta 100 V.
(a) ¿Cuál es el campo eléctrico existente entre las placas?
(b) ¿Cuál es la energía por unidad de volumen en el espacio situado entre las placas?
(c) Hallar la energía total multiplicando la respuesta dada a la parte (b) por el volumen entre las placas.
(d) Hallar la capacidad C.
(e) Calcular la energía total a partir de $U = \frac{1}{2}CV^2$ comparando el resultado con el de la parte (c).

•• **22** Los exploradores de energía de un planeta distante están inspeccionando la Tierra para decidir si vale la pena apoderarse de sus recursos energéticos eléctricos. Sus medidas revelan que el campo eléctrico terrestre se extiende hasta 1000 m por encima de su superficie y tiene un valor medio de 200 V/m. Estimar la energía eléctrica almacenada en la atmósfera. (*Sugerencia*: La atmósfera puede tratarse como un bloque plano con un área igual al área superficial de la Tierra. ¿Por qué?)

•• **23** Un condensador de placas paralelas con placas de área 500 cm^2 se carga con una diferencia de potencial V y después se desconecta de la fuente de voltaje. Cuando las placas se separan 0,4 cm, el voltaje entre ellas se incrementa en 100 V.
(a) ¿Cuánto vale la carga Q depositada sobre la placa positiva del condensador?
(b) ¿En cuánto ha crecido la energía almacenada en el condensador por causa del movimiento de las placas?

••• **24** Una esfera de carga de radio R tiene una densidad de carga uniforme ρ y una carga total $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$.
(a) Hallar la densidad de energía electrostática a una distancia r del centro de la carga para $r < R$ y para $r > R$.
(b) Hallar la energía de una corteza esférica de volumen $4\pi r^2\,dr$ para $r < R$ y para $r > R$.
(c) Calcular la energía electrostática total integrando las expresiones obtenidas en la parte (b) y demostrar que el resultado puede escribirse en la forma $U = \frac{3}{5}kQ^2/R$. Explicar por qué este resultado es mayor que el correspondiente a un conductor esférico de radio R que posea una carga total Q.

Combinaciones de condensadores

• **25** Verdadero o falso:
(a) La capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades individuales.
(b) La capacidad equivalente de dos condensadores en serie es menor que la capacidad de cualquiera de ellos por separado.

•• **26** Dos condensadores inicialmente descargados de capacidad C_0 y $2C_0$, respectivamente, están conectados en serie a través de una batería. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?
(a) El condensador $2C_0$ posee una carga doble a la del otro condensador.
(b) El voltaje aplicado a cada condensador es el mismo.
(c) La energía almacenada por cada condensador es la misma.
(d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

www.elsolucionario.net

• **27**

(a) ¿Cuántos condensadores de 1,0 μF habrá que conectar en paralelo para almacenar 1 mC de carga con una diferencia de potencial de 10 V aplicada a cada uno de ellos?

(b) ¿Cuál será la diferencia de potencial existente entre los bornes de esta combinación?

(c) Si estos condensadores de 1,0 μF se conectan en serie y la diferencia de potencial en cada uno de ellos es 10 V, hallar la carga sobre ellos y la diferencia de potencial existente en los extremos de la combinación.

• **28** Un condensador de 3,0 μF y otro de 6,0 μF se conectan en serie y la combinación se conecta en paralelo con un condensador de 8,0 μF. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

• **29** Tres condensadores se conectan en forma de una red triangular como indica la figura 25.23. Determinar la capacidad equivalente entre los terminales *a* y *c*.

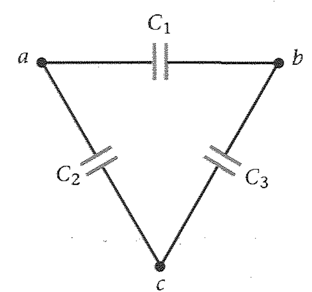


Figura 25.23 Problema 29.

• **30** Un condensador de 10,0 μF y otro de 20,0 μF se conectan en paralelo y se aplica al conjunto una batería de 6,0 V.

(a) ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

(b) ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada a cada condensador?

(c) Hallar la carga que tiene cada condensador.

•• **31** Se conecta un condensador de 10,0 μF en serie con otro de 20,0 μF y se aplica al conjunto una batería de 6,0 V.

(a) ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

(b) Hallar la carga de cada condensador.

(c) Hallar la diferencia de potencial en cada condensador.

•• **32** Tres condensadores idénticos se conectan de modo que su capacidad equivalente máxima es 15 μF.

(a) Describir cómo se han combinado los condensadores.

(b) Existen otras tres formas de combinar los tres condensadores en un circuito. ¿Cuáles son las capacidades equivalentes de cada combinación?

•• **33** Calcular para el dispositivo que se muestra en la figura 25.24:

(a) la capacidad total efectiva entre los terminales,

(b) la carga almacenada en cada uno de los condensadores y

(c) la energía total almacenada.

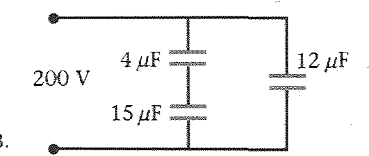


Figura 25.24 Problema 33.

•• **34**

(a) Demostrar que la capacidad equivalente de dos condensadores en serie puede escribirse en la forma

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$$

(b) Utilizar esta expresión para demostrar que $C_{eq} < C_1$ y $C_{eq} < C_2$.

(c) Demostrar que la capacidad equivalente de tres condensadores en serie es

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}$$

•• **35** Calcular para el dispositivo de la figura 25.25,

(a) la capacidad total efectiva entre los terminales,

(b) la carga almacenada en cada uno de los condensadores y

(c) la energía total almacenada.

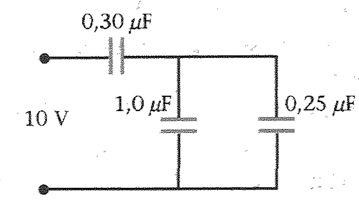


Figura 25.25 Problema 35.

•• **36** Cinco condensadores idénticos de capacidad C_0 están conectados en un circuito de puente como indica la figura 25.26.

(a) ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos *a* y *b*?

(b) Determinar la capacidad equivalente si la capacidad entre *a* y *b* cambia a $10C_0$.

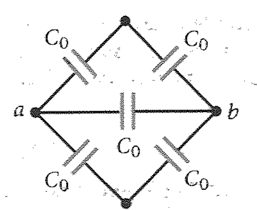


Figura 25.26 Problema 36.

•• **37** En la figura 25.27 $C_1 = 2$ μF, $C_2 = 6$ μF y $C_3 = 3,5$ μF.

(a) Hallar la capacidad equivalente de esta combinación.

(b) Si las tensiones de ruptura de cada uno de los condensadores son $V_1 = 100$ V, $V_2 = 50$ V y $V_3 = 400$ V, ¿qué tensión máxima puede aplicarse entre los puntos *a* y *b*?

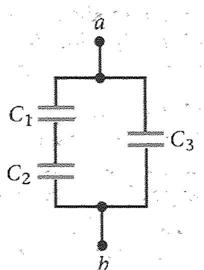


Figura 25.27 Problema 37.

•• **38** Proyectar un circuito de condensadores que tenga una capacidad de 2 μF y una tensión de ruptura de 400 V utilizando todos los condensadores de 2 μF que se necesiten, sabiendo que todos ellos poseen una tensión de ruptura de 100 V.

•• **39** Hallar todas las capacidades efectivas posibles que pueden obtenerse utilizando tres condensadores de 1,0; 2,0 y 4,0 μF en cualquier combinación que incluya a los tres o a dos cualesquiera de los condensadores.

Condensadores de placas paralelas

• **40** Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad de 2,0 μF y la separación entre las placas es de 1,6 mm.

(a) ¿Qué diferencia de potencial puede establecerse entre las placas del condensador antes de que se produzca la ruptura dieléctrica del aire? ($E_{max} = 3$ MV/m.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(b) ¿Cuál es el valor de la carga máxima que puede almacenar el condensador antes de que se produzca esta ruptura?

• 41 Entre las placas de un condensador de placas paralelas circulares existe un campo eléctrico de 2×10^4 V/m, siendo de 2 mm la separación de las placas.

(a) ¿Cuál es el voltaje a través del condensador?
(b) ¿Qué radio deben tener las placas para que la carga almacenada sea de 10 μC?

•• 42 Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de 0,14 μF. Las placas están separadas entre sí 0,5 mm.

(a) ¿Cuál es el área de cada placa?
(b) ¿Cuál es la diferencia de potencial si sobre una de las placas existe una carga de 3,2 μC y sobre la otra una carga de −3,2 μC?
(c) ¿Cuánta energía hay almacenada?
(d) ¿Qué cantidad de carga puede transportar el condensador antes de que tenga lugar la ruptura dieléctrica del aire entre las placas?

•• 43 Diseñar un condensador de placas paralelas de capacidad 0,1 μF con aire entre las placas que pueda cargarse hasta una diferencia de potencial máxima de 1000 V.

(a) ¿Cuál es la mínima separación posible entre la placas?
(b) ¿Qué área mínima deben tener las placas del condensador?

Condensadores cilíndricos

• 44 Un cable coaxial entre dos ciudades tiene un radio interior de 0,8 mm y un radio exterior de 6 mm. Su longitud es de 8×10^5 m (aproximadamente 500 millas). Considerar este cable como un condensador cilíndrico y calcular su capacidad.

• 45 Un tubo Geiger se compone de un alambre de 0,2 mm de radio y una longitud de 12 cm con un conductor cilíndrico coaxial de la misma longitud y 1,5 cm de radio.

(a) Hallar su capacidad admitiendo que el gas en el interior del tubo tiene una constante dieléctrica de 1.
(b) Hallar la carga por unidad de longitud sobre el alambre en el caso de que el condensador se cargue a 1,2 kV.

•• 46 Un condensador cilíndrico se compone de un hilo largo de radio R_1 y longitud L con una carga $+Q$ y una corteza cilíndrica exterior de radio R_2, longitud L y carga $-Q$.

(a) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio.
(b) ¿Cuánta energía existe en la corteza cilíndrica de radio r espesor dr y volumen $2\pi rL\, dr$ existente entre los conductores?
(c) Integrar la expresión obtenida en la parte (b) para hallar la energía total almacenada en el condensador y comparar el resultado con la obtenida a partir de $U = \frac{1}{2} CV^2$.

••• 47 Tres cortezas cilíndricas conductoras, delgadas y concéntricas poseen radios de 0,2, 0,5 y 0,8 cm. El espacio entre las cortezas se llena de aire. El cilindro más interno está conectado con el más externo. Determinar la capacidad por unidad de longitud del sistema.

Condensadores esféricos

•• 48 Un condensador esférico está formado por dos cortezas esféricas concéntricas y delgadas, de radios R_1 y R_2.

(a) Demostrar que la capacidad viene dada por $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2/(R_2 - R_1)$.
(b) Demostrar que cuando los radios de las cortezas son casi iguales, la capacidad del sistema viene dada aproximadamente por la expresión correspondiente a un condensador de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, en donde A es el área de la esfera y $d = R_2 - R_1$.

•• 49 Un condensador esférico tiene una esfera interior de radio R_1 con carga $+Q$ y una corteza esférica exterior de radio R_2 con carga $-Q$.

(a) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio.
(b) ¿Cuánta energía existe en el campo electrostático de una corteza esférica de radio r, espesor dr, y volumen $4\pi r^2\, dr$ existente entre los conductores.
(c) Integrar la expresión obtenida en la parte (b) para hallar la energía total almacenada en el condensador y comparar el resultado con el obtenido a partir de $U = \frac{1}{2} QV$.

••• 50 Una corteza esférica de radio R posee una carga Q distribuida uniformemente en su superficie. Determinar el radio r de la esfera que cumpla la condición de que la mitad de la energía total del campo electrostático del sistema está contenida dentro de dicha esfera.

••• 51 Repetir el problema 50 suponiendo ahora que la carga Q reside, no sobre una corteza esférica, sino que está distribuida uniformemente en un volumen esférico de radio R. (Véase problema 24.)

Condensadores desconectados y reconectados

•• 52 Un condensador de 2,0 μF se carga a una diferencia de potencial de 12,0 V y a continuación se desconecta de la batería. Cuando se conecta un segundo condensador (inicialmente sin cargar) en paralelo a este condensador, la diferencia de potencial disminuye hasta 4,0 V. ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador?

•• 53 La carga de dos condensadores uno de 100 pF y otro de 400 pF es de 2,0 kV. Están desconectados de la fuente de voltaje y conectados entre sí en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos.

(a) Calcular la diferencia de potencial resultante a través de cada uno de los condensadores.
(b) Calcular la energía perdida al realizar las conexiones.

•• 54 Dos condensadores de capacidad $C_1 = 4$ μF y $C_2 = 12$ μC se encuentran conectados en serie y alimentados por una batería a 12 V. Se desconectan cuidadosamente sin que se descarguen y se conectan en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos.

(a) Calcular la diferencia de potencial a través de cada uno de los condensadores después de ser conectados.
(b) Hallar la energía inicial y final almacenada en los condensadores.

•• 55 Un condensador de 1,2 μF se carga a 30 V. Después de la carga, se desconecta de la fuente de voltaje y se conecta a otro condensador descargado. El voltaje final es de 10 V.

(a) ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador?
(b) ¿Cuánta energía se perdió al realizar la conexión?

•• 56 Repetir el problema 53 para el caso en que los condensadores se conectan de modo que la placa positiva de uno se une a la placa positiva del otro después de haber sido cargados con una batería de 2,0 kV.

•• 57 Repetir el problema 54 si los dos condensadores se conectan primero en paralelo a través de la batería de 12 V y después uniendo la placa positiva de cada condensador con la placa negativa del otro.

•• 58 Un condensador de 20 pF se carga hasta 3,0 kV y luego se conecta en paralelo con un condensador descargado de 50 pF.

(a) ¿Qué carga adquiere cada uno de los condensadores?
(b) Calcular la energía inicial almacenada en el condensador de 20 pF y la energía final almacenada en los dos condensadores. ¿Se pierde o se gana energía al conectar los dos condensadores?

••• 59 Tres condensadores, $C_1 = 2$ μF, $C_2 = 4$ μF y $C_3 = 6$ μF, conectados en paralelo se cargan con una fuente de 200 V. A continuación se desconectan de la fuente y se conectan de nuevo las placas positivas con las negativas como indica la figura 25.28.

www.elsolucionario.net

(a) ¿Cuál es el voltaje a través de cada uno de los condensadores con los interruptores S_1 y S_2 cerrados, pero con el S_3 abierto?
(b) Después de cerrar S_3, ¿cuál es la carga final de cada condensador?
(c) Determinar el voltaje a través de cada condensador después de cerrar S_3.

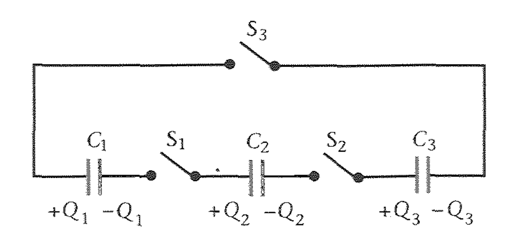


Figura 25.28 Problema 59.

Dieléctricos

• **60** Verdadero o falso: Un dieléctrico insertado en un condensador aumenta su capacidad.

• **61** Se construye un condensador de placas paralelas colocando polietileno ($\kappa = 2{,}3$) entre dos hojas de aluminio. El área de cada hoja es de 400 cm^2 y la separación de 0,3 mm. Hallar la capacidad.

•• **62** Suponer que el tubo Geiger del problema 45 se llena con un gas de constante dieléctrica $\kappa = 1{,}8$ y campo de ruptura 2×10^6 V/m.
(a) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede mantenerse entre el alambre y la cubierta del tubo?
(b) ¿Cuál es la carga por unidad de longitud del cable?

•• **63** Repetir el problema 49 suponiendo que el espacio comprendido entre las cortezas esféricas se llena con un dieléctrico de constante dieléctrica κ.

•• **64** Cierto dieléctrico de constante $\kappa = 24$ puede resistir un campo eléctrico de 4×10^7 V/m. Con este dieléctrico se quiere construir un condensador de 0,1 μF que pueda resistir una diferencia de potencial de 2000 V.
(a) ¿Cuál es la separación mínima entre las placas?
(b) ¿Cuál debe ser el área de las placas?

•• **65** Un condensador de placas paralelas tiene sus placas separadas por una distancia s. El espacio entre las placas se llena con dos dieléctricos, uno de espesor $\frac{1}{4}s$ y constante dieléctrica κ_1 y el otro de espesor $\frac{3}{4}s$ y constante dieléctrica κ_2. Determinar la capacidad de este condensador en función de C_0 que es la capacidad sin dieléctricos.

•• **66** Un condensador de placas paralelas sin dieléctrico posee la capacidad C_0. Si la separación entre las placas es d y se inserta un bloque de constante dieléctrica κ y espesor $t < d$, determinar la nueva capacidad.

•• **67** La membrana del axón de una célula nerviosa es una delgada capa cilíndrica de radio $r = 10^{-5}$ m, longitud $L = 0{,}1$ m y espesor $d = 10^{-8}$ m. La membrana tiene una carga positiva sobre uno de sus lados y una carga negativa sobre el otro y actúa como un condensador de placas paralelas de área $A = 2\pi rL$ y separación d. Su constante dieléctrica es aproximadamente $\kappa = 3$.
(a) Determinar la capacidad de la membrana. Si la diferencia de potencial a través de la membrana es 70 mV, determinar
(b) la carga sobre cada lado de la membrana y
(c) el campo eléctrico a través de la membrana.

•• **68** ¿Cuál es la constante dieléctrica de un aislante en el cual la densidad de carga inducida es
(a) el 80 por ciento de la densidad de carga libre sobre las placas de un condensador en el que se ha insertado dicho aislante,
(b) el 20 por ciento de la densidad de carga libre y
(c) el 98 por ciento de la densidad de carga libre?

•• **69** Dos placas paralelas poseen cargas Q y $-Q$. Si el espacio entre las placas está desprovisto de materia, el campo eléctrico es $2{,}5 \times 10^5$ V/m. Cuando el espacio se llena con un determinado dieléctrico, el campo se reduce a $1{,}2 \times 10^5$ V/m.
(a) ¿Cuál es la constante dieléctrica del dieléctrico?
(b) Si $Q = 10$ nC, ¿cuál es el área de las placas?
(c) ¿Cuál es la carga total inducida en cada una de las caras del dieléctrico?

•• **70** Determinar la capacidad del condensador de placas paralelas indicado en la figura 25.29.

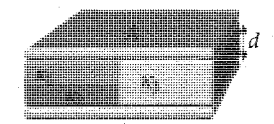


Figura 25.29 Problema 70.

•• **71** Un condensador de placas paralelas tiene unas placas de 600 cm^2 de área y una separación de 4 mm. Se carga hasta 100 V y luego se desconecta de la batería.
(a) Hallar el campo eléctrico E_0, y la energía potencial electrostática U. Se inserta en su interior un dieléctrico de constante $\kappa = 4$ que rellena por completo el espacio situado entre las placas.
(b) Hallar el nuevo campo eléctrico E y
(c) la diferencia de potencial V.
(d) Hallar la nueva energía electrostática.

••• **72** Un condensador de placas paralelas posee un dieléctrico variable. Sea A el área de las placas e y_0 su separación. La constante dieléctrica viene dada en función de y por la expresión $\kappa = 1 + (3/y_0)y$. La placa del fondo se encuentra en $y = 0$ y la superior en $y = y_0$.
(a) ¿Cuál es la capacidad?
(b) Determinar σ_b/σ_f sobre las superficies del dieléctrico.
(c) Utilizar la ley de Gauss para determinar la densidad de carga volúmica inducida $\rho(y)$ dentro de este dieléctrico.
(d) Integrar la expresión para la densidad de carga volúmica determinada en (c) para el dieléctrico y demostrar que la carga ligada inducida total, incluyendo la que existe sobre las superficies, es cero.

Problemas generales

• **73** Verdadero o falso:
(a) La capacidad de un condensador se define por la cantidad total de carga que puede soportar.
(b) La capacidad de un condensador de placas paralelas depende de la diferencia de potencial entre las placas.
(c) La capacidad de un condensador de placas paralelas es proporcional a la carga sobre sus placas.

•• **74** Dos condensadores idénticos se conectan en serie a una batería de 100 V. Cuando un condensador solo se conecta a esta batería, la energía almacenada es U_0. ¿Cuál será la energía total almacenada en los dos condensadores cuando la combinación en serie se conecta a la batería?
(a) $4U_0$ (b) $2U_0$ (c) U_0 (d) $U_0/2$ (e) $U_0/4$

• **75** Tres condensadores tienen capacidades de 2,0, 4,0 y 8,0 μF. Determinar la capacidad equivalente si
(a) están conectados en paralelo y (b) si están conectados en serie.

• **76** Un condensador de 1,0 μF se conecta en paralelo con otro de 2,0 μF y la asociación se conecta en serie con un condensador de 6,0 μF. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

• **77** El voltaje a través de un condensador de placas paralelas con una separación entre las placas de 0,5 mm es 1200 V. El condensador se desconecta de la fuente de voltaje y la separación entre las placas se

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

incrementa hasta que la energía almacenada en el condensador se duplica. Determinar la separación final entre las placas.

•• **78** Determinar la capacidad de cada una de las redes de condensadores indicadas en la figura 25.30.

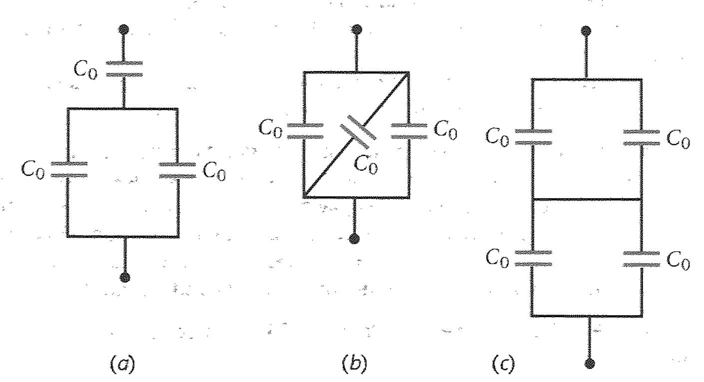


Figura 25.30 Problema 78.

•• **79** La figura 25.31 muestra cuatro condensadores conectados según una asociación llamada puente de capacidad. Los condensadores están inicialmente descargados. ¿Cuál debe ser la relación entre las cuatro capacidades para que la diferencia de potencial entre los puntos c y d sea cero al aplicar un voltaje V entre los puntos a y b?

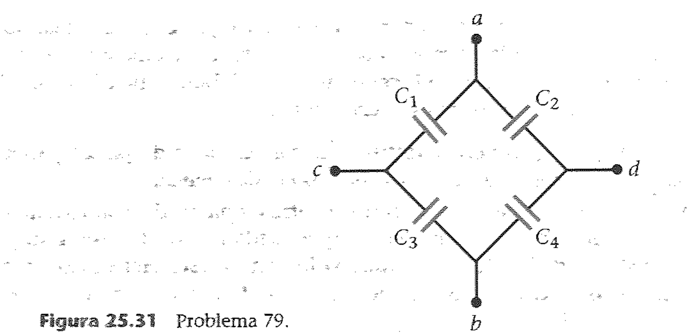


Figura 25.31 Problema 79.

•• **80** El área y la separación de las placas de los dos condensadores que se muestran en la figura 25.32 son idénticos. La mitad de la región entre las placas del condensador C_1 se llena con un dieléctrico de constante κ. ¿Qué fracción del volumen del condensador C_2 debe llenarse con el mismo material dieléctrico de modo que los dos condensadores tengan igual capacidad?

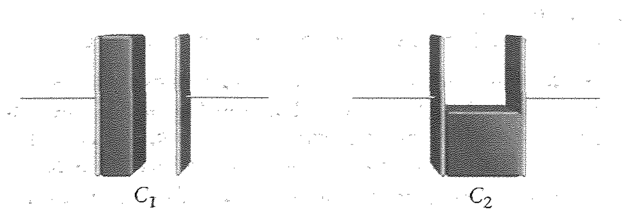


Figura 25.32 Problemas 80 y 81.

•• **81** Repetir el problema 80 suponiendo ahora que la región llena de dieléctrico del condensador C_1 es dos tercios del volumen entre las placas.

•• **82** Dos esferas conductoras de radio R están separadas por una gran distancia comparada con su tamaño. Una de ellas tiene inicialmente la carga Q y la otra está descargada. Un alambre delgado se conecta entre las dos esferas. ¿Qué fracción de la energía inicial se disipa?

•• **83** Un condensador de placas paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial V y luego se desconecta de la fuente de carga. Las placas se separan entonces hasta que su distancia final es $2d$. En función de A, d y V hallar expresiones que den

(a) la nueva capacidad, **(b)** la nueva diferencia de potencial y
(c) la nueva energía almacenada.
(d) ¿Cuánto trabajo se necesitó para variar la separación de las placas desde d hasta $2d$?

•• **84** Un condensador de placas paralelas tiene la capacidad C_0 sin dieléctrico. Se le inserta un dieléctrico de constante κ. Cuando un segundo condensador de capacidad C' se conecta en serie con el primero, la capacidad de la nueva asociación es C_0. Determinar C'.

•• **85** Estimar la capacidad de un globo típico de aire caliente.

•• **86** Los condensadores antiguos, denominados botellas de Leyden, eran realmente botellas de vidrio recubiertas interior y exteriormente con láminas metálicas. Supóngase que la botella es un cilindro de 40 cm de alto con unas paredes de 2,0 mm de espesor y cuyo diámetro interior es de 8 cm. Despréciense los efectos de los bordes.

(a) Hallar la capacidad de esta botella si la constante dieléctrica del vidrio es 5,0.
(b) ¿Qué carga máxima puede adquirir sin romperse si la resistencia dieléctrica del vidrio es 15 MV/m? (*Sugerencia*: Tratar este dispositivo como si fuera un condensador de placas paralelas.)

•• **87** Un condensador de placas paralelas se construye introduciendo una capa de dióxido de silicio de espesor 5×10^{-6} m entre dos películas conductoras. La constante dieléctrica del dióxido de silicio es 3,8 y su resistencia dieléctrica 8×10^{6} V/m.

(a) ¿Qué voltaje puede aplicarse a través de este condensador sin que se produzca la ruptura dieléctrica?
(b) ¿Cuál debe ser el área superficial de la capa de dióxido de silicio para que la capacidad del condensador sea de 100 pF?
(c) Estimar el número de estos condensadores que pueden incluirse en un cuadrado de 1 cm por 1 cm.

•• **88** Un condensador de placas paralelas posee placas rectangulares de longitud $L = 10$ cm y anchura $W = 4$ cm (figura 25.33). La región entre las placas se llena con un bloque no conductor de constante dieléctrica $\kappa = 4$ que puede deslizarse a lo largo de la longitud del condensador. Inicialmente el bloque llena por completo la región rectangular y el condensador soporta una carga de 0,2 μC. ¿Hasta qué distancia debe empujarse el bloque dieléctrico para que la energía almacenada duplique su valor inicial?

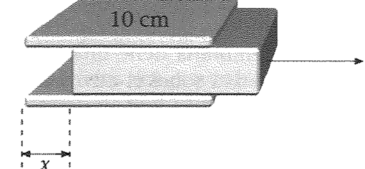


Figura 25.33 Problemas 88 y 89.

•• **89** Supongamos ahora que el condensador del problema 88 se conecta a una fuente de voltaje constante de 20 V. ¿Hasta qué distancia debe empujarse el bloque dieléctrico para que la energía almacenada se reduzca a la mitad de su valor inicial?

•• **90** Una asociación en paralelo de dos condensadores de placas paralelas se conecta a una batería de 100 V. La batería se desconecta y la separación entre las placas de uno de los condensadores se duplica. Determinar la carga depositada en cada uno de los condensadores.

www.elsolucionario.net

009197

•• **91** Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad C_0 y una separación entre las placas d. Se insertan entre las placas, como se indica en la figura 25.34 dos láminas dieléctricas de constantes κ_1 y κ_2 cada una de ellas de espesor $\frac{1}{2}d$ y de la misma área que las placas. Cuando la carga libre sobre las placas es Q, hallar

(a) el campo eléctrico en cada dieléctrico y

(b) la diferencia de potencial entre las placas.

(c) Demostrar que la nueva capacidad viene dada por $C = [2\kappa_1\kappa_2/(\kappa_1 + \kappa_2)]C_0$.

(d) Demostrar que este sistema puede considerarse como una asociación de dos condensadores en serie, cada uno de ellos de espesor $d/2$, respectivamente llenos de dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2.



Figura 25.34 Problema 91.

•• **92** Un condensador de placas paralelas tiene las placas con área A y separación entre ellas d. Se inserta entre las placas una lámina metálica de espesor t y área A.

(a) Demostrar que la capacidad viene dada por $C = \epsilon_0 A/(d - t)$, independientemente del sitio en donde se coloque la lámina de metal.

(b) Demostrar que este dispositivo puede considerarse como un condensador de separación a en serie con otro de separación b, siendo $a + b + t = d$.

•• **93** Se rellena un condensador de placas paralelas con dos dieléctricos de igual tamaño, como puede verse en la figura 25.35. Demostrar

(a) que este sistema puede considerarse como dos condensadores de área $\frac{1}{2}A$ conectados en paralelo y

(b) que la capacidad se ve aumentada en el factor $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

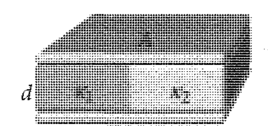


Figura 25.35 Problema 93.

•• **94** A un condensador de placas paralelas de área A y separación x se le suministra una carga Q y luego se separa de la fuente de carga.

(a) Hallar la energía electrostática almacenada en función de x.

(b) Hallar el aumento de energía dU debido al aumento de la separación de las placas dx a partir de $dU = (dU/dx)\, dx$.

(c) Si F es la fuerza ejercida por una placa sobre la otra, el trabajo realizado para mover una placa la distancia dx es $F\, dx = dU$. Demostrar que $F = Q^2/2\epsilon_0 A$.

(d) Demostrar que la fuerza hallada en la parte (c) es igual a $\frac{1}{2}EQ$, siendo Q la carga en cada placa y E el campo eléctrico existente entre ellas. Estudiar la razón que justifique la presencia del factor $\frac{1}{2}$ en este resultado.

•• **95** Un condensador de placas paralelas rectangulares de longitud a y anchura b posee un dieléctrico de igual anchura insertado parcialmente una distancia x entre las placas como se indica en la figura 25.36.

(a) Determinar la capacidad en función de x. Despreciar los efectos de los bordes.

(b) Comprobar que la respuesta ofrece los resultados esperados para $x = 0$ y $x = a$.

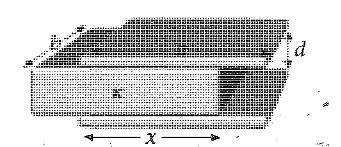


Figura 25.36 Problemas 95, 98 y 99.

•• **96** Dos condensadores idénticos, de placas paralelas y capacidad 4 μF cada uno, se conectan en serie a través de una batería de 24 V.

(a) ¿Cuál es la carga de cada condensador?

(b) ¿Cuál es la energía total almacenada de los condensadores? Un dieléctrico de constante 4,2 se inserta entre las placas de uno de los condensadores mientras la batería está todavía conectada.

(c) Una vez insertado el dieléctrico, ¿cuál es la carga sobre cada condensador?

(d) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada condensador?

(e) ¿Cuál es la energía total almacenada en los condensadores?

•• **97** Un condensador de placas paralelas cuyas placas tienen un área de 1,0 m^2 y la separación es de 0,5 cm tiene una placa de vidrio de igual área y espesor situada entre las placas. El vidrio tiene una constante dieléctrica de 5,0. El condensador se carga hasta una diferencia de potencia 12,0 V y luego se separa de su fuente de carga. ¿Cuánto trabajo se necesita para retirar la lámina de vidrio del interior del condensador?

•• **98** El condensador de la figura 25.36 posee las cargas $+Q$ y $-Q$ sobre sus placas.

(a) Determinar la energía almacenada en función de x.

(b) Utilizar el resultado de (a) para calcular la fuerza que actúa sobre el bloque dieléctrico.

•• **99** El condensador de la figura 25.36 está conectado a una fuente de voltaje constante V.

(a) Determinar la energía almacenada como una función de x.

(b) Utilizar el resultado de (a) para determinar la fuerza que actúa sobre el bloque dieléctrico.

•• **100** Un condensador posee una carga de 15 μC cuando el potencial entre las placas es V. Cuando su carga se incrementa a 18 μC, el potencial entre las placas se incrementa en 6 V. Determinar la capacidad del condensador y los voltajes inicial y final.

••• **101** Queremos construir un condensador de placas paralelas separadas por aire capaz de almacenar 100 kJ de energía.

(a) ¿Qué volumen mínimo se requiere entre las placas del condensador?

(b) Si disponemos de un dieléctrico que pueda resistir 3×10^8 V/m y su constante dieléctrica es 5, ¿qué volumen de este dieléctrico situado entre las placas del condensador se necesitará para almacenar 100 kJ de energía?

••• **102** Dos condensadores de placas paralelas C_1 y C_2 se conectan en paralelo. Los condensadores son idénticos excepto que C_2 tiene un dieléctrico entre sus placas. El sistema se carga mediante una fuente con una diferencia de potencial de 200 V y luego se desconecta.

(a) ¿Cuál es la carga de cada condensador?

(b) ¿Cuál es la energía total almacenada en los condensadores?

(c) El dieléctrico se extrae de C_2. ¿Cuál es la energía total almacenada de los condensadores?

(d) ¿Cuál es el voltaje final a través de los dos condensadores?

••• **103** Un condensador está formado por dos cilindros concéntricos de radios a y b ($b > a$), siendo su longitud $L >> b$. El cilindro interior posee una carga $+Q$ y el cilindro exterior una carga $-Q$. La región comprendida entre los dos cilindros se llena con un dieléctrico de constante κ.

(a) Determinar la diferencia de potencial que existe entre los dos cilindros.

(b) Hallar la densidad de la carga σ_f sobre el cilindro interior y sobre el cilindro exterior.

(c) Determinar la densidad de carga ligada σ_b sobre la superficie cilíndrica interior del dieléctrico y la superficie exterior del mismo.

(d) Calcular la energía electrostática total almacenada.

(e) Si el dieléctrico se desplaza sin fricción, ¿cuánta energía mecánica se necesitaría para extraer la capa cilíndrica dieléctrica?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

••• **104** Dos condensadores de placas paralelas tienen la misma separación e igual área superficial. La capacidad de cada uno de ellos es inicialmente 10 μF. Insertando un dieléctrico en el espacio completo entre la placas de uno de los condensadores, éste incrementa su capacidad a 35 μF. Los condensadores de 35 μF y 10 μF se conectan en paralelo y se cargan con una diferencia de potencial de 100 V. La fuente de voltaje se desconecta a continuación.

(a) ¿Cuál es la energía almacenada de este sistema?
(b) ¿Cuáles son las cargas de los dos condensadores?
(c) Se extrae el dieléctrico del condensador. ¿Cuáles son las nuevas cargas sobre las placas de los condensadores?
(d) ¿Cuál es la energía final almacenada por el sistema?

••• **105** Un globo meteorológico esférico construido con "mylar" aluminizado y lleno de helio a la presión atmosférica puede levantar una carga de 0,2 kg. Determinar la capacidad del globo. (Despreciar la masa de "mylar".)

••• **106** Los dos condensadores de la figura 25.37 poseen capacidades $C_1 = 0{,}4\ \mu$F y $C_2 = 1{,}2\ \mu$F. Los voltajes aplicados a los dos condensadores son V_1 y V_2 respectivamente, y la energía total almacenada en los dos condensadores es 1,14 mJ. Si los terminales b y c se conectan entre sí, el voltaje $V_a - V_d = 80$ V; si el terminal a se conecta a b y c se conecta a d, el voltaje $V_a - V_d = 20$ V. Determinar los voltajes iniciales V_1 y V_2.

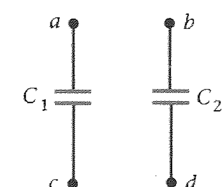


Figura 25.37 Problema 106.

••• **107** Antes de cerrar el interruptor S de la figura 25.38, la diferencia de potencial entre los terminales del interruptor es 120 V y el voltaje aplicado al condensador de 0,2 μF es de 40 V. La energía almacenada total en los dos condensadores es 1440 μJ. Después de cerrar el interruptor, el voltaje entre las placas de cada condensador es 80 V y la energía almacenada por ambos condensadores cae a 960 μJ. Determinar la capacidad de C_2 y la carga sobre cada uno de ellos antes de que el interruptor se cerrase.

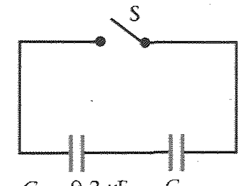


Figura 25.38 Problema 107. $C_1 = 0{,}2\ \mu$F C_2

••• **108** Un condensador de placas paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial V y luego se separa de la fuente de carga. Se inserta entonces como se indica en la figura 21.27 una lámina dieléctrica de constante $\kappa = 2$, espesor d y área $\frac{1}{2}A$. Supongamos que es σ_1 la densidad de carga libre en la superficie conductor-dieléctrico y σ_2 la densidad de carga en la superficie conductor-aire.

(a) ¿Por qué debe tener el campo eléctrico el mismo valor en el interior del dieléctrico que en el espacio libre entre las placas?
(b) Demostrar que $\sigma_1 = 2\sigma_2$.
(c) Demostrar que la nueva capacidad es $3\epsilon_0 A/2d$ y que la nueva diferencia de potencial es $\frac{2}{3}V$.

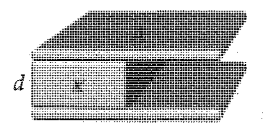


Figura 25.39 Problema 108.

••• **109** Dos condensadores idénticos de placas paralelas de 10 μF reciben cargas iguales de 100 μC cada uno y luego se separan de la fuente de carga. Mediante un cable se conectan sus placas positivas y mediante otro sus placas negativas.

(a) ¿Cuál es la energía almacenada por el sistema?

Un dieléctrico de constante 3,2 se inserta entre las placas de uno de los condensadores de tal modo que llena por completo la región entre las mismas.

(b) ¿Cuál es la carga final sobre cada condensador?
(c) ¿Cuál es la energía final almacenada del sistema?

••• **110** Un condensador posee placas rectangulares de longitud a y anchura b. La placa superior está inclinada un pequeño ángulo como indica la figura 25.40. La separación de las placas varía de $d = y_0$ a la izquierda a $d = 2y_0$ a la derecha, siendo y_0 mucho menor que a o b. Calcular la capacidad utilizando bandas de anchura dx y de longitud b que actúan como condensadores diferenciales aproximados de área $b\ dx$ y separación $d = y_0 + (y_0/a)x$ conectados en paralelo.

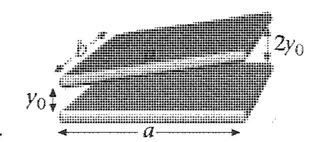


Figura 25.40 Problema 110.

••• **111** No todos los dieléctricos que separan las placas de un condensador son rígidos. Por ejemplo, la membrana del axón de una célula nerviosa es una capa bilípida de compresibilidad finita. Consideremos un condensador de placas paralelas cuya separación de placas se mantiene con un dieléctrico de constante $\kappa = 3{,}0$ y espesor $d = 0{,}2$ mm cuando el potencial aplicado al condensador es cero. El dieléctrico que tiene una resistencia dieléctrica de 40 kV/mm es altamente compresible, con un módulo de Young para la compresión de 5×10^6 N/m^2. La capacidad del condensador en el límite $V \to 0$ es C_0.

(a) Deducir una expresión de la capacidad en función del voltaje aplicado.
(b) ¿Cuál es el máximo voltaje que puede aplicarse al condensador? (Suponer que κ no varía con la compresión.)
(c) ¿Qué fracción de la energía total del condensador es energía del campo electrostático y qué fracción es energía de tensión mecánica almacenada en el dieléctrico comprimido cuando el voltaje aplicado al condensador está justamente por debajo del voltaje de ruptura?

••• **112** Una esfera conductora de radio R_1 posee una carga libre Q. La esfera está rodeada por una capa dieléctrica esférica concéntrica sin carga, de radio interior R_1, radio exterior R_2 y constante dieléctrica κ. El sistema está alejado de otros objetos.

(a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
(b) ¿Cuál es el potencial de la esfera conductora relativa a $V = 0$ en el infinito?
(c) Determinar la energía electrostática total del sistema.

••• **113** Un condensador variable sin dieléctrico como el que se muestra en la fotografía de la página 818 posee una capacidad que varía entre 0,02 y 0,12 μF cuando su eje gira un ángulo de 180°. Entre las placas del condensador se mantiene un voltaje de 100 V. Inicialmente el condensador se encuentra en su posición de capacidad mínima.

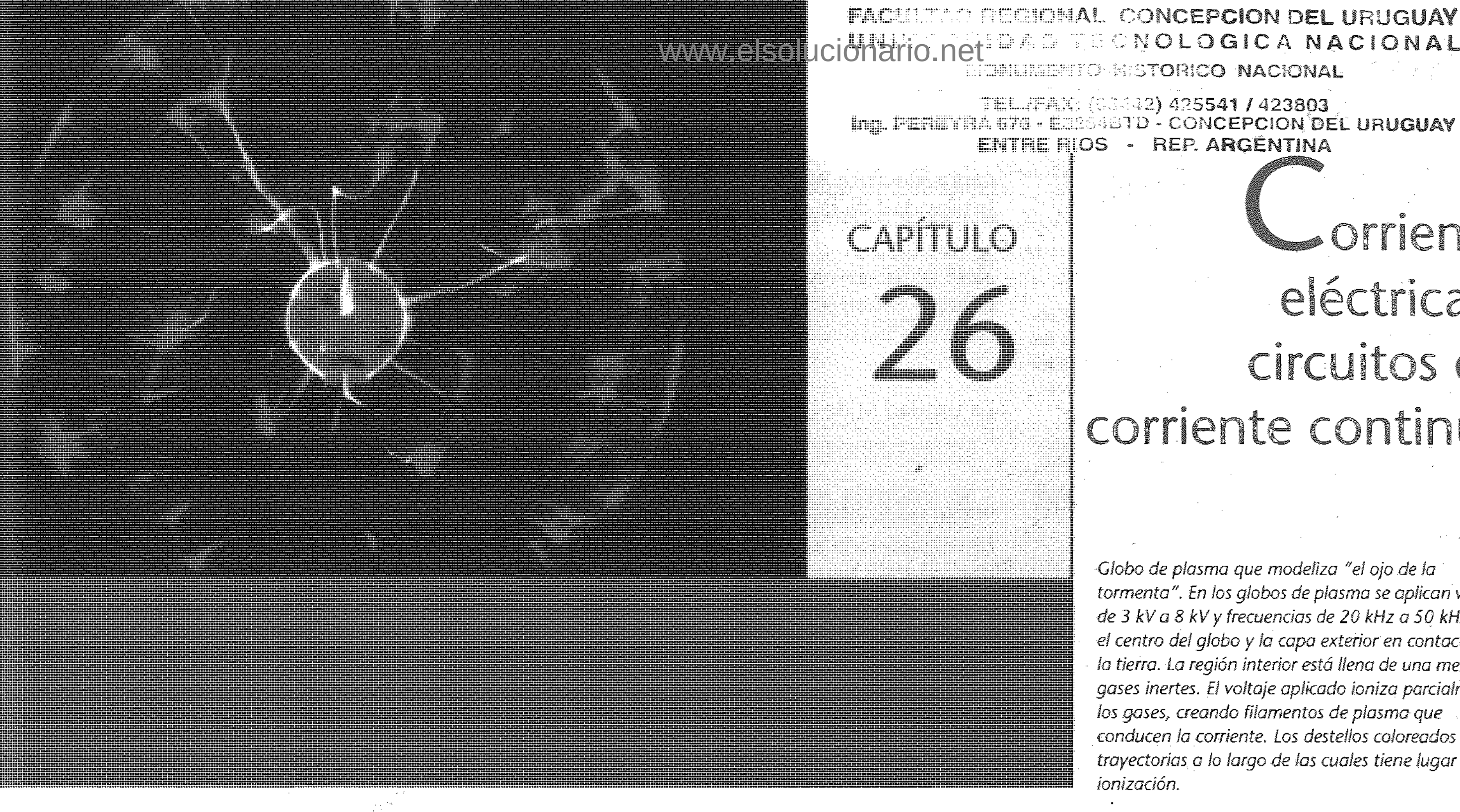
(a) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para hacer girar el eje hasta su posición de capacidad máxima?
(b) La forma de las placas está diseñada para que la capacidad sea una función lineal del ángulo de rotación. ¿Qué momento mecánico debe aplicarse en la rotación del condensador para mantenerle en la posición correspondiente a $C = 0{,}07\ \mu$F?

••• **114** Repetir el problema 113 con un voltaje aplicado de 100 V y después desconectado cuando el condensador está totalmente cargado.

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 26

Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua

Globo de plasma que modeliza "el ojo de la tormenta". En los globos de plasma se aplican voltajes de 3 kV a 8 kV y frecuencias de 20 kHz a 50 kHz entre el centro del globo y la capa exterior en contacto con la tierra. La región interior está llena de una mezcla de gases inertes. El voltaje aplicado ioniza parcialmente los gases, creando filamentos de plasma que conducen la corriente. Los destellos coloreados son trayectorias a lo largo de las cuales tiene lugar la ionización.

Cuando se enciende una luz, conectamos el filamento metálico de la bombilla a través de una diferencia de potencial, lo cual hace fluir la carga eléctrica por el filamento de un modo parecido a como la diferencia de presión en una manguera de riego hace fluir el agua por su interior. El flujo de cargas constituye la corriente eléctrica. Usualmente asociamos las corrientes al movimiento de cargas en cables conductores, pero el haz de electrones de un monitor de video y el haz de iones cargados procedentes de un acelerador también son corrientes eléctricas.

Cuando la dirección de la corriente en un elemento de un circuito no varía, se dice que el circuito es de corriente continua (cc). Las corrientes continuas están producidas usualmente por baterías conectadas a resistencias y condensadores. En el capítulo 31 estudiaremos los circuitos de corriente alterna (ca), en los cuales la dirección de la corriente cambia alternativamente de sentido.

Cuando un interruptor pone en marcha un circuito, a lo largo de los elementos de éste se propaga un campo eléctrico aproximadamente a la velocidad de la luz. Al establecerse la corriente y acumularse la carga en diversos puntos del circuito tienen lugar cambios muy complicados, pero rápidamente se alcanza un equilibrio o estado estacionario. El tiempo necesario para establecer el equilibrio depende de la conductibilidad de los elementos del circuito, pero es prácticamente instantáneo para la mayor parte de los objetivos. En el equilibrio, la carga ya no se acumula en los distintos puntos del circuito y la corriente es estacionaria. (En los circuitos que contienen condensadores, la corriente puede aumentar o disminuir lentamente, pero los cambios apreciables se presentan sólo en tiempos mucho más largos que el necesario para alcanzar el estado estacionario.)

Corriente y movimiento de cargas 26.1

La **corriente** eléctrica se define como el flujo de cargas eléctricas que, por unidad de tiempo, atraviesan un área transversal. La figura 26.1 muestra un segmento de un alambre conductor de corriente en el cual los portadores de cargas se mueven. Si ΔQ es la

 www.elsolucionario.net

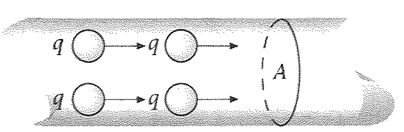


Figura 26.1 Segmento de un alambre portador de corriente. Si ΔQ es la cantidad de carga que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt, la corriente posee la intensidad $I = \Delta Q/\Delta t$.

carga eléctrica que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt, la corriente o intensidad de la corriente es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{26.1}$$

Definición —Corriente eléctrica o intensidad de corriente

La unidad SI de intensidad es el **amperio** (A):

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \tag{26.2}$$

Se toma como sentido de la corriente el del flujo de cargas positivas. Esta convención fue establecida antes de que se conociera que los electrones libres, negativamente cargados, son las partículas que realmente se mueven y producen la corriente en un alambre conductor. El movimiento de los electrones cargados negativamente en una dirección es equivalente al flujo de cargas positivas en sentido *opuesto*. Así pues, los electrones se mueven en sentido opuesto a la corriente. (En un acelerador que produce un haz de protones, el sentido del movimiento de estas partículas, cargadas positivamente, es el sentido de la corriente.)

El movimiento real de los electrones libres en un alambre conductor es muy complicado. Si en el alambre no existe campo eléctrico, estos electrones se mueven con direcciones aleatorias y velocidades relativamente grandes, del orden de 10^6 m/s.[1] Como los vectores velocidad de los electrones están orientados al azar, la velocidad *media* es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, un electrón libre experimenta una aceleración debida a la fuerza $-e\mathbf{E}$ y adquiere una velocidad adicional en dirección opuesta al campo. Sin embargo, la energía cinética que adquiere es disipada rápidamente por choques con los iones fijos del alambre. El electrón es de nuevo acelerado por el campo. El resultado neto de esta aceleración y disipación de energía repetidas es que el electrón posee una pequeña velocidad media, llamada **velocidad de desplazamiento** opuesta al campo eléctrico.

El movimiento de los electrones libres en un metal es semejante al de las moléculas de un gas, tal como el aire. En el aire en calma, las moléculas de gas se mueven con velocidades instantáneas grandes entre cada choque, pero la velocidad vectorial media es cero. Cuando existe una brisa, las moléculas de aire tienen una pequeña velocidad de desplazamiento en la dirección de la brisa superpuesta a las velocidades instantáneas que son mucho mayores. De igual modo, cuando no hay corriente en un conductor, "el gas de electrones" de un metal se mueve en direcciones aleatorias con velocidades muy grandes a causa de la energía interna, pero su velocidad vectorial media es cero. Cuando hay corriente los electrones poseen una pequeña velocidad de desplazamiento.

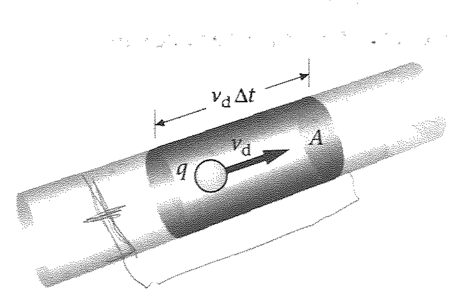


Figura 26.2 En el tiempo Δt, todas las cargas contenidas en el volumen sombreado pasan a través de A. Si existen n portadores de carga por volumen unidad, cada una de carga q, la carga total de este volumen es $\Delta Q = qnAv_d\,\Delta t$, en donde v_d es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga.

Consideremos una corriente en un alambre conductor de sección transversal A. Sea n el número de partículas libres portadoras de carga por unidad de volumen. Este número, n suele llamarse **densidad numérica** de los portadores de carga. Suponemos que cada partícula transporta una carga q y se mueve con una velocidad de desplazamiento v_d. En el tiempo Δt, todas las partículas contenidas en el volumen $Av_d\,\Delta t$, sombreado en la figura 26.2, pasan a través del área A. El número de partículas en este volumen es $nAv_d\,\Delta t$ y la carga total es

$$\Delta Q = qnAv_d\,\Delta t$$

La intensidad de la corriente es, por tanto,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d \tag{26.3}$$

Relación entre la intensidad y la velocidad de desplazamiento

[1] La energía media de los electrones libres en un metal es muy grande, incluso a temperaturas muy bajas. Estos electrones no cumplen la distribución energética clásica de Maxwell-Boltzmann y no obedecen el teorema clásico de la equipartición. En el capítulo 27 estudiaremos la distribución energética de estos electrones y calcularemos su velocidad media.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La ecuación 26.3 puede utilizarse para calcular la corriente debida al flujo de cualquier partícula cargada, simplemente sustituyendo la velocidad de desplazamiento v_d por la velocidad de la partícula.

El número de portadores de carga de un conductor puede medirse por el efecto Hall, que será tratado en el capítulo 28. El resultado es que en la mayor parte de los metales existe un electrón libre por átomo.

EJEMPLO 26.1

¿Cuál es la velocidad de desplazamiento de los electrones en un alambre de cobre típico de radio 0,815 mm que transporta una corriente de 1 A, suponiendo que existe un electrón libre por átomo?

Esquema del problema La ecuación 26.3 relaciona la velocidad de desplazamiento con la densidad numérica de portadores de carga, que es igual a la densidad numérica de los átomos de cobre, n_a. Podemos determinar n_a a partir de la densidad ordinaria del cobre, su masa molecular y el número de Avogadro.

1. La velocidad de desplazamiento está relacionada con la intensidad y la densidad numérica de los portadores de la carga:

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

2. Si existe un electrón libre por cada átomo, la densidad numérica de los electrones libres es igual a la densidad numérica de los átomos n_a:

$$n = n_a$$

3. La densidad numérica de los átomos n_a está relacionada con la densidad másica, ρ_m, el número de Avogadro y la masa molar M. Para el cobre, $\rho_m = 8{,}93$ g/cm^3 y $M = 63{,}5$ g/mol:

$$n_a = \frac{\rho_m N_A}{M} = \frac{(8{,}93\text{ g/cm}^3)(6{,}02\times10^{23}\text{ átomos/mol})}{63{,}5\text{ g/mol}}$$
$$= 8{,}47\times10^{22}\text{ átomos/cm}^3 = 8{,}47\times10^{28}\text{ átomos/m}^{-3}$$

4. La magnitud de la carga es e y el área está relacionada con el radio r del alambre:

$$q = e$$
$$A = \pi r^2$$

5. Aplicando los valores numéricos resulta v_d:

$$v_d = \frac{I}{nqA} = \frac{1}{n_a e \pi r^2}$$
$$= \frac{1\text{ C/s}}{(8{,}47\times10^{28}\text{ m}^{-3})(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})\pi(0{,}000815\text{ m})^2}$$
$$= 3{,}54\times10^{-5}\text{ m/s}$$

Observación Vemos que las velocidades de desplazamiento típicas son del orden de 0,01 mm/s, es decir, muy pequeñas, para ser detectadas por medios macroscópicos.

Ejercicio ¿Cuánto tiempo tardará un electrón en desplazarse de la batería del coche hasta el motor de arranque, una distancia de 1 m, si su velocidad de desplazamiento es $3{,}5\times10^{-5}$ m/s? (*Respuesta*: 7,9 h.)

A primera vista parece sorprendente que la luz eléctrica surja instantáneamente al cerrar el interruptor, ya que los electrones se desplazan por el alambre a velocidades tan pequeñas que tardarían horas en llegar desde el interruptor a la lámpara. Una analogía con el agua de una manguera puede ser útil. Al dar paso al agua por una manga de riego, larga e inicialmente vacía, hay que esperar varios segundos para que el agua se desplace desde la llave hasta el extremo opuesto de la manga. Sin embargo, si la manguera está ya llena de agua, ésta emerge casi instantáneamente. Debido a la presión del agua en el

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

grifo, la porción de líquido más próxima es impulsada por aquélla y ésta impulsa a la porción vecina y así sucesivamente hasta que el agua se derrama por la boquilla de la manguera. Esta onda de presión se desplaza por la manguera con la velocidad del sonido en el agua (si la manguera es rígida), y el agua alcanza rápidamente un flujo estacionario.

Análogamente, al cerrar el interruptor de la luz, se propaga a lo largo del cable un campo eléctrico con la velocidad de la luz y los electrones libres en todo el cable adquieren casi inmediatamente su velocidad de desplazamiento. La carga que sale de una porción de alambre viene reemplazada por una carga igual que entra en la misma porción por el otro extremo. Por ello, la carga inicia el movimiento a través del filamento de la lámpara casi inmediatamente después de que el interruptor se ha pulsado. El transporte de una cantidad significativa de carga en un alambre se verifica, no por causa de unas pocas cargas que se mueven rápidamente por el alambre, sino por un gran número de cargas que se desplazan por el conductor lentamente.

■ EJEMPLO 26.2

En un acelerador de partículas, un haz de protones de 5 MeV y radio 1,5 mm transporta una corriente de intensidad 0,5 mA. (a) Determinar el número de protones por unidad de volumen en el haz. (b) Al incidir el haz contra un blanco, ¿cuántos protones chocan contra el blanco en un segundo?

(a) 1. La densidad numérica está relacionada con la intensidad de corriente, la carga, el área transversal y la velocidad:

$$n = \frac{I}{qAv}$$

2. Determinar la velocidad de los protones a partir de su energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 5\text{ MeV}$$

$$= 5\times 10^6\text{ eV}\times\frac{1{,}6\times 10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}} = 8\times 10^{-13}\text{ J}$$

3. Utilizar $m = 1{,}67\times 10^{-27}$ kg para la masa del protón y despejar la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(8\times 10^{-13}\text{ J})}{1{,}67\times 10^{-27}\text{ kg}}} = 3{,}10\times 10^7\text{ m/s}$$

4. Sustituir estos valores y calcular n:

$$n = \frac{I}{qAv}$$

$$= \frac{0{,}5\times 10^{-3}\text{ A}}{(1{,}6\times 10^{-19}\text{ C/protón})\pi(1{,}5\times 10^{-3}\text{ m})^2(3{,}10\times 10^7\text{ m/s})}$$

$$= 1{,}43\times 10^{13}\text{ protón/m}^3$$

(b) 1. El número de protones que chocan contra el blanco en 1 s está relacionado con la carga total ΔQ que choca en 1 s y la carga del protón q:

$$N = \frac{\Delta Q}{q}$$

2. La carga ΔQ que choca contra el blanco en un tiempo Δt es la intensidad multiplicada por el tiempo:

$$\Delta Q = I\ \Delta t = (0{,}5\text{ mA})(1\text{ s}) = 0{,}5\text{ mC}$$

3. El número de protones es, por tanto:

$$N = \frac{\Delta Q}{q} = \frac{0{,}5\times 10^{-3}\text{ C}}{1{,}6\times 10^{-19}\text{ C/protón}} = 3{,}13\times 10^{15}\text{ protones}$$

Comprobación del resultado El número de protones que choca contra el blanco en el tiempo Δt es el número contenido en el volumen $Av\,\Delta t$, o sea, $N = nAv\,\Delta t$. Sustituyendo $n = I/qAv$ resulta $N = nAv\,\Delta t = (I/qAv)Av\,\Delta t = I\,\Delta t/q = \Delta Q/q$, que es el valor utilizado en la parte (b).

Observaciones Hemos utilizado la expresión clásica de la energía cinética en la etapa 2 sin tener en cuenta la relatividad, porque la energía cinética de los protones de 5 MeV es muy inferior a la energía en reposo del protón (~931 MeV). La velocidad obtenida, $3{,}1\times 10^7$ m es aproximadamente un décimo de la velocidad de la luz.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Resistencia y ley de Ohm ■ 26.2

La corriente en un conductor viene impulsada por un campo eléctrico **E** dentro del conductor que ejerce una fuerza $q\mathbf{E}$ sobre las cargas libres. (En el equilibrio electrostático, el campo eléctrico debe ser nulo dentro de un conductor, pero cuando un conductor transporta una corriente, ya no se encuentra en equilibrio electrostático y las cargas libres circulan por el conductor conducidas por el campo eléctrico.) Como **E** posee la dirección de la fuerza sobre una carga positiva, ésta es la dirección de la corriente.

En la figura 26.3 se muestra un segmento de alambre de longitud ΔL y área de sección transversal A por el cual circula una corriente I. Como el campo eléctrico está siempre dirigido de las regiones de mayor potencial hacia las regiones de menor potencial, el potencial en el punto a es mayor que en el punto b. Suponiendo que ΔL es suficientemente pequeño para considerar que el campo eléctrico es constante a través del segmento, la diferencia de potencial entre los puntos a y b es

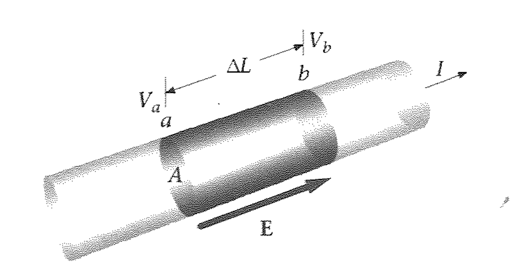


Figura 26.3 Segmento de alambre portador de una corriente de intensidad I. La diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico por la expresión $V_a - V_b = E\,\Delta L$.

$$V = V_a - V_b = E\,\Delta L \qquad \textbf{(26.4)}$$

De nuevo utilizamos V en lugar de ΔV para la diferencia de potencial (que en este caso es una *disminución* de potencial) a fin de simplificar la notación. El cociente entre la caída de potencial y la intensidad de la corriente se llama **resistencia** del segmento:

$$R = \frac{V}{I} \qquad \textbf{(26.5)}$$

Definición —Resistencia

La unidad SI de resistencia, el voltio por amperio, se llama ohmio (Ω):

$$1\ \Omega = 1\ \mathrm{V/A} \qquad \textbf{(26.6)}$$

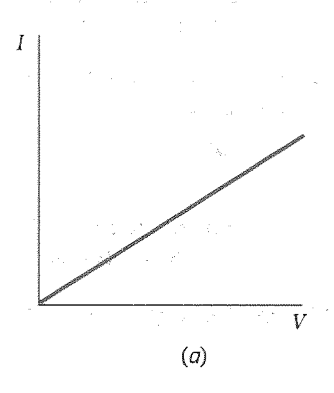
Para muchos materiales, la resistencia no depende de la caída de voltaje o de la intensidad. Estos materiales, en los que se incluyen la mayor parte de los metales, se denominan **materiales óhmicos**. En los materiales óhmicos, la caída del potencial a través de una porción de conductor es proporcional a la corriente:

$$V = IR \qquad R \text{ constante} \qquad \textbf{(26.7)}$$

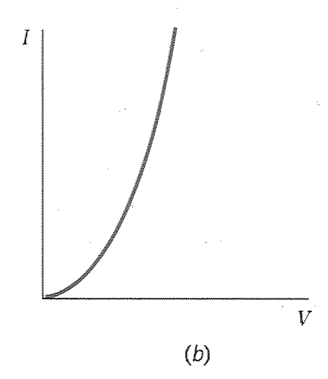
Ley de Ohm

La ecuación 26.7 con la condición de R constante constituye el enunciado matemático de la ley de Ohm.

En los **materiales no óhmicos**, la resistencia depende de la corriente I, de modo que V no es proporcional a I. La figura 26.4 muestra la intensidad I en función de la diferencia de potencial para materiales óhmicos y no óhmicos. En los materiales óhmicos (figura 26.4*a*), la relación es lineal, mientras que en los no óhmicos es no lineal (figura 26.4*b*). La ley de Ohm no es una relación fundamental de la naturaleza, como las leyes de Newton o las leyes de la termodinámica, sino más bien una descripción empírica de una propiedad compartida por muchos materiales.



(*a*)



(*b*)

Figura 26.4 Gráficos de I en función de V para (*a*) materiales óhmicos y (*b*) no óhmicos. La resistencia $R = V/I$ es independiente de I para materiales óhmicos, como indica la pendiente constante de la línea en (*a*).

Ejercicio Un alambre de resistencia 3 Ω transporta una corriente de 1,5 A. ¿Cuál es la caída de potencial a través del alambre? (*Respuesta*: 4,5 V.)

La resistencia de un alambre conductor es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área transversal:

$$R = \rho\,\frac{L}{A} \qquad \textbf{(26.8)}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

siendo ρ una constante de proporcionalidad llamada **resistividad** del material conductor.[1] La unidad de resistividad es el ohmio-metro ($\Omega \cdot$ m). Obsérvese que las ecuaciones 26.7 y 26.8 para la conducción y la resistencia eléctricas son de igual forma que las ecuaciones 21.9 ($\Delta T = IR$) y 21.10 ($R = \Delta x/kA$) para la conducción y resistencia térmicas respectivamente. En las ecuaciones eléctricas, la diferencia de potencial V sustituye a la diferencia de temperatura ΔT y $1/\rho$ reemplaza a la conductibilidad térmica. Realmente Ohm llegó a esta ley por la semejanza entre la conducción de la electricidad y la conducción del calor.

■ EJEMPLO 26.3

Un alambre de nicrom (resistividad 10^{-6} $\Omega \cdot$ m) tiene un radio de 0,65 mm. ¿Qué longitud de alambre se necesita para obtener una resistencia de 2,0 Ω?

Utilizar $R = \rho L/A$ (ecuación 26.8) para deducir L:

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{(2\Omega)\pi(0{,}00065\text{ m})^2}{10^{-6}\ \Omega\cdot\text{m}} = 2{,}65\text{ m}$$

La resistividad (y, por tanto, la conductividad) de cualquier metal depende de la temperatura. La figura 26.5 muestra la dependencia con la temperatura de la resistividad del cobre. Este gráfico es casi una línea recta, lo cual significa que la resistividad varía casi linealmente con la temperatura.[2] Suele darse la resistividad en tablas en función de su valor ρ_{20} a 20 °C y a su vez el **coeficiente de temperatura de la resistividad** α que se define por

$$\rho = \rho_{20}[1 + \alpha(t_c - 20\ °\text{C})] \qquad \textbf{(26.9)}$$

La tabla 26.1 relaciona la resistividad a 20 °C y el coeficiente de temperatura α para diversos materiales. Obsérvese el intervalo extraordinario de valores de ρ.

Los alambres utilizados para transportar corriente eléctrica se fabrican en tamaño estándar. El diámetro de la sección circular se indica por un *número de calibrado*; los números más elevados corresponden a diámetros menores. La tabla 26.2 muestra los diá-

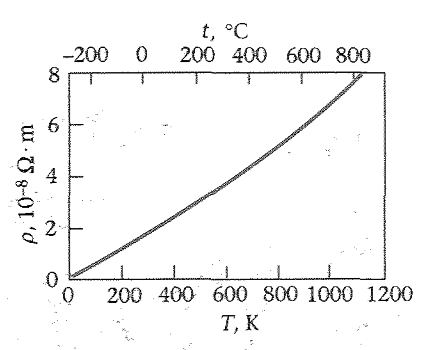


Figura 26.5 Gráfico de la resistividad ρ en función de la temperatura para el cobre. Como las temperaturas Celsius y absoluta difieren sólo en la elección del cero, la resistividad tiene igual pendiente representada en función de t ó T.

Tabla 26.1 Resistividades y coeficientes de temperatura.

Material	Resistividad ρ a 20 °C, $\Omega \cdot$ m	Coeficiente de temperatura α a 20 °C, K^{-1}
Plata	$1{,}6 \times 10^{-8}$	$3{,}8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1{,}7 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2{,}8 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5{,}5 \times 10^{-8}$	$4{,}5 \times 10^{-3}$
Hierro	10×10^{-8}	$5{,}0 \times 10^{-3}$
Plomo	22×10^{-8}	$4{,}3 \times 10^{-3}$
Mercurio	96×10^{-8}	$0{,}9 \times 10^{-3}$
Nicron	100×10^{-8}	$0{,}4 \times 10^{-3}$
Carbono	3500×10^{-8}	$-0{,}5 \times 10^{-3}$
Germanio	0,45	$-4{,}8 \times 10^{-2}$
Silicio	640	$-7{,}5 \times 10^{-2}$
Madera	10^{8}–10^{14}	
Vidrio	10^{10}–10^{14}	
Goma dura	10^{13}–10^{16}	
Ámbar	5×10^{14}	
Azufre	1×10^{15}	

Tabla 26.2 Diámetros y secciones transversales de alambres típicos de cobre.

Calibre	Diámetro a 20 °C, nm	Área, mm^2
4	5,189	21,15
6	4,115	13,30
8	3,264	8,366
10	2,588	5,261
12	2,053	3,309
14	1,628	2,081
16	1,291	1,309
18	1,024	0,8235
20	0,8118	0,5176
22	0,6438	0,3255

[1] El símbolo ρ utilizado aquí para la resistividad fue utilizado en capítulos anteriores para la densidad de carga volúmica. Por ello, debe tenerse cuidado al usar estos símbolos para no caer en confusión. Usualmente, el contexto aclara cuál es su significado.

[2] Exite una ruptura de esta linealidad para todos los metales a muy bajas temperaturas que no está indicada en la figura 26.5.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

metros y secciones transversales de alambres para algunos calibres típicos. Los manuales dan la combinación ρ/A y R/L en ohmios por centímetro.

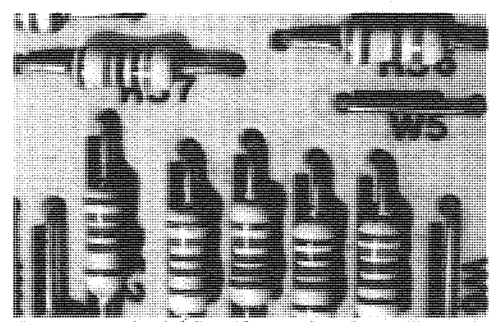
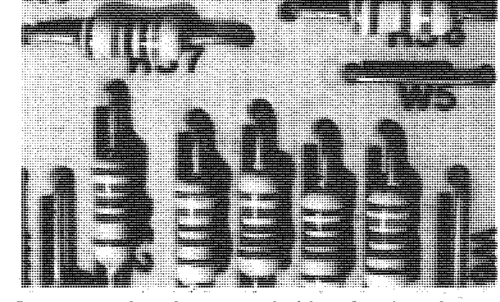
EJEMPLO 26.4

Calcular la resistencia por unidad de longitud de un alambre de cobre de calibre 14.

1. Según la ecuación 26.8 la resistencia por unidad de longitud es igual a la resistividad por unidad de área: $\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A}$
2. Determinar la resistividad del cobre del la tabla 26.1 y el área de la tabla 26.2: $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$; $A = 2{,}08\ \text{mm}^2$
3. Utilizar estos valores para calcular R/L: $\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A} = \frac{1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}}{2{,}08 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 8{,}17 \times 10^{-3}\ \Omega/\text{m}$

Observación El alambre de cobre de calibre 14 se utiliza comúnmente en circuitos de baja intensidad. Como muestra este ejemplo, su resistencia es muy pequeña.

El carbono, que posee una resistividad alta, se utiliza normalmente en las resistencias de los equipos electrónicos. Estas resistencias se pintan a menudo con bandas de colores para indicar el valor de su resistencia.



Resistencias de carbono con el código de color sobre un panel de circuitos.

EJEMPLO 26.5

Suponiendo que el campo eléctrico E sea uniforme, determinar su magnitud en un alambre de cobre de calibre 14 (ejemplo 26.4) que transporta una corriente de 1,3 A.

Esquema del problema Podemos determinar el campo eléctrico como la caída de voltaje por unidad de longitud del alambre, $E = V/L$. La caída de voltaje se deduce mediante la ley de Ohm, $V = IR$, y la resistencia por unidad de longitud se da en el ejemplo 26.4.

1. El campo eléctrico es igual a la caída de voltaje por unidad de longitud: $E = \frac{V}{L}$
2. Expresar la ley de Ohm para la caída de voltaje: $V = IR$
3. Aplicar esta expresión en la ecuación de E: $E = \frac{V}{L} = \frac{IR}{L} = I\frac{R}{L}$
4. Utilizar el valor de R/L deducido en el ejemplo 26.4 para calcular E: $E = I\frac{R}{L} = (1{,}3\ \text{A})(8{,}17 \times 10^{-3}\ \Omega/\text{m}) = 1{,}06 \times 10^{-2}\ \text{V/m}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

26.3 ■ La energía en los circuitos eléctricos

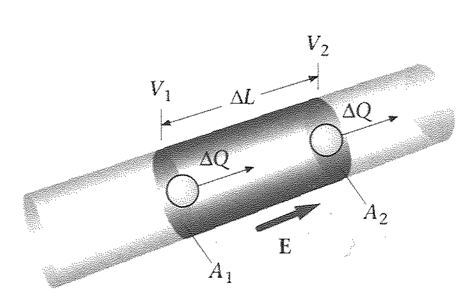


Figura 26.6 Durante un tiempo Δt pasa la cantidad de carga ΔQ a través del área A_1, en donde el potencial es V_1. En el mismo intervalo de tiempo, una cantidad igual de carga abandona el segmento pasando a través del área A_2, en donde el potencial es V_2. El efecto es el mismo que si la misma carga ΔQ penetrase en el segmento a un alto potencial V_1 y le dejase a un bajo potencial V_2, perdiendo, por tanto, energía potencial en el segmento.

Cuando se establece un campo eléctrico en un conductor, los electrones libres se aceleran en un tiempo pequeño, haciendo que el "gas electrónico" incremente su energía cinética; sin embargo, esta energía adicional se convierte rápidamente en energía interna del conductor por las colisiones entre los electrones y los iones reticulares del material. El incremento de energía interna del conductor que da lugar a un aumento de su temperatura se denomina **calor de Joule**.

Consideremos el segmento del alambre de longitud ΔL y área transversal A indicado en la figura 26.6. En el tiempo Δt, la carga ΔQ entra por la izquierda al potencial V_1 y una cantidad igual de carga sale por la derecha al potencial V_2. El efecto es el mismo que si la misma carga ΔQ entrase en el segmento al potencial alto V_1 y saliese con un potencial bajo V_2, perdiendo por tanto la energía potencial en el segmento según la expresión:

$$\Delta U = \Delta Q\,(V_2 - V_1) = \Delta Q\,(-V) = -(\Delta Q)V$$

en donde $V = V_1 - V_2$ es la *disminución* o *caída* de potencial a través del segmento. La energía perdida en este segmento del alambre es, por tanto,

$$-\Delta U = (\Delta Q)V$$

La pérdida de energía por unidad de tiempo es

$$-\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}V = IV$$

en donde $I = \Delta Q/\Delta t$ es la intensidad de la corriente. La energía perdida por unidad de tiempo es la potencia P disipada en el segmento conductor.

$$P = VI \qquad (26.10)$$

Potencia disipada en un conductor

Si I se expresa en amperios y V en voltios, la potencia perdida viene expresada en vatios. La pérdida de potencia es el producto de la disminución de energía potencial por unidad de carga, V, y el flujo de carga por unidad de tiempo. La ecuación 26.10 puede aplicarse a cualquier dispositivo del circuito. La potencia suministrada al dispositivo es el producto de la caída de potencial por la intensidad de la corriente. En un conductor, esta potencia se transforma en energía interna que eleva su temperatura. Utilizando $V = IR$ o $I = V/R$, la ecuación 26.10 puede expresarse en otras formas útiles:

$$P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R} \qquad (26.11)$$

Potencia disipada en una resistencia

EJEMPLO 26.6 **Una resistencia de 12 Ω transporta una corriente de 3 A. Determinar la potencia disipada en esta resistencia.**

Esquema del problema Como conocemos la intensidad y la resistencia, la ecuación más conveniente es $P = I^2R$. De modo alternativo podríamos determinar la caída de potencial de $V = IR$ y luego utilizar $P = IV$.

1. Calcular I^2R: $P = I^2R = (3\text{ A})^2(12\ \Omega) = 108\text{ W}$

www.elsolucionario.net

Comprobación del resultado La caída de potencial a través de la resistencia es $V = IR = (3\ \text{A})(12\ \Omega) = 36\ \text{V}$. Con este resultado se determina la potencia de $P = IV = (3\ \text{A})(36\ \text{V}) = 108\ \text{W}$.

Ejercicio Un alambre de resistencia 5 Ω transporta una corriente de 3 A durante 5 s. (a) ¿Qué potencia se disipa en el cable? (b) ¿Cuánto calor se desprende en ese tiempo? (*Respuestas*: (a) 45 W, (b) 270 J.)



Fuerza electromotriz y baterías

Con objeto de tener una corriente estacionaria en un conductor necesitamos disponer de un suministro de energía eléctrica. Un aparato o dispositivo que suministra energía eléctrica recibe el nombre de fuente de **fuerza electromotriz** o simplemente **fuente de fem**. Ejemplos de estas fuentes son una batería o pila, que convierte la energía eléctrica, o un generador que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Una fuente de fem realiza trabajo sobre la carga que pasa a su través, elevando la energía potencial de la carga. El trabajo por unidad de carga recibe el nombre de **fem**, $\mathcal{E}$, de la fuente. La unidad de fem es el voltio, la misma que la unidad de diferencia de potencial. Una **batería ideal** es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus dos terminales, independientemente del flujo de carga que exista entre ellos. La diferencia de potencial entre los terminales de una batería ideal es igual, en magnitud, a la fem de la batería.

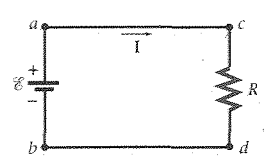


Figura 26.7 Circuito eléctrico simple formado por una batería ideal de fem $\mathcal{E}$, una resistencia R y cables de conexión que se supone carecen de resistencia.

En la figura 26.7 se muestra un circuito sencillo compuesto por una resistencia R conectada a una batería ideal. En estos diagramas la batería se representa por el símbolo ⊣⊢. La resistencia se representa mediante el símbolo -/\/\/\-. Las líneas rectas del circuito indican alambres, hilos o cables de conexión de resistencia despreciable. La fuente de fem mantiene una diferencia de potencial $\mathcal{E}$ entre los puntos a y b, en donde el punto a corresponde al potencial mayor. No existe ninguna diferencia de potencial entre los puntos a y c, o entre los puntos d y b, ya que se admite que el alambre de conexión posee una resistencia despreciable. Por tanto, la diferencia de potencial entre los puntos c y d también es $\mathcal{E}$ y la intensidad de corriente que circula por la resistencia es $I = \mathcal{E}/R$. Como se indica en la figura, la corriente circula en el mismo sentido de las agujas del reloj.

Obsérvese que *dentro* de la fuente de fem, la carga fluye de una región de bajo potencial a otra de mayor potencial, de modo que aumenta su energía potencial.[1] Cuando la carga ΔQ fluye a través de la fuente de fem $\mathcal{E}$, su energía potencial se ve aumentada en la cantidad $\Delta Q\ \mathcal{E}$. En consecuencia, la carga fluye a través del conductor donde pierde su energía térmica. El ritmo con el que la fuente de fem suministra la energía es la potencia de salida:

$$P = \frac{\Delta Q\ \mathcal{E}}{\Delta t} = \mathcal{E} I \qquad (26.12)$$

En el circuito simple de la figura 26.7 la potencia suministrada por la fuente de fem es igual a la disipada en la resistencia.

Una fuente de fem puede considerarse como una especie de bomba de carga que eleva la carga eléctrica desde una región de baja energía potencial a otra región de alta energía potencial. La figura 26.8 muestra una analogía mecánica del circuito eléctrico simple discutido anteriormente.

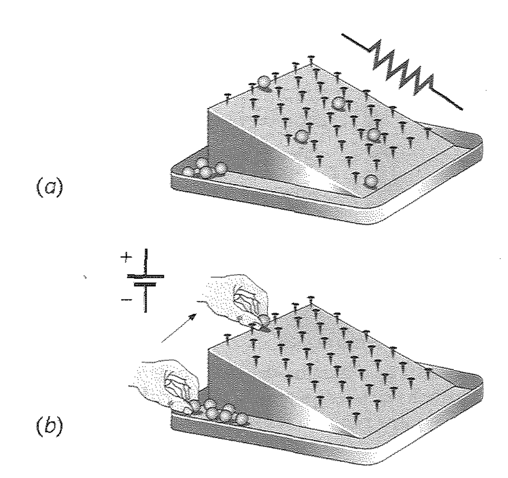


Figura 26.8 Analogía mecánica de un circuito simple formado por una resistencia y una fuente de fem. (*a*) Las bolitas parten de una altura h sobre el fondo y se aceleran entre las colisiones con los clavos por la acción del campo gravitatorio. Los clavos son análogos a los iones reticulares de la resistencia. Durante los choques, las bolitas transfieren la energía cinética que ganan entre las colisiones a los clavos. Debido a las múltiples colisiones, las bolitas poseen solo una pequeña y aproximadamente constante velocidad de desplazamiento hacia el fondo. (*b*) Cuando llegan al fondo, un muchacho las recoge y las devuelve a su altura original h, comenzando de nuevo el proceso. El muchacho que realiza el trabajo mgh sobre cada bolita es una analogía de la fuente de fem. La fuente de energía en este caso es la energía interna química del muchacho.

En una **batería real** la diferencia de potencial entre los bornes de la batería, denominada **tensión en los bornes** *no es simplemente igual al valor de la fem de la batería*. Consideremos el simple circuito formado por una batería real y una resistencia, como muestra la figura 26.9. Si la corriente varía modificando la resistencia R y se mide la tensión en los bornes, resulta que ésta decrece ligeramente a medida que crece la intensidad de la corriente, justo como si existiera una pequeña resistencia dentro de la batería (figura 26.10).

[1] Cuando una batería se carga por medio de un generador o por otra batería, la carga fluye desde una región de alto potencial a otra de bajo potencial dentro de la batería a cargar, perdiendo así energía potencial electrostática. La energía perdida se almacena en la batería a cargar.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



Figura 26.9 Fotografía de un circuito simple formado por una batería real, una resistencia y cables de conexión.

Así pues, una batería real puede considerarse como una batería ideal de fem $\mathcal{E}$ más una pequeña resistencia r, denominada **resistencia interna** de la batería.

La figura 26.11 muestra un circuito simple formado por una batería real y una resistencia. Si la corriente en el circuito es I, el potencial en el punto a se relaciona con el potencial en el punto b mediante

$$V_a = V_b + \mathcal{E} - Ir$$

Por tanto, la tensión en los bornes es

$$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir \qquad \textbf{(26.13)}$$

La tensión en los bornes de la batería disminuye linealmente con la intensidad de corriente, como se indica en la figura 26.10. La caída de potencial a lo largo de la resistencia R es IR y es igual a la tensión en los bornes:

$$IR = V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir$$

De aquí resulta para la intensidad de corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad \textbf{(26.14)}$$

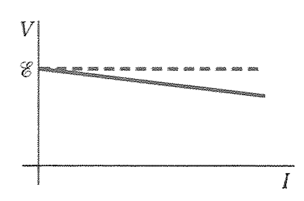


Figura 26.10 Tensión en los bornes V en función de I para una batería real. La línea de puntos muestra la tensión en los bornes de una batería ideal que tiene el mismo valor de $\mathcal{E}$.

La tensión en los bornes dada la ecuación 26.13 es inferior a la fem de la batería debido a la caída de potencial que tiene lugar dentro de la resistencia interna de la batería. Las baterías reales, tales como una buena batería de coche, poseen una resistencia interna del orden de unas pocas centésimas de ohmio, de tal modo que la tensión en los bornes es aproximadamente igual a la fem, a menos que la intensidad de corriente sea muy grande. Un síntoma de mala batería, es poseer una resistencia interna elevada. Si sospechamos que la batería de 12 V de un automóvil es mala, y comprobamos la tensión en los bornes con un voltímetro, que extrae una corriente pequeña para hacer la medida, esto no es suficiente. Hay que comprobar la tensión en los bornes mientras se extrae corriente, por ejemplo, tratando de arrancar el coche. Si la tensión en los bornes baja considerablemente, es una prueba de que la batería posee una alta resistencia interna y por tanto, es de baja calidad.

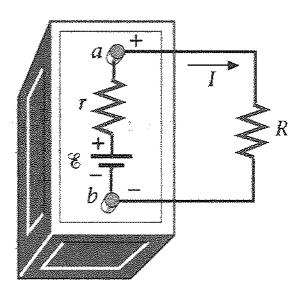


Figura 26.11 Diagrama del circuito de la figura 26.9. Una batería real puede representarse por una batería ideal de fem $\mathcal{E}$ y una pequeña resistencia r.

Frecuentemente las baterías se especifican en amperio-horas (A · h), lo que indica la carga total que pueden suministrar:

$$1\ \text{A} \cdot \text{h} = 1\ \text{C/S}\ (3600\ \text{s}) = 3600\ \text{C}$$

La energía total almacenada en la batería es la carga total multiplicada por la fem

$$W = Q\mathcal{E} \qquad \textbf{(26.15)}$$

www.elsolucionario.net



■ EJEMPLO 26.7

Una resistencia de 11 Ω se conecta a través de una batería de fem 6 V y resistencia interna 1 Ω. Determinar (a) la intensidad de corriente, (b) la tensión en los bornes de la batería, (c) la potencia suministrada por la fem, (d) la potencia suministrada a la resistencia externa y (e) la potencia disipada por la resistencia interna de la batería. (f) Si la capacidad de la batería es 150 A · h, ¿cuánta energía almacena?

Esquema del problema El diagrama del circuito es el mismo que el de la figura 26.11. Determinaremos la intensidad de la corriente mediante la ecuación 26.14 y la utilizaremos para calcular la tensión en los bornes de la batería y la potencia suministrada a las resistencias.

(a) La ecuación 26.14 nos da la intensidad: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r} = \dfrac{6\ \text{V}}{11\ \Omega + 1\ \Omega} = 0{,}5\ \text{A}$

(b) Conocida la intensidad calculamos la tensión en los bornes: $V_a - V_b = \mathscr{E} - Ir = 6\text{ V} - (0{,}5\text{ A})(1\ \Omega) = 5{,}5\text{ V}$

(c) La potencia suministrada por la fuente de fem es igual a $\mathscr{E} I$: $P = \mathscr{E} I = (6\text{ V})(0{,}5\text{ A}) = 3\text{ W}$

(d) La potencia suministrada a la resistencia externa es I^2R: $I^2R = (0{,}5\text{ A})^2(11\ \Omega) = 2{,}75\text{ W}$

(e) La potencia disipada en la resistencia interna es I^2r: $I^2r = (0{,}5\text{ A})^2(1\ \Omega) = 0{,}25\text{ W}$

(f) La energía total almacenada por la batería es la fem multiplicada por su carga total: $W = Q\mathscr{E} = 150\text{ A}\cdot\text{h}\,\dfrac{3600\text{ C}}{1\text{ A}\cdot\text{h}} \times 6\text{ V} = 3{,}24\text{ MJ}$

Observaciones El valor de la resistencia interna se ha exagerado en este ejemplo para simplificar los cálculos. En otros ejemplos simplemente se ignora la resistencia interna. De los 3 W de potencia suministrados por la batería, 2,75 W se disipan en forma de calor de Joule en la resistencia externa y 0,25 W se disipan también en forma de calor de Joule en la resistencia interna de la batería.

EJEMPLO 26.8 ¡Inténtelo!

Tenemos una batería de una determinada fem y una resistencia interna r. ¿Qué valor de la resistencia externa R debemos conectar entre los bornes para obtener el máximo calor de Joule en R?

Esquema del problema El diagrama del circuito es el mismo de la figura 26.11. La potencia suministra a R es I^2R, en donde $I = \mathscr{E}/(R + r)$. Para determinar la potencia máxima, se calcula la derivada dP/dR y se iguala a cero.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Utilizar la ecuación 26.14 para eliminar I de $P = I^2R$, de modo que P se exprese en función de R y las constantes $\mathscr{E}$ y r solamente.	$P = \dfrac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2} = \mathscr{E}^2 R(R+r)^{-2}$
2. Calcular la derivada dP/dR.	$\dfrac{dP}{dR} = \mathscr{E}^2(R+r)^{-2} - 2\mathscr{E}^2 R(R+r)^{-3}$
3. Hacer $dP/dR = 0$ y deducir R en función de r.	$R = r$

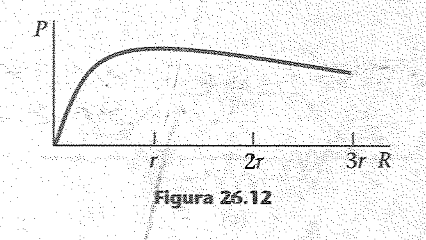


Figura 26.12

Observaciones El valor máximo de P ocurre cuando $R = r$, es decir, cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna. Un resultado semejante tiene lugar en los circuitos de corriente alterna. La elección $R = r$ para maximizar la potencia se conoce como *igualación de impedancias*. En la figura 26.12 se muestra un gráfico de P en función de R.

Combinaciones de resistencias ■ 26.4

El análisis de un circuito puede simplificarse reemplazando dos o más resistencias por una sola resistencia equivalente que transporte la misma corriente con la misma caída de potencial que las resistencias originales. La sustitución de una serie de resistencias por una resistencia equivalente es una operación análoga a la sustitución de una serie de condensadores por un condensador equivalente, que fue analizada en el capítulo 25.

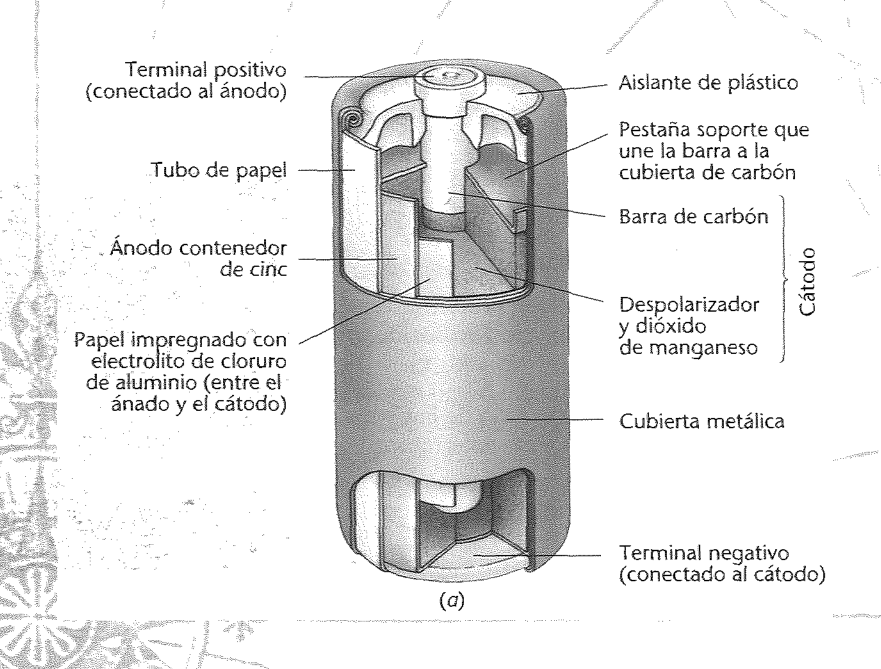
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

explorando la naturaleza

Tecnología de baterías

Una batería es un conjunto de células químicas, cada una de las cuales consiste en dos electrodos metálicos sumergidos en una solución conductora llamada electrolito. Debido a las reacciones químicas que tienen lugar ente los conductores y el electrolito, un electrodo, el ánodo, se carga positivamente y el otro, el cátodo, se carga negativamente. *(a)* En una pila seca el electrolito está for-



www.elsolucionario.net

Resistencias en serie

Cuando dos o más resistencias están conectadas como R_1 y R_2 en la figura 26.13*a*, de modo que transportan la misma corriente *I*, se dice que las resistencias están conectadas en serie. La caída de potencial a través de R_1 es IR_1 y a través de R_2 es IR_2. La caída de potencial a través de las dos resistencias es la suma de las caídas de potencial a través de las resistencias individuales:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \tag{26.16}$$

La resistencia equivalente R_{eq} que presenta la misma caída de potencial *V* cuando transporta la misma corriente *I* se encuentra haciendo *V* igual a IR_{eq} (figura 26.13*b*). Por tanto, R_{eq} viene dada por

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Cuando hay más de dos resistencias en serie, la resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \tag{26.17}$$

Resistencia equivalente para resistencias en serie

I — a, b, c — R_1, R_2

(*a*)

I — a, c — $R_{eq} = R_1 + R_2$

(*b*)

Figura 26.13 (*a*) Dos resistencias en serie transportan la misma corriente. (*b*) Las resistencias de la parte (*a*) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$, que da la misma caída de potencial total cuando circula la misma corriente que en la parte (*a*).

www.elsolucionario.net

mado por una pasta de cloruro amónico y otros aditivos. Desarrolla una fem de 1,5 V. (*b*) Acumulador de 12 V formado por seis elementos que son recargables. Cada elemento posee un ánodo de plomo, un cátodo de dióxido de plomo y una solución acuosa de ácido sulfúrico como electrolito. (*c*) Esta batería gigante formada por 200 elementos fue construida en 1870 en el sótano de la Royal Institution, Londres, por Humphry Davy.

Borne negativo (conectado al cátodo)
Partición entre elementos
Borne positivo (conectado al ánodo)
Electrolito de ácido sulfúrico en donde están sumergidas las placas anódica y catódica
Placa anódica de plomo
Placa catódica de dióxido de plomo
Separadores de las placas anódica y catódica
Envoltura de plástico

(*b*)

(*c*)

www.elsolucionario.net

Resistencias en paralelo

Dos resistencias conectadas como indica la figura 22.14*a* de modo que entre ellas se establece la misma diferencia de potencial, se dice que están conectadas en paralelo. Obsérvese que las resistencias están conectadas en ambos extremos por alambres. Sea I la corriente que fluye del punto a al punto b. En el punto a la corriente se divide en dos partes, I_1 en la resistencia R_1 e I_2 en R_2. La corriente total es la suma de las corrientes individuales:

$$I = I_1 + I_2 \tag{26.18}$$

Sea $V = V_a - V_b$ la caída de potencial a través de cada resistencia. En función de las corrientes y resistencias,

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 \tag{26.19}$$

La resistencia equivalente de una combinación de resistencias en paralelo se define como aquella resistencia R_{eq} para la cual la misma corriente total I produce la caída de potencial V (figura 26.14*b*):

$$R_{eq} = \frac{V}{I}$$

Resolviendo esta ecuación para I y teniendo en cuenta que $I = I_1 + I_2$, tenemos:

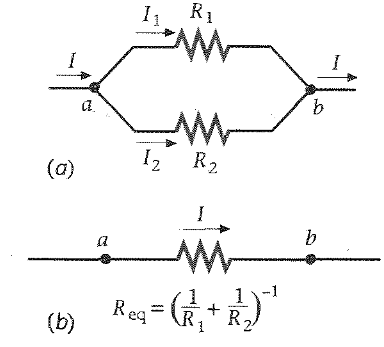


Figura 26.14 (*a*) Dos resistencias están combinadas en paralelo cuando se conectan juntas en ambos extremos, de modo que la caída de potencial es la misma a través de cada una de ellas. (*b*) Las dos resistencias de la parte (*a*) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente R_{eq} relacionada con R_1 y R_2 por $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$.

 www.elsolucionario.net

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \tag{26.20}$$

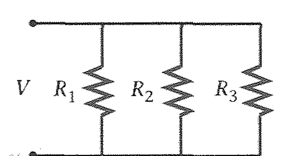


Figura 26.15 Tres resistencias en paralelo.

en donde hemos utilizado la ecuación 26.19 para I_1 e I_2. La resistencia equivalente de las dos resistencias en paralelo viene dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Este resultado puede generalizarse para combinaciones como las de la figura 26.15, en la cual se conectan tres o más resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \tag{26.21}$$

Resistencia equivalente para resistencias en paralelo

Ejercicio Una resistencia de 2 Ω y otra de 4 Ω se conectan (a) en serie y (b) en paralelo. Determinar las resistencias equivalentes para ambos casos. (*Respuestas*: (a) 6 Ω, (b) 1,33 Ω.)

EJEMPLO 26.9

Una resistencia de 4 Ω y otra de 6 Ω se conectan en paralelo como indica la figura 26.16 y una diferencia de potencial de 12 V se aplica a través de la combinación. Determinar (a) la resistencia equivalente, (b) la intensidad total de la corriente, (c) la corriente que circula por cada resistencia y (d) la potencia disipada en cada resistencia.

Figura 26.16

Esquema del problema Elegir símbolos y direcciones para las corrientes en el circuito de la figura 26.17.

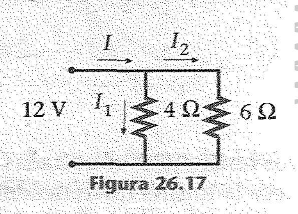


Figura 26.17

(a) Calcular la resistencia equivalente:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{3}{12\ \Omega} + \frac{2}{12\ \Omega} = \frac{5}{12\ \Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{12\ \Omega}{5} = 2{,}4\ \Omega$$

(b) La intensidad total es igual al cociente entre la caída de potencial y la resistencia equivalente:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12\ \text{V}}{2{,}4\ \Omega} = 5\ \text{A}$$

(c) La intensidad que circula por cada resistencia se obtiene mediante la ecuación 26.19 y el hecho de que la caída de potencial es 12 V a través de cada resistencia:

$$V = IR$$

$$I_4 = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega} = 3{,}0\ \text{A}$$

$$I_6 = \frac{12\ \text{V}}{6\ \Omega} = 2{,}0\ \text{A}$$

(d) Utilizar estas corrientes para determinar la potencia disipada en cada resistencia:

$$P_4 = I_4^2 R = (3{,}0\ \text{A})^2(4\ \Omega) = 36\ \text{W}$$

$$P_6 = I_6^2 R = (2{,}0\ \text{A})^2(6\ \Omega) = 24\ \text{W}$$

(e) Utilizar $P = VI$ para determinar la potencia suministrada por la batería:

$$P = VI = (5\ \text{A})(12\ \text{V}) = 60\ \text{W}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Comprobación del resultado La potencia suministrada por la batería es igual a la potencia disipada en las dos resistencias $P = 60$ W = 36 W + 24 W. En la etapa (d) podíamos haber calculado la potencia disipada en cada resistencia a partir de $P_4 = VI_4 = (12\text{ V})(3{,}0\text{ A}) = 36$ W y $P_6 = VI_6 = (12\text{ V})(2{,}0\text{ A}) = 24$ W.

EJEMPLO 26.10

¡Inténtelo!

Una resistencia de 4 Ω y otra de 6 Ω se conectan en serie con una batería de fem 12 V y resistencia interna despreciable. Determinar (a) la resistencia equivalente, (b) la intensidad que circula por el circuito, (c) la caída de potencial a través de cada resistencia, (d) la potencia disipada en cada resistencia y (e) la potencia total disipada.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
(a) 1. Dibujar un diagrama del circuito (figura 26.18).	Figura 26.18 (4 Ω, 6 Ω, I, +, −, 12 V)
2. Calcular R_{eq} para las dos resistencias en serie.	$R_{eq} = 10$ Ω
(b) Utilizar $V = IR_{eq}$ para determinar la corriente.	$I = 1{,}2$ A
(c) Utilizar la ley de Ohm para calcular la caída de potencial a través de cada resistencia.	4,8 V, 7,2 V
(d) Determinar la potencia disipada en cada resistencia mediante $P = I^2R$. Comprobar el resultado utilizando $P = VI$ para cada resistencia.	5,76 W, 8,64 W
(e) Sumar los resultados en (d) para determinar la potencia total. Comprobar el resultado utilizando $P = VI$ y $P = I^2R_{eq}$.	14,4 W

Observaciones En el circuito en serie se disipa mucha menos potencia que en el circuito correspondiente en paralelo del ejemplo 26.9.

Obsérvese en el ejemplo 26.9 que la resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es menor que la resistencia de cualquiera de ellas por separado. Este es un resultado general. Supongamos que tenemos una sola resistencia R_1 que transporta la corriente I_1 con la caída de potencial $V = I_1R_1$. Disponemos ahora una segunda resistencia R_2 en paralelo. Si la caída de potencial sigue siendo la misma, la segunda resistencia debe transportar una corriente adicional $I_2 = V/R_2$ sin afectar la corriente original I_1. La resistencia equivalente es $V/(I_1 + I_2)$ que es menor que $R_1 = V/I_1$. Obsérvese también del ejemplo 26.9 que el cociente de las corrientes correspondientes a las dos resistencias en paralelo es igual a la relación inversa de las resistencias. Este resultado general se obtiene de la ecuación 26.19.

$$I_1R_1 = I_2R_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(resistencias en paralelo)} \qquad \textbf{(26.22)}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 26.11
¡Inténtelo!

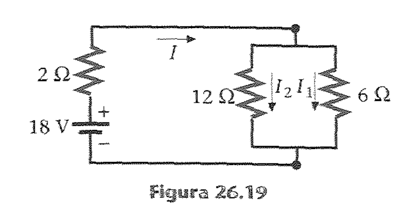


Figura 26.19

En el circuito de la figura 26.19 determinar (a) la resistencia equivalente del circuito, (b) la intensidad total en la fuente de fem, (c) la caída de potencial a través de cada resistencia y (d) la intensidad transportada por cada resistencia.

Esquema del problema Para determinar la resistencia equivalente del circuito, reemplazar en primer lugar las dos resistencias en paralelo por su resistencia equivalente. La ley de Ohm puede entonces utilizarse para determinar la intensidad y las caídas de potencial.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
(a) 1. Determinar la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de las resistencias de 6 y 12 Ω.	$R_{eq} = 4\ \Omega$
2. Combinar el resultado de la etapa 1 con la resistencia en serie de 2 Ω para determinar la resistencia equivalente total del circuito.	$R'_{eq} = 6\ \Omega$
(b) Determinar la corriente total mediante la ley de Ohm. Esta es la corriente de la resistencia de 2 Ω.	$I = 3$ A
(c) 1. Determinar la caída de potencial a través de la resistencia de 2 Ω a partir de $V_2 = IR$.	$V_2 = 6$ V
2. Determinar la caída de potencial a través de la asociación en paralelo utilizando $V_p = IR_{eq}$.	$V_p = 12$ V
(d) Determinar la corriente en las resistencias de 6 y 12 Ω a partir de $I = V_p/R$.	$I_6 = 2$ A, $I_{12} = 1$ A

Comprobación del resultado Obsérvese que la corriente en la resistencia de 6 Ω es el doble que en la resistencia de 12 Ω, como era de esperar. Además, estas dos corrientes se suman para obtener I, la corriente total del circuito. Obsérvese finalmente que las caídas de potencial a través de la resistencia de 2 Ω y de la asociación en paralelo, sumadas, equivalen a la fem de la batería; $V_2 + V_p = 6\text{ V} + 12\text{ V} = 18$ V.

Ejercicio Repetir este ejemplo con la resistencia de 6 Ω reemplazada por una alambre de resistencia despreciable. (*Respuesta*: (a) $R'_{eq} = 2\ \Omega$, (b) $I = 9$ A, (c) $V_2 = 18$ V, $V_0 = 0$, $V_{12} = 0$, (d) $I_2 = 9$ A, $I_0 = 9$ A, $I_{12} = 0$.)

Ejercicio Repetir este ejemplo para el caso en que la resistencia de 6 Ω crece hasta infinito. (*Respuesta*: (a) $R'_{eq} = 14\ \Omega$, (b) $I = 1{,}29$ A, (c) $V_2 = 2{,}57$ V, $V_\infty = 15{,}4$ V, $V_{12} = 15{,}4$ V, (d) $I_2 = 1{,}29$ A, $I_\infty = 0$, $I_{12} = 1{,}29$ A.)

EJEMPLO 26.12
¡Inténtelo!

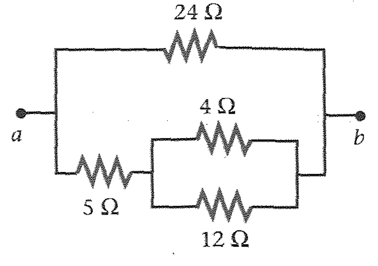


Figura 26.20

Determinar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* para la combinación de resistencias indicada en la figura 26.20.

Esquema del problema Esta complicada asociación puede analizarse paso a paso. En primer lugar se determina la resistencia equivalente R_{eq} de la asociación en paralelo de las resistencias de 4 y 12 Ω. Después se combina el resultado con la resistencia de 5 Ω que está en serie con la asociación en paralelo. Entonces quedan dos resistencias en paralelo.

www.elsolucionario.net

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Determinar la resistencia equivalente de las resistencias en paralelo de 4 y 12 Ω.	$R_{eq} = 3\ \Omega$
2. Determinar la resistencia equivalente R'_{eq} de R_{eq} en serie con la resistencia de 5 Ω.	$R'_{eq} = 8\ \Omega$
3. Determinar la resistencia equivalente R'_{eq} en paralelo con la resistencia de 24 Ω.	$R''_{eq} = 6\ \Omega$

Reglas de Kirchhoff 26.5

Existen muchos circuitos simples, tales como el indicado en la figura 26.21, que no pueden analizarse meramente reemplazando combinaciones de resistencias por una resistencia equivalente. Por ejemplo, las dos resistencias R_1 y R_2 de este circuito parecen estar en paralelo, pero no es así. La caída de potencial no es la misma a través de ambas resistencias, debido a la presencia de la fuente de fem $\mathcal{E}_2$ en serie con R_2. Además R_1 y R_2 no transportan la misma corriente, pues no están en serie.

Existen dos reglas, llamadas **reglas de Kirchhoff**, que se aplican a éste y a cualquier otro circuito:

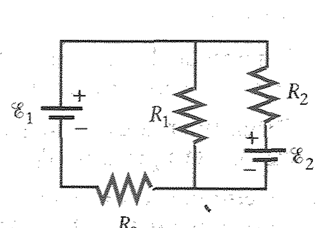


Figura 26.21 Circuito simple en el que no pueden sustituirse las resistencias en serie o en paralelo por su resistencia equivalente. Las diferencias de potencial a lo largo de las resistencias R_1 y R_2 no son iguales debido a la existencia de la fuente de fem $\mathcal{E}_2$ y por tanto no están en paralelo. (Las resistencias en paralelo deben conectarse entre sí por sus extremos.) Las resistencias no soportan la misma corriente y, por tanto, tampoco están en serie.

1. La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser igual a cero.
2. En un punto o nudo de ramificación de un circuito en donde puede dividirse la corriente, la suma de las corrientes que entran en el nudo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

Reglas de Kirchhoff

La primera regla de Kirchhoff, llamada **regla de las mallas**, se basa en el principio de conservación de la energía. Si tenemos una carga q en un punto donde el potencial es V, la energía potencial de la carga es qV. Cuando la carga recorre un bucle en un circuito, pierde o gana energía al atravesar resistencias, baterías u otros elementos, pero cuando vuelve a su punto de partida, su energía debe ser de nuevo qV. Es decir, *el cambio neto en el potencial debe ser cero.*

La segunda regla de Kirchhoff, llamada **regla de los nudos**, se deduce de la conservación de la carga. La figura 26.22 muestra la unión o nudo de tres conductores que transportan las corriente I_1, I_2 e I_3. Puesto que no existe ninguna causa para que se creen o se destruyan cargas en este punto, la conservación de la carga implica la regla de los nudos que en este caso nos da

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{26.23}$$

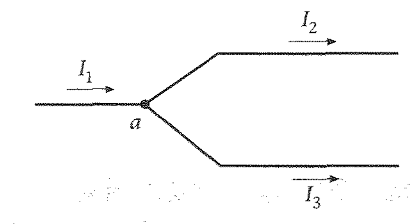


Figura 26.22 Ilustración de la regla de los nudos de Kirchhoff. La corriente I_1 en el punto a es igual a la suma $I_2 + I_3$ de las corrientes que salen del punto a.

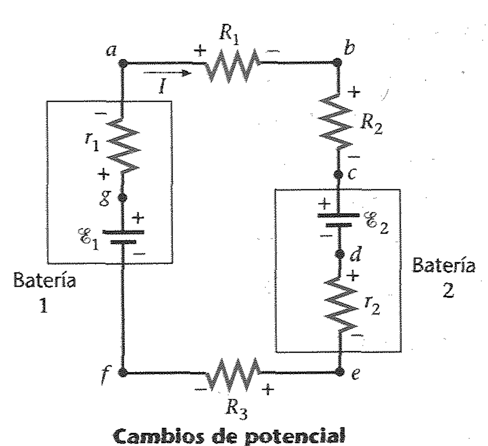
Circuitos de una sola malla

Como ejemplo de aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff consideremos el circuito de la figura 26.23 formado por dos baterías con resistencias internas r_1 y r_2 y tres resistencias externas. Deseamos determinar la corriente en función de las fems y resistencias que suponemos conocidas.

Supongamos que I circula en el sentido de las agujas del reloj, según está indicado en la figura, y aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas recorriendo el circuito en la dirección supuesta de la corriente, comenzando en el punto a. Las caídas y aumentos de

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Cambios de potencial

$a \to b$	Caída IR_1
$b \to c$	Caída IR_2
$c \to d$	Caída $\mathscr{E}_2$
$d \to e$	Caída Ir_2
$e \to f$	Caída IR_3
$f \to g$	Aumento $\mathscr{E}_1$
$g \to a$	Caída Ir_1

Figura 26.23 Circuito formado por dos baterías y tres resistencias externas. Los signos más y menos sobre las resistencias nos ayudan a recordar cuál extremo de cada resistencia está a mayor potencial de acuerdo con la dirección de la corriente que hemos supuesto.

potencial vienen dados en la figura. Obsérvese que hay una caída de potencial al atravesar la fuente de fem entre c y d y un incremento de potencial al atravesar la fuente de potencial entre f y g. Comenzando en el punto a, la regla de las mallas de Kirchhoff nos da:

$$-IR_1 - IR_2 - \mathscr{E}_2 - Ir_2 - IR_3 + \mathscr{E}_1 - Ir_1 = 0$$

Despejando el valor de la intensidad, se obtiene

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} \qquad \textbf{(26.24)}$$

Obsérvese que si $\mathscr{E}_2$ es mayor que $\mathscr{E}_1$, se obtiene un número negativo para la corriente I indicando que hemos escogido el sentido equivocado para I.

Supongamos en este ejemplo que $\mathscr{E}_1$ es la fem mayor. En la batería 2, la carga fluye del potencial más alto al más bajo. Por tanto, una carga ΔQ que sale de la batería 2 desde el punto c hasta el punto d pierde una energía $\mathscr{E}_2\,\Delta Q$. Si esta batería es recargable, la energía eléctrica se convierte en energía química y se almacena en ella; la batería 2 está *cargándose*. (El resto de la energía se disipa en la resistencia interna.)

El análisis del circuito se simplifica usualmente si elegimos un punto como potencial cero y referimos a éste los potenciales de los restantes puntos. Como sólo son importantes las diferencias de potencial, cualquier punto del circuito puede escogerse como potencial cero. En el siguiente ejemplo se ha escogido el punto f como potencial cero. Esto viene indicado en el circuito por el símbolo ⏚ en el punto f.[1]

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 26.13

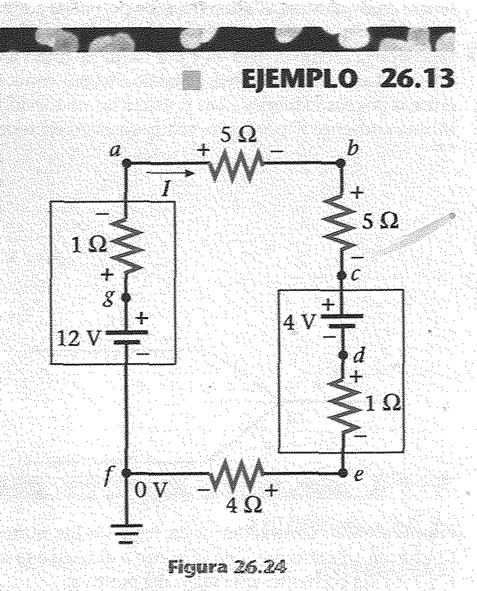


Figura 26.24

Los elementos del circuito de la figura 26.23 tiene los valores $\mathscr{E}_1$ =12 V, $\mathscr{E}_2$ = 4 V, $r_1 = r_2$ = 1 Ω, $R_1 = R_2$ = 5 Ω, R_3 = 4 Ω como indica la figura 26.24. (a) Hallar los potenciales en los puntos *a* hasta *g* indicados en la figura admitiendo que el potencial en el punto *f* es cero. (b) Determinar la potencia de entrada y de salida en el circuito.

Esquema del problema Para determinar las diferencias de potencial necesitamos determinar en primer lugar la corriente I que circula por el circuito. La caída de voltaje a través de cada resistencia es entonces IR. Para discutir el balance energético, calcularemos la potencia de entrada y de salida en cada elemento utilizando las ecuaciones 26.10 y 26.11.

(a) 1. La corriente I en el circuito se obtiene a partir de la ecuación 26.24:

$$I = \frac{12\text{ V} - 4\text{ V}}{5\,\Omega + 5\,\Omega + 4\,\Omega + 1\,\Omega + 1\,\Omega} = \frac{8\text{ V}}{16\,\Omega} = 0{,}5\text{ A}$$

[1] Como vimos en el capítulo 22, la tierra puede cosiderarse como un conductor muy extenso con una provisión casi ilimitada de carga, lo cual significa que el potencial de la tierra permanece esencialmente constante. En la práctica, los circuitos eléctricos suelen conectarse a tierra a través de un punto del circuito. La cubierta metálica externa de una máquina eléctrica de lavar, por ejemplo, suele conectarse a tierra uniéndola con un cable a un tubo de circulación del agua que está en contacto con la tierra. Como todos los cuerpos así unidos a tierra se encuentran al mismo potencial, es conveniente designar este potencial como cero.

2. Determinamos a continuación el potencial en cada uno de los puntos especificados en el circuito:

$$V_g = V_f + \mathcal{E}_1 = 0 + 12\text{ V} = 12\text{ V}$$
$$V_a = V_g - Ir_1 = 12\text{ V} - (0,5\text{ A})(1\ \Omega) = 11,5\text{ V}$$
$$V_b = V_a - IR_1 = 11,5\text{ V} - (0,5\text{ A})(5\ \Omega) = 9\text{ V}$$
$$V_c = V_b - IR_2 = 9\text{ V} - (0,5\text{ A})(5\ \Omega) = 6,5\text{ V}$$
$$V_d = V_c - \mathcal{E}_2 = 6,5\text{ V} - 4\text{ V} = 2,5\text{ V}$$
$$V_e = V_d - Ir_2 = 2,5\text{ V} - (0,5\text{ A})(1\ \Omega) = 2,0\text{ V}$$
$$V_f = V_e - IR_3 = 2,0\text{ V} - (0,5\text{ A})(4\ \Omega) = 0$$

(b) 1. En primer lugar se calcula la potencia suministrada por la fuente de fem $\mathcal{E}_1$:

$$P_{\mathcal{E}_1} = \mathcal{E}_1 I = (12\text{ V})(0,5\text{ A}) = 6\text{ W}$$

2. Una parte de esta potencia se disipa en las resistencias, tanto internas como externas:

$$P_R = I^2R_1 + I^2R_2 + I^2R_3 + I^2r_1 + I^2r_2$$
$$= (0,5\text{ A})^2(5\ \Omega + 5\ \Omega + 4\ \Omega + 1\ \Omega + 1\ \Omega) = 4,0\text{ W}$$

3. Los restantes 2 W de potencia se destinan a cargar la batería 2:

$$P_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E}_2 I = (4\text{ V})(0,5\text{ A}) = 2\text{ W}$$

Observaciones La figura 26.25 muestra los potenciales en todos los puntos señalados, comenzando y terminando con el punto *f*.

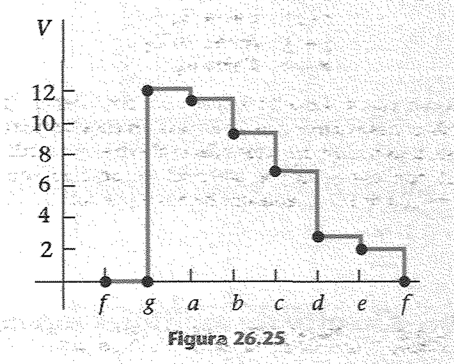


Figura 26.25

Obsérvese que el voltaje en bornes en la batería del ejemplo 26.13 que se está cargando es igual a $V_c - V_e = 4,5$ V, cuyo valor es mayor que el de la fem de la batería. Debido a su resistencia interna una batería no es completamente reversible. Si la misma batería de 4 V tuviese que suministrar 0,5 A a un circuito externo, su voltaje en bornes sería de 3,5 V (suponiendo de nuevo que el valor de su resistencia interna es de 1 Ω). Si la resistencia interna es muy pequeña, el voltaje en bornes de la batería es aproximadamente igual a su fem, tanto si cede corriente a un circuito externo como si se está cargando. Algunas baterías reales, como los acumuladores utilizados en los coches, son prácticamente reversibles y pueden recargar fácilmente; otros tipos de baterías no lo son. Si se intenta recargar una de éstas mediante el sistema de hacer pasar corriente a través de ella desde su polo positivo al negativo, en la mayor parte de los casos, sino en todos, la energía suministrada se disipa en forma de calor y no en energía química de la pila, y ésta puede explotar.



EJEMPLO 26.14

Una batería de automóvil en buenas condiciones se conecta mediante cables a otra batería debilitada para proceder a su carga (a) ¿A qué borne de la batería débil debemos conectar el borne positivo de la batería buena? (b) Suponer que ésta tiene una fem $\mathcal{E}_1 = 12$ V mientras que la débil tiene una fem $\mathcal{E}_2 = 11$ V, las resistencias internas de las baterías son $r_1 = r_2 = 0,02\ \Omega$ y la resistencia de los cables es $R = 0,01\ \Omega$ (todos estos valores son típicos). ¿Cuál será la corriente de carga? (c) ¿Y si las baterías se conectan incorrectamente, cuál sería la corriente?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) Para cargar la batería débil se conectan entre sí los bornes positivos de ambas baterías, así como los bornes negativos, a fin de que pueda suministrarse carga a través de la batería débil desde el borne positivo al borne negativo. La figura 26.26 muestra el diagrama de circuito de este proceso:

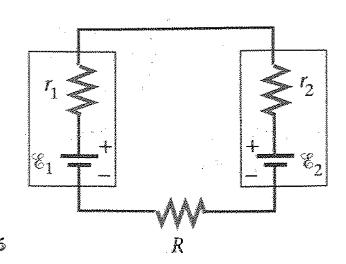


Figura 26.26

(b) Mediante la regla de las mallas de Kirchhoff se determina la corriente de carga:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12\text{ V} - 11\text{ V}}{0{,}05\ \Omega} = 20\text{ A}$$

(c) Si las baterías se conectan incorrectamente, terminales positivos con negativos, las fems se suman:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12\text{ V} + 11\text{ V}}{0{,}05\ \Omega} = 460\text{ A}$$

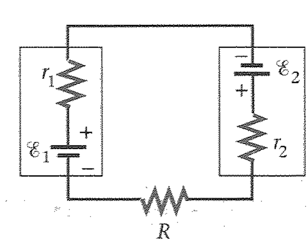


Figura 26.27 Dos baterías conectadas incorrectamente.

Observaciones Si las baterías se conectan incorrectamente como indica la figura 26.27, la resistencia total del circuito es del orden de centésimas de un ohmio, la corriente es muy grande y ambas baterías pueden explotar produciendo un chaparrón de ácido hirviente.

Circuito de múltiples mallas

Para analizar circuitos que contienen más de una malla, utilizaremos ambas reglas de Kirchhoff, con la regla de los nudos aplicada a aquellos puntos donde la corriente se divide en dos o más partes.



EJEMPLO 26.15

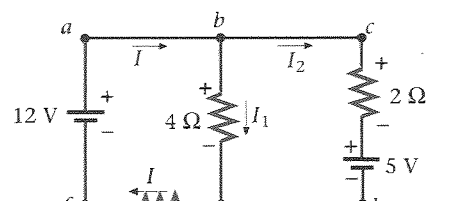


Figura 26.28

(a) Determinar la corriente en cada parte del circuito mostrado en la figura 26.28. (b) Calcular la energía disipada en 3 s en la resistencia de 4 Ω.

Esquema del problema Como existen tres intensidades de corriente a determinar, necesitaremos tres condiciones. Una condición procede de aplicar la regla de los nudos al punto *b*. (Igualmente podía aplicarse al punto *e*, pero obtendríamos la misma información.) Las otras dos condiciones se obtienen mediante la regla de las mallas. Existen tres mallas en el circuito: las dos interiores *abefa* y *bcdeb* y la exterior *abcdefa*. Podemos utilizar dos cualesquiera de ellas —la tercera nos daría una información redundante. La dirección de la corriente I_1 de *b* a *e* no se conoce antes de analizar el circuito. Los signos + y – de la resistencia de 4 Ω corresponden a la dirección supuesta de I_1 de *b* a *e*.

(a) 1. Aplicar la regla de los nudos al punto *b*:

$$I = I_1 + I_2$$

2. Aplicar la regla de las mallas al circuito exterior *abcdefa*:

$$12\text{ V} - (2\ \Omega)I_2 - 5\text{ V} - (3\ \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

3. Dividir la ecuación anterior por 1 Ω, recordando que (1 V)/(1 Ω) = 1 A, y simplificar:

$$7\text{ A} - 3I_1 - 5I_2 = 0$$

4. Para la tercera condición aplicar la regla de las mallas a la malla izquierda *abefa*:

$$12\text{ V} - (4\ \Omega)I_1 - (3\ \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

$$12\text{ A} - 7I_1 - 3I_2 = 0$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

5. Los resultados de las etapas 3 y 4 pueden combinarse para resolver I_1 e I_2. Para hacer esto, multiplicar el resultado de la etapa 3 por 3 y el resultado de la etapa 4 por 5:

$$21\text{ A} - 9I_1 - 15I_2 = 0$$
$$60\text{ A} - 35I_1 - 15I_2 = 0$$

6. Restando miembro a miembro las ecuaciones de la etapa 5 se elimina I_2 y se despeja I_1:

$$39\text{ A} - 26I_1 = 0$$
$$I_1 = \frac{39\text{ A}}{26} = 1{,}5\text{ A}$$

7. Sustituir I_1 en los resultados de las etapas 3 o 4 para despejar I_2. Aquí hemos elegido la etapa 3:

$$7\text{ A} - 3(1{,}5\text{ A}) - 5I_2 = 0$$
$$I_2 = \frac{2{,}5\text{ A}}{5} = 0{,}5\text{ A}$$

8. Finalmente, conocidas I_1 e I_2 se determina I mediante la ecuación de la etapa 1:

$$I = I_1 + I_2 = 1{,}5\text{ A} + 0{,}5\text{ A} = 2{,}0\text{ A}$$

(b) 1. La potencia disipada en la resistencia de 4 Ω se determina mediante $P = I_1^2R$:

$$P = I_1^2R = (1{,}5\text{ A})^2(4\ \Omega) = 9\text{ W}$$

2. La energía total disipada en un tiempo t es $W = Pt$. En este caso, $t = 3$ s:

$$W = Pt = (9\text{ W})(3\text{ s}) = 27\text{ J}$$

Comprobación del resultado En la figura 26.29 hemos elegido el potencial nulo en el punto f y hemos especificado las corrientes y los potenciales en los restantes puntos. Obsérvese que $V_b - V_e = 6$ V y $V_e - V_f = 6$ V.

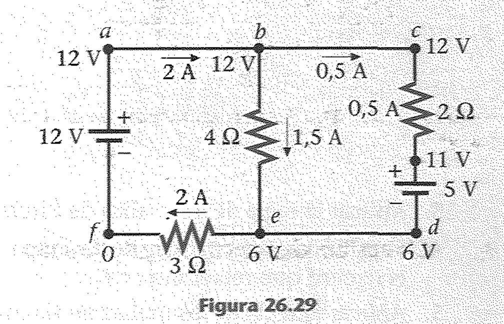


Figura 26.29

Observaciones Aplicando la regla de las mallas a la malla de la derecha *bcdeb* se obtiene $-(2\ \Omega)I_2 - 5\text{ V} + (4\ \Omega)I_1 = 0$, es decir, $-5\text{ A} + 4I_1 - 2I_2 = 0$. Obsérvese que éste es justamente el resultado de la etapa 3 menos el resultado de la etapa 4 y, por tanto, no contiene nueva información, como era de esperar.

Ejercicio Determinar I_1 para el caso en que la resistencia de 3 Ω tiende a ser (a) una resistencia nula y (b) una resistencia infinita. (*Respuestas*: (a) La caída de potencial a través de la resistencia de 4 Ω es 12 V; así $I_1 = 3$ A. (b) En este caso, la malla de la izquierda es un circuito abierto. Por tanto, $I_1 = (5\text{ V})/(2\ \Omega + 4\ \Omega) = 0{,}833$ A.)

www.elsolucionario.net

El ejemplo 26.15 ilustra el método general para el análisis de circuitos con múltiples mallas:

1. Dibujar un esquema del circuito.
2. Elegir una dirección para la corriente en cada rama del circuito y especificar las corrientes en el diagrama. Añadir los signos más y menos para indicar los extremos del potencial mayor y menor de cada resistencia, condensador o fuente de fem.
3. Reemplazar cualquier asociación de resistencias en serie o paralelo por su resistencia equivalente.
4. Aplicar la regla de los nudos a cada una de las uniones en donde la corriente se divide.
5. Aplicar la regla de las mallas a cada uno de los bucles cerrados hasta obtener tantas ecuaciones como incógnitas.
6. Resolver las ecuaciones para deducir los valores de las incógnitas.
7. Comprobar los resultados asignando un potencial cero a un punto del circuito y utilizar los valores de las corrientes para determinar los potenciales en otros puntos del circuito.

Método general para el análisis de circuitos con múltiples mallas

 www.elsolucionario.net

EJEMPLO 26.16
¡Inténtelo!

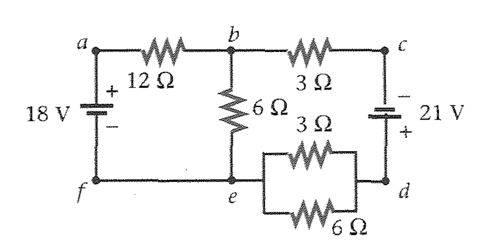


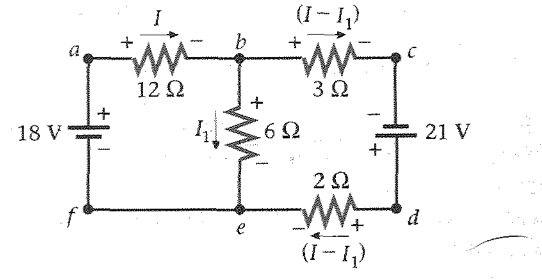
Figura 26.30

(a) Determinar la intensidad de la corriente en cada parte del circuito mostrado en la figura 26.30. Dibujar el diagrama del circuito con las magnitudes y direcciones de la intensidad en cada una de sus partes. (b) Asignar $V = 0$ en el punto c y después especificar el potencial en cada uno de los puntos de a a f.

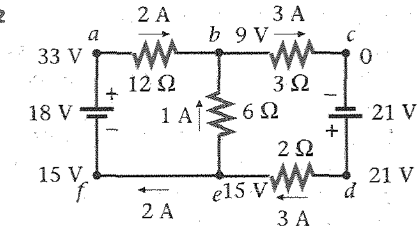
Esquema del problema En primer lugar reemplazar las dos resistencias en paralelo por su resistencia equivalente. Sea I la corriente a través de la batería de 18 V e I_1 la corriente de b a e. Las corrientes pueden deducirse aplicando la regla de los nudos a los puntos b y c y la regla de las mallas a cada uno de los bucles cerrados del circuito.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
(a) 1. Determinar la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de las resistencias de 3 y 6 Ω.	$R_{eq} = 2\ \Omega$
2. Aplicar la regla de los nudos a los puntos b y e y volver a dibujar el diagrama del circuito con las intensidades indicadas (figura 26.31).	Figura 26.31



3. Aplicar la regla de las mallas de Kirchhoff a la malla $abefa$.	$18\ \text{V} - (12\ \Omega)I - (6\ \Omega)I_1 = 0$
4. Simplificar la ecuación de la etapa 3 para obtener una ecuación que relacione I e I_1.	$2I + I_1 = 3\ \text{A}$
5. Aplicar la regla de las mallas de Kirchhoff a la malla $bcdeb$.	$-(3\ \Omega)(I - I_1) + 21\ \text{V} - (2\ \Omega)(I - I_1) + (6\ \Omega)I_1 = 0$
6. Simplificar la ecuación de la etapa 5.	$5I - 11I_1 = 21\ \text{A}$
7. Resolver las ecuaciones de las etapas 4 y 6 despejando I e I_1. Un modo de hacerlo es multiplicar la ecuación de la etapa 4 por 11 y sumar las ecuaciones para eliminar I_1.	$I = 2\ \text{A}, \quad I_1 = -1\ \text{A}$
8. Determinar la corriente a través de la batería de 21 V.	$I - I_1 = 3\ \text{A}$
9. Utilizar $V = (I - I_1)\,R_{eq}$ para determinar la caída de potencial a través de las resistencias en paralelo de 3 y 6 Ω.	$V = 6\ \text{V}$
10. Utilizar el resultado de la etapa 9 para determinar la corriente en cada una de las resistencias en paralelo.	$I_{3\Omega} = 2\ \text{A}, \quad I_{6\Omega} = 1\text{A}$
(b) Volver a dibujar la figura 26.31 especificando el valor de la intensidad en cada parte del circuito (figura 26.32). Comenzar con $V = 0$ en el punto c y calcular el potencial en los puntos d, e, f, a y b.	Figura 26.32



$$V_d = V_c + 21\ \text{V} = 0 + 21\ \text{V} = 21\ \text{V}$$
$$V_e = V_d - (3\ \text{A})(2\ \Omega) = 21\ \text{V} - 6\ \text{V} = 15\ \text{V}$$
$$V_f = V_e = 15\ \text{V}$$
$$V_a = V_f + 18\ \text{V} = 15\ \text{V} + 18\ \text{V} = 33\ \text{V}$$
$$V_b = V_a - (2\ \text{A})(12\ \Omega) = 33\ \text{V} - 24\ \text{V} = 9\ \text{V}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Comprobación del resultado De b a c el potencial cae en (3 A)(3 Ω) = 9 V, lo cual da $V_c = 0$ como se ha supuesto. De e a b el potencial cae en (1 A)(6 Ω) = 6 V, de modo que $V_b = V_e - 6\text{ V} = 15\text{ V} - 6\text{ V} = 9\text{ V}$.

Amperímetros, voltímetros y ohmímetros

Los dispositivos que miden la corriente, la diferencia de potencial y la resistencia se denominan **amperímetros**, **voltímetros** y **ohmímetros**, respectivamente. A menudo, los tres dispositivos están incluidos en un solo "multímetro", que se conecta según el uso de cada uno de ellos. Cualquiera puede usar un voltímetro para medir la tensión entre los bornes de la batería del coche o un ohmímetro para determinar la resistencia entre dos puntos de un aparato eléctrico doméstico (por ejemplo, un tostador de pan) en el que se sospecha un cortocircuito o un alambre roto.

Para medir la intensidad de corriente a través de la resistencia en el circuito simple de la figura 26.33 colocaremos un amperímetro en serie con la resistencia, según se indica en la figura de modo que el amperímetro y la resistencia sean recorridos por la misma corriente. Puesto que el amperímetro tiene cierta resistencia, la corriente del circuito se modifica cuando se incluye el amperímetro. En el caso ideal, el amperímetro deberá tener una resistencia muy pequeña de modo que introduzca una variación muy pequeña en la corriente a medir.

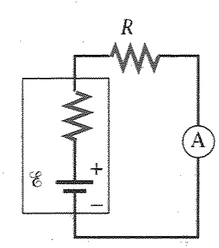


Figura 26.33 Para medir la corriente que circula por la resistencia R se coloca un amperímetro Ⓐ en serie con ella, de tal modo que transporta la misma corriente que la resistencia.

La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia se mide colocando un voltímetro en paralelo con la misma, según se indica en la figura 26.34, de modo que la caída de potencial a través del voltímetro sea la misma que a través de la resistencia. El voltímetro reduce la resistencia entre los puntos a y b aumentando así la corriente total que circula en el circuito y variando la caída de potencial a través de la resistencia. Un voltímetro ideal tiene una resistencia muy grande, para hacer mínima su influencia sobre el circuito.

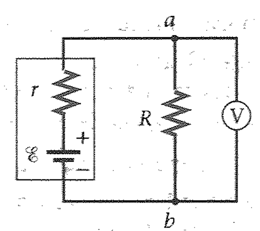


Figura 26.34 Para medir la caída de tensión entre los extremos de una resistencia, se coloca un voltímetro Ⓥ en paralelo con ella, de modo que las caídas de potencial a través del voltímetro y la resistencia son las mismas.

El componente principal de un amperímetro o un voltímetro es el **galvanómetro**, aparato que detecta una pequeña corriente que pasa a su través. El galvanómetro se proyecta de modo que la lectura en la escala sea proporcional a la corriente que pasa por él. Un galvanómetro típico utilizado en laboratorios de prácticas para estudiantes consiste en una bobina de alambre situada en el campo magnético de un imán permanente. Cuando circula una corriente por la bobina, el campo magnético ejerce el momento de un par sobre ella y la retuerce. Un vástago unido a la bobina indica la lectura sobre una escala. La propia bobina contribuye con una pequeña resistencia al conectar el galvanómetro al circuito. Actualmente muchos de estos medidores poseen una lectura digital en lugar de un indicador y una escala, pero el método básico de operación es semejante al descrito.

Para construir un amperímetro mediante un galvanómetro se coloca una resistencia pequeña, denominada **resistencia shunt**, en paralelo con el galvanómetro. Puesto que la resistencia shunt es normalmente mucho menor que la resistencia del galvanómetro, la mayor parte de la corriente circula por el shunt y la resistencia efectiva del amperímetro es mucho menor que la resistencia del galvanómetro. Realmente la resistencia equivalente del amperímetro es aproximadamente igual a la resistencia del shunt y mucho menor que la resistencia interna del galvanómetro solo. Para construir un voltímetro se adiciona en serie con el galvanómetro una gran resistencia de manera que la resistencia equivalente del voltímetro es mucho mayor que la del galvanómetro solo. La figura 26.35 ilustra la construcción de un amperímetro y de un voltímetro a partir de un galvanómetro. En estos dibujos esquemáticos se muestra separadamente la resistencia del galvanómetro R_g, pero realmente forma parte de este último, pues se debe esencialmente a la resistencia del arrollamiento del galvanómetro.

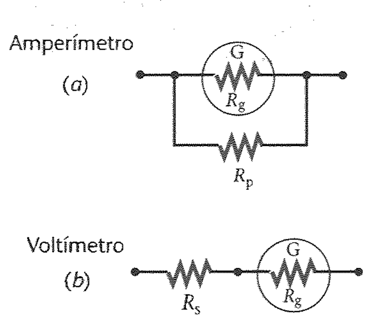


Figura 26.35 (a) Un amperímetro se compone de un galvanómetro Ⓖ cuya resistencia es R_g y una resistencia pequeña en paralelo R_p. (b) Un voltímetro se compone de un galvanómetro Ⓖ y una resistencia grande en serie R_s.

Un ohmímetro simple para medir resistencias consiste en una batería conectada en serie con un galvanómetro y una resistencia, como indica la figura 26.36*a*. La resistencia R_s se elige de modo que cuando los terminales a y b se cortocircuitan (se ponen en contacto eléctrico con una resistencia despreciable entre ellos), la corriente a través del galvanómetro ofrece una desviación a fondo de escala. Así, una desviación a fondo de escala significa que no hay resistencia infinita entre los terminales a y b y una desviación nula indica que existe una resistencia infinita entre los terminales. Cuando éstos se conectan a través de una resistencia incógnita R, la intensidad de corriente a través del

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

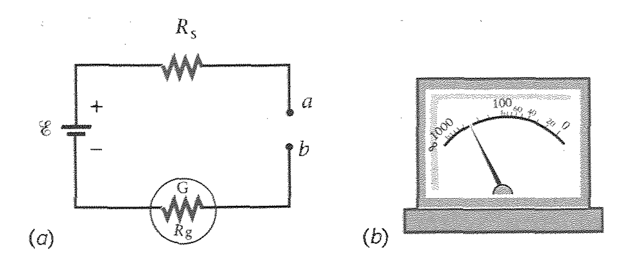


Figura 26.36 (*a*) Ohmímetro formado por una batería en serie con un galvanómetro y una resistencia R_s, elegida de tal modo que el galvanómetro se desvía a fondo de ésta cuando los puntos *a* y *b* están en cortocircuito. (*b*) Cuando una resistencia *R* se sitúa entre *a* y *b*, la aguja del galvanómetro se desvía en una cantidad que depende del valor de *R*. La escala del galvanómetro está calibrada para hacer lecturas en ohmios.

galvanómetro depende de *R*, de modo que la escala puede calibrarse para dar una lectura directa de la resistencia *R*, como indica la figura 26.36*b*. Como el ohmímetro suministra una corriente a través de la resistencia a medir, este instrumento debe manejarse con precaución. Por ejemplo, no es aconsejable medir la resistencia de un amperímetro sensible con un ohmímetro, pues la corriente suministrada por la batería de este aparato dañaría el amperímetro.

26.6 ■ Circuitos *RC*

Se denomina **circuito *RC*** aquel en el que interviene una resistencia y una capacidad. La corriente en un circuito *RC* fluye en una sola dirección, como en los circuitos de corriente continua (c.c.), pero la magnitud de la intensidad de corriente varía con el tiempo. Un ejemplo práctico de un circuito *RC* es el de un dispositivo de flash en una cámara fotográfica. Antes de tomar la fotografía, la batería del flash carga el condensador a través de una resistencia. Cuando esto se verifica, el flash está preparado. Al tomar la imagen, el condensador se descarga a través de la lámpara del flash. El condensador se recarga por acción de la batería y poco tiempo después, el flash está dispuesto para otra fotografía. Mediante las reglas de Kirchhoff, podemos obtener unas ecuaciones que relacionan la carga *Q* y la intensidad de corriente *I* en función del tiempo, tanto en el proceso de carga como en el de descarga de un condensador a través de una resistencia.

■ Descarga de un condensador

La figura 26.37 muestra un condensador con una carga inicial $+Q_0$ en la placa superior y $-Q_0$ en la placa inferior. Se conecta a una resistencia *R* y a un interruptor S que está abierto para evitar que la carga fluya a través de la resistencia. La diferencia de potencial a través del condensador es inicialmente $V_0 = Q_0/C$, siendo *C* la capacidad.

Cerremos el interruptor en el instante $t = 0$. Puesto que ahora existe una diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia, debe pasar una corriente por la misma. La corriente inicial es

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \qquad \textbf{(26.25)}$$

La corriente se debe al flujo de carga que va desde la placa positiva a la negativa pasando por la resistencia y así, después de un cierto tiempo, la carga sobre el condensador se ve reducida. Como la carga sobre el condensador va *decreciendo* y estamos tomando como positiva la corriente en el sentido de las agujas del reloj, la intensidad de corriente es igual a la *disminución* de esta carga por unidad de tiempo. Si *Q* es la carga sobre el condensador en un instante cualquiera, la corriente en dicho momento es

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad \textbf{(26.26)}$$

Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente nos encontramos con una caída de potencial *IR* en la resistencia y un aumento de potencial *Q/C* entre las placas del condensador. La primera regla de Kirchhoff nos da

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \qquad \textbf{(26.27)}$$

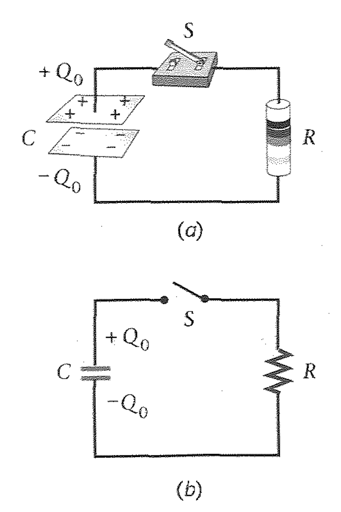


Figura 26.37 (*a*) Condensador de láminas planoparalelas en serie con un interruptor y una resistencia *R*. (*b*) Diagrama que representa este circuito.

www.elsolucionario.net

en donde tanto Q como I son funciones de tiempo y están relacionadas por la ecuación 26.26. Sustituyendo I por $-dQ/dt$ en la ecuación 26.27, tenemos

$$\frac{Q}{C} + R\,\frac{dQ}{dt} = 0$$

o

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}\,Q \qquad (26.28)$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar separamos las variables Q y t. Multiplicando ambos miembros por dt y dividiendo por Q resulta

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \qquad (26.29)$$

Integrando entre Q_0 para $t = 0$ y Q para el tiempo t resulta

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

Por tanto,

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau} \qquad (26.30)$$

en donde τ, llamada **constante de tiempo**, es el tiempo durante el cual la carga disminuye hasta $1/e$ de su valor original:

$$\tau = RC \qquad (26.31)$$

Definición —Constante de tiempo

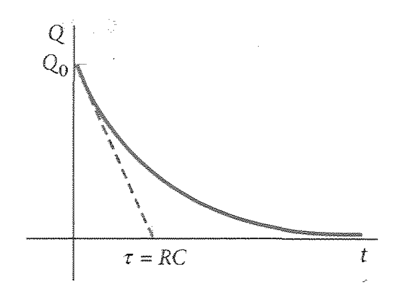


Figura 26.38 Representación de la carga Q situada sobre un condensador en función del tiempo t para el circuito de la figura 26.37 cuando el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$. La constante de tiempo $\tau = RC$ es el tiempo necesario para que la carga decrezca en $e^{-1}Q_0$. La constante de tiempo es también el tiempo que tardaría el condensador en descargarse completamente si su velocidad de descarga fuera constante, como indica la línea de trazos.

La figura 26.38 muestra la carga del condensador en el circuito de la figura 26.37 en función del tiempo. Después de un tiempo $t = \tau$, la carga es $Q = Q_0e^{-1} = 0{,}37Q_0$. Después de un tiempo $t = 2\tau$, la carga es $Q = Q_0e^{-2} = 0{,}135Q_0$, y así sucesivamente. Después de un tiempo igual a varias constantes de tiempo la carga del condensador es despreciable. Este tipo de disminución, muy común en la naturaleza se llama **decrecimiento exponencial**. Ocurre siempre que la disminución de una magnitud con el tiempo es proporcional a la propia magnitud.[1]

La disminución de carga en un condensador puede compararse con la disminución de la cantidad de agua en un vaso que tiene un pequeño agujero en el fondo. El flujo de agua por el orificio es proporcional a la presión del agua, la cual es a su vez, proporcional a la cantidad de agua existente en el vaso.

La intensidad de corriente se obtiene derivando la ecuación 26.30:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}\,e^{-t/RC}$$

o sea,

$$I = \frac{V_0}{R}\,e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \qquad (26.32)$$

en donde $I_0 = Q_0/RC = V_0/R$ es la corriente inicial. La corriente también disminuye exponencialmente con el tiempo y llega a valer $1/e$ de su valor inicial después de transcurrir un tiempo $t = \tau = RC$. Este proceso se representa en la figura 26.39.

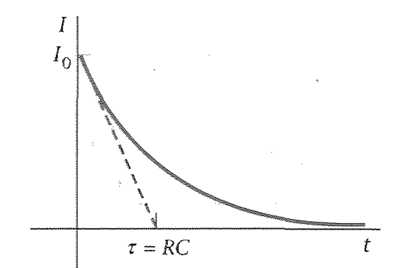
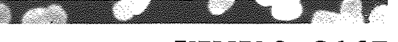


Figura 26.39 Gráfico de la intensidad de corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 26.37. La curva tiene la misma forma que la de la figura 26.38. Si la corriente decreciese a un ritmo constante igual al inicial, se anularía al cabo de un tiempo igual a la constante de tiempo como indica la línea de trazos.

[1] Ya vimos un decrecimiento exponencial en el capítulo 14 al estudiar el oscilador amortiguado.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net




EJEMPLO 26.17 **Un condensador de 4 μF se carga a 24 V y luego se conecta a una resistencia de 200 Ω. Determinar (a) la carga inicial del condensador, (b) la corriente inicial a través de la resistencia de 200 Ω, (c) la constante de tiempo y (d) la carga que posee el condensador después de 4 ms.**

Esquema del problema El diagrama del circuito es el mismo que el de la figura 26.37.

(a) La carga inicial está relacionada con la capacidad y el voltaje:

$$Q_0 = CV = (4\ \mu F)(24\ V) = 96\ \ \mu C$$

(b) La corriente inicial es el voltaje inicial dividido por la resistencia:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{24\ V}{200\ \Omega} = 0{,}12\ A$$

(c) La constante de tiempo es RC:

$$\tau = RC = (200\ \Omega)(4\ \mu F) = 800\ \mu s = 0{,}8\ ms$$

(d) Sustituyendo $t = 4$ ms en la ecuación 26.30 determinamos la carga sobre el condensador después de este tiempo:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} = (96\ \mu C)e^{-(4\ ms)/(0{,}8\ \ ms)}$$
$$= (96\ \mu C)e^{-5} = 0{,}647\ \mu C$$

Ejercicio Hallar la corriente a través de una resistencia de 200 Ω para $t = 4$ ms. (*Respuesta*: 0,809 mA.)



Carga de un condensador

La figura 26.40*a* muestra un circuito utilizado para la carga de un condensador, que admitiremos inicialmente descargado. El interruptor, abierto inicialmente, se cierra en el instante $t = 0$. Inmediatamente empieza a fluir la carga a través de la resistencia depositándose sobre la placa positiva del condensador (figura 26.40*b*). Si la carga del condensador en un instante cualquiera es Q y la corriente en el circuito es I, la primera regla de Kirchhoff nos da

$$\mathcal{E} - V_R - V_C = 0$$

o sea

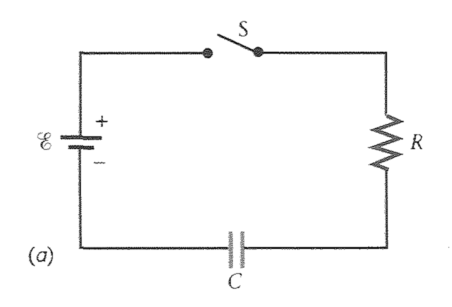
$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0 \qquad \textbf{(26.33)}$$

En este circuito la corriente es igual a la variación con el tiempo de la carga (*creciente*) en el condensador:

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

Sustituyendo $+dQ/dt$ por I en la ecuación 26.33 se obtiene

$$\mathcal{E} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \qquad \textbf{(26.34)}$$



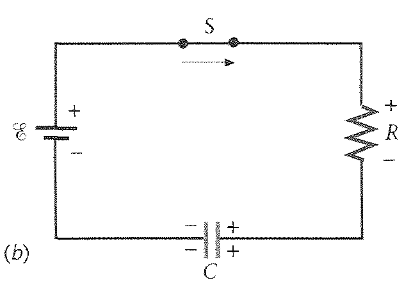


Figura 26.40 (*a*) Circuito para cargar un condensador hasta una diferencia de potencial $\mathcal{E}$. (*b*) Después de cerrar el interruptor existe una caída de potencial a través de la resistencia y una carga sobre el condensador.

En el instante $t = 0$ la carga es cero y la corriente vale $I_0 = \mathcal{E}/R$. La carga, por lo tanto, aumenta y la corriente disminuye, como puede verse en la ecuación 26.33. La carga alcanza un valor máximo $Q_f = C\mathcal{E}$, como resulta de la ecuación 26.34, cuando la corriente I es igual a cero.

La ecuación 26.34 puede resolverse del mismo modo que la 26.28. Los detalles se dejan como materia de un problema (véase problema 115a). El resultado es

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \textbf{(26.35)}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

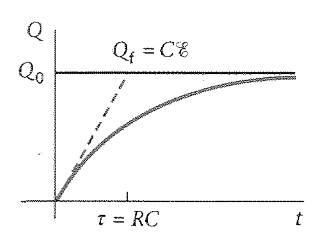


Figura 26.41 Representación de la carga de un condensador en función del tiempo en el caso del circuito de la figura 26.40 después de cerrar el interruptor en $t = 0$. Después del tiempo $t = \tau = RC$ la carga en el condensador es $0{,}63C\mathscr{E}$, donde $C\mathscr{E}$ es su carga final. Si la velocidad de carga fuese constante e igual a su valor inicial, el condensador se cargaría por completo al cabo de un tiempo $t = \tau$.

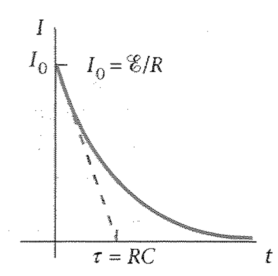


Figura 26.42 Gráfico de la corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 26.40. La corriente es inicialmente $\mathscr{E}/R$ y disminuye exponencialmente con el tiempo.

en donde $Q_f = C\mathscr{E}$ es la carga final. La intensidad de corriente se obtiene de $I = dQ/dt$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -C\mathscr{E}e^{-t/RC}\left(\frac{-1}{RC}\right)$$

o sea,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\, e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \qquad \textbf{(26.36)}$$

en donde la corriente inicial en este caso es $I_0 = \mathscr{E}/R$.

Las figuras 26.41 y 26.42 muestran la carga y la corriente en función del tiempo.

Ejercicio Demostrar que la ecuación 26.35 satisface la ecuación 26.34 sustituyendo en ésta los valores de $Q(t)$ y dQ/dt.

Ejercicio ¿Qué fracción de la carga máxima existe en un condensador en proceso de carga al cabo de un tiempo $t = 2\tau$? (*Respuesta*: 0,86.)

EJEMPLO 26.18

¡Inténtelo!

Una batería de 6 V y resistencia interna despreciable se utiliza para cargar un condensador de 2 μF a través de una resistencia de 100 Ω. Hallar (a) la corriente inicial, (b) la carga final y (c) el tiempo necesario para obtener un 90 por ciento de la carga final.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

	Etapas	*Respuestas*
(a)	Determinar la corriente inicial a partir de $I_0 = \mathscr{E}/R$.	$I_0 = 0{,}06$ A
(b)	Determinar la carga final a partir de $Q = C\mathscr{E}$.	$Q_f = 12\ \mu$C
(c) 1.	Establecer que $Q = 0{,}9\ Q_f$ en la ecuación 26.35 y despejar $e^{+t/\tau}$.	$e^{t/\tau} = 10$
2.	Aplicar logaritmos neperianos a los dos miembros de la ecuación de la etapa anterior.	$\ln (e^{t/\tau}) = t/\tau = \ln 10 = 2{,}3$
3.	Despejar t.	$t = 2{,}3RC = 460\ \mu$s

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



EJEMPLO 26.19

El condensador del circuito que se muestra en la figura 26.43 está inicialmente descargado. Determinar la corriente que atraviesa la batería (a) inmediatamente después de cerrar el interruptor y (b) un largo tiempo después de cerrar el interruptor.

(a) Como el condensador está inicialmente descargado, el potencial en el punto *d* es el mismo que en el punto *c* inmediatamente después de cerrar el interruptor. No hay corriente inicial a través de la resistencia de 8 Ω entre *b* y *e*. Aplicar la regla de las mallas al bucle exterior (*abcdefa*):

$$12\text{ V} - (4\ \Omega)I_0 = 0$$

$$I_0 = 3\text{ A}$$

(b) Después de un largo tiempo el condensador se carga completamente y la carga deja de fluir o de escapar de las placas. Aplicar la regla de las mallas al bucle de la izquierda (*abefa*):

$$12\text{ V} - (4\ \Omega)I_f - (8\ \Omega)I_f = 0$$

$$I_f = 1\text{ A}$$

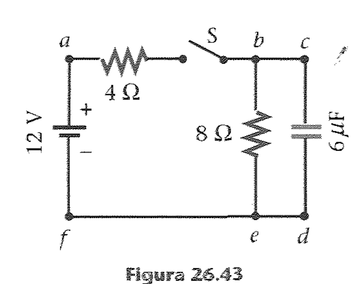
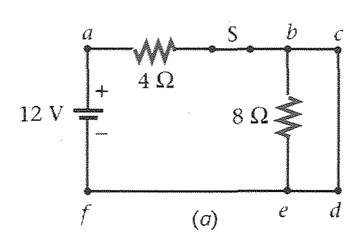


Figura 26.43

Observaciones Vemos pues, que el análisis de este circuito en los tiempos extremos, cuando el condensador está descargado o totalmente cargado, es simple. Cuando el condensador está descargado actúa igual que un cortocircuito entre los puntos *c* y *d*, es decir, el circuito es equivalente al mostrado en la figura 26.44*a* en donde se ha reemplazado el condensador por un alambre de resistencia cero. Cuando el condensador está totalmente cargado, actúa como el circuito abierto indicado en la figura 26.44*b*.



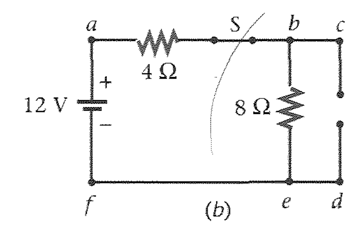


Figura 26.44

Conservación de la energía en la carga de un condensador

Durante el proceso de carga fluye una carga total $Q_f = \mathscr{E}C$ a través de la batería. Ésta realiza un trabajo,

$$W = Q_f\mathscr{E} = C\mathscr{E}^2$$

La energía almacenada en el condensador es precisamente la mitad de esta cantidad. Según la ecuación 25.11:

$$U = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}Q_f\mathscr{E} = \tfrac{1}{2}C\mathscr{E}^2$$

Demostraremos ahora que la otra mitad de energía proporcionada por la batería se transforma precisamente en calor por efecto Joule en la resistencia. La potencia que se cede a la resistencia es

$$\frac{dW_R}{dt} = I^2R$$

Utilizando la ecuación 26.36 para el valor de la corriente, tenemos

$$\frac{dW_R}{dt} = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\cdot e^{-t/RC}\right)^2 R = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\,e^{-2t/RC}$$

www.elsolucionario.net

El calor total producido se obtiene integrando desde $t = 0$ hasta $t = \infty$:

$$W_R = \int_0^\infty \frac{\mathscr{E}^2}{R} e^{-2t/RC}\, dt$$

La integración puede realizarse sustituyendo $x = 2t/RC$. Entonces,

$$dt = \frac{RC}{2}\, dx$$

y

$$W_R = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\frac{RC}{2}\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \frac{\mathscr{E}^2 C}{2}(-e^{-x})\Big|_0^\infty = \frac{\mathscr{E}^2 C}{2}(-0+1)$$

Por tanto, el calor total de Joule es

$$W_R = \tfrac{1}{2}\mathscr{E}^2 C$$

Este resultado es independiente de la resistencia R. Por tanto, cuando un condensador se carga mediante una fem constante, la mitad de la energía proporcionada por la batería se almacena en el condensador y la otra mitad se transforma en calor independientemente de la resistencia. Esta energía térmica incluye la potencia disipada en la resistencia interna de la batería.

Resumen

1. La ley de Ohm es una ley empírica que se cumple sólo en ciertos materiales.
2. La intensidad de corriente, la resistencia y la fem son importantes magnitudes *definidas*.
3. Las reglas de Kirchhoff se deducen a partir de los principios de conservación de la carga y conservación de la energía.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Intensidad de la corriente eléctrica	La intensidad de corriente eléctrica es el flujo de carga que por unidad de tiempo atraviesa un área transversal. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d$ **(26.1), (26.3)**
Velocidad de desplazamiento	En un cable conductor, la corriente eléctrica es el resultado del desplazamiento lento de los electrones cargados negativamente, que son acelerados por un campo eléctrico en el cable y chocan rápidamente con los iones del conductor. Las velocidades típicas de desplazamiento de los electrones en cables metálicos son del orden de unos pocos milímetros por segundo.
2. Resistencia	
Definición	$R = \frac{V}{I}$ **(26.5)**
Resistividad ρ	$R = \rho\frac{L}{A}$ **(26.8)**
3. Ley de Ohm	En los materiales óhmicos, la resistencia no depende de la corriente ni de la caída de voltaje: $V = IR$ (R constante) **(26.7)**
4. Potencia	
Suministrada a un dispositivo o segmento de un circuito	$P = VI$ **(26.10)**

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Disipada en una resistencia $$P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad (26.11)$$

5. fem Una fuente de fem es un dispositivo que suministra energía a un circuito.

Potencia suministrada por una fem $$P = \mathscr{E}I \quad (26.12)$$

6. Batería

Ideal: Una batería ideal es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus bornes independientemente de la corriente suministrada.

Real: Una batería real puede considerarse como una batería ideal en serie con una pequeña resistencia llamada resistencia interna.

Voltaje en los bornes $$V_a - V_b = \mathscr{E} - Ir \quad (26.13)$$

Energía total $$W = Q\mathscr{E} \quad (26.15)$$

7. Resistencia equivalente

Serie $$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \quad (26.17)$$

Paralelo $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \quad (26.21)$$

8. Reglas de Kirchhoff

1. Al recorrer un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial es igual a cero.
2. En toda unión de un circuito, donde la corriente puede dividirse, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes.

9. Aparatos de medida

Amperímetro: Un amperímetro es un aparato de muy baja resistencia que se sitúa en serie con un elemento del circuito para medir la intensidad en dicho elemento.

Voltímetro: Un voltímetro es un aparato de resistencia muy elevada para medir la caída de voltaje a través de un elemento del circuito.

Ohmímetro: Un ohmímetro es un aparato dotado de una batería que se usa para medir la resistencia de un elemento de circuito situado entre sus bornes.

10. Descarga de un condensador

Carga sobre el condensador $$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (26.30)$$

Corriente en el circuito $$I = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (26.32)$$

Constante de tiempo $$\tau = RC \quad (26.31)$$

11. Carga de un condensador

Carga sobre el condensador $$Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau}) \quad (26.35)$$

Corriente en el circuito $$I = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (26.36)$$

Guía para la resolución de problemas

Para resolver problemas de circuitos

1. Dibujar un esquema del circuito.
2. Escoger una dirección para la corriente en cada rama del circuito y especificar las intensidades en el diagrama. Añadir signos más y menos para indicar los extremos de alto y bajo potencial de cada resistencia, condensador y fuente de fem.
3. Reemplazar toda asociación de resistencias en serie o en paralelo por su resistencia equivalente.
4. Aplicar la regla de los nudos a cada unión donde la corriente se divide.
5. Aplicar la regla de las mallas a distintos bucles para obtener tantas ecuaciones como incógnitas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

6. Resolver las ecuaciones para obtener los valores de las incógnitas.
7. Comprobar los resultados asignando el potencial cero a un punto del circuito y después usar los valores de las corrientes obtenidas para determinar los potenciales en otros puntos del circuito.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Resistencia	
Determinar la resistencia de un alambre.	Usar $R = \rho L/A$. **Ejemplos 26.3, 26.4**
2. Energía	
Calcular la energía disipada en un circuito.	Usar $P = I^2R = V^2/R = VI$ para cada resistencia y $P = \mathscr{E}I$ para cada fem. **Ejemplos 26.6, 26.7,** 26.8, **26.9,** 26.10, **26.13, 26.15**
3. Resistencia equivalente	
Determinar la resistencia equivalente.	Usar $R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots$ (serie) y $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + \ldots$ (paralelo). **Ejemplos 26.6,** 26.10, 26.11, 26.12
4. Circuito sin condensadores	
Determinar la corriente en un circuito de una sola malla.	Aplicar la ley de las mallas de Kirchhoff. **Ejemplos 26.13, 26.14**
Determinar las corrientes en un circuito de múltiples mallas.	Aplicar las reglas de Kirchhoff de las mallas y de los nudos. **Ejemplos 26.15,** 26.16
5. Circuitos *RC*	
Determinar la carga sobre un condensador.	Usar $Q(t) = Q_0e^{-t/RC}$ para un condensador que se está descargando y $Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC})$ para un condensador que se está cargando. **Ejemplos 26.17,** 26.18, **26.19**
Determinar la constante de tiempo.	Usar $\tau = RC$. **Ejemplos 26.17,** 26.18
Determinar la corriente inicial y final.	Un condensador descargado es equivalente momentáneamente a una resistencia, de $R = 0$. Para un circuito en serie que contiene un condensador descargado, $I_i = \mathscr{E}/R$. Un condensador totalmente cargado es equivalente a un circuito abierto. En un circuito en serie con un condensador totalmente cargado, $I_f = 0$. **Ejemplos 26.17, 26.19**

www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Corriente y movimiento de cargas

• 1 Al estudiar la electrostática llegamos a la conclusión de que en condiciones de equilibrio *no* existe campo eléctrico dentro de un conductor. ¿Cómo es que ahora hablamos de campos eléctricos dentro de un conductor?

• 2 Un profesor de física ha reunido a los alumnos de su clase alrededor de la cinta transportadora de entrega de equipajes del aeropuerto local y les expone la siguiente analogía de la corriente eléctrica: "Supongamos que cada maleta que transporta la cinta es un paquete de electrones equivalente a un culombio de carga eléctrica". Contando el número de maletas por unidad de tiempo que conduce la cinta, ésta equivale a un conductor por el que circula una corriente constante de 2 A (se supone que los viajeros tienen la suficiente paciencia para soportar esta espera añadida a la recogida de sus equipajes).
(a) ¿Cuántas maletas pasan por un punto determinado del carrusel en 5,0 min?
(b) ¿Qué número de electrones representan?

• 3 Por un conductor de cobre de calibre 10 circula una corriente de 20 A. Admitiendo que cada átomo tiene un electrón libre, calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones.

• 4 En un tubo fluorescente de 3,0 cm de diámetro, pasan por un punto determinado y por cada segundo $2{,}0 \times 10^{18}$ electrones y $0{,}5 \times$

 www.elsolucionario.net

10^{18} iones positivos (con una carga $+e$). ¿Cuál es la corriente que circula por el tubo?

• 5 En un cierto haz de electrones existen $5{,}0 \times 10^6$ electrones por centímetro cúbico. Supóngase que la energía cinética de los electrones es 10,0 keV y el haz es cilíndrico con un diámetro de 1,00 mm.
(a) ¿Cuál es la velocidad de los electrones?
(b) Hallar la corriente del haz.

•• 6 Una carga $+q$ se mueve en una circunferencia de radio r con velocidad v.
(a) Expresar la frecuencia f con la cual pasa la carga por un punto en función de r y v.
(b) Demostrar que la corriente media es qf y expresarla en función de v y r.

•• 7 Un anillo de radio a tiene una carga por unidad de longitud λ. El anillo gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje. Hallar una expresión para la corriente.

•• 8 Un conductor de calibre 14 se suelda por un extremo a otro de calibre 10. Por los conductores circula una corriente de 15 A. Si ambos conductores son de cobre con un electrón libre por átomo, hallar la velocidad de desplazamiento en cada conductor.

•• 9 Un haz de protones con un diámetro de 2,0 mm producido en un acelerador determinado constituye una corriente de 1,0 mA. La energía cinética de cada protón es 20 MeV. El haz choca contra un blanco metálico y es absorbido por él.
(a) ¿Cuál es la densidad de protones en el haz?
(b) ¿Cuántos protones chocarán contra el blanco en 1,0 min?
(c) Si el blanco está inicialmente sin carga, expresar la carga del blanco en función del tiempo.

•• 10 La corriente que circula por un alambre varía con el tiempo según la expresión $I = 20 + 3t^2$, en donde I se expresa en amperios y t en segundos.
(a) ¿Cuántos culombios se transportan por el alambre entre $t = 0$ s y $t = 10$ s?
(b) ¿Qué corriente constante transportaría la misma carga en igual intervalo de tiempo?

•• 11 En una máquina aceleradora de protones, estas partículas en un haz de 5 mA se mueven casi a la velocidad de la luz.
(a) ¿Cuántos protones existen por metro de haz?
(b) Si la sección transversal del haz es 10^{-6} m^2, ¿cuál es la densidad numérica de los protones?

Resistencia y ley de Ohm

• 12 La figura 26.8 ilustra una analogía mecánica de un circuito eléctrico sencillo. Idear otra analogía mecánica en la cual la corriente esté representada por un flujo de agua en lugar de bolitas.

• 13 Dos cables del mismo material e igual longitud tienen diámetros distintos. El cable A tiene un diámetro doble al del B. Si la resistencia del alambre B es R, ¿cuál es la resistencia del alambre A?
(a) R (b) $2R$ (c) $R/2$ (d) $4R$ (e) $R/4$

•• 14 Comentar la diferencia entre una fem y una diferencia de potencial.

•• 15 Citar varias fuentes comunes de fem. ¿Qué tipo de energía se convierte en energía eléctrica en cada una de ellas?

•• 16 Queremos utilizar una barra metálica como resistencia. Sus dimensiones son 2 por 4 por 10 unidades. Para obtener la menor resistencia de esta barra, uniremos los conductores a los lados opuestos de la barra cuyas dimensiones sean
(a) 2×4 unidades. (b) 2×10 unidades. (c) 4×10 unidades.
(d) Todas la conexiones darán la misma resistencia.
(e) Ninguna de las anteriores es correcta.

•• 17 Dos alambres de cobre cilíndricos poseen la misma masa. El alambre A tiene doble longitud que el B. La relación de sus resistencias es
(a) $R_A = 8R_B$. (b) $R_A = 4R_B$. (c) $R_A = 2R_B$. (d) $R_A = R_B$.

• 18 Por un conductor de 10 m de longitud y una resistencia de 0,2 Ω circula una corriente de 5 A.
(a) ¿Cuál es la diferencia de potencial en los extremos del conductor?
(b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico del conductor?

• 19 Una diferencia de potencial de 100 V produce una corriente de 3 A en una resistencia determinada.
(a) ¿Cuál es su resistencia?
(b) ¿Cuál es la corriente cuando la diferencia de potencial es de 25 V?

• 20 Un trozo de carbono tiene una longitud de 3,0 cm y una sección recta cuadrada de 0,5 cm de lado. Se mantiene una diferencia de potencial de 8,4 V entre los extremos de su dimensión más larga.
(a) ¿Cuál es la resistencia del bloque?
(b) ¿Cuál es la corriente en esta resistencia?

• 21 Una barra de carbono de radio 0,1 mm se utiliza para construir una resistencia. La resistividad de este material es $3{,}5 \times 10^{-5}$ Ω · m. ¿Qué longitud de la barra de carbono se necesita para obtener una resistencia de 10 Ω?

• 22 El tercer carril (portador de corriente) de una vía de metro está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de aproximadamente 55 cm^2. ¿Cuál es la resistencia de 10 km de esta vía? (Usar ρ para el hierro.)

• 23 ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de 30 m de longitud formado por hilo de cobre de calibre 16 por el cual circula una corriente de 5,0 A?

• 24 ¿Qué longitud tiene un conductor de cobre de calibre 14 que posee una resistencia de 2 Ω?

•• 25 Un cilindro de vidrio de 1 cm de longitud posee una resistividad de 10^{12} Ω · m. ¿Qué longitud debería tener un alambre de cobre de la misma sección transversal para que sus resistencia fuera igual a la del cilindro de vidrio?

•• 26 Un conductor de cobre de 80,0 m y diámetro de 1,0 mm se une por su extremo con otro conductor de hierro de 49,0 m y del mismo diámetro. La corriente en cada uno de ellos es 2,0 A.
(a) Hallar el campo eléctrico en cada conductor.
(b) Hallar la diferencia de potencial aplicada a cada conductor.

•• 27 Por un conductor de cobre y otro de hierro, que tienen la misma longitud y diámetro, circula la misma corriente I.
(a) Hallar la caída de tensión en cada conductor y el cociente entre ellas.
(b) ¿En cuál de los conductores es mayor el campo eléctrico?

•• 28 Una resistencia variable R está conectada a través de una diferencia de potencial V que permanece constante. Cuando $R = R_1$ la corriente es de 6,0 A. Cuando R se incrementa a $R_2 = R_1 + 10{,}0$ Ω, la corriente desciende a 2,0 A. Determinar
(a) R_1. (b) V.

•• 29 Un tubo de caucho de 1 m de longitud con un diámetro interior de 4 mm se llena con una disolución salina de resistividad 10^{-3} Ω · m. En los extremos del tubo se disponen unos tapones metálicos que actúan de electrodos.
(a) ¿Cuál es la resistencia del tubo lleno de disolución?
(b) ¿Cuál es la resistencia del tubo lleno de disolución si se estira uniformemente hasta una longitud de 2 m?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 30 Un alambre de longitud 1 m tiene una resistencia de 0,3 Ω. Se alarga uniformemente hasta una longitud de 2 m. ¿Cuál es su nueva resistencia?

•• 31 Por un alambre de cobre de calibre 10 pueden circular corrientes hasta de 30 A.

(a) ¿Cuál es la resistencia de 100 m de alambre de cobre de calibre 10?
(b) ¿Cuál es el campo eléctrico en el alambre cuando la corriente es de 30 A?
(c) ¿Cuánto tiempo tarda un electrón en recorrer 100 m de alambre cuando la corriente es de 30 A?

•• 32 Un cubo de cobre tiene sus aristas de longitud 2,0 cm. ¿Cuál será su resistencia si se convierte en un alambre de calibre 14?

••• 33 Un diodo semiconductor es un dispositivo no lineal cuya intensidad de corriente I está relacionada con el voltaje V a través del diodo por la expresión $I = I_0(e^{eV/kT} - 1)$ en donde k es la constante de Boltzmann, e la carga del electrón y T la temperatura absoluta. Si $I_0 = 10^{-9}$ A y $T = 293$ K,

(a) ¿cuál es la resistencia del diodo para $V = 0,5$ V?
(b) ¿Cuál es la resistencia para $V = 0,6$ V?

••• 34 Determinar la resistencia entre los extremos del semianillo de la figura 26.45. La resistividad del material del anillo es ρ.

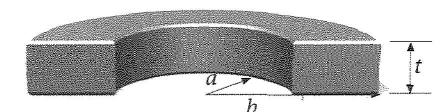


Figura 26.45 Problema 34.

••• 35 El radio de un alambre de longitud L crece linealmente con su longitud según la expresión $r = a + [(b - a)/L]x$, en donde x es la distancia del extremo menor de radio a. ¿Cuál es la resistencia de este alambre en función de su resistividad ρ, longitud L, radio a y radio b?

••• 36 El espacio comprendido entre dos conductores esféricos concéntricos se llena con un material de resistividad 10^9 Ω · m. Si la corteza interior posee un radio de 1,5 cm y la exterior de 5 cm, ¿cuál es la resistencia entre los conductores? (*Indicación*: Determinar la resistencia de una corteza esférica del material de área $4\pi r^2$ y espesor dr e integrar para determinar la resistencia total de la serie de cortezas en serie.)

••• 37 El espacio comprendido entre dos cilindros metálicos coaxiales de longitud L y radios a y b se llena totalmente de un material de resistividad ρ.

(a) ¿Cuál es la resistencia entre los dos cilindros? (Véase la indicación del problema 36.)
(b) Determinar la intensidad de la corriente entre los dos cilindros si ρ = 30 Ω · m, a = 1,5 cm, b = 2,5 cm, L = 50 cm y se aplica una diferencia de potencial de 10 V entre los dos cilindros.

Dependencia de la resistencia con la temperatura

• 38 Una varilla de tungsteno tiene una longitud de 50 cm y una sección recta cuadrada de 1,0 mm de lado.

(a) ¿Cuál es su resistencia a 20 °C?
(b) ¿Cuál es su resistencia a 40 °C?

• 39 ¿A qué temperatura será la resistencia de un conductor de cobre el 10 por ciento mayor que cuando está a 20 °C?

•• 40 Un tostador con un elemento de calefacción de nicron posee una resistencia de 80 Ω a 20 °C y una corriente inicial de 1,5 A. Cuando este elemento alcanza su temperatura final, la corriente es de 1,3 A. ¿Cuál es la temperatura final?

•• 41 Un calentador ambiental eléctrico posee un alambre de nicrom con una resistencia de 8 Ω a 20 °C. Aplicando un voltaje de 120 V, la corriente eléctrica calienta el alambre de nicrom a 1000 °C.

(a) ¿Cuál es la corriente inicial que circula por el elemento de calefacción frío?
(b) ¿Cuál es la resistencia del elemento de calefacción a 1000 °C?
(c) ¿Cuál es la potencia operativa de este calentador?

•• 42 En un circuito electrónico existe una resistencia de nicrom de 10 Ω cableada por un alambre de cobre de longitud 50 cm y diámetro 0,6 mm.

(a) ¿Qué resistencia adicional introduce el alambre?
(b) ¿Qué error porcentual se comete al despreciar la resistencia del cableado?
(c) ¿Qué variación de la temperatura produciría un cambio en la resistencia de nicrom igual a la resistencia del cableado?

•• 43 El filamento de una lámpara posee una resistencia que crece linealmente con la temperatura. Al aplicar un voltaje constante, la corriente inicial disminuye hasta que el filamento alcanza una temperatura estacionaria. El coeficiente de temperatura de la resistividad del filamento es 4×10^{-3} K^{-1}. La corriente final a través del filamento es un octavo del valor inicial. ¿Cuál es la variación de temperatura del filamento?

••• 44 Un conductor de área transversal A, longitud L_1, resistividad ρ_1 y coeficiente de temperatura α_1, se conecta a otro conductor de longitud L_2, resistividad ρ_2, coeficiente de temperatura α_2 y la misma área A, de modo que por los conductores circula la misma corriente.

(a) Demostrar que $\rho_1 L_1 \alpha_1 + \rho_2 L_2 \alpha_2 = 0$, la resistencia total R es independiente de la temperatura en el caso de pequeñas variaciones de temperatura.
(b) Si uno de los conductores se hace de carbono y el otro de cobre, hallar el cociente de sus longitudes de modo que R sea aproximadamente independiente de la temperatura.

La energía en los circuitos eléctricos

• 45 Una resistencia transporta una corriente I. La potencia disipada en la resistencia es P. ¿Cuál es la potencia disipada si la misma resistencia transporta la corriente $3I$? (Suponer que la resistencia no se modifica.)

(a) P (b) $3P$ (c) $P/3$ (d) $9P$ (e) $P/9$

• 46 La potencia disipada en una resistencia es P cuando la caída de voltaje a su través es V. Si la caída de voltaje se incrementa a 2 V (sin cambio de resistencia), ¿cuál es la potencia disipada?

(a) P (b) $2P$ (c) $4P$ (d) $P/2$ (e) $P/4$

• 47 Un calentador posee una resistencia variable conectada a través de una fuente de voltaje constante. Para incrementar la emisión de calor, ¿debemos aumentar o disminuir la resistencia?

•• 48 Dos resistencias disipan la misma potencia. La caída de potencial a través de la resistencia A es doble que a través de la resistencia B. Si la resistencia de B es R, ¿cuál es la resistencia de A?

(a) R (b) $2R$ (c) $R/2$ (d) $4R$ (e) $R/4$

• 49 Hallar la potencia disipada en una resistencia de valor

(a) 5 Ω y
(b) 10 Ω conectada a una diferencia de potencial constante de 120 V.

• 50 Una resistencia de carbono de 10 000 Ω usada en circuitos electrónicos se diseña para disipar una potencia de 0,25 W.

(a) ¿Cuál es la corriente máxima que puede transportar esta resistencia?
(b) ¿Qué voltaje máximo puede establecerse a través de la misma?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **51** Se proyecta una resistencia de calefacción de 1 kW para funcionar a 240 V.

(a) ¿Cuál es su resistencia y qué corriente circulará por ella?
(b) ¿Cuál es la potencia de esta resistencia si funciona a 120 V? Se supone que la resistencia es constante.

• **52** Una batería tiene una fem de 12,0 V. ¿Cuánto trabajo realiza en 5 s si suministra una corriente de intensidad de 3 A?

• **53** Una batería con una fem de 12 V tiene una tensión en bornes de 11,4 V cuando proporciona una corriente de 20 A al motor de arranque de un coche. ¿Cuál es la resistencia interna r de la batería?

• **54**

(a) ¿Cuánta potencia suministra la fem de la batería del problema 53 cuando proporciona una corriente de 20 A?
(b) ¿Qué cantidad de esta potencia se proporciona al motor de arranque?
(c) ¿En cuánto disminuye la energía química de la batería cuando está suministrando 20 A durante 3 min en el arranque de un coche?
(d) ¿Cuánto calor se desarrolla en la batería cuando suministra 20 A durante 3 min?

• **55** Una estudiante de física enchufa constantemente un calentador de 1200 W en su habitación durante el invierno. Si la energía eléctrica cuesta 0,09 dólares por kilovatio-hora, ¿cuánto deberá pagar por esta calefacción cada mes de 30 días?

• **56** Una batería de 6 V con una resistencia interna de 0,3 Ω, se conecta a una resistencia variable R. Hallar la corriente y la potencia liberada por la batería R es

(a) 0 Ω, **(b)** 5 Ω, **(c)** 10 Ω, **(d)** infinito.

•• **57** Un estudiante nocturno carece de un hornillo para calentar agua y decide utilizar un calentador de laboratorio de 200 W para preparar café durante la noche. Si el 90% de la energía producida por el calentador se utiliza en calentar el agua de su taza,

(a) ¿cuánto tiempo se tarda en calentar 0,25 kg de agua desde 15 a 100 °C?
(b) ¿Cuánto tiempo tardará en hervir la totalidad de esta agua después de que alcance los 100 °C?

•• **58** Supóngase que la lámpara de una linterna de dos pilas consume 4 W de potencia. Las baterías se agotan en 45 min y cuestan 7,99 dólares.

(a) ¿Cuántos kilovatio-horas de energía pueden suministrar las dos baterías?
(b) ¿Cuál es el coste por kilovatio-hora de energía si las baterías no pueden recargarse?
(c) Si las baterías pueden recargarse con un coste de 9 centavos de dólar por kilovatio-hora, ¿cuál es el coste de la recarga?

•• **59** Una batería de automóvil de 12 V puede suministrar una carga total de 160 A · h.

(a) ¿Cuál es la energía total almacenada en la batería?
(b) ¿Durante cuánto tiempo podría esta batería suministrar 150 W a un par de faros del automóvil?

•• **60** Un calentador ambiental de una vieja mansión se alimenta con una corriente de 12,5 A. Un par de cables de cobre de calibre 12 transportan la corriente desde la caja de fusibles al enchufe de la pared a lo largo de una distancia de 30 m. El voltaje en la caja de fusibles es exactamente de 120 V.

(a) ¿Cuál es el voltaje distribuido al calentador ambiental?
(b) Si el fusible se funde al pasar una corriente de 20 A, ¿cuántas bombillas de 60 W pueden encenderse en esta línea cuando el calentador está funcionando? (Supóngase que los cables desde la pared al calentador ambiental y a las tomas de luz son de resistencia despreciable.)

•• **61** Un coche eléctrico ligero funciona con diez baterías de 12 V. A una velocidad de 80 km/h la fuerza media de rozamiento es de 1200 N.

(a) ¿Cuál debe ser la potencia del motor eléctrico para que el coche circule a 80 km/h?
(b) Si cada batería puede distribuir una carga total de 160 A · h antes de su recarga, ¿cuál es la carga total en culombios que pueden suministrar las 10 baterías?
(c) ¿Cuál es la energía eléctrica total distribuida por las 10 baterías antes de la recarga?
(d) ¿Qué distancia recorrerá el coche a 80 km/h antes de que las baterías deban ser recargadas?
(e) ¿Cuál es el coste por kilómetro si el precio de recargar las baterías es de 9 centavos de dólar por kilovatio-hora?

••• **62** Una resistencia de calefacción de 100 W se proyecta para funcionar cuando se le aplican en sus extremos 120 V.

(a) ¿Cuál es su resistencia y qué corriente circula por él?
(b) Demostrar que si la diferencia de potencial a través de la resistencia varía en una cantidad pequeña ΔV, la potencia varía en una cantidad ΔP, siendo $\Delta P/P \approx 2\ \Delta V/V$. (*Indicación*: Aproximar las variaciones por diferenciales.)
(c) Hallar la potencia aproximada disipada en la resistencia si la diferencia de potencial disminuye a 115 V.

Asociaciones de resistencias

• **63** Dos resistencias están conectadas en paralelo a través de una diferencia de potencial. La resistencia de A es doble que la de B. Si la corriente transportada por A es I, ¿cuál es la corriente transportada por B?

(a) I **(b)** $2I$ **(c)** $I/2$ **(d)** $4I$ **(e)** $I/4$

• **64** Dos resistencias están conectadas en serie a través de una diferencia de potencial. La resistencia de A es doble que la de B. Si la corriente transportada por la resistencia A es I, ¿cuál es la corriente transportada por B?

(a) I **(b)** $2I$ **(c)** $I/2$ **(d)** $4I$ **(e)** $I/4$

•• **65** Cuando dos resistencias idénticas se conectan en serie entre los bornes de una batería, la potencia distribuida por ésta es 20 W. Si estas resistencias se conectan en paralelo entre los bornes de la misma batería, ¿cuál es la potencia distribuida por la batería?

(a) 5 W **(b)** 10 W **(c)** 20 W **(d)** 40 W **(e)** 80 W

• **66**

(a) Hallar la resistencia equivalente entre los puntos a y b de la figura 26.46.
(b) Si la caída de potencial entre a y b es 12 V, hallar la corriente en cada resistencia.

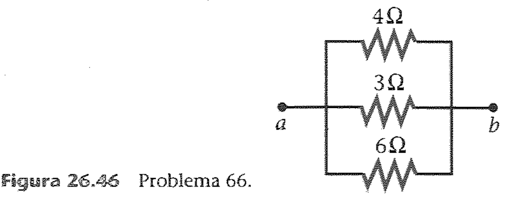


Figura 26.46 Problema 66.

• **67** Repetir el problema 66 para la combinación de resistencias indicada en la figura 26.47.

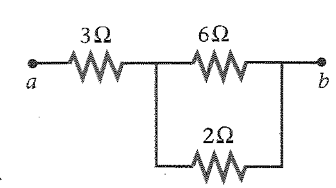


Figura 26.47 Problema 67.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

• **68** Repetir el problema 66 para la combinación de resistencias indicada en la figura 26.48.

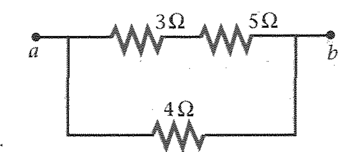


Figura 26.48 Problemas 68 y 69.

• **69** En la figura 26.48 la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω es 4 A.

(a) ¿Cuál es la caída de potencial entre *a* y *b*?
(b) ¿Cuál es la intensidad de corriente en la resistencia de 3 Ω?

• **70**

(a) Demostrar que la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* de la figura 26.49 es *R*.
(b) ¿Qué ocurriría si se añadiese una resistencia *R* entre los puntos *c* y *d*?

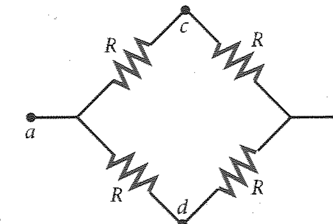


Figura 26.49 Problema 70.

•• **71** La batería de la figura 26.50 tiene una resistencia interna despreciable. Determinar

(a) la corriente en cada resistencia y
(b) la potencia distribuida por la batería

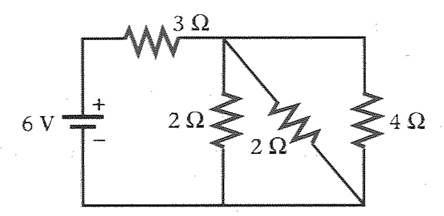


Figura 26.50 Problema 71.

•• **72** Una batería tiene un fem $\mathcal{E}$ y una resistencia interna *r*. Cuando se conecta una resistencia de 5,0 Ω entre los terminales de la misma, la corriente es 0,5 A. Cuando se sustituye esta resistencia por otra de 11,0 Ω, la corriente es 0,25 A. Hallar

(a) la fem $\mathcal{E}$ y
(b) la resistencia interna *r*.

•• **73** Considerar la resistencia equivalente de dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo en función de la relación $x = R_2/R_1$.

(a) Demostrar que $R_{eq} = R_1x/(1 + x)$.
(b) Dibujar un gráfico de R_{eq} en función de *x*.

•• **74** Repetir el problema 66 para la combinación de resistencias indicada en la figura 26.51.

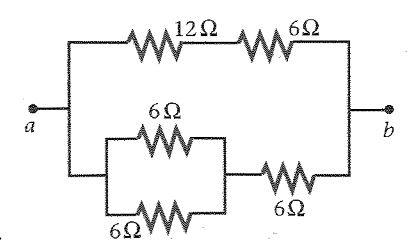


Figura 26.51 Problema 74.

•• **75** Repetir el problema 66 para la combinación de resistencias indicada en la figura 26.52.

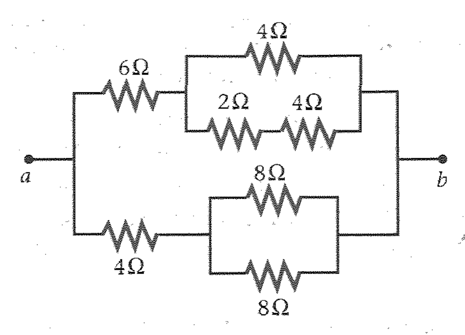


Figura 26.52 Problema 75.

•• **76** Un alambre tiene una resistencia de 120 Ω. El alambre se corta en *N* trozos idénticos que se conectan en paralelo. La resistencia de esta asociación en paralelo es 1,875 Ω. Hallar *N*.

•• **77** Una combinación en paralelo de una resistencia de 8 Ω y una resistencia incógnita *R* se conectan en serie con una resistencia de 16 Ω y una batería. A continuación se conectan las tres resistencias en serie y la misma batería. En ambas combinaciones la corriente a través de la resistencia de 8 Ω es la misma. ¿Cuánto vale la resistencia incógnita *R*?

•• **78** En la red de resistencias mostrada en la figura 26.53 determinar

(a) R_3 tal que $R_{ab} = R_1$; (b) R_2 tal que $R_{ab} = R_3$ y (c) R_1 tal que $R_{ab} = R_1$.

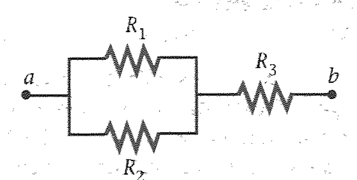


Figura 26.53 Problemas 78 y 79.

•• **79** Comprobar los resultados obtenidos en el problema 78 considerando que

(a) $R_1 = 4$ Ω, $R_2 = 6$ Ω, (b) $R_1 = 4$ Ω, $R_3 = 3$ Ω y (c) $R_2 = 6$ Ω, $R_3 = 3$ Ω.

••• **80** Nueve resistencias de 10 Ω cada una se conectan como indica la figura 26.54 y se aplica una diferencia de potencial de 20 V ente los puntos *a* y *b*.

(a) ¿Cuál es la resistencia equivalente de esta red?
(b) Determinar la intensidad de corriente en cada una de las nueve resistencias.

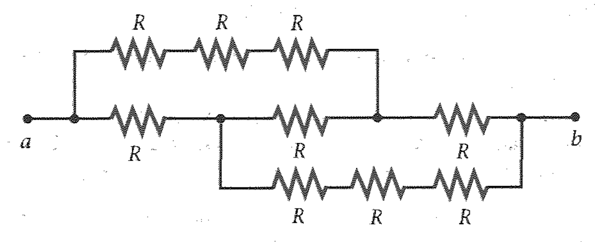


Figura 26.54 Problema 80.

Reglas de Kirchhoff

• **81** La regla de las mallas de Kirchhoff es una consecuencia de

(a) la conservación de la carga.
(b) la conservación de la energía.
(c) las leyes de Newton.
(d) la ley de Coulomb.
(e) la cuantización de la carga.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **82** En la figura 26.55 la fem es de 6 V y R = 0,5 Ω. La producción de calor por efecto Joule en R es 8 W.

(a) ¿Cuál es la corriente en el circuito?
(b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de R?
(c) ¿Cuál es el valor de r?

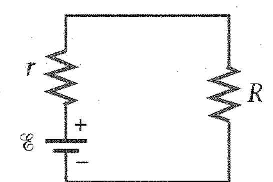


Figura 26.55 Problema 82.

• **83** En el caso del circuito indicado en la figura 26.56 hallar,

(a) la intensidad de corriente,
(b) la potencia liberada o absorbida por cada fem y
(c) la producción de calor por unidad de tiempo en cada resistencia. (Admitir que las baterías tienen unas resistencias internas despreciables.)

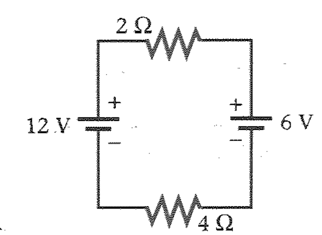


Figura 26.56 Problema 83.

•• **84** Se conecta una batería de un coche prácticamente descargada de 11,4 V de fem y 0,01 Ω de resistencia interna a una carga de 2,0 Ω. Para ayudar a esta batería se conecta una segunda batería, de 12,6 V de fem y 0,01 Ω de resistencia interna, a los bornes de la primera mediante unos cables adecuados.

(a) Dibujar un diagrama del circuito.
(b) Calcular la corriente que circula por cada una de las partes del mismo.
(c) Calcular la potencia cedida por la segunda batería y explicar en qué se invierte ésta; suponer para ello que en ambas baterías la fem y la resistencia interna permanecen constantes.

•• **85** En el circuito indicado en la figura 26.57 la lectura del amperímetro es la misma cuando ambos interruptores están abiertos o ambos cerrados. Hallar la resistencia R.

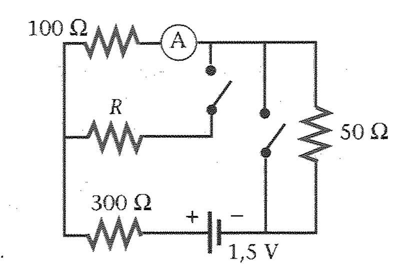


Figura 26.57 Problema 85.

•• **86** En el circuito indicado en la figura 26.58, las baterías tienen unas resistencias internas despreciables y el amperímetro tiene una resistencia despreciable.

(a) Hallar la corriente que pasa a través del amperímetro.
(b) Hallar la energía suministrada por la batería de 12 V en 3 s.
(c) Hallar el calor total disipado en dicho tiempo.
(d) Explicar la diferencia en las respuestas de las partes (b) y (c).

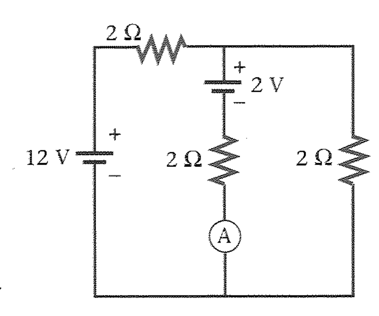


Figura 26.58 Problema 86.

•• **87** En el circuito indicado en la figura 26.59, las baterías tienen una resistencia interna despreciable.

(a) Hallar la corriente en cada resistencia,
(b) la diferencia de potencial entre los puntos a y b y
(c) la potencia suministrada por cada batería.

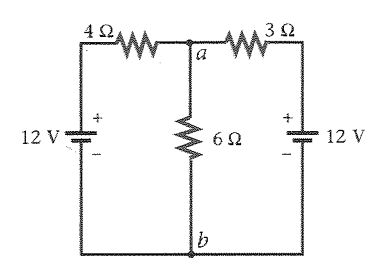


Figura 26.59 Problema 87.

•• **88** Repetir el problema 87 en el caso del circuito indicado en la figura 26.60.

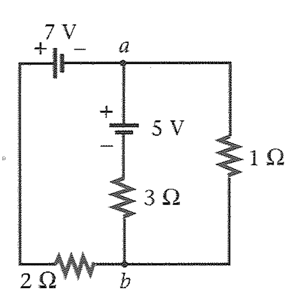


Figura 26.60 Problema 88.

•• **89** Dos baterías idénticas con fem ℰ y resistencia interna r pueden conectarse a través de una resistencia R en serie o en paralelo. ¿Qué método de conexión suministra la mayor potencia a R, cuando

(a) $R < r$, **(b)** $R > r$?

•• **90** En el circuito indicado en la figura 26.61 hallar

(a) la corriente en cada resistencia,
(b) la potencia suministrada por cada fem y
(c) la potencia disipada en cada resistencia.

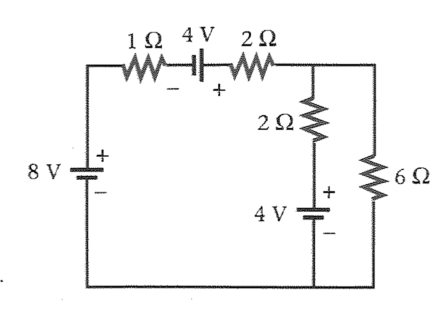


Figura 26.61 Problema 90.

•• **91** En el circuito indicado en la figura 26.62, hallar la diferencia de potencial entre los puntos a y b.

www.elsolucionario.net

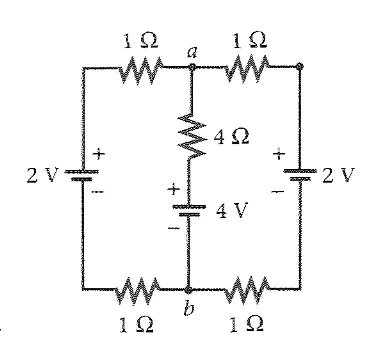


Figura 26.62 Problema 91.

•• **92** En el circuito indicado en la figura 26.63 la batería tiene una resistencia interna de 0,01 Ω. Se inserta en el punto a un amperímetro de resistencia 0,01 Ω.

(a) ¿Cuál es la lectura del amperímetro?
(b) ¿En qué porcentaje variará la corriente por la presencia del amperímetro?
(c) Se retira el amperímetro y se conecta un voltímetro de 1 kΩ de resistencia entre a y b. ¿Cuál es la lectura del voltímetro?
(d) ¿En qué porcentaje varía la caída de potencial entre a y b por la presencia del voltímetro?

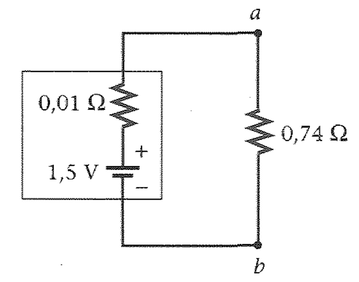


Figura 26.63 Problema 92.

•• **93** Se dispone de dos baterías, una con $\mathscr{E}$ = 9,0 V y r = 0,8 Ω y la otra con $\mathscr{E}$ = 3,0 V y r = 0,4 Ω.

(a) ¿Cómo deberán conectarse para dar la máxima corriente a través de una resistencia R?

Determinar la corriente para

(b) R = 0,2 Ω, (c) R = 0,6 Ω, (d) R = 1,0 Ω y (e) R = 1,5 Ω.

•• **94**

(a) Determinar la intensidad de corriente en cada una de las partes del circuito de la figura 26.64.
(b) Utilizar los resultados de (a) para asignar un potencial en cada punto indicado, suponiendo que el potencial en el punto a es cero.

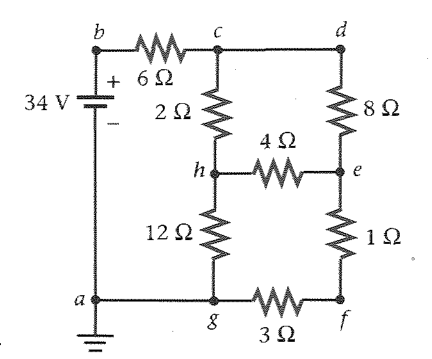


Figura 26.64 Problema 94.

••• **95** Suponer en el problema 84 que la fem correspondiente a la primera batería se incrementa respecto al tiempo con un ritmo de 0,2 V/h, pero que la fem de la segunda batería y las resistencias internas de ambas permanecen constantes.

(a) Calcular en función del tiempo la corriente en cada una de las partes del circuito.
(b) Dibujar un gráfico del la potencia cedida a la primera batería en función del tiempo.

••• **96**

(a) Determinar la corriente en cada parte del circuito de la figura 26.65.
(b) Utilizar los resultados de (a) para asignar un potencial en cada punto indicado, suponiendo que el potencial en el punto a es cero.

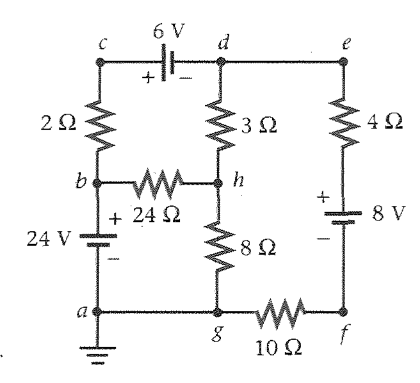


Figura 26.65 Problema 96.

••• **97** Determinar la corriente en cada resistencia del circuito indicado en la figura 26.66.

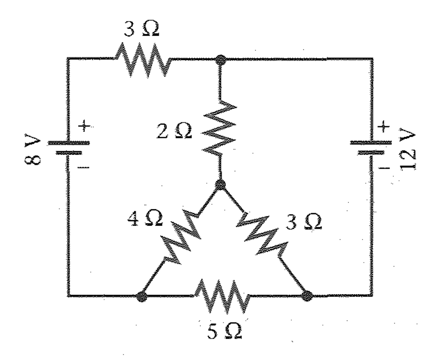


Figura 26.66 Problemas 97 y 98.

••• **98** Suponer que la fem de la batería izquierda de la figura 26.66 es desconocida, pero sabemos que la corriente suministrada por la batería de 12 V es de 0,6 A. Determinar la fem de la batería de la izquierda y la corriente que suministra.

Circuitos *RC*

• **99** El condensador C de la figura 26.67 está inicialmente descargado. Justo después de cerrar el circuito,

(a) el voltaje a través de C es igual a $\mathscr{E}$.
(b) el voltaje a través de R es igual a $\mathscr{E}$.
(c) la corriente en el circuito es cero.
(d) ambas afirmaciones (a) y (c) son correctas.

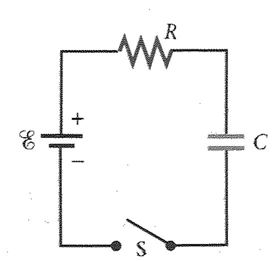


Figura 26.67 Problema 99.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **100** Durante el tiempo transcurrido en cargarse totalmente el condensador de la figura 26.27,

(a) la energía suministrada por la batería es $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$.
(b) la energía disipada en la resistencia es $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$.
(c) la energía se disipa en la resistencia a ritmo constante.
(d) la carga total que fluye a través de la resistencia es $\frac{1}{2}C\mathcal{E}$.

•• **101** Una batería se conecta a una asociación en serie de un interruptor, una resistencia y un condensador inicialmente descargado. El interruptor se cierra en el instante $t = 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) Cuando la carga del condensador crece, la corriente crece.
(b) Cuando la carga del condensador crece, la caída de voltaje a través de la resistencia crece.
(c) Cuando la carga del condensador crece, la corriente permanece constante.
(d) Cuando la carga del condensador crece, la caída del voltaje a través del condensador decrece.
(e) Cuando la carga del condensador crece, la caída del voltaje a través de la resistencia decrece.

•• **102** Un condensador se descarga a través de una resistencia. Si la carga sobre un condensador tarda un tiempo T en caer a la mitad de su valor inicial, ¿cuánto tiempo tarda la energía en caer a la mitad de su valor inicial?

•• **103** Un condensador, una resistencia y una batería se conectan en serie. Si R se duplica, ¿cómo afecta ello

(a) a la energía total almacenada,
(b) a la energía almacenada por unidad de tiempo y
(c) al tiempo necesario para almacenar $1/e$ de la energía final?

•• **104** Un condensador, una resistencia y una batería se conectan en serie. Si C se duplica, ¿cómo afecta ello

(a) a la energía total almacenada,
(b) a la energía almacenada por unidad de tiempo y
(c) al tiempo necesario para almacenar $1/e$ de la energía final?

• **105** Un condensador de 6 μF está cargado inicialmente a 100 V y luego se unen sus armaduras a través de una resistencia de 500 Ω.

(a) ¿Cuál es la carga inicial del condensador?
(b) ¿Cuál es la corriente inicial en el instante después de que se conecte el condensador a la resistencia?
(c) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?
(d) ¿Cuánta carga existe sobre el condensador después de 6 ms?

• **106**

(a) En el caso del problema 105 hallar la energía inicial almacenada en el condensador.
(b) Demostrar que la energía almacenada en el condensador viene dada por $U = U_0e^{-2t/\tau}$, en donde U_0 es la energía inicial y $\tau = RC$ es la constante de tiempo.
(c) Hacer un esquema cuidadoso de la energía U en el condensador en función del tiempo t.

•• **107** En el circuito de la figura 26.40, fem $\mathcal{E}$ = 50 V y C = 2,0 μF; el condensador está inicialmente sin carga. A los 4,0 s de haber cerrado el interruptor S la caída de voltaje a través de la resistencia es 20 V. Hallar el valor de la resistencia.

•• **108** A un condensador de 0,12 μF se le da una carga Q_0. Después de 4 s se observa que su carga es $\frac{1}{2}Q_0$. ¿Cuál es la resistencia efectiva a través de este condensador?

•• **109** Un condensador de 1,6 μF inicialmente descargado se conecta en serie con una resistencia de 10 kΩ y una batería de 5,0 V de resistencia interna despreciable.

(a) ¿Cuál es la carga en el condensador después de un tiempo muy largo?
(b) ¿Cuánto tiempo emplea el condensador en alcanzar el 99 por ciento de su carga final?

•• **110** Considérese el circuito de la figura 26.68. Conocido el comportamiento de los condensadores en los circuitos, determinar

(a) la corriente inicial de la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor;
(b) la corriente estacionaria a través de la batería después de transcurrido un largo tiempo y
(c) el voltaje máximo a través del condensador.

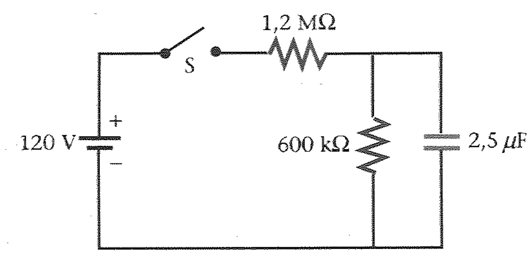


Figura 26.68 Problema 110.

•• **111** Se conecta una resistencia de 2 MΩ en serie con un condensador de 1,5 μF y una batería de 6,0 V de resistencia interna despreciable. El condensador está inicialmente descargado. Después de un tiempo $t = \tau = RC$, hallar

(a) la carga en un condensador,
(b) el ritmo o velocidad con el que está aumentando la carga,
(c) la corriente,
(d) la potencia suministrada por la batería,
(e) la potencia disipada en la resistencia y
(f) la velocidad a la que está aumentando la energía almacenada en el condensador.

•• **112** Repetir el problema 111 para el caso del tiempo $t = 2\tau$.

•• **113** En estado estacionario, la carga sobre el condensador de 5 μF del circuito de la figura 26.69 es de 1000 μC.

(a) Determinar la corriente de la batería.
(b) Determinar las resistencias R_1, R_2 y R_3.

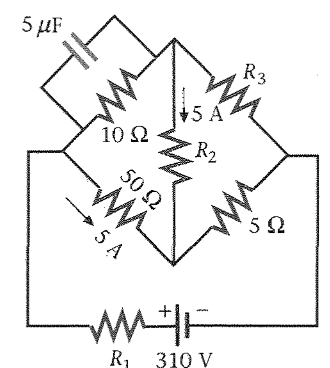


Figura 26.69 Problema 113.

•• **114**

(a) Determinar el voltaje a través del condensador del circuito de la figura 26.70.
(b) Si la batería se desconecta, expresar la corriente en función del tiempo.
(c) ¿Cuánto tiempo tardará en descargarse el condensador hasta que la diferencia de potencial a su través sea de 1 V?

www.elsolucionario.net

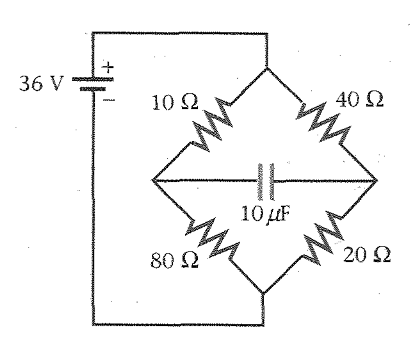


Figura 26.70 Problema 114.

•• **115** Demostrar que la ecuación 26.34 puede escribirse en la forma

$$\frac{dQ}{\mathcal{E}C - Q} = \frac{dt}{RC}$$

Integrar esta ecuación para deducir la solución dada en la ecuación 26.35.

••• **116** El flash de un fotógrafo está formado por una batería de 9,0 V que carga un condensador de 0,15 μF y éste se descarga a través de una lámpara de destellos de resistencia 10,5 Ω cuando se cierra el interruptor. El voltaje mínimo necesario para la descarga del flash es de 7,0 V. El condensador se carga a través de una resistencia de 18 kΩ.

(a) ¿Cuánto tiempo se requiere para cargar el condensador hasta su voltaje mínimo 7,0 V?
(b) ¿Cuánta energía se libera en cada destello de la lámpara?
(c) ¿Cuánta energía suministra la batería durante el ciclo de carga y qué fracción de la energía se disipa en la resistencia?

••• **117** En el circuito de la figura 26.71,

(a) ¿cuál es la corriente inicial de la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor S?
(b) ¿Cuál es la corriente de la batería un tiempo largo después de cerrar el interruptor S?
(c) ¿Cómo varía la intensidad de corriente en la resistencia de 600 Ω en función del tiempo?

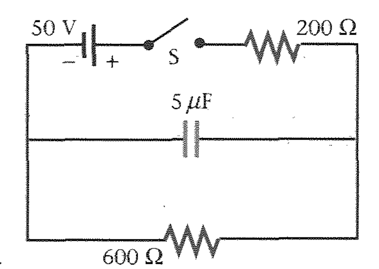


Figura 26.71 Problema 117.

••• **118** En el circuito de la figura 26.72,

(a) ¿cuál es la intensidad inicial de la corriente suministrada por la batería inmediatamente después de cerrado el interruptor S?
(b) ¿Y al cabo de un largo tiempo de cierre de S?
(c) Si el interruptor ha estado cerrado durante un largo tiempo y luego se abre, determinar la variación de la intensidad de corriente a través de la resistencia de 600 kΩ en función del tiempo.

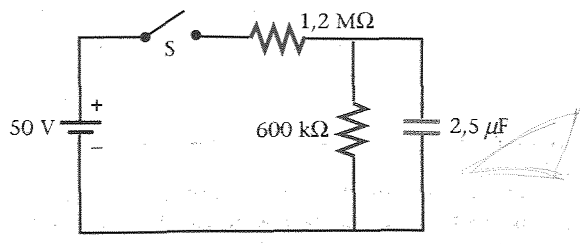


Figura 26.72 Problema 118.

••• **119** En el circuito de la figura 26.73 el condensador tiene una capacidad de 2,5 μF y la resistencia es de 0,5 MΩ. Antes de cerrar el interruptor, la caída de potencial a través del condensador es 12 V, como se indica. El interruptor S se cierra para $t = 0$.

(a) ¿Cuál es la corriente en R inmediatamente después de cerrar S?
(b) ¿Para qué tiempo el voltaje a través del condensador es 24 V?

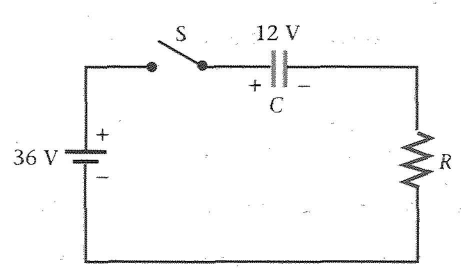


Figura 26.73 Problemas 119 y 120.

••• **120** Repetir el problema 119 si el condensador se conecta con la polaridad invertida.

Problemas generales

• **121** Una lámpara de flash produce un destello por la descarga de un condensador que se ha cargado por medio de una batería. ¿Por qué no se conecta directamente la batería a la lámpara?

• **122** ¿Cuál produce mayor emisión de calor al ser conectada con una batería ideal: una pequeña resistencia o una gran resistencia?

• **123** ¿Pueden aplicarse las reglas de Kirchhoff a circuitos que contengan condensadores?

•• **124** Verdadero o falso:

(a) La ley de Ohm es $R = V/I$.
(b) Los electrones se desplazan en la dirección de la corriente.
(c) Una fuente de fem suministra potencia a un circuito eléctrico.
(d) Cuando el potencial experimenta una caída V en un segmento de un circuito, la potencia suministrada a ese segmento es IV.
(e) La resistencia equivalente a dos resistencias en paralelo es siempre menor que cualquiera de las resistencias de la asociación.
(f) La tensión en los bornes de una batería es siempre igual a su fem.
(g) La tensión en los bornes de una batería es siempre menor que su fem.

•• **125** Las tres resistencias de la figura 26.74 son idénticas. La potencia disipada es:

(a) la misma en R_1 que en la combinación en paralelo de R_2 y R_3.
(b) la misma en R_1 que en R_2.
(c) mayor en R_1.
(d) menor en R_1.

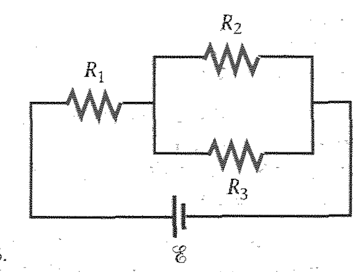


Figura 26.74 Problemas 125 y 126.

•• **126** En la figura 26.74, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$ y $R_3 = 12\ \Omega$. Si llamamos I_1, I_2, I_3 a las intensidades respectivas que pasan por estas resistencias,

(a) $I_1 > I_2 > I_3$. **(b)** $I_2 = I_3$. **(c)** $I_3 > I_2$.
(d) Ninguna de las anteriores es correcta.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **127** Una bombilla de 25 W esta conectada en serie con otra de 100 W y a través de la asociación se establece un voltaje V. ¿Cuál de las dos bombillas brilla más? Razonar la respuesta.

• **128** Si la fem de la batería de la figura 26.74 es 24 V, entonces
(a) $I_2 = 4$ A. **(b)** $I_2 = 2$ A. **(c)** $I_2 = 1$ A.
(d) Ninguna de las anteriores es correcta.

• **129** Se calcula una resistencia de 10,0 Ω para disipar 5,0 W.
(a) ¿Qué corriente máxima puede tolerar esta resistencia?
(b) ¿Qué tensión entre sus extremos producirá esta corriente?

• **130** Una muchacha intenta economizar energía apagando el calentador ambiental y calentándose con un tostador. Para ello empuja la palanca del tostador hacia abajo y se duerme. A los 4 minutos el tostador salta y eventualmente la muchacha se despierta con frío. Empuja de nuevo la palanca del tostador y consigue dormir un poco más. Este proceso se repite cada 15 minutos. Ella pasa una mala noche, pero está dispuesta a ahorrar dinero. La energía cuesta 0,09 dólares por kilovatio-hora y se utiliza una fuente de 120 V.
(a) ¿Cuánto cuesta operar el tostador eléctrico durante 4 min si su resistencia es 11,0 Ω?
(b) ¿Cuánto le costaría el calentador ambiental conectado a 120 V si su resistencia es de 5,0 Ω durante 8 h?

•• **131** Una batería de 12 V de un coche posee una resistencia interna de 0,4 Ω.
(a) ¿Cuál es la corriente si se cortocircuita momentáneamente la batería?
(b) ¿Cuál es la tensión en bornes cuando la batería suministra una corriente de 20 A para poner en marcha el motor?

•• **132** Una batería suministra una corriente de 1,80 A cuando una resistencia de 7,0 Ω se conecta entre sus bornes. Si se conecta una segunda resistencia de 12 Ω en paralelo con la de 7 Ω, la batería suministra una corriente de 2,20 A. ¿Cuáles son la fem y la resistencia interna de la batería?

•• **133** Un conductor de cobre de calibre 16 aislado con caucho puede transportar con seguridad una corriente máxima de 6 A.
(a) ¿Cuál es el valor máximo de la diferencia de potencial que puede aplicarse en los extremos de 40 m de un conductor de este tipo?
(b) Hallar el campo eléctrico en el conductor cuando circulan por él 16 A.
(c) Hallar la potencia disipada en el conductor en este último caso.

•• **134** El cable de conexión para el arranque de un automóvil es de 3 m de longitud y está formado por múltiples hebras de cobre que en su conjunto tienen un área transversal de 10,0 mm^2.
(a) ¿Cuál es la resistencia de este cable?
(b) Cuando se utiliza en el arranque, transporta una corriente de 90 A. ¿Cuál es la caída de voltaje que tiene lugar a su través?
(c) ¿Cuánta potencia se disipa en el cable?

•• **135** Se utiliza una espiral de alambre de nicrom como elemento calefactor en un evaporador de agua que genera 8,0 g de vapor por segundo. El alambre posee un diámetro de 1,80 mm y está conectado a una fuente de alimentación de 120 V. Calcular la longitud del alambre.

•• **136** Una caja cerrada tiene dos terminales metálicos a y b. Dentro de la caja existe una fem $\mathscr{E}$ incógnita en serie con una resistencia R. Cuando una diferencia de potencial de 21 V se establece entre a y b, una corriente de 1 A entra en la caja por a y sale por b. Si se invierte esta diferencia de potencial, se observa una corriente de 2 A en dirección inversa a la situación anterior. Determinar $\mathscr{E}$ y R.

•• **137** Los condensadores del circuito de la figura 26.75 están inicialmente descargados.
(a) ¿Cuál es el valor inicial de la corriente suministrada por la batería cuando se cierra el interruptor S?
(b) ¿Cuál es la intensidad de la corriente de la batería después de un tiempo largo?
(c) ¿Cuáles son las cargas finales sobre los condensadores?

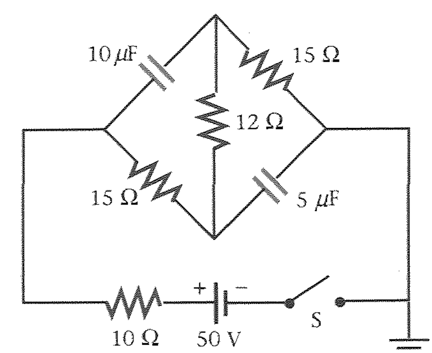


Figura 26.75 Problema 137.

•• **138** El circuito de la figura 26.76 es un *puente de Wheatstone* de hilo. Se utiliza para determinar una resistencia incógnita R_x en función de las resistencias conocidas R_1, R_2 y R_0. Las resistencias R_1 y R_2 comprenden un alambre de 1 m de longitud. El punto a es un contacto deslizante que se mueve a lo largo del alambre modificando estas resistencias. La resistencia R_1 es proporcional a la distancia desde el extremo izquierdo del alambre (0 cm) al punto a, y R_2 es proporcional a la distancia desde el punto a al extremo derecho del alambre (100 cm). Cuando los puntos a y b están a igual potencial, no pasa corriente por el galvanómetro se utiliza para detectar la ausencia de corriente, se le llama *detector de cero*.) Si la resistencia fija vale $R_0 = 200$ Ω, hallar la resistencia incógnita R_x si
(a) el puente se equilibra en la marca de 18 cm,
(b) el puente se equilibra en la marca de 60 cm y
(c) el puente se equilibra en la marca de 95 cm.

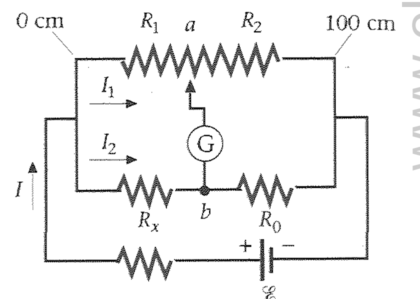


Figura 26.76 Problemas 138 y 139.

•• **139** En el puente Wheatstone del problema 138, si $R_0 = 200$ Ω, el puente se equilibra en la marca de 98 cm.
(a) ¿Cuál es la resistencia incógnita?
(b) ¿Qué influencia tendría un error de 2 mm sobre el valor medido de la resistencia incógnita?
(c) ¿Cómo debería variarse R_0 de modo que esta resistencia incógnita diese un punto de equilibrio más próximo a la marca de 50 cm?

•• **140** Los cables eléctricos de una casa deben ser suficientemente gruesos de diámetro para que no se calienten demasiado y provoquen un incendio. Supongamos que un alambre determinado transporta una corriente de 20 A, y se especifica que el calentamiento por efecto Joule no debe exceder los 2 W/m. ¿Qué diámetro debe tener un alambre de cobre para que se considere "seguro" con esta corriente?

•• **141** Tenemos n pilas idénticas, cada una de ellas de fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna $r = 0,2$ Ω. Cuando estas pilas se conectan en paralelo

www.elsolucionario.net

para formar una batería y conectamos una resistencia R a un terminal de ésta, la corriente a través de R es la misma que si las pilas se conectan en serie y R se dispone entre los bornes de dicha batería. Hallar el valor de la resistencia R.

•• **142** Un ciclotrón produce un haz de protones de 3,50 μA de energía 60 MeV. Los protones chocan y se detienen dentro de un blanco de cobre de 50 g dentro de la cámara de vacío.

(a) Determinar el número de protones que chocan contra el blanco por segundo.
(b) Determinar la energía depositada en el blanco por segundo.
(c) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que la temperatura del blanco se incremente en 300 °C? (Despreciar el enfriamiento por radiación.)

•• **143** Unos tubos fluorescentes compactos cuestan 6 dólares cada uno y su período de vida se estima en 8000 h. Estos tubos consumen 20 W de potencia, pero producen una iluminación equivalente a la de las bombillas incandescentes de 75 W. Éstas cuestan 1,5 centavos de dólar cada una y su período de vida se estima en 1200 h.

(a) Si una vivienda tiene por término medio seis bombillas incandescentes de 75 W constantemente encendidas y la energía cuesta 9 centavos de dólar por kilovatio-hora, ¿cuánto dinero se ahorrará un consumidor cada año instalando en su lugar tubos fluorescentes?
(b) ¿Cuál debería ser el precio del kilovatio-hora para que el coste total del uso de las bombillas fuese igual al correspondiente uso de los tubos?

•• **144** El espacio existente entre las placas de un condensador de placas paralelas se llena con un dieléctrico de constante κ y resistividad ρ.

(a) Demostrar que la carga sobre las placas disminuye con la constante de tiempo $\tau = \epsilon_0 \kappa \rho$.
(b) Si el dieléctrico es de mica, para el cual $\kappa = 5{,}0$ y $\rho = 9 \times 10^{13}\ \Omega \cdot$ m, determinar el tiempo que tarda la carga en decrecer en $1/e^2 \approx 14\%$ de su valor inicial.

•• **145** La correa de un acelerador de Van de Graaff transporta una densidad de carga superficial de 5 mC/m^2. La correa tiene una anchura de 0,5 m y se mueve a 20 m/s.

(a) ¿Qué corriente transporta?
(b) Si esta carga ha de elevarse hasta un potencial de 100 kV, ¿cuál es el menor valor de la potencia del motor para accionar la corriente?

•• **146** Los grandes electroimanes convencionales utilizan la refrigeración con agua para evitar el excesivo calentamiento de los arrollamientos. Uno de estos electroimanes utiliza una corriente de 100 A cuando se aplica un voltaje de 240 V a los terminales de las bobinas de excitación. Para refrigerar las bobinas, circula agua a una temperatura inicial de 15 °C a través de ellas. ¿Cuántos litros por segundos deben pasar a través de las bobinas para que la temperatura de éstas no exceda los 50 °C?

••• **147** En la figura 26.77 se muestra la base del circuito de barrido utilizado en un osciloscopio. S es un interruptor electrónico que cierra el circuito siempre que el potencial entre sus terminales alcanza un valor V_c y lo abre cuando el potencial ha caído a 0,2 V. La fem $\mathscr{E}$, mucho mayor que V_c, carga el condensador C a través de una resistencia R_1. La resistencia R_2 representa la resistencia pequeña, pero finita del interruptor electrónico. En un circuito típico, $\mathscr{E} = 800$ V, $V_c = 4{,}2$ V, $R_2 = 0{,}001\ \Omega$, $R_1 = 0{,}5$ MΩ $(0{,}5 \times 10^6\ \Omega)$ y $C = 0{,}02\ \mu$F.

(a) ¿Cuál es la constante de tiempo para la carga del condensador C?
(b) Demostrar que durante el tiempo necesario para que se alcance el potencial crítico $V_c = 4{,}2$ V entre los bornes de S, el voltaje a través del condensador crece casi linealmente con el tiempo. (*Recomendación*: Utilizar el desarrollo de la exponencial para valores pequeños del exponente.)
(c) ¿Cuál debería ser el valor de R_1 para que C se cargue de 0,2 a 4,2 V en 0,1 s?
(d) ¿Cuánto tiempo transcurre durante la descarga de C a través del interruptor S?
(e) ¿A qué ritmo se disipa la potencia en la resistencia R_1 y en la resistencia del interruptor?

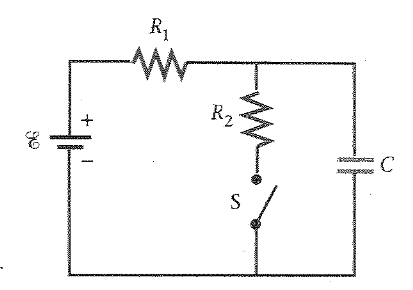


Figura 26.77 Problema 147.

••• **148** En el circuito de la figura 26.78, $R_1 = 2{,}0$ MΩ, $R_2 = 5{,}0$ MΩ y $C = 1{,}0\ \mu$F. En el tiempo $t = 0$, el interruptor S está cerrado y en $t = 2{,}0$ s está abierto.

(a) Representar gráficamente el voltaje a través de C y la corriente a través de R_2 entre $t = 0$ y $t = 10$ s.
(b) Determinar el voltaje a través del condensador en los tiempos $t = 2$ s y $t = 8$ s.

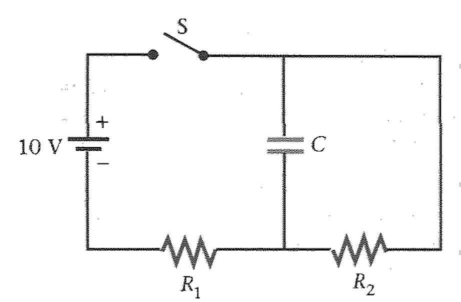


Figura 26.78 Problema 148.

••• **149** Si el condensador del circuito de la figura 26.70 se reemplaza por una resistencia de 30 Ω, ¿qué corrientes fluirán a través de las resistencias?

••• **150** Dos baterías de fems $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ y de resistencias internas r_1 y r_2 se conectan en paralelo. Demostrar que la resistencia de carga óptima (para la cesión de una potencia máxima) R conectada en paralelo con esta combinación es $R = r_1 r_2/(r_1 + r_2)$.

••• **151** Los condensadores C_1 y C_2 están conectados en paralelo con una resistencia y dos interruptores tal como muestra la figura 26.79. El condensador C_1 está inicialmente cargado con un voltaje V_0 y el condensador C_2 está sin carga. Los interruptores S se cierran entonces.

(a) ¿Cuáles son las cargas finales sobre C_1 y C_2?
(b) Comparar las energías inicial y final almacenadas en el sistema.
(c) ¿Cuál es la causa de la disminución de la energía almacenada en los condensadores?

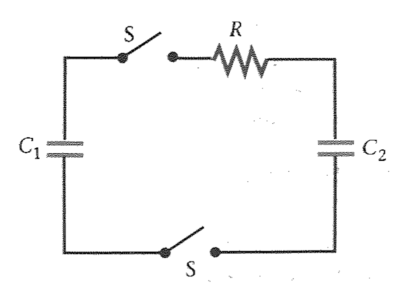


Figura 26.79 Problemas 151 y 152.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

••• **152**

(a) En el problema 151 determinar la intensidad de corriente que circula por R en función del tiempo después de cerrar los interruptores S.
(b) Determinar la energía total disipada en la resistencia en función del tiempo.
(c) Determinar la energía total disipada y compararla con la pérdida de energía almacenada, deducida en la parte (b) del problema 151.

••• **153** Los condensadores del circuito de la figura 26.80 están inicialmente descargados. El interruptor S_2 se cierra primero y después se cierra el S_1.

(a) ¿Cuál es la corriente de la batería inmediatamente después de cerrar S_1?
(b) ¿Cuál es la corriente de la batería un tiempo largo después de cerrar ambos interruptores?
(c) ¿Cuál es el voltaje final a través de C_1?
(d) ¿Cuál es el voltaje final a través de C_2?
(e) Después de un largo tiempo, se abre de nuevo el interruptor S_2. Expresar la intensidad de corriente en la resistencia de 150 Ω en función del tiempo.

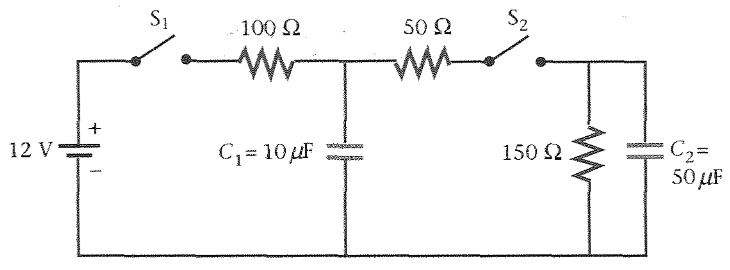


Figura 26.80 Problema 153.

••• **154** El condensador del circuito RC de la figura 26.40a está inicialmente descargado y el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuál es la potencia suministrada por la batería en función del tiempo?
(b) ¿Cuál es la potencia disipada en la resistencia en función del tiempo?
(c) Determinar el ritmo con que la energía se almacena en el condensador en función del tiempo. Representar las respuestas a las partes (a), (b) y (c) en función del tiempo sobre el mismo gráfico.
(d) Determinar el ritmo máximo con el que se almacena la energía en el condensador en función del voltaje $\mathcal{E}$ de la batería y la resistencia R. ¿En qué instante ocurre este máximo?

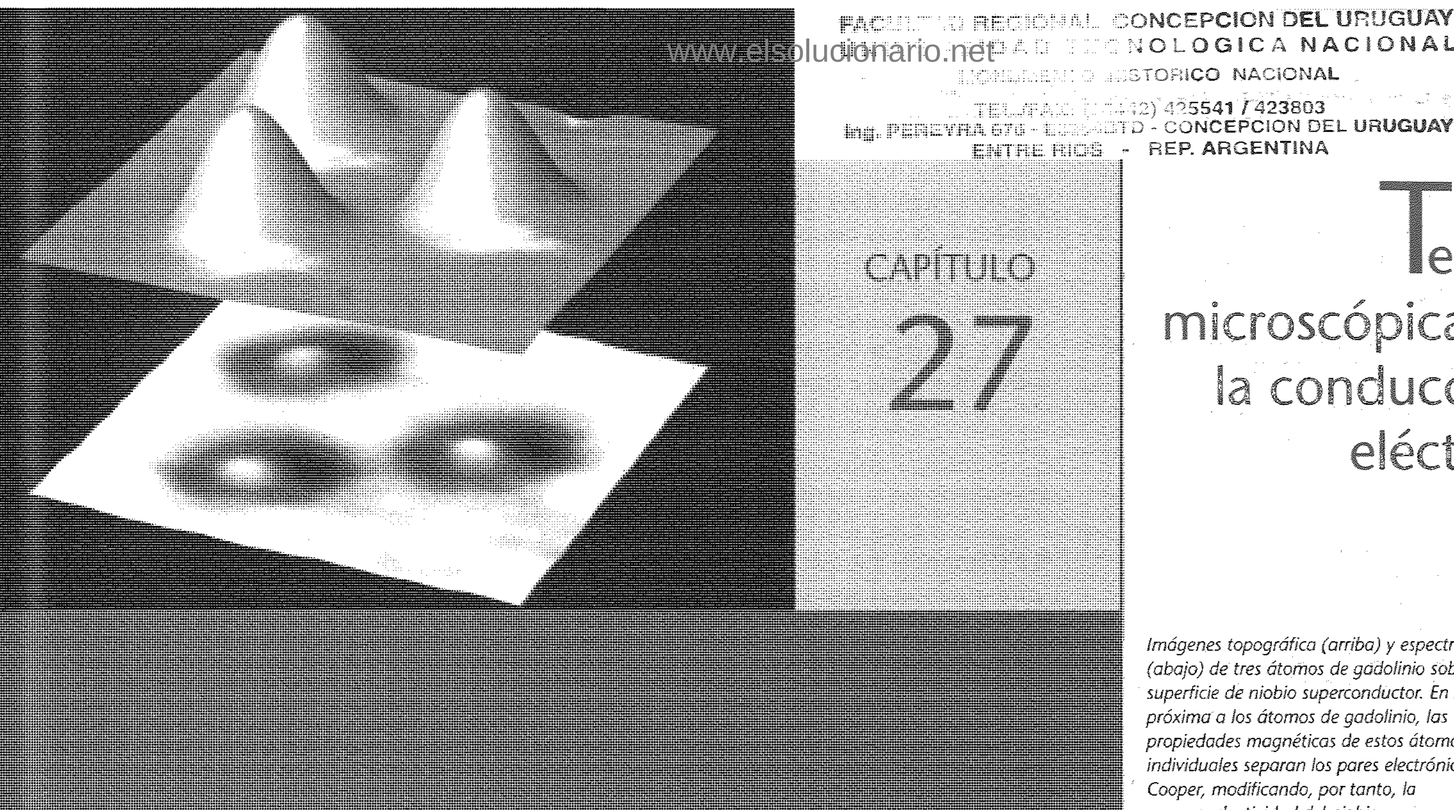
••• **155** Un acelerador lineal produce un haz pulsante de electrones. La corriente del pulso es de 1,6 A con una duración de 0,1 μs.

(a) ¿Cuántos electrones se aceleran en cada pulso?
(b) ¿Cuál es la corriente media del haz si existen 1000 pulsos por segundo?
(c) Si cada electrón adquiere una energía de 400 MeV, ¿cuál es la potencia media suministrada al acelerador?
(d) ¿Cuál es la potencia de pico suministrada?
(e) ¿Qué fracción del tiempo está el acelerador realmente acelerando partículas? (Este cociente se denomina *factor de respuesta* del acelerador.)

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 27

Teoría microscópica de la conducción eléctrica

OPCIONAL

Imágenes topográfica (arriba) y espectroscópica (abajo) de tres átomos de gadolinio sobre una superficie de niobio superconductor. En la región próxima a los átomos de gadolinio, las propiedades magnéticas de estos átomos individuales separan los pares electrónicos de Cooper, modificando, por tanto, la superconductividad del niobio.

www.elsolucionario.net

En capítulos anteriores utilizamos la ley de Ohm para determinar las intensidades de corriente en diversos circuitos, pero no intentamos relacionar la ley de Ohm con las propiedades de los metales. Aquí introducimos un modelo microscópico de la conducción eléctrica para relacionar la resistividad de un metal con las propiedades de los electrones y los iones reticulares del metal. Este modelo es semejante al de un gas que vimos en el capítulo 18 para relacionar la presión gaseosa sobre las paredes del recinto que le contiene con la energía media de las moléculas del gas, la cual a su vez está relacionada con la temperatura absoluta del gas.

El primer modelo microscópico de la conducción eléctrica fue propuesto por P. Drude en 1900 y desarrollado por Hendrik A. Lorentz hacia 1909. Este modelo predice la ley de Ohm y relaciona la resistividad de los conductores con la velocidad media v_m y el recorrido libre medio λ de los electrones libres dentro del conductor. Sin embargo, cuando v_m y λ se interpretan clásicamente hay un desacuerdo entre los valores calculados y medidos de la resistividad y un desacuerdo semejante entre la dependencia con la temperatura pronosticada y observada. Así, la teoría clásica no describe adecuadamente la resistividad de los metales. Además, la teoría clásica no dice nada respecto a las propiedades más sorprendentes de los sólidos, a saber, que algunos materiales son conductores, otros aislantes y otros, incluso son semiconductores, materiales cuya resistividad es intermedia a la de los conductores y aislantes.

Cuando v_m y λ se interpretan mediante la teoría cuántica, la magnitud y la dependencia con la temperatura de la resistividad se pronostican correctamente. Además, la teoría cuántica nos permite determinar si un material será conductor, aislante o semiconductor.

Imagen microscópica de la conducción 27.1

Consideraremos un metal como una red regular tridimensional de iones que ocupan un volumen V y contienen un gran número N de electrones que pueden moverse libremente a través de todo el metal. Experimentalmente se ha comprobado que el número

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

de electrones libres de un metal es aproximadamente de 1 a 4 electrones por átomo. En ausencia de un campo eléctrico, los electrones libres se mueven en el metal aleatoriamente de un modo muy parecido a como las moléculas del gas se mueven dentro de un recinto. Por ello, con frecuencia nos referimos a estos electrones libres en un metal como un gas electrónico.

La corriente eléctrica en un segmento de alambre conductor es proporcional a la caída de voltaje a través del segmento:

$$I = \frac{V}{R}$$

o

$$V = IR$$

La resistencia R es proporcional a la longitud L del segmento de alambre e inversamente proporcional al área transversal A:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

en donde ρ es la resistividad. De acuerdo con la ley de Ohm, la resistencia de un determinado segmento de alambre es independiente de la corriente que circula por el segmento y, por tanto, independiente de la caída de voltaje a través del mismo. Para un campo eléctrico uniforme E, la caída de voltaje a través de un segmento de longitud L es $V = EL$. Por tanto, la ley de Ohm implica que la resistencia y, por tanto, la resistividad, es independiente del campo aplicado E.

Sustituyendo $\rho L/A$ en lugar de R y EL en lugar de V, podemos escribir la corriente en función del campo eléctrico E y la resistividad. Tenemos

$$I = \frac{V}{R} = \frac{EL}{\rho L/A} = \frac{1}{\rho}EA \tag{27.1}$$

La ecuación 26.3 nos dice que la intensidad de la corriente que circula por un alambre está relacionada con el número de electrones por unidad de volumen $n_e = N/V$, la velocidad de desplazamiento v_d, la magnitud de la carga del electrón $q = e$, y el área transversal A:

$$I = nqAv_d = n_e eAv_d \tag{27.2}$$

Combinando las ecuaciones 27.1 y 27.2 a través de la intensidad I obtenemos

$$n_e eAv_d = \frac{1}{\rho}EA$$

o sea,

$$\rho = \frac{E}{n_e ev_d} \tag{27.3}$$

Por tanto, si se cumple la ley de Ohm, ρ debe ser independiente de E y según la ecuación 27.3, la velocidad de desplazamiento v_d debe ser proporcional a E.

En presencia de un campo eléctrico, un electrón libre experimenta una fuerza de magnitud eE. Si esta fuerza fuera la única que actúa sobre el electrón, éste experimentaría una aceleración eE/m_e y su velocidad se incrementaría uniformemente. Sin embargo, la ecuación 27.3 implica que existe una situación estacionaria en la cual la velocidad de desplazamiento constante del electrón es proporcional al campo E. En el modelo microscópico se supone que un electrón libre es acelerado durante un corto intervalo de tiempo y luego verifica un choque contra un ion de la red. Después del choque, la velocidad del electrón no tiene ninguna relación con lo que tenía antes de la colisión. La justificación de esta hipótesis es que la velocidad de desplazamiento es muy pequeña comparada con la velocidad térmica aleatoria.

Sea τ el tiempo medio antes de que un electrón, escogido al azar, realice su siguiente colisión. Como la aceleración es eE/m_e, la velocidad de desplazamiento es

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

$$v_d = \frac{eE}{m_e}\tau \qquad (27.4)$$

Usando este resultado en la ecuación 27.3 obtenemos:

$$\rho = \frac{E}{n_e e(eE\tau/m_e)} = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau} \qquad (27.5)$$

El tiempo τ, llamado **tiempo de colisión**, es el tiempo medio entre colisiones.[1] La distancia media que el electrón recorre entre colisiones es $v_m\tau$ y se llama **recorrido libre medio λ**:

$$\lambda = v_m\tau \qquad (27.6)$$

En función del recorrido libre medio y la velocidad media, la resistividad es

$$\rho = \frac{m_e v_m}{n_e e^2 \lambda} \qquad (27.7)$$

Resistividad en función de v_m y λ

Según la ley de Ohm, la resistividad es independiente del campo eléctrico E. Como m_e, n_e y e^2 son constantes, las únicas magnitudes que podrían posiblemente depender de E son la velocidad media v_m, y el recorrido libre medio λ. Analizaremos estas magnitudes para ver si se cumplen estas dependencias.

Interpretación clásica de λ y v_m

Clásicamente, a la temperatura $T = 0$, todos los electrones libres de un conductor deberían tener energía cinética igual a cero. Cuando el conductor eleva su temperatura, los iones de la red adquieren una energía cinética media de $\frac{3}{2}kT$, que es impartida al gas de electrones por medio de colisiones entre iones y electrones. (Este es un resultado del teorema de equipartición estudiado en los capítulos 18 y 19.) El gas de electrones adquiriría entonces una distribución de Maxwell-Boltzmann análoga a la del gas de moléculas. En equilibrio, los electrones deberían tener una energía cinética media igual a $\frac{3}{2}kT$, que a las temperaturas ordinarias (~300 K) es aproximadamente 0,04 eV. Para $T = 300$ K su velocidad raíz cuadrática media (rcm),[2] ligeramente mayor que la velocidad media, es

$$v_m \approx v_{rcm} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = \sqrt{\frac{3(1{,}38\times10^{-23}\text{ J/K})(300\text{ K})}{1{,}17\times10^{-31}\text{ kg}}}$$
$$= 1{,}17\times10^5\text{ m/s} \qquad (27.8)$$

Obsérvese que esta velocidad es aproximadamente tres mil millones de veces superior a la velocidad típica de desplazamiento, $3{,}5\times10^{-5}$ m/s, calculada en el ejemplo 26.1. La pequeñísima velocidad de desplazamiento originada por el campo eléctrico no tiene, por tanto, ningún efecto esencial en la enorme velocidad media de los electrones, es decir, v_m en la ecuación 27.7 no puede depender del campo eléctrico E.

El recorrido libre medio está relacionado clásicamente con el tamaño de los iones de la red en el conductor y el número de iones por unidad de volumen. Consideremos un electrón que se mueve con velocidad v a través de una región de iones estacionarios, supuestas esferas duras (figura 27.1). El tamaño del electrón se supone despreciable. El electrón chocará con un ion de radio r cuando se encuentre a la distancia r del centro del ion. En un tiempo t_1, el electrón se mueve una distancia vt_1. Si existe un ion cuyo centro se encuentre en el volumen cilíndrico $\pi r^2 vt_1$, el electrón chocará con él. El electrón

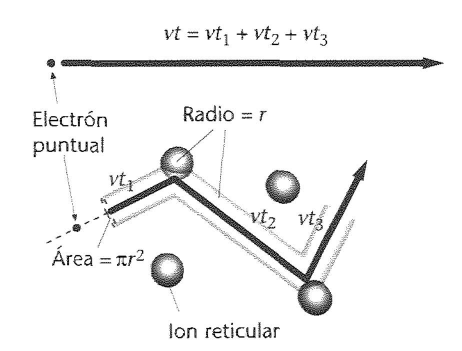


Figura 27.1 Modelo de un electrón que se mueve a través de los iones de la red cristalina del cobre. El electrón, considerado como un punto, choca con un ion de la red si está dentro de una distancia r del centro del ion, siendo r su radio. Si el electrón tiene la velocidad v, choca con todos los iones contenidos en el volumen cilíndrico $\pi r^2 vt$ en el tiempo t.

[1] Es tentador, pero incorrecto, pensar que si τ es el tiempo medio entre choques, el tiempo medio desde su última colisión es $\frac{1}{2}\tau$ y no τ. Ante esta confusión nos queda el consuelo de pensar que Drude utilizó el resultado incorrecto $\frac{1}{2}\tau$ en su trabajo original.

[2] Véase ecuación 18.23.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

entonces cambia de dirección y choca con otro ion en el tiempo t_2 si el centro del ion está en el volumen $\pi r^2 v t_2$. Así, en el tiempo total $t = t_1 + t_2 + \ldots$ el electrón chocará con el número de iones cuyos centros estén en el volumen $\pi r^2 vt$. El número de iones en este volumen es $n_{ion}\pi r^2 vt$, siendo n_{ion} el número de iones por unidad de volumen. La longitud de la trayectoria total dividida por el número de colisiones es el recorrido libre medio

$$\lambda = \frac{vt}{n_{ion}\pi r^2 vt} = \frac{1}{n_{ion}\pi r^2} = \frac{1}{n_{ion}A} \tag{27.9}$$

en donde $A = \pi r^2$ es el área transversal de un ion reticular.

Como n_{ion} y r no dependen de E, tampoco λ depende del campo eléctrico E. Así, de acuerdo con la interpretación clásica de v_m y λ ninguna de estas magnitudes depende de E, y, por tanto, tampoco la resistividad ρ dependerá de E, de acuerdo con la ley de Ohm. Sin embargo, la teoría clásica ofrece una dependencia incorrecta con la temperatura para la resistividad. Como λ depende sólo de la densidad numérica de los iones de la red y de su radio, la única magnitud de la ecuación 27.7 que depende de la temperatura en la teoría clásica es v_m, que es proporcional a $\sqrt{T}$. Sin embargo, la experimentación nos dice que ρ varía linealmente con la temperatura. Además, cuando ρ se calcula a $T = 300$ K, utilizando la distribución de Maxwell–Boltzmann para v_m y la ecuación 27.9 para λ, el resultado numérico es aproximadamente unas seis veces mayor que el valor medido.

La teoría clásica de la conducción falla porque los electrones no son partículas clásicas. Debemos considerar su naturaleza ondulatoria. Debido a las propiedades ondulatorias de los electrones y al principio de exclusión (que abordaremos más adelante), la distribución energética de los electrones libres en un metal no viene dada, ni siquiera aproximadamente, por la distribución de Maxwell–Boltzmann. Además, la colisión de un electrón con un ion de la red no es semejante al choque de una pelota de béisbol contra un árbol. En su lugar, el choque implica la dispersión de las ondas electrónicas por la red. Para entender la teoría cuántica de la conducción, necesitamos una comprensión cualitativa de la distribución energética de los electrones libres en un metal. Esto nos ayudará a entender el origen de los potenciales de contacto entre dos metales distintos, así como la contribución de los electrones libres a la capacidad calorífica de los metales.

www.elsolucionario.net

27.2 El gas de electrones de Fermi

Hemos utilizado el término *gas de electrones* para describir los electrones libres en un metal. Mientras las moléculas de un gas ordinario, tal como el aire, obedecen la distribución energética clásica de Maxwell-Boltzmann, no ocurre lo mismo con los electrones libres de un metal. En su lugar obedecen una distribución de energía cuántica llamada distribución de Fermi–Dirac. Como el comportamiento de este gas de electrones es tan distinto de un gas de moléculas, el gas de electrones se denomina frecuentemente gas **electrónico de Fermi**. Las principales características de este gas pueden entenderse considerando que un electrón del metal se comporta como una partícula en una caja, problema cuya versión unidimensional fue estudiada ampliamente en el capítulo 17. En esta sección estudiaremos semicuantitativamente las principales características de un gas de electrones de Fermi y dejaremos los detalles de la distribución de Fermi–Dirac para la sección 27.6.

Cuantización energética en una caja

En el capítulo 17 vimos que la longitud de onda asociada a un electrón de momento lineal p viene dada por la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{27.10}$$

en donde h es la constante de Planck. Cuando una partícula está confinada en una región finita del espacio, tal como una caja, sólo se permiten ciertas longitudes de onda

www.elsolucionario.net

λ_n que vienen fijadas por las condiciones de la onda estacionaria. Para una caja unidimensional de longitud L, la condición de onda estacionaria es

$$n\frac{\lambda_n}{2} = L \tag{27.11}$$

Esto da como resultado la cuantización de la energía:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{(h/\lambda_n)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{(2L/n)^2}$$

o sea,

$$E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2} \tag{27.12}$$

La función de onda para el estado n viene dada por

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \tag{27.13}$$

El número cuántico n caracteriza la función de onda para un estado particular y la energía de dicho estado. En problemas tridimensionales, resultan tres números cuánticos, cada uno asociado a una dimensión.

Principio de exclusión de Pauli

La distribución de los electrones entre los posibles estados energéticos está dominada por el principio de exclusión que fue enunciado por vez primera por Wolfgang Pauli en 1925 para explicar la estructura electrónica de los átomos:

> Dos electrones de un átomo no pueden estar en el mismo estado cuántico; es decir, no pueden tener la misma serie de valores para sus números cuánticos.

Principio de exclusión de Pauli

El principio de exclusión se aplica a todas las partículas de "espín $\frac{1}{2}$", que incluyen electrones, protones y neutrones.[1] Estas partículas tienen un número cuántico de *espín* m_s que tiene dos valores posibles, $+\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. El estado cuántico de una partícula se caracteriza por el número cuántico de espín m_s, más los números cuánticos asociados a la parte espacial de la función de onda. Como los números cuánticos de espín tienen justamente dos valores posibles, el principio de exclusión puede establecerse en función de los estados espaciales:

> Como máximo sólo pueden existir dos electrones con la misma serie de valores para sus números cuánticos espaciales.

Principio de exclusión en función de los estados espaciales

Cuando existen más de dos electrones en un sistema, tal como un átomo o un metal, sólo dos pueden encontrarse en el estado energético más bajo. El tercero y cuarto deben encontrarse en el segundo estado más bajo, y así sucesivamente.

Las partículas que obedecen al principio de exclusión se llaman **fermiones**. Otras partículas como las partículas alfa, deuterones, fotones y mesones no obedecen el principio de exclusión. Estas partículas se llaman **bosones** y tienen espín intrínseco cero, o números cuánticos de espín enteros.

[1] El espín intrínseco se vio brevemente en el capítulo 10, sección 5.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

EJEMPLO 27.1

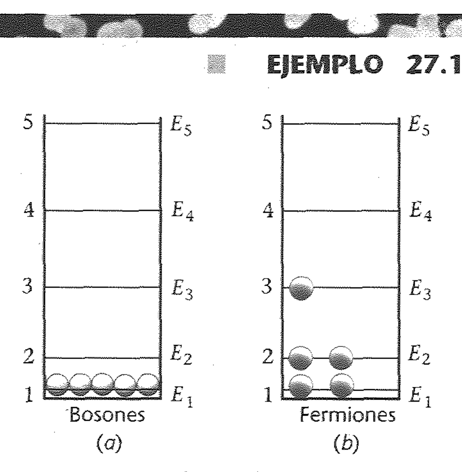


Figura 27.2

Comparar la energía total del estado fundamental de 5 bosones idénticos de masa m en una caja unidimensional con la de 5 fermiones idénticos de masa m en la misma caja.

Esquema del problema El estado fundamental es el estado de menor energía posible. Los niveles energéticos en una caja unidimensional vienen dados por $E_n = n^2E_1$, en donde $E_1 = (h^2/8mL^2)$. La energía mínima de los 5 bosones corresponde al caso en que todos ellos se encuentran en el estado $n = 1$ como indica la figura 27.2*a*. Para los fermiones, el estado más bajo tiene lugar cuando dos de ellos están en el estado $n = 1$, dos en el estado $n = 2$ y uno en el estado $n = 3$, como se muestra en la figura 27.2*b*.

1. La energía de 5 bosones en el estado $n = 1$ es: $E = 5E_1$

2. La energía de dos fermiones en el estado $n = 1$, dos en $n = 2$ y uno en $n = 3$ es:
$$E = 2E_1 + 2E_2 + 1E_3 = 2E_1 + 2(2)^2E_1 + 1(3)^2E_1$$
$$= 2E_1 + 8E_1 + 9E_1 = 19E_1$$

Observación Como vemos, el principio de exclusión tiene un efecto mayor sobre la energía de un sistema de partículas múltiples.

La energía de Fermi

Cuando hay muchos electrones en una caja, a $T = 0$ los electrones ocuparán los estados más bajos de energía compatibles con el principio de exclusión. Si tenemos N electrones, podemos poner dos electrones en el nivel de menor energía, dos en el siguiente y así sucesivamente. Los N electrones llenarían los $N/2$ niveles más bajos de energía (figura 27.3). La energía del último nivel lleno (o medio lleno) a $T = 0$ se llama **energía de Fermi**, E_F. Si los electrones se mueven en una caja unidimensional, la energía de Fermi vendrá dada por la ecuación 27.12 con $n = N/2$:

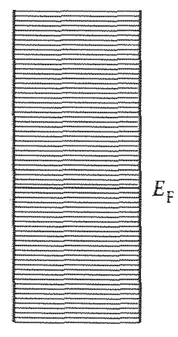
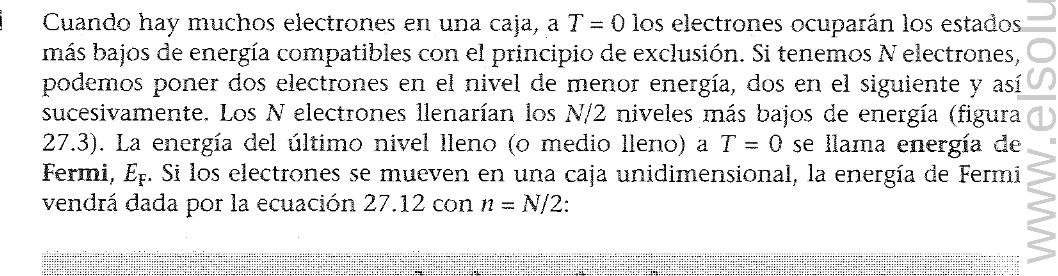


Figura 27.3 Para $T = 0$, los electrones llenan los estados energéticos permitidos hasta la energía de Fermi E_F. Los niveles están tan próximos que puede suponerse que hay continuidad.



$$E_F = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{h^2}{8m_eL^2} = \frac{h^2}{32m_e}\left(\frac{N}{L}\right)^2 \qquad (27.14)$$

Energía de Fermi a T = 0 en una dimensión

En una caja unidimensional, la energía de Fermi depende del número de electrones libres por unidad de longitud de la caja.

Ejercicio Supongamos que existe un ion, y, por tanto, un electrón libre, por cada 0,1 nm en una caja unidimensional. Calcular la energía de Fermi. *Sugerencia*: Escribir la ecuación 27.14 en la forma

$$E_F = \frac{(hc)^2}{32m_ec^2}\left(\frac{N}{L}\right)^2 = \frac{(1240\ \text{eV}\cdot\text{nm})^2}{32(0{,}511\ \text{MeV})}\left(\frac{N}{L}\right)^2$$

(*Respuesta:* $E_F = 9{,}4$ eV.)

En nuestro modelo de conducción, los electrones libres se mueven en una caja *tridimensional* de volumen V. La deducción de la energía de Fermi en tres dimensiones es algo difícil, por lo que simplemente daremos el resultado. En tres dimensiones, la energía de Fermi a $T = 0$ viene dada por

www.elsolucionario.net

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} \quad (27.15a)$$

Energía de Fermi a T = 0 en tres dimensiones

La energía de Fermi depende del número de electrones por unidad de volumen (densidad numérica) N/V. Sustituyendo las constantes por sus valores numéricos resulta

$$E_F = (0{,}365 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2)\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (27.15b)$$

Energía de Fermi a T = 0 en tres dimensiones

La tabla 27.1 relaciona las densidades numéricas de los electrones libres y las energías de Fermi a $T = 0$ para diversos metales.

Tabla 27.1 Densidades numéricas de los electrones libres y energías de Fermi a $T = 0$ para diversos elementos.

Elementos		N/V Electrones/cm³	E_F, eV
Al	Aluminio	$18{,}1 \times 10^{22}$	11,7
Ag	Plata	$5{,}86 \times 10^{22}$	5,50
Au	Oro	$5{,}90 \times 10^{22}$	5,53
Cu	Cobre	$8{,}47 \times 10^{22}$	7,04
Fe	Hierro	$17{,}0 \times 10^{22}$	11,2
K	Potasio	$1{,}4 \times 10^{22}$	2,11
Li	Litio	$4{,}70 \times 10^{22}$	4,75
Mg	Magnesio	$8{,}60 \times 10^{22}$	7,11
Mn	Manganeso	$16{,}5 \times 10^{22}$	11,0
Na	Sodio	$2{,}65 \times 10^{22}$	3,24
Sn	Estaño	$14{,}8 \times 10^{22}$	10,2
Zn	Zinc	$13{,}2 \times 10^{22}$	9,46

O P C I O N A L

EJEMPLO 27.2

La densidad numérica de los electrones en el cobre, calculada en el ejemplo 26.1 es $8{,}47 \times 10^{22}/\text{cm}^3$. Calcular la energía de Fermi del cobre a $T = 0$.

1. La energía de Fermi viene dada por la ecuación 27.15: $E_F = (0{,}365 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2)\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$

2. Sustituir el valor de la densidad numérica del cobre: $E_F = (0{,}365 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2)(84{,}7/\text{nm}^3)^{2/3} = 7{,}04 \text{ eV}$

Observación La energía de Fermi es mucho mayor que kT a temperaturas ordinarias. Por ejemplo, si $T = 300$ K, kT vale sólo 0,026 eV.

Ejercicio Usar la ecuación 27.15b para calcular la energía de Fermi a $T = 0$ para el oro, cuya densidad numérica es $5{,}90 \times 10^{22}$. (*Respuesta:* 5,53 eV.)

La energía media de un electrón libre puede calcularse a partir de la distribución energética completa de los electrones, como se verá en la sección 27.6. Para $T = 0$, la energía media resulta ser

$$E_m = \tfrac{3}{5}E_F \quad (27.16)$$

Energía media de los electrones en un gas de Fermi para T = 0

Para el cobre, E_m vale aproximadamente 4 eV. Esta energía media es grande comparada con las energías térmicas típicas, que son $kT \approx 0{,}026$ eV a una temperatura normal de $T = 300$ K. Este resultado es muy diferente del que ofrece la distribución clásica de Maxwell-Boltzmann, según la cual a $T = 0$, $E = 0$ y a una temperatura determinada T, E es del orden de kT.

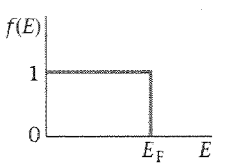


Figura 27.4 Factor de Fermi en función de la energía para $T = 0$.

El factor de Fermi a $T = 0$

La probabilidad de que un estado energético esté ocupado se llama **factor de Fermi**, $f(E)$. Para $T = 0$ todos los estados por debajo de E_F están completos, mientras que todos aquellos por encima de esta energía están vacíos, como se indica en la figura 27.4. Así, para $T = 0$, el factor de Fermi es simplemente

$$f(E) = 1, \qquad E < E_F$$
$$f(E) = 0, \qquad E > E_F \quad (27.17)$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

■ El factor de Fermi para $T > 0$

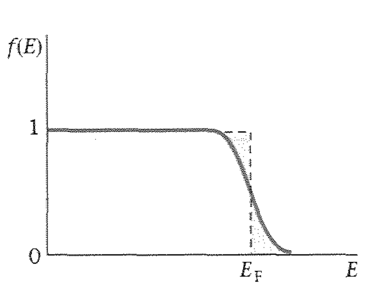


Figura 27.5 El factor de Fermi para cierta temperatura T. Algunos electrones de energías próximas a la de Fermi están excitados, como indican las regiones sombreadas de la figura. La energía de Fermi es aquel valor de E para el cual $f(E) = \frac{1}{2}$.

A temperaturas mayores que $T = 0$, algunos electrones ocuparán estados energéticos más elevados debido a la energía térmica ganada durante las colisiones con la red. Sin embargo, un electrón no puede desplazarse a un estado superior o inferior a menos que estos estados se encuentren desocupados. Como la energía cinética de los iones de la red es del orden de kT, los electrones en sus colisiones con estos iones no pueden ganar energía muy superior a kT. Por tanto, sólo aquellos electrones cuya energía difiera de la energía de Fermi en cantidades próximas a kT podrán ganar energía al crecer la temperatura. A 300 K, kT es sólo 0,026 eV, de modo que el principio de exclusión impide a todos los electrones, excepto a unos pocos, próximos al extremo superior de la distribución de energía, la ganancia de energía por medio de choques con los iones de la red. La figura 27.5 muestra el factor de Fermi para cierta temperatura T. Como para $T > 0$ no hay ninguna energía bien definida que separe los niveles llenos de los niveles vacíos, la definición de energía de Fermi debe modificarse ligeramente. A la temperatura T, la energía de Fermi se define como aquella energía para la cual, la probabilidad de que su estado se encuentre ocupado es $\frac{1}{2}$. Excepto a temperaturas extremadamente altas, la diferencia entre la energía de Fermi a la temperatura T y la correspondiente a $T = 0$ es muy pequeña.

La **temperatura de Fermi**, T_F está definida por la expresión

$$kT_F = E_F \tag{27.18}$$

Para temperaturas mucho menores que la de Fermi, la energía media de los iones de la red es muy inferior a la de Fermi y la distribución energética electrónica no diferirá grandemente de la correspondiente a $T = 0$.

■ EJEMPLO 27.3 Determinar la temperatura de Fermi del cobre.

Utilizar $E_F = 7{,}04$ eV y $k = 8{,}62 \times 10^{-5}$ eV/K en la ecuación 27.18: $T_F = \dfrac{E_F}{k} = \dfrac{7{,}04 \text{ eV}}{8{,}62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 81\ 700$ K

Observación Vemos en este ejemplo que la temperatura de Fermi del cobre es muy superior a cualquier temperatura T para la cual el cobre permanezca en estado sólido.

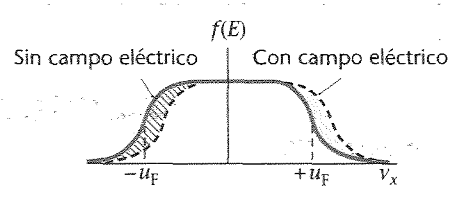


Figura 27.6 Factor de Fermi en función de la velocidad en una dimensión sin campo eléctrico (línea continua) y con campo eléctrico (línea de trazos). La diferencia está muy exagerada.

Como un campo eléctrico en un conductor acelera conjuntamente a todos los electrones de conducción, el principio de exclusión no impide que los electrones libres que ocupan los estados llenos participen en la conducción. La figura 27.6 muestra el factor de Fermi en una dimensión en función de la *velocidad* para una temperatura ordinaria. El factor es aproximadamente 1 para velocidades v_x en el intervalo $-u_F < v_x < u_F$, en donde la velocidad de Fermi u_F está relacionada con la energía de Fermi por la expresión $E_F = \frac{1}{2}mu_F^2$, es decir,

$$u_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} \tag{27.19}$$

■ EJEMPLO 27.4 Calcular la velocidad de Fermi para el cobre.

Utilizar la ecuación 27.19 con $E_F = 7{,}04$ eV: $u_F = \sqrt{\dfrac{2(7{,}04 \text{ eV})}{9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg}}\left(\dfrac{1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)} = 1{,}57 \times 10^6$ m/s

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La línea de trazos de la figura 27.6 muestra el factor de Fermi después de haber actuado el campo eléctrico durante cierto tiempo. Aunque todos los electrones se han desplazados hacia velocidades más elevadas, el efecto neto es equivalente a desplazar sólo a los electrones próximos a la energía de Fermi.

Potencial de contacto

Cuando dos metales distintos se ponen en contacto se desarrollan entre ellos una diferencia de potencial, V_{contacto}, llamada **potencial de contacto**. Este potencial depende de las funciones de trabajo ϕ_1 y ϕ_2 de los dos metales (estas funciones se vieron al introducir el efecto fotoeléctrico en el capítulo 17) y de sus respectivas energías de Fermi. Cuando los metales están en contacto, la energía total del sistema disminuye si los electrones próximos a la frontera se desplazan del metal de mayor energía de Fermi al metal de menor energía de Fermi hasta que ambas se igualan, como muestra la figura 27.7. Cuando se establece el equilibrio, el metal que tiene menor energía de Fermi inicial se carga negativamente y el otro positivamente, de modo que entre ellos existe una diferencia de potencial, V_{contacto}, dada por

$$V_{\text{contacto}} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{e} \qquad \textbf{(27.20)}$$

La tabla 27.2 relaciona las funciones de trabajo de algunos metales.

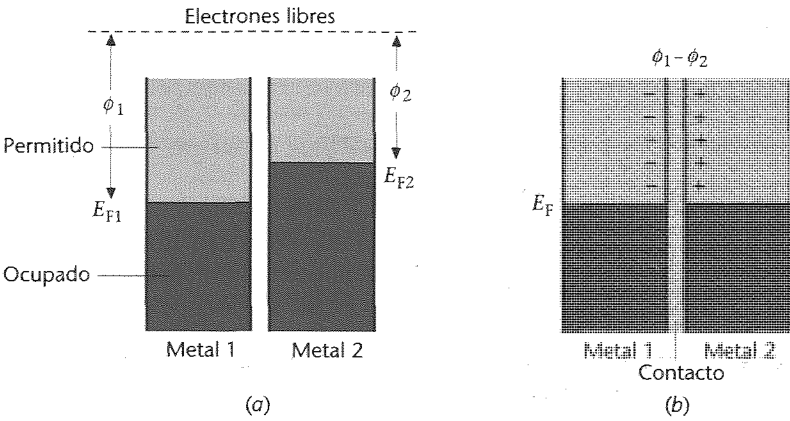


Figura 27.7 (*a*) Niveles energéticos de dos metales distintos con diferentes energías de Fermi y diferentes funciones de trabajo. (*b*) Cuando los metales están en contacto, los electrones fluyen del metal que tiene la mayor energía de Fermi al metal de menor energía de Fermi hasta igualar ambas energías.

Tabla 27.2 Funciones de trabajo de algunos metales.

Metal		ϕ, eV
Ag	Plata	4,7
Au	Oro	4,8
Ca	Calcio	3,2
Cu	Cobre	4,1
K	Potasio	2,1
Mn	Manganeso	3,8
Na	Sodio	2,3
Ni	Níquel	5,2

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 27.5

La longitud de onda umbral del efecto fotoeléctrico es de 271 nm para el tungsteno y 262 nm para la plata. ¿Cuál es el potencial de contacto desarrollado cuando la plata y el tungsteno se ponen en contacto?

Esquema del problema El potencial de contacto es proporcional a la diferencia de las funciones trabajo de ambos metales. Estas funciones se deducen en las longitudes de onda umbrales utilizando $\phi = hc/\lambda_t$ (ecuación 17.4).

1. El potencial de contacto viene dado por la ecuación 27.20: $V_{\text{contacto}} = \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{e}$

2. La función trabajo está relacionada con la longitud de onda umbral: $\phi = \dfrac{hc}{\lambda_t}$

3. Sustituir $\lambda_t = 271$ nm para el tungsteno: $\phi_W = \dfrac{hc}{\lambda_t} = \dfrac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{271 \text{ nm}} = 4{,}58 \text{ eV}$

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

4. Sustituir $\lambda_t = 262$ nm para la plata: $\phi_{Ag} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{262 \text{ nm}} = 4{,}73 \text{ eV}$

5. El potencial de contacto es, por tanto: $V_{contacto} = \frac{\phi_{Ag} - \phi_W}{e} = 4{,}73 \text{ V} - 4{,}58 \text{ V} = 0{,}15 \text{ V}$

Capacidad calorífica debida a los electrones en un metal

La modificación mecánico-cuántica de la distribución electrónica en los metales nos permite entender por qué la contribución del gas electrónico a la capacidad calorífica de un metal es mucho menor que la de los iones. De acuerdo con el teorema clásico de equipartición, la energía de los iones de la red en n moles de un sólido es $3nRT$, y por tanto, el calor molar es $C' = 3R$, siendo R la constante universal de los gases (véase sección 19.7). En un metal existe un gas de electrones libres que contiene un número de electrones aproximadamente igual al número de iones de la red. Si estos electrones obedecieran al teorema clásico de equipartición, su energía sería $\frac{3}{2}nRT$ y contribuirían con una cantidad adicional $\frac{3}{2}R$ al calor molar. Sin embargo, las capacidades caloríficas medidas de los metales resultan ser justo ligeramente mayores que las de los aislantes. Esto es comprensible porque a una temperatura T, sólo aquellos electrones con energías próximas a la de Fermi pueden ser excitados por colisiones al azar con los iones de la red. El número de estos electrones es del orden de $(kT/E_F)N$, en donde N es el número total de electrones. La energía de estos electrones se incrementa desde su valor a $T = 0$ en una cantidad que es del orden de kT. Así, el incremento total de la energía térmica es del orden de $(kT/E_F)N \times kT$. Por tanto, podemos expresar la energía de N electrones a la temperatura T en la forma

$$E = NE_m(0) + \alpha N \frac{kT}{E_F} kT \tag{27.21}$$

en donde α es una constante que esperamos sea del orden de 1 si nuestro razonamiento es correcto. El cálculo de α es muy difícil. El resultado es $\alpha = \pi^2/4$. Utilizando este valor y escribiendo E_F en función de la temperatura de Fermi, $E_F = kT_F$, se obtiene que la contribución del gas electrónico a la capacidad calorífica viene dada, a volumen constante, por la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = 2\alpha Nk \frac{kT}{E_F} = \frac{\pi^2}{2} nR \frac{T}{T_F}$$

en donde hemos escrito Nk en función de la constante del gas R ($Nk = nR$). El calor molar a volumen constante es, por tanto,

$$C'_v = \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{T_F} \tag{27.22}$$

Como vemos, debido al gran valor de T_F, la contribución del gas electrónico es una pequeña fracción de R a las temperaturas ordinarias. Como $T_F = 81\,700$ K para el cobre, el calor molar del gas electrónico a $T = 300$ K es

$$C'_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{300 \text{ K}}{81\,000}\right) R \approx 0{,}02R$$

en buen acuerdo con los resultados experimentales.

27.3 Teoría cuántica de la conducción eléctrica

Consideremos de nuevo la ecuación 27.7 de la resistividad sustituyendo la velocidad media v_m por la velocidad de Fermi u_F:

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\rho = \frac{m_e u_F}{ne^2 \lambda} \qquad (27.23)$$

Tenemos ahora dos problemas. En primer lugar, como la velocidad de Fermi u_F es aproximadamente independiente de la temperatura, la resistividad, dada por la ecuación 27.23, será también independiente de la temperatura, a menos que el recorrido libre medio dependa de esta magnitud. El segundo problema afecta a las magnitudes. Como mencionamos anteriormente, la expresión clásica de la resistividad, utilizando el valor v_m calculado a partir de la distribución clásica de Maxwell-Boltzmann, ofrece valores que son unas 6 veces demasiado grandes a la temperatura T = 300 K. Como la velocidad de Fermi u_F es aproximadamente 16 veces mayor que el valor v_m de Maxwell-Boltzmann, la magnitud de ρ según la ecuación 27.23 será unas 100 veces mayor que el valor determinado experimentalmente. La solución de ambos problemas reside en el cálculo del recorrido libre medio λ.

OPCIONAL

Dispersión de las ondas electrónicas ■

En la ecuación 27.9 del recorrido libre medio ($\lambda = 1/n_{ion}A$) la magnitud $A = \pi r^2$ es el área del ion reticular "vista" por un electrón. En el cálculo cuántico, el recorrido libre medio se refiere a la dispersión de las ondas eléctricas por la red cristalina. Los cálculos rigurosos demuestran que, para un cristal *perfectamente* ordenado, $\lambda = \infty$, es decir, no se produce dispersión alguna de las ondas electrónicas. La dispersión real de las ondas electrónicas se debe a las *imperfecciones* de la red cristalina, que nada tienen que ver con el área real de los iones reticulares. De acuerdo con la teoría cuántica de la dispersión electrónica, A depende simplemente de las *desviaciones* de los iones reticulares respecto a una red perfectamente ordenada y no del tamaño de los iones. Las causas más comunes de tales desviaciones son las vibraciones térmicas de los iones reticulares y las impurezas.

Podemos utilizar $\lambda = 1/n_{ion}A$ para el recorrido libre medio si reinterpretamos el área A. La figura 27.8 compara las imágenes clásica y cuántica de esta área. En la imagen cuántica, los iones reticulares son puntos sin dimensiones, pero que presentan un área $A = \pi r_0^2$ en donde r_0 es la amplitud de las vibraciones térmicas. En el capítulo 14 vimos que la energía de vibración en el movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir, a r_0^2. De este modo el área efectiva resulta ser proporcional a la energía de vibración de los iones de la red. Según el teorema de equipartición, sabemos que la energía media de vibración es proporcional a kT.[1] Así, A es proporcional a T y λ proporcional a $1/T$. Por tanto, la resistividad dada por la ecuación 27.7 es proporcional a T de acuerdo con el resultado experimental.

El área efectiva A debida a las vibraciones térmicas puede calcularse y los resultados dan valores para la resistividad que son acordes con los valores experimentales. Por ejemplo, a T = 300 K, el área efectiva resulta ser 100 veces menor que el área real de un ion reticular. Vemos, por tanto, que el modelo de electrones libres de los metales ofrece un buen análisis de la conducción eléctrica si la velocidad media clásica v_m se sustituye por la velocidad de Fermi u_F y las colisiones entre electrones y los iones de la red se interpretan en función de la dispersión de las ondas electrónicas, para las cuales sólo las desviaciones de una red ordenada perfectamente son importantes.

La presencia de impurezas en un metal también causa desviaciones respecto a la regularidad perfecta de una red cristalina. Los efectos de las impurezas sobre la resistividad son aproximadamente independientes de la temperatura. La resistividad de un metal que contiene impurezas puede escribirse en la forma $\rho = \rho_t + \rho_i$, donde ρ_t es la resistividad debida al movimiento vibratorio (térmico) de los iones de la red y ρ_i es la resistividad debida a las impurezas. La figura 27.9 muestra unas curvas típicas de resistencia en función de la temperatura para el metal sodio con impurezas. Cuando la temperatura se aproxima a cero, ρ_t tiende a cero y la resistividad se aproxima al valor constante ρ_i debido a las impurezas.

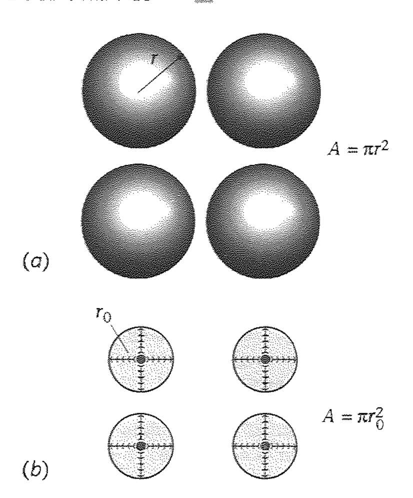


Figura 27.8 (*a*) Imagen clásica de los iones reticulares como esferas de radio r que presentan un área πr^2 a los electrones. (*b*) Imagen mecánico-cuántica de los iones de la red como puntos que vibran en tres dimensiones. El área presentada a los electrones es πr_0^2, siendo r_0 la amplitud de oscilación de los iones.

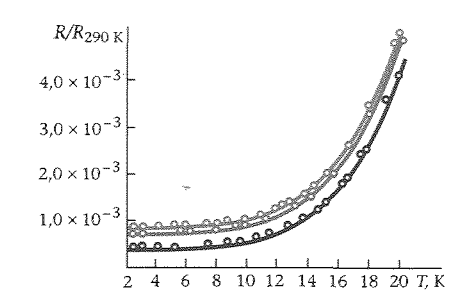


Figura 27.9 Resistencia relativa en función de la temperatura para tres muestras de sodio. Las tres muestras tienen igual dependencia con la temperatura, pero sus magnitudes son diferentes por las distintas cantidades de impurezas de las muestras.

[1] El teorema de equipartición es válido para los iones reticulares, pues éstos obedecen la distribución energética de Maxwell-Boltzmann.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

27.4 ■ Teoría de bandas de los sólidos

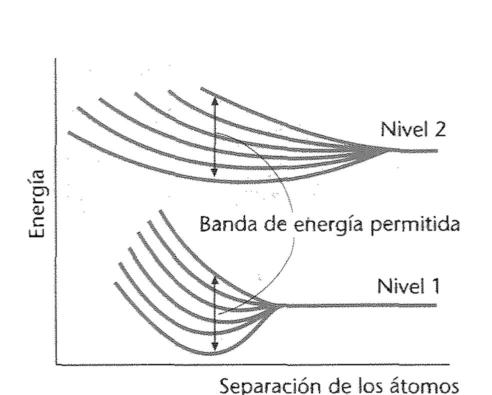


Figura 27.10 División energética de dos niveles de energía para seis átomos como una función de la separación de los átomos. Si existen muchos átomos, cada nivel se divide en un conjunto casi continuo de niveles que constituyen una banda.

Las resistividades varían enormemente entre aislantes y conductores. Para un aislante típico, tal como el cuarzo, $\rho \sim 10^{16}\ \Omega \cdot$ m, mientras que para un conductor típico, $\rho \sim 10^{-8}$ $\Omega \cdot$ m. La razón de esta enorme diferencia es la variación en la densidad numérica de los electrones libres, n_e. Para entender esta variación, consideremos el efecto de la red sobre los niveles energéticos de los electrones.

Comencemos con los niveles energéticos de los átomos individuales cuando éstos se aproximan entre sí. Los niveles energéticos de un átomo aislado están frecuentemente muy separados. Por ejemplo, en el hidrógeno, la energía permitida más baja ($E_1 = -13{,}6$ eV) es 10,2 eV menor que la siguiente más baja ($E_2 = -13{,}6$ eV$/4 = -3{,}4$ eV).[1] Consideremos dos átomos idénticos y enfoquemos nuestra atención sobre un nivel energético particular. Cuando los átomos están muy separados, la energía de un nivel particular es la misma en cada átomo. Cuando los átomos se aproximan entre sí, el nivel energético en cada átomo cambia debido a la influencia del otro átomo. Como consecuencia, el nivel se desdobla en dos niveles de energía ligeramente diferentes que corresponden al sistema formado por los dos átomos. Si aproximamos tres átomos entre sí, un nivel energético se divide en tres niveles de energías ligeramente distintas. La figura 27.10 muestra el desdoblamiento de dos niveles energéticos para seis átomos en función de la separación de los átomos.

Si tenemos N átomos idénticos, un nivel particular de energía de un átomo aislado se divide en N niveles energéticos distintos, pero muy próximos, cuando los átomos se reúnen conjuntamente. En un sólido macroscópico, N es un número muy grande —del orden de 10^{23}— de modo que cada nivel energético se divide en un número muy grande de niveles llamado una **banda**. Los niveles están espaciados casi continuamente dentro de la banda. Existe una banda separada de niveles para cada nivel energético particular del átomo aislado. Las bandas pueden estar muy separadas en su energía, pueden estar muy próximas, e incluso pueden solaparse, según el tipo de átomo y el tipo de enlace en el sólido.

Las bandas de más baja energía, que corresponden a los niveles de menor energía del átomo en la red, están llenas de electrones ligados al átomo. Los electrones que pueden tomar parte en la conducción ocupan las bandas de energía más elevadas. La banda de energía más alta que contiene electrones se llama **banda de valencia**. La banda de valencia puede estar completamente llena de electrones o sólo parcialmente llena, según el tipo de átomo y el tipo de enlace del sólido.

Ahora ya podemos entender por qué algunos sólidos son conductores y otros son aislantes. Si la banda de valencia está sólo parcialmente llena, existen muchos estados energéticos vacíos en la banda y los electrones de ésta pueden ser fácilmente elevados a un estado energético superior por la acción del campo eléctrico. En consecuencia, este material es un buen conductor. Si la banda de valencia está llena y hay un espaciado grande de energía entre ella y la siguiente banda disponible, al aplicar un campo eléctrico típico, éste será demasiado débil para excitar un electrón desde los niveles energéticos superiores de la banda llena a través del gran intervalo que les separa de los niveles energéticos de la banda vacía, de modo que el material es un aislante. La banda más baja en la cual hay estados no ocupados se llama **banda de conducción**. En un conductor, la banda de valencia está sólo parcialmente llena, de modo que esta banda es también la banda de conducción. Un espaciado o intervalo energético entre bandas permitidas es también un intervalo **energético prohibido**.

En la figura 27.11*a* se muestra una estructura de bandas para un conductor como el cobre. Las bandas más bajas (no indicadas) están llenas con los electrones más internos de los átomos. La banda de valencia está sólo medio llena aproximadamente. Cuando se establece un campo eléctrico en el conductor, los electrones de la banda de conducción se aceleran, lo cual significa que su energía crece. Esto es consistente con el principio de exclusión de Pauli, ya que existen muchos estados energéticos vacíos, justo por encima de los ocupados por los electrones en esta banda. Estos son los electrones de conducción.

[1] Los niveles energéticos del hidrógeno se verán en el capítulo 37.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La figura 27.11*b* muestra la estructura de bandas del magnesio, que es también un conductor. En este caso la banda ocupada más elevada está llena pero existe una banda vacía por encima que la solapa. Las dos bandas forman así una banda de conducción–valencia que está sólo parcialmente llena.

La figura 27.11*c* muestra la estructura de bandas de un aislante típico. Para $T = 0$ K, la banda de valencia está completamente llena. La siguiente banda que contiene estados energéticos vacíos, es decir, la banda de conducción, está separada de la banda de valencia por un gran intervalo prohibido. Para $T = 0$ la banda de conducción está vacía. A las temperaturas ordinarias unos pocos electrones pueden excitarse y pasar a estados de esta banda, pero la mayoría no pueden porque el intervalo de energía prohibida es grande comparado con la energía que un electrón puede alcanzar por excitación térmica. Muy pocos electrones pueden excitarse térmicamente a la próxima banda de conducción vacía, incluso a temperaturas bastante altas. Cuando se establece en el sólido un campo eléctrico de magnitud ordinaria, los electrones no pueden acelerarse, pues no hay estados vacíos a energías próximas. Estas condiciones suelen describirse diciendo que no hay electrones libres. La pequeña conductividad que se observa se debe a los escasos electrones que lograron ser excitados térmicamente a la próxima banda de conducción vacía. Cuando a un aislante se le aplica un campo eléctrico suficientemente intenso para que un electrón se excite a través del hueco de energía prohibida hasta la banda vacía, tiene lugar la ruptura dieléctrica.

En algunos materiales, el intervalo de energía prohibida entre la banda de valencia y la banda de conducción vacía es muy pequeño, como muestra la figura 27.11*d*. Para $T =$ 0 no hay electrones en la banda de conducción y el material es un aislante. Sin embargo, a temperaturas ordinarias existe un número apreciable de electrones en la banda de conducción debido a la excitación térmica. Estos materiales se denominan **semiconductores intrínsecos**. En los semiconductores típicos, como el silicio y el germanio, el intervalo energético prohibido es sólo de 1 eV aproximadamente. En presencia de un campo eléctrico, los electrones de la banda de conducción pueden acelerarse ya que existen estados vacíos próximos. Además por cada electrón que existe en la banda de conducción hay una vacante, o hueco, en la banda de valencia llena próxima. En presencia de un campo eléctrico, los electrones de esta banda pueden también ser excitados a un nivel de energía vacante. Esto contribuye a la corriente eléctrica y se describe más fácilmente como el movimiento de un hueco en la dirección del campo, es decir, opuesto al movimiento de los electrones. El hueco actúa así como una carga positiva. Para visualizar la conducción de los huecos, imaginemos una calle de una sola dirección con dos carriles, uno lleno de coches aparcados y el otro vacío. Si un coche pasa del carril lleno al carril vacío, se mueve libremente hacia adelante. Cuando los coches aparcados se desplazan para ocupar el espacio vacío, éste se propaga hacia atrás en dirección opuesta al sentido de movimiento de los coches. Ambos movimientos, el del coche en el carril vacío hacia delante y el del espacio vacío hacia atrás contribuyen a la propagación neta de los coches hacia delante.

Una característica interesante de los semiconductores es que la resistividad del material decrece con la temperatura, lo cual es contrario al caso de los conductores normales. La razón es que cuando la temperatura crece, el número de electrones libres aumenta, porque hay más electrones en la banda de conducción. El número de huecos en la banda de valencia también crece, como es lógico. En los semiconductores, el efecto producido al incrementar el número de portadores de carga, tanto electrones como huecos, excede al efecto del incremento de resistividad producido por la mayor dispersión de los electrones por los iones de la red debido a las vibraciones térmicas. Por tanto, los semiconductores poseen un coeficiente de resistividad de temperatura negativa.

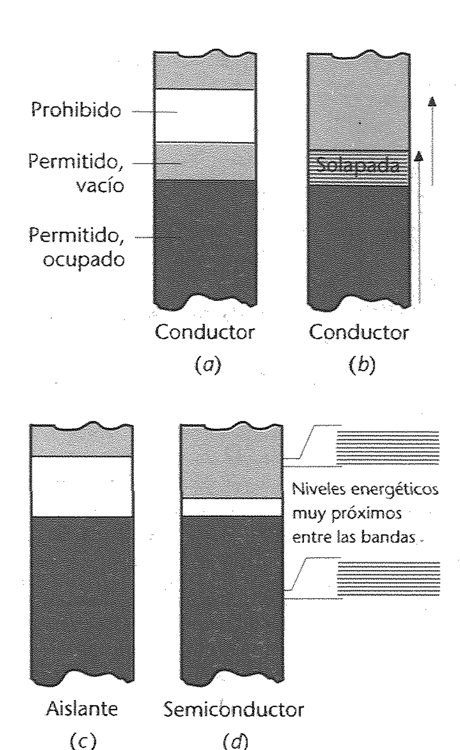


Figura 27.11 Cuatro posibles estructuras de bandas para un sólido. (*a*) Conductor típico. La banda de valencia está sólo parcialmente llena, de modo que los electrones pueden fácilmente excitarse a estados energéticos próximos. (*b*) Conductor con las bandas energéticas permitidas solapadas. (*c*) Aislante típico. Posee una zona que abarca un gran intervalo de energía prohibida entre la banda llena de valencia y la banda de conducción. (*d*) Semiconductor. El intervalo de energía prohibida entre la banda de valencia llena y la banda de conducción es muy pequeño, de modo que algunos electrones son excitados y pasan a la banda de conducción a temperaturas normales, dejando huecos en la banda de valencia.

OPCIONAL

Superconductividad 27.5

Existen muchos metales para los cuales la resistividad es cero por debajo de una determinada temperatura T_c, denominada **temperatura crítica**. Este fenómeno, llamado **superconductividad**, fue descubierto en 1911 por el físico holandés H. Kamerlingh Onnes, quien había desarrollado una técnica para licuar helio (punto de ebullición 4,2 K) y la aprovechó para estudiar las propiedades de la materia a temperaturas extremadamente

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

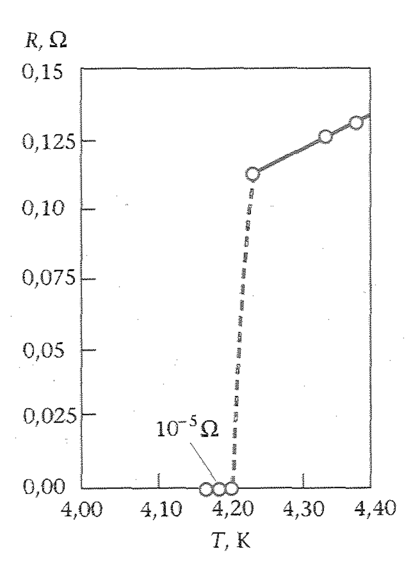


Figura 27.12 Gráfico obtenido por Kamerlingh Onnes de la resistencia del mercurio en función de la temperatura que muestra un súbito descenso de R a la temperatura crítica $T = 4{,}2$ K.

bajas. La figura 27.12 muestra un gráfico suyo de la resistencia del mercurio en función de la temperatura. La temperatura crítica correspondiente al mercurio es de 4,2 K (igual a la temperatura de ebullición del helio). Las temperaturas críticas para otros superconductores están comprendidas en un margen desde 0,1 K para el hafnio y el iridio hasta 9,2 K para el niobio. Entre los compuestos metálicos el margen de temperaturas de superconductividad es mucho más amplio. Por ejemplo, la aleación superconductora Nb_3Ge, descubierta en 1973, posee una temperatura crítica de 23,2 K, que fue la más alta conocida hasta 1986, cuando los descubrimientos de Bednorz y Müller iniciaron la era de los superconductores de alta temperatura, ahora definidos como aquellos materiales que presentan el fenómeno de la superconductividad a temperaturas por encima de 77 K. Actualmente (1998), la temperatura más alta a la cual se ha demostrado esta propiedad utilizando compuestos que contienen mercurio es 125 K, a la presión atmosférica y 164 K a alta presión.

La resistividad de un superconductor es cero. Por tanto, existe corriente en el superconductor aun cuando el campo eléctrico en el mismo sea cero. En efecto, se ha observado la persistencia durante años, de corrientes estacionarias sin pérdida aparente en anillos superconductores en los cuales no existía campo eléctrico. A pesar del elevado coste del helio líquido que hierve a 4,2 K, y del inconveniente de refrigerar con él, se construyeron muchos imanes superconductores con estas sustancias, pues tales imanes no consumen potencia para mantener las grandes intensidades de corriente necesarias para producir un elevado campo magnético.

El descubrimiento de los superconductores de alta temperatura ha revolucionado la ciencia de la superconductividad, pues el nitrógeno líquido, relativamente barato, que hierve a 77 K, puede utilizarse como refrigerante. Sin embargo, existen múltiples problemas, tales como la fragilidad y la toxicidad de los materiales, que hace difícil el uso de estos nuevos superconductores. La investigación continúa en búsqueda de nuevos materiales que sean superconductores a temperaturas todavía más elevadas.

Teoría BCS

Durante cierto tiempo se creyó que la superconductividad era debida a la acción colectiva de los electrones de conducción. En 1957, John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer publicaron una teoría fructífera sobre la superconductividad que hoy se conoce con el nombre de **teoría BCS** por las iniciales de sus autores. De acuerdo con esta teoría, los electrones de un superconductor están acoplados en pares a bajas temperaturas. El acoplamiento resulta de la interacción de los electrones y la red cristalina. Un electrón interacciona con la red y le produce una perturbación. La red perturbada interacciona con otro electrón, de tal modo que se produce una atracción entre los dos electrones que a bajas temperaturas pueden exceder la mutua repulsión de Coulomb. Los electrones forman un estado ligado llamado **par de Cooper**. Los electrones de un par de Cooper tienen espines iguales y opuestos, de modo que constituyen un sistema de espín cero. Cada par de Cooper actúa como una *sola partícula* de espín cero —en otras palabras como un bosón. Los bosones no obedecen el principio de exclusión, y por tanto, cualquier número de pares de Cooper puede estar en el mismo estado cuántico con la misma energía. En el estado fundamental de un superconductor (a $T = 0$) todos los electrones se encuentran en forma de pares de Cooper y éstos en el mismo estado energético. En el estado superconductor, los pares de Cooper están correlacionados de modo que actúan conjuntamente. Una corriente eléctrica puede establecerse en el seno de un superconductor porque todos los electrones de este estado colectivo se mueven conjuntamente. Sin embargo, no hay disipación de energía por colisiones individuales de electrones e iones reticulares a menos que la temperatura sea lo suficientemente elevada para romper el enlace de los pares de Cooper. La energía necesaria para romper un par de Cooper es análoga a la necesaria para romper una molécula en sus átomos constituyentes. Esta energía se denomina **energía prohibida del superconductor** E_g. En la teoría BCS, esta energía en el cero absoluto está relacionada con la temperatura crítica por

$$E_g = 3{,}5kT_c \qquad (27.24)$$

Esta energía puede determinarse midiendo la corriente a través de la unión de un metal normal y un superconductor en función del voltaje. Consideremos dos metales separados por una capa de material aislante, tal como óxido de aluminio, cuyo espesor

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

es sólo de unos pocos nanómetros. El material aislante entre los metales forma una barrera que evita el paso de la mayor parte de los electrones a través de la unión. Sin embargo, como decíamos en el capítulo 15, las ondas, por efecto túnel, pueden atravesar una barrera, si ésta no es demasiado gruesa, incluso en el caso en que la energía de la onda sea menor que la de la propia barrera (véase figuras 15.21 y 15.22).

Cuando los materiales a ambos lados de la barrera son metales normales no superconductores, la corriente resultante del efecto túnel por los electrones a través de la capa aislante obedece la ley de Ohm si se aplican voltajes bajos (figura 27.13*a*). Cuando uno de los metales es un metal normal y el otro es un superconductor no se produce corriente (en el cero absoluto) a menos que el voltaje aplicado V sea mayor que un voltaje crítico $V_c = E_g/2e$, en donde E_g es la energía prohibida del superconductor. La figura 27.13*b* muestra un gráfico de la corriente en función del voltaje para esta situación. La corriente salta bruscamente cuando una energía de $2eV_c$ es absorbida por el par de Cooper y éste se rompe. (La pequeña corriente visible en la figura 27.13*b* antes de alcanzar el voltaje crítico aparece porque a cualquier temperatura por encima del cero absoluto algunos electrones del superconductor se excitan por encima de la energía prohibida y, por tanto, no se aparean.) La energía prohibida de superconducción puede determinarse exactamente midiendo el voltaje crítico V_c.

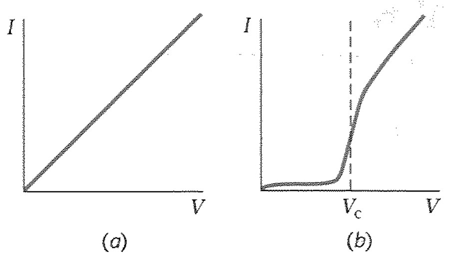


Figura 27.13 Corriente túnel en función del voltaje para una unión de dos metales separados por una delgada capa de óxido. (*a*) Cuando ambos metales son normales, la corriente es proporcional al voltaje, de acuerdo con la ley de Ohm. (*b*) Si uno de los metales es normal y el otro superconductor, la corriente es aproximadamente nula hasta que el voltaje aplicado excede el valor crítico $V_c = E_g/2e$.

OPCIONAL



EJEMPLO 27.6

Calcular la energía prohibida de superconducción del mercurio (T_c = 4,2 K) pronosticada por la teoría BCS.

1. La predicción de la teoría BCS para E_g es: $E_g = 3{,}5kT_c$

2. Sustituyendo T_c = 4,2 K:
$$E_g = 3{,}5kT_c = 3{,}5(1{,}38\times 10^{-23}\ \text{J/K})(4{,}2\ \text{K})\ \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6\times 10^{-19}\ \text{J}} = 1{,}27\times 10^{-3}\ \text{eV}$$

Obsérvese que la energía prohibida para un superconductor típico es mucho menor que el hueco energético de un semiconductor típico, que es del orden de 1 eV. Cuando la temperatura se incrementa a partir de T = 0, algunos pares de Cooper se rompen. Entonces existen menos pares disponibles para la interacción de cada par y la energía prohibida se reduce hasta que para $T = T_c$ se anula (figura 27.14).

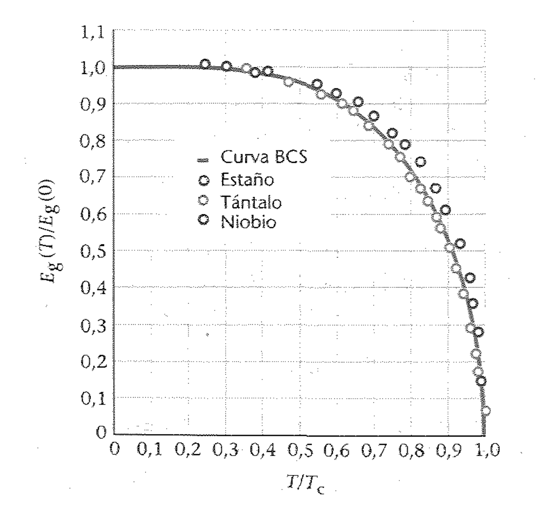


Figura 27.14 Relación entre los valores de la energía prohibida a T y T = 0 en función de la temperatura relativa T/T_c. La curva continua es la prevista por la teoría BCS.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL



Efecto Josephson

Cuando dos superconductores están separados por una barrera aislante delgada (por ejemplo una capa de óxido de aluminio de unos pocos nanómetros de espesor), el sistema así constituido se denomina **unión de Josephson**, basado en una predicción realizada por Brian Josephson, según la cual los pares de Cooper podrían pasar por efecto túnel a través de esta unión desde un semiconductor al otro sin resistencia. Esta propiedad de los pares de Cooper da lugar a una corriente que se observa, aunque no se aplique ningún voltaje a través de la unión. La corriente depende de la diferencia de fase de las funciones de onda que describen los pares de Cooper. Sea ϕ_1 la constante de fase para la función de onda de un par de Cooper en un superconductor. Todos los pares de Cooper de un conductor actúan coherentemente, de modo que todos ellos tienen la misma constante de fase. Si ϕ_2 es la constante de fase para los pares de Cooper del segundo superconductor, la intensidad de corriente a través de la unión viene dada por

$$I = I_{max} \text{ sen } (\phi_2 - \phi_1) \qquad (27.25)$$

en donde I_{max} es la corriente máxima, que depende del espesor de la barrera. Este resultado se ha observado experimentalmente y se conoce como **efecto Josephson de c.c.**

Josephson predijo también que si un voltaje V de c.c. se aplicase a través de una de estas uniones, se produciría una corriente alterna de frecuencia

$$f = \frac{2eV}{h} \qquad (27.26)$$

Este resultado, conocido como **efecto Josephson de c. a.** se ha observado experimentalmente y se ha utilizado para determinar con precisión el cociente e/h a partir de medidas cuidadosas de la frecuencia. Como la frecuencia puede medirse con gran exactitud, el efecto Josephson de c. a. se ha utilizado también para establecer patrones de voltaje de gran precisión. También se ha observado el efecto inverso, según el cual la aplicación de un voltaje alterno a través de una unión de Josephson produce una corriente continua.



EJEMPLO 27.7 **Utilizando $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C y $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s, calcular la frecuencia de la corriente de Josephson si el voltaje aplicado es de 1 μV.**

Sustituyendo los valores dados en la ecuación 27.26, se obtiene f:

$$f = \frac{2eV}{h} = \frac{2(1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-6}\ \text{V})}{6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}$$
$$= 4{,}835 \times 10^{8}\ \text{Hz} = 483{,}5\ \text{MHz}$$

27.6 Distribución de Fermi-Dirac[1]

La distribución clásica de Maxwell–Boltzmann (ecuación 18.39) nos da el número de moléculas de energía E en el intervalo comprendido entre E y $E + dE$. Es igual al producto de $g(E)\,dE$, donde $g(E)$ es la densidad de estados (número de estados energéticos en el intervalo dE), por el factor de Boltzmann $e^{-E/kT}$, que representa la probabilidad de que un estado sea ocupado. La función de distribución de los electrones libres en un metal se denomina **distribución de Fermi–Dirac**. Esta distribución puede escribirse de la misma forma que la de Maxwell–Boltzmann con la densidad de estados calculada a partir de la teoría cuántica y el factor de Boltzmann reemplazado por el factor de Fermi. Sea $n(E)\,dE$

[1] Este tema es algo complicado y puede pasarse por alto en una primera lectura.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

U09197

OPCIONAL

el número de electrones con energías comprendidas entre E y $E + dE$. Este número puede escribirse en la forma

$$n(E)\ dE = g(E)\ dE\ f(E) \qquad (27.27)$$

Función de distribución energética

en donde $g(E)\ dE$ es el número de estados comprendidos entre E y $E + dE$, $g(E)$ se llama densidad de estados y $f(E)$ es la probabilidad de que un estado sea ocupado, que es el factor de Fermi. La densidad de estados en tres dimensiones es algo difícil de calcular, de modo que sólo daremos el resultado. Para los electrones de un metal de volumen V, la densidad de estados es

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m_e^{3/2}V}{h^3}\,E^{1/2} \qquad (27.28)$$

Densidad de estados

Lo mismo que en la distribución clásica de Maxwell-Boltzmann, la densidad de estados es proporcional a $E^{1/2}$.

Para $T = 0$, el factor de Fermi viene dado por la ecuación 27.17:

$$f(E) = 1, \qquad E < E_F$$
$$f(E) = 0, \qquad E > E_F$$

Integrando $n(E)\ dE$ para todas las energías se obtiene el número total de electrones N. Podemos deducir la ecuación 27.15a (energía de Fermi para $T = 0$) integrando $n(E)\ dE$ desde $E = 0$ hasta $E = \infty$. Así obtenemos,

$$N = \int_0^\infty n(E)\ dE = \int_0^{E_F} g(E)\ dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m_e^{3/2}V}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}\ dE = \frac{16\pi\sqrt{2}m_e^{3/2}V}{3h^3}\,E_F^{3/2}$$

Obsérvese que para $T = 0$, $n(E)$ es cero para $E > E_F$, de modo que tenemos que integrar sólo de $E = 0$ hasta $E = E_F$. Resolviendo esta ecuación para E_F se obtiene la energía de Fermi a $T = 0$:

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} \qquad (27.29)$$

que es la ecuación 27.15*a*. En función de la energía de Fermi, la densidad de estados (ecuación 27.28) es

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m_e^{3/2}V}{h^3}\,E^{1/2} = \frac{3N}{2}\,E_F^{-3/2}\,E^{1/2} \qquad (27.30)$$

Densidad de estados en función de E_F

La energía media para $T = 0$ puede calcularse a partir de

$$E_m = \frac{\int_0^{E_F} Eg(E)\ dE}{\int_0^{E_F} g(E)\ dE} = \frac{1}{N}\int_0^{E_F} Eg(E)\ dE$$

en donde $N = \int_0^{E_F} g(E)\ dE$ es el número total de electrones. Realizando la integración se obtiene la ecuación 27.16

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

$$E_m = \frac{3}{5}E_F \tag{27.31}$$

Energía media para T = 0

Para $T > 0$, el factor de Fermi es más complicado. Puede demostrarse que esa condición

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} \tag{27.32}$$

Factor de Fermi

En esta ecuación podemos ver que para valores de E mayores que E_F, la exponencial $e^{(E - E_F)/kT}$ se hace muy grande cuando T se aproxima a cero, de modo que para $T = 0$, el factor de Fermi se anula para $E > E_F$. Por otra parte, para E menor que E_F, $e^{(E - E_F)/kT}$ se aproxima a cero cuando T tiende a cero, de modo que para $T = 0$, $f(E) = 1$ para $E < E_F$. Así, el factor de Fermi dado por la ecuación 27.32 es válido para todas las temperaturas. Obsérvese que para cualquier valor no nulo de T, $f(E) = \frac{1}{2}$, para $E = E_F$.

La función de distribución completa de Fermi-Dirac es, por tanto,

$$n(E)\, dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m_e^{3/2}V}{h^3} E^{1/2} \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}\, dE \tag{27.33}$$

Distribución de Fermi-Dirac

Puede verse que para aquellos pocos electrones de energía muy superior a la energía de Fermi, el factor de Fermi se aproxima a $1/e^{(E - E_F)/kT} = e^{(E_F - E)/kT} = e^{E_F}e^{-E/kT}$, que es proporcional a $e^{-E/kT}$. Así pues, la cola de alta energía de la distribución energética de Fermi-Dirac disminuye según $e^{-E/kT}$, del mismo modo que la distribución energética de Maxwell-Boltzmann. La razón es que en esta región de alta energía, hay muchos estados energéticos no ocupados y pocos electrones; por ello, el principio de exclusión de Pauli no es importante y la distribución se aproxima al valor clásico. Este resultado tiene importancia práctica pues se aplica a los electrones de conducción en los semiconductores.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 27.8 **¿Para qué energía el factor de Fermi del cobre a $T = 300$ K vale 0,1?**

Esquema del problema Hacemos $f(E) = 0{,}1$ en la ecuación 27.32, siendo $T = 300$ K y $E_F = 7{,}04$ según la tabla 27.1 y despejamos E.

1. Determinar el valor de $e^{(E - E_F)/kT}$ a partir de la ecuación 27.32:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} = 0{,}1$$

$$e^{(E - E_F)/kT} = \frac{1}{f(E)} - 1 = \frac{1}{0{,}1} - 1 = 9$$

2. Tomar logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\frac{E - E_F}{kT} = \ln 9 = 2{,}20$$

3. Despejar $E - E_F$:

$$E - E_F = 2{,}20kT = 2{,}20(8{,}62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 2{,}20(0{,}0259\ \text{eV}) = 0{,}0570\ \text{eV}$$

4. Despejar E, usando $E_F = 7{,}04$ de la tabla 27.1:

$$E = 7{,}04\ \text{eV} + 0{,}0570\ \text{eV} = 7{,}10\ \text{eV}$$

Observación El factor de Fermi cae aproximadamente de 1 a 0,1 en justamente 0,06 eV por encima de la energía de Fermi de unos 7 eV.

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

EJEMPLO 27.9

Determinar la probabilidad de que un estado energético en el cobre, 0,1 eV por encima de la energía de Fermi, esté ocupado a $T = 300$ K.

Esquema del problema La probabilidad es el factor de Fermi dado en la ecuación 27.32 con $E_F = 7{,}04$ eV y $E = 7{,}14$ eV.

1. La probabilidad de que un estado ocupado iguale al factor de Fermi es: $P = f(E) = \dfrac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$
2. Calcular el exponente adimensional del factor de Fermi: $\dfrac{E - E_F}{kT} = \dfrac{7{,}14 \text{ eV} - 7{,}04 \text{ eV}}{(8{,}62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})} = 3{,}87$
3. Utilizar este resultado para calcular el factor de Fermi: $f = \dfrac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} = \dfrac{1}{e^{3{,}87} + 1}$

$$= \frac{1}{48 + 1} = 0{,}0204 = 2{,}04\%$$

Observación La probabilidad de que un electrón tenga una energía de 0,1 eV por encima de la energía de Fermi a 300 K es sólo del 2% aproximadamente.

EJEMPLO 27.10
¡Inténtelo!

Determinar la probabilidad de que un estado energético en el cobre, 0,1 eV *por debajo* de la energía de Fermi, esté ocupado a $T = 300$ K.

Esquema del problema La probabilidad es el factor de Fermi dado en la ecuación 27.32, con $E_F = 7{,}04$ eV y $E = 6{,}94$ eV.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Escribir el factor de Fermi.	$f(E) = \dfrac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$
2. Calcular el exponente adimensional del factor de Fermi.	$\dfrac{E - E_F}{kT} = \dfrac{6{,}94 \text{ eV} - 7{,}04 \text{ eV}}{(8{,}62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})} = -3{,}87$
3. Utilizar el resultado de la etapa 2 para calcular el factor de Fermi.	$f = \dfrac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} = \dfrac{1}{e^{-3{,}87} + 1}$ $= \dfrac{1}{0{,}021 + 1} = 0{,}979 \approx 98\%$

Observación La probabilidad de que un electrón tenga una energía de 0,1 eV *por debajo* de la energía a 300 K es aproximadamente del 98%.

Ejercicio ¿Cuál es la probabilidad de que un estado energético 0,1 eV por debajo de la energía de Fermi no esté ocupado a 300 K? (*Respuesta:* 1 – 0,98 = 0,02, o sea, 2%. Esta es la probabilidad de que exista un hueco a esta energía.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Resumen

OPCIONAL

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Teoría microscópica de la conducción	
Resistividad	$$\rho = \frac{m_e v_m}{n_e e^2 \lambda} \quad (27.7)$$ en donde v_m es la velocidad media de los electrones y λ el recorrido libre medio entre colisiones con los iones de la red.
Recorrido libre medio	$$\lambda = \frac{1}{n_{ion}\pi r^2} = \frac{1}{n_{ion}A} \quad (27.9)$$ en donde n_{ion} es el número de iones de la red por unidad de volumen, r su radio eficaz y A el área transversal efectiva.
2. Interpretación clásica de v_m y λ	v_m viene determinada por la distribución de Maxwell-Boltzmann y r es el radio real de un ion de la red.
3. Interpretación cuántica de v_m y λ	v_m viene determinada por la distribución de Fermi-Dirac y es aproximadamente constante, independiente de la temperatura. El recorrido libre medio viene determinado por la dispersión de las ondas electrónicas, fenómeno debido a las desviaciones de una red perfectamente ordenada. El radio r es la amplitud de vibración de los iones reticulares, la cual es proporcional a T, de modo que A es también proporcional a T.
4. Gas de electrones de Fermi	
Energía de Fermi a $T = 0$	E_F es la energía del estado energético más elevado lleno (o semilleno).
E_F a $T > 0$	E_F es la energía de aquel estado para el cual la probabilidad de que esté ocupado es $\frac{1}{2}$.
Magnitud aproximada de E_F	E_F varía entre 5 a 10 eV para la mayor parte de los metales.
Dependencia de E_F con la densidad numérica de los electrones libres	$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} = (0{,}365\ \text{eV}\cdot\text{nm}^2)\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (27.15a,b)$$
Energía media a $T = 0$	$$E_m = \frac{3}{5}E_F \quad (27.16)$$
Factor de Fermi a $T = 0$	El factor de Fermi $f(E)$ es la probabilidad de que un estado se encuentre ocupado $$f(E) = 1, \quad E < E_F$$ $$f(E) = 0, \quad E > E_F \quad (27.17)$$
Temperatura de Fermi	$$T_F = \frac{E_F}{k} \quad (27.18)$$
Velocidad de Fermi	$$u_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} \quad (27.19)$$
Potencial de contacto	Cuando dos metales distintos se ponen en contacto, los electrones fluyen del metal de mayor energía de Fermi al de menor energía de Fermi hasta que ambas energías se igualan. En equilibrio existe una diferencia de potencial entre los metales que es igual a la diferencia de las funciones trabajo de los dos metales, dividida por la carga electrónica e: $$V_{contacto} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{e} \quad (27.20)$$
Capacidad calorífica debida a los electrones	$$C'_V = \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{T_F} \quad (27.22)$$
5. Teoría de bandas de sólidos	Cuando un gran número de átomos se reúnen entre sí para formar un sólido, los niveles energéticos individuales se dividen en bandas de energías permitidas. El desdoblamiento depende del tipo de enlace y de la separación reticular. La banda de energía más elevada que contiene electrones es la banda de valencia. En un conductor la banda de valencia está sólo parcialmente llena, de modo que

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

hay muchos estados disponibles para los electrones excitados. En un aislante, la banda de valencia está completamente llena y existe un gran hueco energético entre dicha banda y la siguiente banda permitida, la banda de conducción. En un semiconductor, el hueco energético entre la banda de valencia llena y la banda de conducción vacía es pequeño; por ello, a las temperaturas ordinarias, un número apreciable de electrones se excitan térmicamente y pasan a la banda de conducción.

6. Superconductividad

En un superconductor, la resistencia cae súbitamente a cero por debajo de una temperatura crítica T_c. Se han descubierto superconductores con temperaturas críticas tan altas como 125 K.

Teoría BCS

La superconductividad se describe como una teoría de la mecánica cuántica llamada teoría BCS en la cual los electrones libres forman pares de Cooper. La energía necesaria para disociar un par de Cooper se llama energía prohibida del superconductor E_g. Cuando todos los electrones están apareados, los electrones individuales no pueden ser dispersados por unión de la red, de modo que la resistencia es nula

Efecto túnel

Cuando un conductor normal está separado de un superconductor por una capa delgada de óxido, los electrones pueden por efecto túnel atravesar la barrera energética si el voltaje aplicado a través de la capa es $E_g/2e$, en donde E_g es la energía necesaria para disociar un par de Cooper. Esta energía E_g puede determinarse midiendo la corriente de túnel en función del voltaje aplicado.

Unión de Josephson

Un sistema de dos superconductores separados por una capa delgada de material aislante se denomina unión de Josephson.

Efecto Josephson de c.c.

Al atravesar una unión de Josephson por efecto túnel se observa una corriente continua, incluso en ausencia de voltaje a través de la unión

Efecto Josephson de c.a.

Cuando un voltaje de c.c. se aplica a través de una unión de Josephson, se observa una corriente alterna de frecuencia

$$f = \frac{2eV}{h} \tag{27.26}$$

La medida de la frecuencia de esta corriente permite obtener una determinación precisa de la relación e/h.

7. Distribución de Fermi-Dirac

El número de electrones con energías comprendidas entre E y $E + dE$ viene dado por

$$n(E)\,dE = g(E)\,dE\,f(E) \tag{27.27}$$

en donde $g(E)$ es la densidad de estados y $f(E)$ es el factor de Fermi.

Densidad de estados

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m_e^{3/2}V}{h^3}E^{1/2} \tag{27.28}$$

Factor de Fermi a la temperatura T

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1} \tag{27.32}$$

O P C I O N A L

www.elsolucionario.net

Guía para la resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES	
1. Gas de electrones de Fermi		
Calcular la energía de Fermi a partir de la densidad numérica de los electrones libres.	Usar $E_F = (0{,}365\ \text{eV}\cdot\text{nm}^2)(N/V)^{2/3}$.	**Ejemplo 27.2**
Calcular la temperatura de Fermi.	Usar $kT_F = E_F$ y tabla 27.1 para E_F.	**Ejemplo 27.3**
Calcular la velocidad de Fermi.	Usar $u_F = \sqrt{2E_F/m_e}$ y la tabla 27.1 para E_F.	**Ejemplo 27.4**

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

Calcular el potencial de contacto desarrollado cuando los dos metales se ponen en contacto.	Se determinan las funciones trabajo de los umbrales fotoeléctricos y se utiliza $V_{\text{contacto}} = (\phi_1 - \phi_2)/e$.	**Ejemplo 27.5**
2. Superconductores		
Determinar la energía prohibida de superconducción a partir de la temperatura crítica.	Utilizar $E_g = 3{,}5\ kT_c$.	**Ejemplo 27.6**
Determinar la frecuencia de Josephson para un voltaje aplicado determinado.	Utilizar $f = 2eV/h$.	**Ejemplo 27.7**
3. Distribución de Fermi–Dirac		
Determinar la energía para un valor determinado de $f(E)$ a una temperatura determinada.	Utilizar $f(E) = 1/(e^{(E-E_F)/kT} + 1)$ y despejar E.	**Ejemplo 27.8**
Determinar la probabilidad de que un estado de energía determinada sea ocupado.	Calcular el factor de Fermi para una energía determinada.	**Ejemplo 27.9, 27.10**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
••• Desafiante, para alumnos avanzados

Utilizar la tabla 27.1 para las energías de Fermi y las densidades numéricas de los electrones cuando sea necesario.

Imagen microscópica de la conducción

• 1 En el modelo clásico de la conducción, el electrón pierde energía por término medio en una colisión, ya que pierde la velocidad de desplazamiento que había adquirido desde el último choque. ¿Dónde aparece esta energía?

• 2 Una medida de la densidad del gas de electrones libres en un metal es la distancia r_s, que se define como el radio de la esfera cuyo volumen es igual al volumen por electrón de conducción.
(a) Demostrar que $r_s = (3/4\ \pi n)^{1/3}$, en donde n es la densidad numérica de los electrones.
(b) Calcular en nanómetros el valor de r_s para el cobre.

• 3
(a) Dado un recorrido libre medio $\lambda = 0{,}4$ nm y una velocidad media $v_m = 1{,}17 \times 10^5$ m/s para el flujo de corriente en el cobre a una temperatura de 300 K, calcular el valor clásico de la resistividad ρ del cobre.
(b) El modelo clásico sugiere que el recorrido libre medio es independiente de la temperatura y que v_m depende de la temperatura. A partir de este modelo, ¿cuál será el valor de ρ a 100 K?

El gas de electrones de Fermi

• 4 Calcular la densidad numérica de los electrones libres en
(a) Ag ($\rho = 10{,}5$ g/cm^3) y
(b) Au ($\rho = 19{,}3$ g/cm^3), admitiendo un electrón libre por átomo y comparar los resultados con los valores relacionados en la tabla 27.1.

• 5 La densidad del aluminio es 2,7 g/cm^3. ¿Cuántos electrones libres existen por átomo de aluminio?

• 6 La densidad del estaño es 7,3 g/cm^3. ¿Cuántos electrones libres existen por átomo de estaño?

• 7 Calcular la temperatura de Fermi para
(a) Al, **(b)** K y **(c)** Sn.

8 Calcular la velocidad de un electrón de conducción cuya energía es igual a la energía de Fermi, E_F, para
(a) Na, **(b)** Au y **(c)** Sn.

• 9 Usando las densidades numéricas de la tabla 27.1, calcular la energía de Fermi para
(a) Al, **(b)** K y **(c)** Sn.

• 10 Determinar la energía media de los electrones de conducción a $T = 0$ en
(a) cobre y **(b)** litio.

• 11 Calcular
(a) la temperatura de Fermi y
(b) la energía de Fermi para el hierro a $T = 0$.

•• 12 La presión de un gas ideal está relacionada con la energía media de las partículas del gas por la expresión $PV = \frac{2}{3}NE_m$, en donde N es el número de partículas y E_m es la energía media. Utilizar ésta para calcular la presión del gas de electrones de Fermi en el cobre en N/m^2 y comparar el resultado con la presión atmosférica, que es aproximadamente 10^5 N/m^2. (*Nota*: Las unidades se manejan más fácilmente utilizando los factores de conversión 1 N/m^2 = 1 J/m^3 y 1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• **13** El módulo B (que es el inverso de la compresibilidad de un material) se define como

$$B = -V \frac{\partial P}{\partial V}$$

(a) Utilizar la relación del gas ideal $PV = \frac{2}{3}NE_m$ y las ecuaciones 27.15 y 27.16 para demostrar que

$$P = \frac{2NE_F}{5V} = CV^{-5/3}$$

en donde C es una constante independiente de V.

(b) Demostrar que el módulo del gas de electrones de Fermi, viene dado entonces por

$$B = \frac{5}{3}P = \frac{2NE_F}{3V}$$

(c) Calcular el mismo módulo en N/m^2 para el gas de Fermi del cobre y compararlo con el valor medio para el cobre sólido (140×10^9 N/m^2).

Potencial de contacto

• **14** Un estudiante renuncia creer que basta poner en contacto dos metales distintos para que se cree una diferencia de potencial. Un compañero suyo le propone una pequeña apuesta en favor de esta afirmación.

(a) ¿Qué metales de la tabla 27.2 demostrarían este punto con mayor eficacia?

(b) ¿Cuál sería el valor de su potencial de contacto?

• **15**

(a) Respecto del problema 14, ¿qué metales distintos presentarían un efecto menos acusado?

(b) ¿Cuál sería el valor de sus potenciales de contacto?

• **16** Calcular el potencial de contacto entre

(a) Ag y Cu, **(b)** Ag y Ni y **(c)** Ca y Cu.

Teoría cuántica de la conducción eléctrica

• **17** Cuando la temperatura del cobre puro disminuye de 300 K a 4 K, su resistividad disminuye en un factor mucho mayor que el que presenta el latón cuando se enfría del mismo modo. ¿Por qué?

• **18** Las resistividades del Na, Au y Sn a $T = 273$ K son 4,2 $\mu\Omega \cdot$ cm, 2,04 $\mu\Omega \cdot$ cm y 10,6 $\mu\Omega \cdot$ cm respectivamente. Utilizar estos valores y las velocidades de Fermi calculadas en el problema 8 para determinar los recorridos libres medios λ de los electrones de conducción en estos elementos.

•• **19** La resistividad del cobre puro se incrementa aproximadamente en 1×10^8 $\Omega \cdot$ m al añadir un 1% (en número de átomos) de una impureza a través del metal. El recorrido libre medio depende tanto de la impureza como de las oscilaciones de los iones reticulares según la ecuación

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_t} + \frac{1}{\lambda_i}$$

(a) Estimar λ_i de los datos de la tabla 27.1.

(b) Si r es el radio efectivo de un ion de la red con impurezas visto por un electrón, la sección eficaz de dispersión es πr^2. Estimar esta área teniendo en cuenta que r está relacionado con λ_i por la ecuación 27.9.

Teoría de bandas de sólidos

• **20** Un metal es un buen conductor porque la banda energética de valencia para los electrones está

(a) completamente llena.

(b) llena, pero existe sólo un pequeño intervalo prohibido entre ellas y una banda superior vacía.

(c) parcialmente llena.

(d) vacía.

(e) Ninguna de estas afirmaciones es correcta.

• **21** Los aislantes son malos conductores de electricidad porque

(a) hay un pequeño intervalo de energía prohibida entre la banda de valencia y la siguiente banda de energía superior donde pueden existir electrones.

(b) existe un gran intervalo de energía prohibida entre la banda de valencia y la siguiente banda superior donde pueden existir electrones.

(c) la banda de valencia tiene pocas vacantes para electrones.

(d) la banda de valencia está sólo parcialmente llena.

(e) Ninguna de estas afirmaciones es correcta.

• **22** Imaginemos un estudiante convertido en un electrón en la parte superior de la banda de valencia de un átomo de silicio, deseoso de saltar a través del intervalo de energía prohibida de 1,14 eV que le separa del fondo de la banda de conducción y participar así en todas las aventuras que ese salto supone. Lo que necesita naturalmente es la ayuda de un fotón. ¿Cuál sería la máxima longitud de onda del fotón que le permitirá saltar sobre el intervalo energético prohibido?

• **23** Resolver el problema 22 para el germanio, cuyo intervalo de energía prohibida es 0,74 eV.

• **24** Resolver el problema 22 para el diamante, cuyo intervalo de energía es 7,0 eV.

•• **25** Un fotón de longitud de onda 3,35 μm posee la energía justa para elevar un electrón desde la banda de valencia a la banda de conducción en un cristal de sulfuro de plomo.

(a) Determinar el intervalo prohibido de energía entre estas bandas en el sulfuro de plomo.

(b) Determinar la temperatura T para la cual kT es igual a este intervalo de energía prohibida.

Teoría BCS de la superconductividad

• **26**

(a) Utilizar la ecuación 27.24 para calcular la energía prohibida de superconducción para el estaño y comparar el resultado con el valor medido experimentalmente de 6×10^{-4} eV.

(b) Utilizar el valor medido para calcular la longitud de onda de un fotón con la energía suficiente para romper los pares de Cooper del estaño a $T = 0$.

• **27** Repetir el problema 26 para el plomo que tiene una energía prohibida de superconducción de $2,73 \times 10^{-3}$ eV.

Distribución de Fermi-Dirac

•• **28** El número de electrones de la banda de conducción de un aislante o de un semiconductor se ve regido principalmente por el factor de Fermi. Como la banda de valencia en estos materiales está casi llena y la banda de conducción casi vacía, la energía de Fermi, E_F, es generalmente intermedia entre la parte alta de la banda de valencia y el fondo de la

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

banda de conducción, es decir, $E_g/2$, siendo E_g el intervalo de energía prohibida entre las dos bandas y la energía se mide a partir de la parte alta de la banda de valencia.

(a) En el silicio, $E_g \approx 1{,}0$ eV. Demostrar que en este caso el factor de Fermi para los electrones en el fondo de la banda de conducción viene dado por $\exp(-E_g/2kT)$ y evaluar este factor. Analizar el significado de este resultado en el caso de que existan 10^{22} electrones por cm^3 y la probabilidad de encontrar un electrón en la banda de conducción venga determinada por el factor de Fermi.
(b) Repetir el cálculo de (a) para un aislante con un intervalo de energía prohibida de 6,0 eV.

•• **29** Demostrar que para $E = E_F$, el factor de Fermi es $F = 0{,}5$.

•• **30** ¿Cuál es la diferencia entre las energías para las cuales el factor de Fermi es 0,9 y 0,1 a 300 K en
(a) cobre, (b) potasio y (c) aluminio?

•• **31** ¿Cuál es la probabilidad de que un electrón de conducción en la plata tenga una energía cinética de 4,9 eV a $T = 300$ K?

•• **32** Demostrar que $g(E) = (3N/2)E_F^{-3/2}E^{1/2}$ (ecuación 27.30) resulta de la ecuación 27.28 para $g(E)$ y de la ecuación 27.15a para E_F.

•• **33** Realizar la integración de $E_m = (1/N)\int_0^\infty Eg(E)\,dE$ para demostrar que la energía media a $T = 0$ es $\frac{3}{5}E_F$.

•• **34** La densidad de los estados electrónicos en un metal puede expresarse en la forma $g(E) = AE^{1/2}$, en donde A es una constante y E se mide desde el fondo de la banda de conducción.
(a) Demostrar que el número total de estados es $\frac{2}{3}AE_F^{3/2}$.
(b) Aproximadamente, ¿qué fracción de los electrones de conducción tienen energías que difieren menos de kT de la energía de Fermi?
(c) Evaluar esta fracción para el cobre a $T = 300$ K.

•• **35** ¿Cuál es la probabilidad de que un electrón de conducción en la plata tenga una energía cinética de 4,9 eV a $T = 300$ K?

•• **36** Utilizar la función densidad de estados (ecuación 27.28) para estimar la fracción de los electrones de conducción en el cobre que pueden absorber energía en las colisiones con los iones en vibración de la red a
(a) 77 K y
(b) 300 K.

•• **37** En un semiconductor intrínseco, la energía de Fermi está a mitad de camino entre la parte superior de la banda de valencia y el fondo de la banda de conducción. En el germanio, el intervalo de energía prohibida tiene una anchura de 0,7 eV. Demostrar que a la temperatura ambiente la función de distribución de los electrones en la banda de conducción viene dada por la función de distribución de Maxwell-Boltzmann.

••• **38**
(a) Demostrar que para $E \geq 0$, el factor de Fermi puede escribirse en la forma

$$f(E) = \frac{1}{Ce^{E/kT} + 1}$$

(b) Demostrar que si $C >> e^{-E/kT}$, $f(E) = Ae^{-E/kT} << 1$; dicho de otro modo, demostrar que el factor de Fermi es igual a una constante multiplicada por el factor clásico de Boltzmann si $A << 1$.
(c) Utilizar $\int n(E)\,dE = N$ y la ecuación 27.28 para determinar la constante A.
(d) Mediante el resultado obtenido en (c), demostrar que la aproximación clásica es aplicable cuando la concentración de electrones es muy pequeña y/o la temperatura es muy alta. Demostrar que para estos sistemas puede aplicarse la función de distribución clásica.
(e) La mayoría de los semiconductores tienen impurezas añadidas mediante un proceso llamado dopado. Estas impurezas aumentan la concentración de electrones libres de manera que a temperatura ambiente ésta es de unos $10^{17}/cm^3$. Demostrar que para estos sistemas puede aplicarse la función de distribución clásica.

••• **39** Demostrar que la condición de aplicabilidad de la función de distribución clásica para un gas electrónico ($A << 1$ en el problema 38) es equivalente al requisito de que la separación media entre electrones sea mucho mayor que su longitud de onda de De Broglie.

••• **40** El valor de la raíz cuadrática media (rcm) de una variable se obtiene calculando el valor medio de los cuadrados de dicha variable y extrayendo la raíz cuadrada del resultado. Utilizar este procedimiento para determinar la energía rcm de una distribución de Fermi. Expresar el resultado en función de E_F y compararlo con la energía media. ¿Por qué difieren E_m y E_{rcm}?

••• **41** Cuando una estrella de masa unas dos veces mayor que la del Sol ha consumido su combustible nuclear, se colapsa formando una estrella de neutrones, es decir, una esfera de neutrones de unos 10^{10} km de diámetro. Los neutrones son partículas de espín $\frac{1}{2}$ y como los electrones, están sometidos al principio de exclusión.
(a) Determinar la densidad neutrónica de esta estrella de neutrones.
(b) Determinar la energía de Fermi de la distribución neutrónica.

Problemas generales

• **42** Verdadero o falso:
(a) Los sólidos buenos conductores eléctricos son generalmente buenos conductores térmicos.
(b) La teoría clásica de los electrones libres explica adecuadamente la capacidad calorífica de los metales.
(c) Para $T = 0$, el factor de Fermi es 1 ó 0.
(d) La energía de Fermi es la energía media de un electrón en un sólido.
(e) El potencial de contacto entre dos metales es proporcional a la diferencia de las funciones trabajo de los dos metales.
(f) Para $T = 0$, un semiconductor intrínseco es un aislante.
(g) Los semiconductores conducen corriente en una sola dirección.

• **43** ¿Cómo varía la resistividad del cobre en comparación con la del silicio al aumentar la temperatura?

• **44** La densidad del potasio es 0,851 g/cm^3. ¿Cuántos electrones libres existen por cada átomo de potasio?

• **45** Calcular la densidad numérica de los electrones libres para
(a) el Mg ($\rho = 1{,}74$ g/cm^3) y
(b) el Zn ($\rho = 7{,}1$ g/cm^3), suponiendo que existen dos electrones libres por átomo y comparar los resultados con los valores de la tabla 27.1.

•• **46** Estimar la fracción de electrones libres del cobre que están en estados excitados por encima de la energía de Fermi
(a) a la temperatura ambiente a 300 K y (b) a 1000 K.

••• **47** Una oblea de 2 cm^2 de silicio puro se irradia con luz de longitud de onda 775 nm. La intensidad del haz de luz es de 4,0 W/m^2 y todo fotón que choca contra la muestra se absorbe y crea un par electrón–hueco.
(a) ¿Cuántos pares electrón–hueco se producen en un segundo?
(b) Si el número de estos pares en la muestra es $6{,}25 \times 10^{11}$ en estado estacionario, ¿a qué velocidad se recombinen los pares electrón–hueco?
(c) Si cada proceso de recombinación da lugar a la radiación de un fotón, ¿cuál es la potencia de irradiación de la muestra?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

CONCEPCION DEL URUGUAY
NOLOGICA NACIONAL
HISTORICO NACIONAL
425541 / 423803
Ing. PEREYRA - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

CAPÍTULO 28

El campo magnético

El tren de alta velocidad Maglev System Transrapid, que utiliza la levitación magnética, guía y propulsión, ha alcanzado una velocidad pico superior a los 500 km/h.

www.elsolucionario.net

Hace ya más de 2000 años que los griegos sabían que cierto mineral (llamado ahora magnetita) tenía la propiedad de atraer piezas de hierro, y existen referencias escritas del uso de imanes en la navegación desde el siglo doce.

En 1269, Pierre de Maricourt descubrió que si una aguja se deja libremente en distintas posiciones sobre un imán natural esférico, se orienta a lo largo de líneas que, rodeando el imán, pasan por puntos situados en extremos opuesto de la esfera. Estos *punto fueron llamados polos del imán.* Posteriormente, muchos experimentadores observaron que todo imán, cualquiera que sea su forma, posee dos polos, un polo norte y un polo sur, en donde la fuerza ejercida por el imán tiene su máxima intensidad. También se observó que los polos iguales de dos imanes se repelen entre sí y los polos distintos se atraen mutuamente.

En 1600, William Gilbert descubrió que la Tierra es un imán natural con polos magnéticos próximos a los polos geográficos norte y sur. Como el polo norte de la aguja de una brújula apunta al polo sur de un imán, lo que llamamos polo norte magnético de la Tierra es realmente un polo sur magnético, como se ilustra en la figura 28.1.

Aunque las cargas eléctricas y los polos magnéticos son semejantes en muchos aspectos, hay una diferencia importante: los polos magnéticos siempre se presentan por parejas. Si se rompe un imán por la mitad, aparecen polos iguales y opuestos a cada lado del punto de rotura; es decir, aparecen dos imanes, cada uno con un polo norte y un polo sur. A lo largo del tiempo se ha especulado mucho sobre la posible existencia de un polo magnético aislado, y más recientemente se ha realizado un considerable esfuerzo experimental a fin de localizar tal objeto. Hasta ahora no existe una evidencia concluyente sobre la existencia de un polo magnético aislado.

En este capítulo consideraremos sólo los efectos de un campo magnético determinado sobre cargas móviles y sobre alambres portadores de corrientes. Las fuentes de los campos magnéticos serán el objeto del capítulos siguiente.

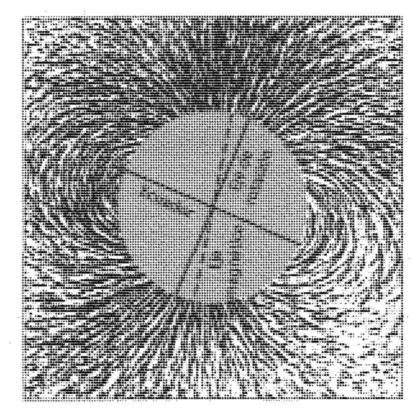
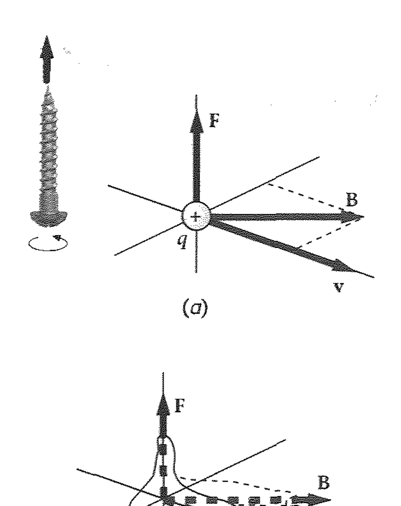


Figura 28.1 Las líneas de campo magnético de la Tierra, indicadas por limaduras de hierro alrededor de una esfera imanada de modo uniforme. Las líneas de campo salen del polo magnético norte que está próximo al polo sur geográfico y entran en el polo magnético sur que esta próximo al polo geográfico norte.

Fuerza ejercida por un campo magnético 28.1

La existencia de un campo magnético **B** en un punto del espacio puede demostrarse con una brújula. Si existe un campo magnético, la aguja se alineará en la dirección de este campo.

 www.elsolucionario.net



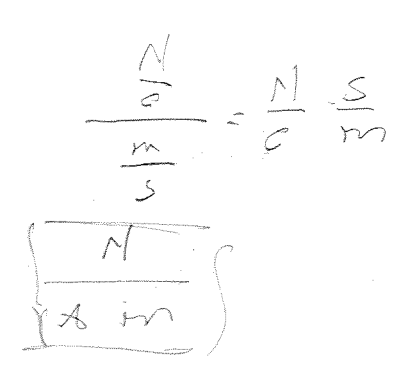


Figura 28.2 Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga que se mueve en un campo magnético. (*a*) La fuerza es perpendicular a ambos **v** y **B** y su sentido es el que correspondería a un tornillo que avanza cuando gira en el mismo sentido de **v** hacia **B**. (*b*) Si los dedos de la mano derecha señalan la dirección de **v** de tal modo que pueden curvarse hacia **B**, el pulgar señala la dirección de **F**.

Experimentalmente se demuestra que cuando una carga q posee la velocidad **v** en un campo magnético, aparece una fuerza que es proporcional a q y a v, y al seno del ángulo que forman **v** y **B**. Sorprendentemente, la fuerza es perpendicular a ambos, velocidad y campo magnético. Estos resultados experimentales pueden resumirse del modo siguiente. Cuando una carga q se mueve con velocidad **v** en un campo magnético **B**, la fuerza magnética **F** que actúa sobre la carga es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(28.1)}$$

Fuerza magnética sobre una carga móvil

Como **F** es perpendicular a ambos, **v** y **B**, resulta ser perpendicular al plano definido por estos dos vectores. La dirección de **F** viene dada por la regla de la mano derecha como el eje de rotación cuando **v** gira hacia **B**, como se muestra en la figura 28.2.

En la figura 28.3 se muestran algunos ejemplos de la dirección de las fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles cuando el vector campo magnético **B** se encuentra en la dirección vertical hacia arriba. Obsérvese que la dirección de cualquier campo magnético particular **B** puede encontrarse experimentalmente midiendo **F** y **v** y aplicando después la ecuación 28.1.

La ecuación 28.1 define el **campo magnético B** en función de la fuerza ejercida sobre una carga móvil. La unidad SI del campo magnético es el **tesla** (T). Una carga de un culombio que se mueve con una velocidad de un metro por segundo perpendicular a un campo magnético de un tesla, experimenta la fuerza de un newton:

$$1\ \text{T} = 1\,\frac{\text{N/C}}{\text{m/s}} = 1\ \text{N/A}\cdot\text{m} \qquad (28.2)$$

Esta unidad es bastante grande. El campo magnético terrestre es algo menor que 10^{-4} T. Los campos magnéticos próximos a imanes permanentes poderosos suelen ser de 0,1 a 0,5 T y los grandes electroimanes de laboratorio y de la industria producen campos de 1 a 2 T. Campos magnéticos superiores a 10 T son muy difíciles de producir, pues las fuerzas magnéticas resultantes romperían los imanes en pedazos o los aplastarían. Una unidad usada corrientemente, deducida del sistema cgs, es el **gauss** (G), que está relacionada con el tesla por

$$1\ \text{G} = 10^{-4}\ \text{T} \qquad \textbf{(28.3)}$$

Definición. Gauss

Como normalmente se utiliza el gauss como unidad del campo magnético, que no es una unidad del SI, no debe olvidarse la conversión de esta magnitud en teslas cuando se realizan los cálculos.

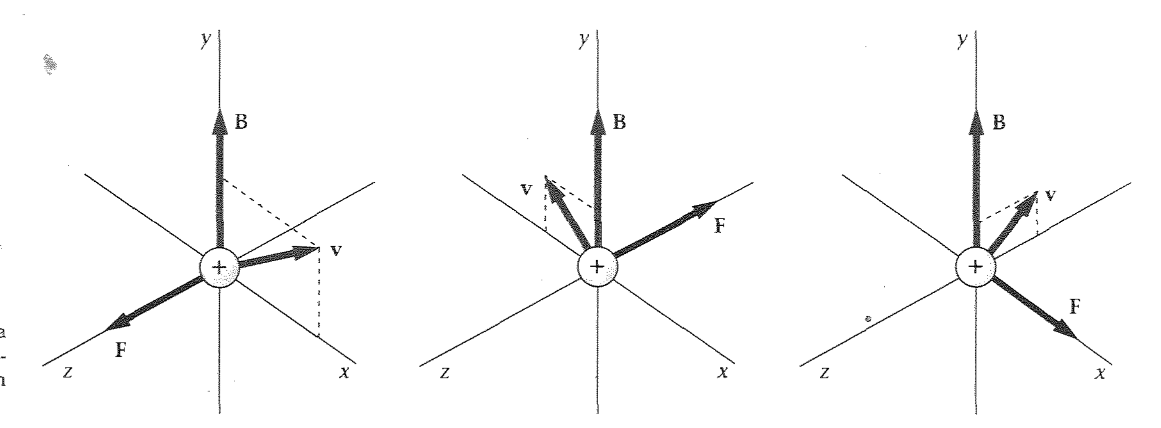


Figura 28.3 Dirección y sentido de la fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve con velocidad **v** en un campo magnético **B**.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 28.1

El campo magnético en un punto de la superficie de la Tierra tiene un valor de 0,6 G y está dirigido hacia abajo y hacia el norte, formando un ángulo de 70° aproximadamente con la horizontal, como indica la figura 28.4. (La magnitud y dirección del campo magnético terrestre varía de un lugar a otro. Los datos que aquí se dan corresponden aproximadamente a la parte central de los Estados Unidos.) Un protón de carga $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C se mueve horizontalmente en dirección norte con velocidad $v = 10^7$ m/s. Calcular la fuerza magnética sobre el protón (a) utilizando $F = qvB$ sen θ y (b) expresando **v** y **B** en función de los vectores **i**, **j**, **k** y calculando $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

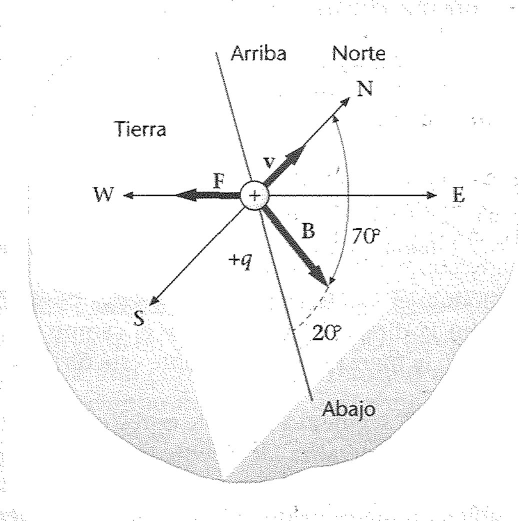


Figura 28.4

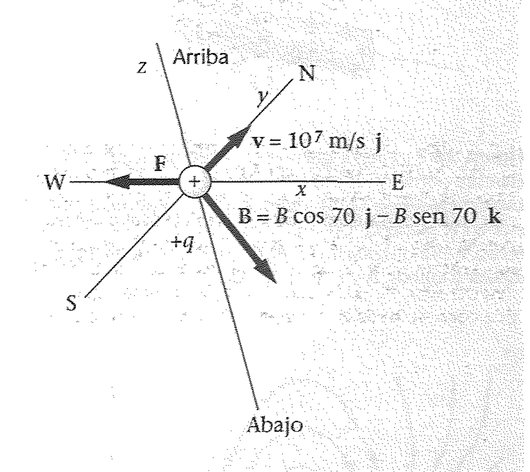


Figura 28.5

Esquema del problema Sean x e y las direcciones este y norte, respectivamente, y sea z la dirección hacia arriba (figura 28.5). El vector velocidad está en la dirección y.

(a) Calcular $F = qvB$ sen θ siendo $\theta = 70°$. En la figura 28.4 podemos ver que la dirección de la fuerza es hacia el oeste:

$$F = qvB \text{ sen } 70°$$
$$= (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})(10^7\text{ m/s})(0{,}6 \times 10^{-4}\text{ T})(0{,}94)$$
$$= 9{,}02 \times 10^{-17}\text{ N}$$

(b) 1. La fuerza magnética es el producto vectorial de $q\mathbf{v}$ por **B**:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

2. Expresar **v** y **B** en función de sus componentes:

$$\mathbf{v} = v_y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{B} = B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

3. Escribir $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en función de estos componentes:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(v_y\mathbf{j}) \times (B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$
$$= qv_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + qv_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = qv_yB_z\mathbf{i}$$

4. Hallar el valor de **F**:

$$\mathbf{F} = qv_y(-B \text{ sen } 70°)\mathbf{i}$$
$$= -(1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})(10^7\text{ m/s})(0{,}6 \times 10^{-4}\text{ T})(0{,}94)$$
$$= -9{,}02 \times 10^{-17}\text{ N } \mathbf{i}$$

Observación La dirección de $-\mathbf{i}$ es hacia el oeste, de modo que la fuerza está dirigida hacia el oeste como indica la figura 28.5

Ejercicio Determinar la fuerza que actúa sobre un protón que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = 4 \times 10^6$ m/s **i** en un campo magnético $\mathbf{B} = 2{,}0$ T **k**. (*Respuesta*: $-1{,}28 \times 10^{-12}$ N **j**.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

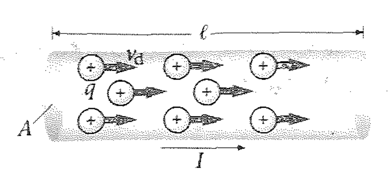


Figura 28.6 Segmento de alambre de longitud ℓ que transporta una corriente de intensidad I. Si el alambre está en un campo magnético, se producirá una fuerza sobre cada portador de carga, dando lugar a una fuerza resultante sobre el alambre.

Cuando por un alambre situado en el interior de un campo magnético circula una corriente, existe una fuerza que se ejerce sobre el conductor que es simplemente la suma de las fuerzas magnéticas sobre las partículas cargadas cuyo movimiento produce la corriente. La figura 28.6 muestra un segmento de alambre corto de área de sección recta A y la longitud ℓ por el cual circula la corriente I. Si el alambre está en el interior de un campo magnético **B**, la fuerza magnética sobre cada carga es $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$, siendo $\mathbf{v}_d$ la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga, que es la misma que su velocidad media. El número de cargas en el interior del segmento de alambre es el número n de las que hay por unidad de volumen multiplicado por el volumen $A\ell$. Así pues, la fuerza total sobre el segmento de alambre es

$$\mathbf{F} = (q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B})nA\ell$$

Según la ecuación 26.3, la corriente que circula por el hilo es

$$I = nqv_d A$$

Así pues, la fuerza puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \qquad (28.4)$$

Fuerza magnética sobre un segmento de alambre portador de corriente

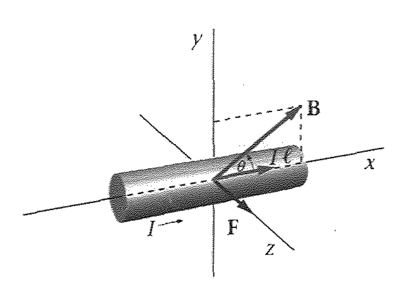


Figura 28.7 Fuerza magnética sobre un segmento de alambre portador de corriente en un campo magnético. La corriente lleva la dirección x, y el campo magnético está en el plano xy y forma un ángulo θ con el eje x. La fuerza **F** está dirigida en el sentido positivo de z, perpendicular a ambos, **B** y $\boldsymbol{\ell}$. Su magnitud es $I\ell B$ sen θ.

en donde $\boldsymbol{\ell}$ es un vector cuyo módulo es la longitud del hilo y cuya dirección es paralela a la corriente. Para la corriente en la dirección x positiva y el campo magnético en el plano xy mostrado en la figura 28.7, la fuerza sobre el alambre está dirigida a lo largo del eje z positivo.

En la ecuación 28.4 se admite que el segmento de cable es recto y que el campo magnético no varía en toda su longitud. Se generaliza fácilmente el caso de un conductor de forma arbitraria en el interior de un campo magnético cualquiera. Simplemente hay que escoger un segmento de hilo suficientemente pequeño $d\boldsymbol{\ell}$ y escribir la fuerza que actúa sobre dicho segmento $d\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{F} = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \qquad (28.5)$$

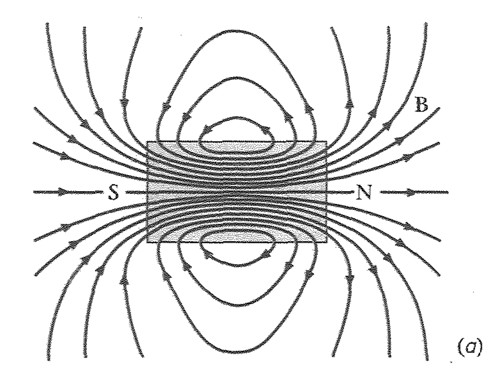
Fuerza magnética sobre un elemento de corriente

en donde **B** es el vector campo magnético en el segmento. La magnitud $I\, d\boldsymbol{\ell}$ se denomina **elemento de corriente**. Se halla la fuerza total que actúa sobre el conductor sumando (o integrando) respecto a todos los elementos de corriente y utilizando el campo apropiado **B** en cada uno de ellos. La ecuación 28.5 es la misma que la ecuación 28.1 con el elemento de corriente $I\, d\boldsymbol{\ell}$ sustituyendo a $q\mathbf{v}$.

Del mismo modo que el campo eléctrico **E** puede representarse mediante líneas de campo eléctrico, también el campo magnético **B** puede ser representado mediante **líneas de campo magnético**. En ambos casos, la dirección del campo viene indicada por la dirección de las líneas de campo y la magnitud del campo por su densidad. Existen, sin embargo, dos importantes diferencias entre líneas del campo eléctrico y líneas del campo magnético:

1. Las líneas de campo eléctrico poseen la dirección de la fuerza eléctrica sobre una carga positiva, mientras que las líneas de campo magnético son perpendiculares a la fuerza magnética sobre una carga móvil.
2. Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas; las líneas de campo magnético forman circuitos cerrados. Como los polos magnéticos aislados aparentemente no existen, no hay puntos en el espacio en donde las líneas de campo magnético comiencen o terminen.

La figura 28.8 muestra las líneas de campo magnético, tanto fuera como dentro de una barra imanada.



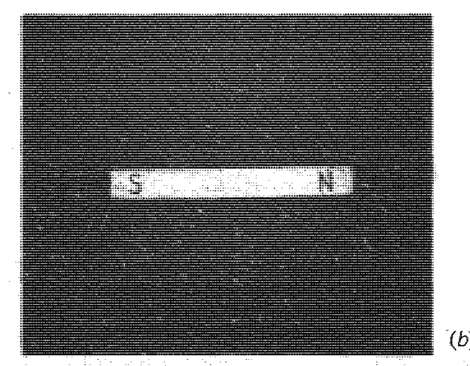


Figura 28.8 (*a*) Líneas del campo magnético dentro y fuera de una barra magnética. Las líneas emergen del polo norte y entran en el polo sur, pero carecen de principio y de fin. En su lugar forman circuitos cerrados. (*b*) Líneas de campo magnético exteriores a una barra imanada, visualizadas por limaduras de hierro.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 28.2

Un segmento de cable de 3 mm de longitud transporta una corriente de 3 A en la dirección *x*. Se encuentra en el interior de un campo magnético de magnitud 0,02 T en el plano *xy* formando un ángulo de 30° con el eje *x*, como indica la figura 28.9. ¿Cuál es la fuerza magnética ejercida sobre el segmento de cable?

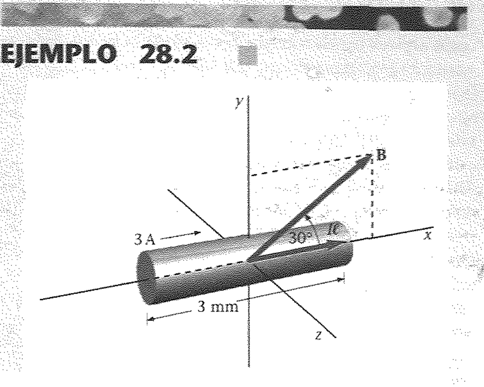


Figura 28.9

1. La fuerza magnética se encuentra en la dirección de $\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ que como vemos en la figura 28.9 está en la dirección z. La fuerza magnética viene dada por la ecuación 28.4:

$$\mathbf{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = I\ell B \text{ sen } 30° \ \mathbf{k}$$
$$= (3{,}0 \text{ A})(0{,}003 \text{ m})(0{,}02 \text{ T})(\text{sen } 30°)\mathbf{k}$$
$$= 9 \times 10^{-5} \text{ N } \mathbf{k}$$

EJEMPLO 28.3

Un alambre curvado en forma semicircular de radio *R* se encuentra en el plano *xy*. Por él circula una corriente *I* del punto *a* al punto *b*, como se indica en la figura 28.10. Un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ está dirigido perpendicularmente al plano de la espira. Determinar la fuerza que actúa sobre la parte semicircular del alambre.

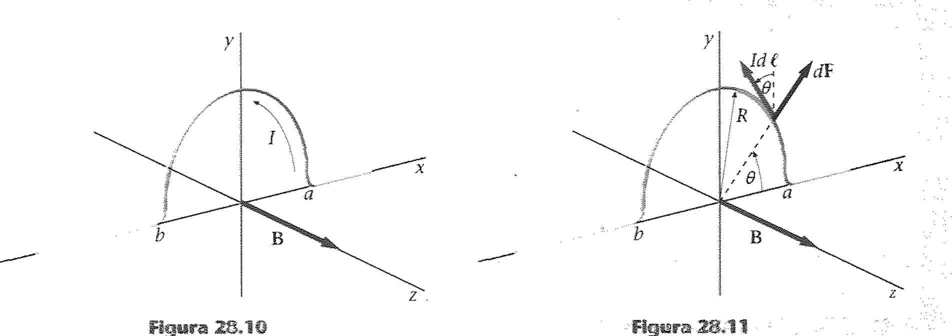


Figura 28.10 Figura 28.11

Esquema del problema En la figura 28.11 se muestra la fuerza $d\mathbf{F}$ ejercida sobre un segmento del alambre semicircular. Como vemos, esta fuerza yace en el plano *xy*. Para determinar la fuerza total expresaremos los componentes *x* e *y* de $d\mathbf{F}$ en función de θ e integraremos separadamente de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

1. Expresar la fuerza $d\mathbf{F}$ sobre un elemento de corriente $d\boldsymbol{\ell}$: $d\mathbf{F} = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$
2. Expresar $d\boldsymbol{\ell}$ en función de los vectores unitarios **i** y **j**: $d\boldsymbol{\ell} = -d\ell \text{ sen } \theta\, \mathbf{i} + d\ell \cos \theta\, \mathbf{j}$
3. Calcular $I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ utilizando $d\ell = R\, d\theta$ y $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$:

$$d\mathbf{F} = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$
$$= (-IR \text{ sen } \theta\, d\theta\, \mathbf{i} + IR \cos \theta\, d\theta\, \mathbf{j}) \times B\mathbf{k}$$
$$= IRB \text{ sen } \theta\, d\theta\, \mathbf{j} + IRB \cos \theta\, d\theta\, \mathbf{i}$$

4. Integrar cada componente de $d\mathbf{F}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$:

$$\mathbf{F} = IRB\mathbf{i} \int_0^{\pi} \cos \theta\, d\theta + IRB\mathbf{j} \int_0^{\pi} \text{sen } \theta\, d\theta$$
$$\mathbf{F} = IRB\mathbf{i}(0) + IRB\mathbf{j}(2) = 2IRB\mathbf{j}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Comprobación del resultado Por simetría puede comprobarse que el componente x de **F** es cero, ya que en la mitad derecha del semicírculo, $d\mathbf{F}$ apunta hacia la derecha y en la mitad izquierda, $d\mathbf{F}$ apunta hacia la izquierda.

Observación La fuerza neta que actúa sobre el alambre semicircular es la misma que si el semicírculo fuera reemplazado por un segmento de una línea recta de longitud $2R$ que conectase los puntos a y b. (Este es un resultado general, como se demuestra en el problema 16.)

28.2 ■ Movimiento de una carga puntual en un campo magnético

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. Por tanto, la fuerza magnética modifica la dirección de la velocidad, pero no su magnitud. *Los campos magnéticos no realizan trabajo sobre las partículas y no modifican su energía cinética.*

En el caso especial en que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme, como se ve en la figura 28.12, la partícula se mueve describiendo una órbita circular. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que la partícula adquiera la aceleración v^2/r del movimiento circular. Utilizando la segunda ley de Newton podemos relacionar el radio r de la circunferencia con el campo magnético **B** y la velocidad **v** de la partícula. La magnitud de la fuerza resultante es qvB, ya que **v** y **B** son perpendiculares. La segunda ley de Newton nos da

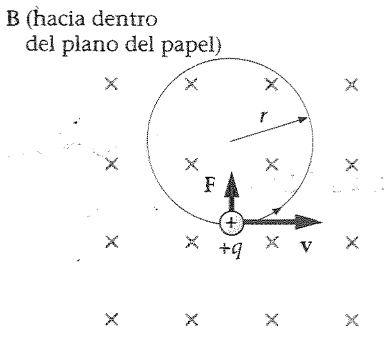


Figura 28.12 Partícula cargada que se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme que está dirigido hacia dentro del plano del papel (indicado por las cruces). La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula haciendo que se mueva en una órbita circular.

$$F = ma = m\frac{v^2}{r}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

o sea,

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{28.6}$$

El período del movimiento circular es el tiempo que la partícula tarda en dar una vuelta completa alrededor del círculo. El período viene relacionado con la velocidad por

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Sustituyendo en $r = mv/qB$ (ecuación 28.6) podemos obtener el período del movimiento circular de la partícula, llamado **período del ciclotrón**:

$$T = \frac{2\pi(mv/qB)}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{28.7}$$

Periodo del ciclotrón

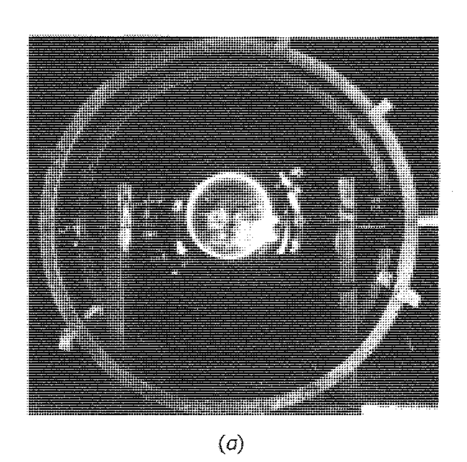
La frecuencia del movimiento circular, llamada **frecuencia del ciclotrón** es el valor recíproco del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \tag{28.8}$$

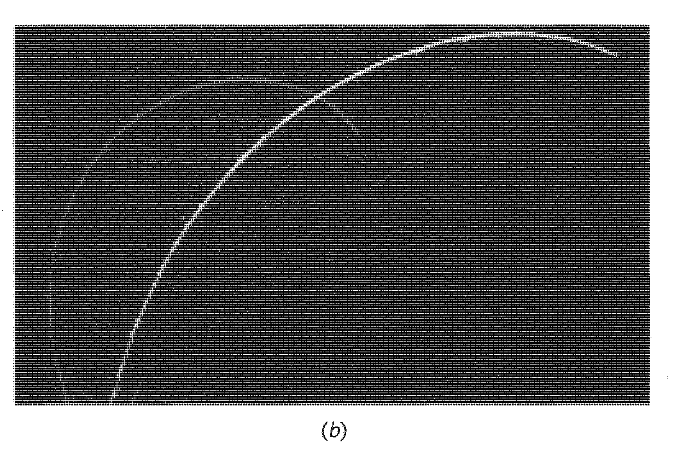
Frecuencia del ciclotrón

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

(*a*) Trayectoria circular de los electrones que se mueven en el interior de un campo magnético producido por dos grandes bobinas. Los electrones ionizan el gas contenido en el tubo produciendo un destello azulado que indica la trayectoria del haz. (*b*) Fotografía en falso color que muestra las trayectorias de un protón de 1,6 MeV (rojo) y una partícula α de 7 MeV (amarillo) en una cámara de niebla. El radio de curvatura es proporcional al momento lineal e inversamente proporcional a la carga de la partícula. Para estas energías, el momento lineal de la partícula α, que posee doble carga que el protón, es aproximadamente cuatro veces el del protón y su radio de curvatura guarda esta proporción.

Obsérvese que el período y la frecuencia dadas por las ecuaciones 28.7 y 28.8 dependen de la relación carga/masa (q/m), pero son independientes del radio r y de la velocidad v. Dos importantes aplicaciones del movimiento circular de las partículas cargadas en un campo magnético uniforme, el espectrómetro de masa y el ciclotrón, serán estudiados más adelante en este capítulo.



EJEMPLO 28.4

Un protón de masa $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y carga $q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C se mueve en un círculo de radio 21 cm, perpendicularmente a un campo magnético $B = 4000$ G. Determinar (a) el período del movimiento y (b) la velocidad del protón.

(a) Calcular el período T a partir de la ecuación 28.7 con $B = 0{,}4$ T:

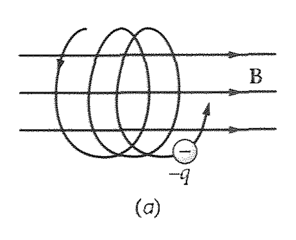
$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}4\ \text{T})} = 1{,}6 \times 10^{-7}\ \text{s}$$

(b) Calcular la velocidad v a partir de la ecuación 28.6:

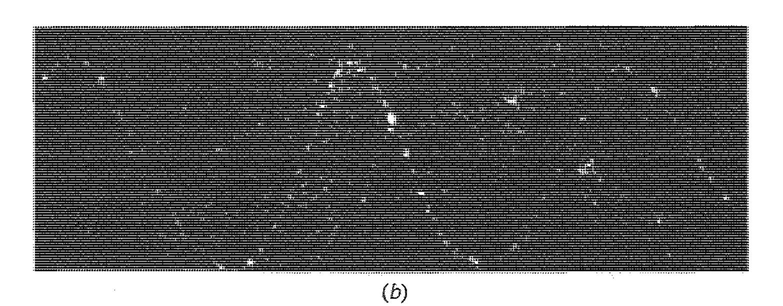
$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0{,}21\ \text{m})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}4\ \text{T})}{1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$
$$= 8{,}05 \times 10^{6}\ \text{m/s}$$

Observación El radio del movimiento circular es proporcional a la velocidad, pero el período es independiente, tanto de la velocidad como del radio.

Comprobación del resultado Obsérvese que el producto de la velocidad v y del periodo T es igual a la longitud de la circunferencia $2\pi r$, como es lógico: $vT = (8{,}05 \times 10^6\ \text{m/s})(1{,}64 \times 10^{-7}\ \text{s}) = 1{,}32$ m; $2\pi r = 2\pi(0{,}21\ \text{m}) = 1{,}32$ m.



(*a*)



(*b*)

Figura 28.13 (*a*) Cuando una partícula cargada posee un componente de velocidad paralelo a un campo magnético y otro perpendicular al mismo, se mueve en una trayectoria helicoidal alrededor de las líneas del campo. (*b*) Fotografía en cámara de niebla de la trayectoria helicoidal de un electrón que se mueve en un campo magnético. La trayectoria de los electrones se hace visible por la condensación de gotitas de agua en la cámara de niebla.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

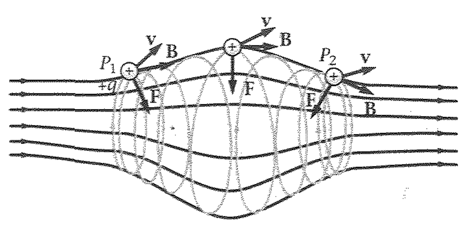


Figura 28.14 Botella magnética. Cuando una partícula cargada se mueve en este campo, muy intenso en ambos extremos y débil en el centro, la partícula queda atrapada y se mueve en espiral atrás y adelante alrededor a las líneas de campo.

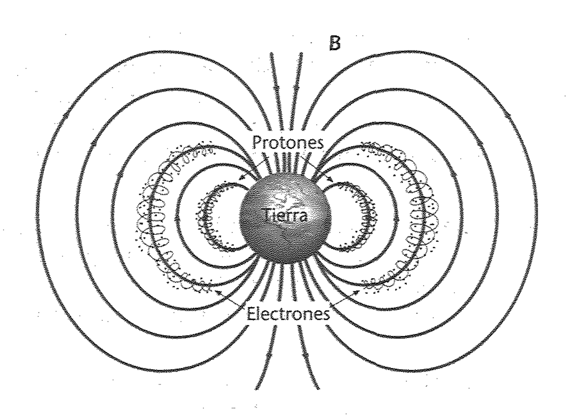


Figura 28.15 Cinturones de Van Allen. Los protones (cinturones externos) están atrapados en el campo magnético terrestre y se mueven en espiral a lo largo de las líneas de campo que existen entre los polos norte y sur

Supongamos que una partícula cargada entra en un campo magnético uniforme con una velocidad que no es perpendicular a **B**. La velocidad de la partícula puede resolverse en dos componentes, $v_\parallel$ paralela a **B** y $v_\perp$ perpendicular a **B**. El movimiento debido al componente perpendicular es el mismo que hemos visto anteriormente. El componente de la velocidad paralelo a **B** no se afecta por el campo magnético y, por tanto, permanece constante. La trayectoria de la partícula es una hélice, como muestra la figura 28.13.

El movimiento de las partículas cargadas en campos magnéticos no uniformes es muy complicado. La figura 28.14 muestra una **botella magnética**, una interesante configuración de campos magnéticos en la cual el campo es débil en el centro y muy intenso en ambos extremos. Un análisis detallado del movimiento de una partícula cargada en tal campo muestra que la partícula recorrerá una trayectoria en espiral alrededor de la línea de campo y quedará atrapada oscilando atrás y adelante entre los puntos P_1 y P_2 de la figura. Estas configuraciones de campo magnético se utilizan para confinar haces densos de partículas cargadas, el *plasma*, en las investigaciones sobre fusión nuclear. Un fenómeno semejante es la oscilación de iones que tiene lugar entre los polos magnéticos de la Tierra en los llamados cinturones de Van Allen (figura 28.15.)

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

■ Selector de velocidades

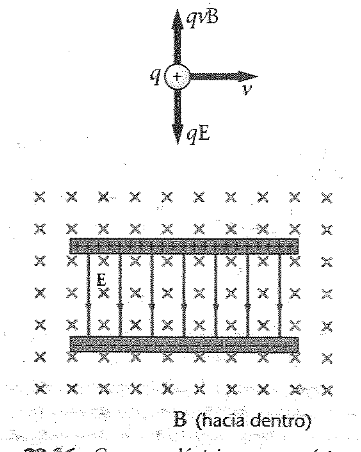


Figura 28.16 Campos eléctrico y magnético cruzados. Cuando una partícula positiva se mueve hacia la derecha experimenta una fuerza eléctrica dirigida hacia abajo qE y otra fuerza magnética dirigida hacia arriba qvB. Estas fuerzas se equilibran si la velocidad de la partícula está relacionada con las magnitudes de ambos campos por la expresión $vB = E$.

La fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo magnético uniforme puede equilibrarse por una fuerza electrostática si se escogen adecuadamente los valores y direcciones de los campos magnético y eléctrico. Puesto que la fuerza eléctrica tiene la dirección del campo eléctrico (en el caso de partículas positivas) y la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, los campos eléctrico y magnético deber ser perpendiculares entre sí, para que se contrarresten estas fuerzas. Una región de estas características se dice que tiene los **campos cruzados**.

La figura 28.16 muestra una región del espacio entre las placas de un condensador en donde existe un campo eléctrico y un campo magnético perpendicular (producido por un imán con los polos magnéticos por encima y por debajo del papel.) Consideraremos una partícula de carga q entrando en este espacio desde la izquierda. La fuerza neta sobre la partícula es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Si q es positiva, la fuerza eléctrica de magnitud qE está dirigida hacia abajo y la fuerza magnética de magnitud qvB está dirigida hacia arriba. Si la carga es negativa, estarán invertidas ambas fuerzas. Las dos fuerzas se equilibrarán si $qE = qvB$, o sea,

$$v = \frac{E}{B} \tag{28.9}$$

Para determinadas magnitudes de los campos eléctrico y magnético, las fuerzas se equilibrarán sólo para partículas cuya velocidad sea la dada por la ecuación 28.9. Cual-

www.elsolucionario.net

quier partícula con esta velocidad, independientemente de su masa o carga, atravesará el espacio sin desviarse. Una partícula de velocidad mayor se desviará en el sentido de la fuerza magnética y otra de velocidad menor se desviará en el sentido de la fuerza eléctrica. Un dispositivo de campos de esta forma se denomina, por ello, **selector de velocidades**. Sólo pasarán y serán seleccionadas aquellas partículas cuya velocidad viene dada por la ecuación 28.9.

Ejercicio Un protón se mueve en la dirección x en una región de campos cruzados, en donde $\mathbf{E} = 2 \times 10^5$ N/C **k** y $\mathbf{B} = -3000$ G **j**. (a) ¿Cuál es la velocidad del protón si no se desvía? (b) Si el protón se mueve con una velocidad doble a la anterior, en qué dirección se desviará? (*Respuestas*: (a) 667 km/s; (b) en la dirección z negativa.)

OPCIONAL

Medida del cociente q/m para electrones realizada por Thomson

Un ejemplo del uso de campos cruzados eléctrico y magnético es el famoso experimento de J.J. Thomson realizado en 1897, en el cual demostró que los rayos catódicos podían desviarse mediante estos campos y, por tanto, se componían de partículas cargadas. Midiendo la desviación de estas partículas, Thomson pudo demostrar que todas las partículas tenían la misma relación carga a masa q/m y determinar este cociente. Demostró que las partículas con esta razón carga a masa pueden obtenerse utilizando un material cualquiera como cátodo, lo que significa que estas partículas, ahora denominadas electrones, son un constituyente fundamental de toda materia.

La figura 28.17 muestra un diagrama esquemático del tubo de rayos catódicos utilizado por Thomson. Los electrones son emitidos por el cátodo C, que está a un potencial negativo respecto a las rendijas A y B. Existe un campo eléctrico en la dirección que va desde A hasta C que acelera a los electrones. Éstos pasan a través de las rendijas A y B hacia el interior de una región libre de campo y luego se encuentran con un campo eléctrico entre las placas D y F que es perpendicular a la velocidad de los electrones. Este campo los acelera verticalmente durante el corto tiempo que permanecen entre las placas. Los electrones se desvían e inciden en la pantalla fosforescente S situada en el extremo derecho del tubo con cierto desplazamiento Δy respecto al punto en el cual incidirían si no existiese campo entre las placas D y F. Cuando los electrones chocan contra la pantalla, se produce un destello que indica la posición del haz. La velocidad inicial v_0 se determina introduciendo un campo magnético **B** entre las placas en una dirección perpendicular tanto al campo eléctrico como a la velocidad inicial de los electrones. La magnitud de **B** se ajusta entonces hasta que el haz no se desvía, y la velocidad se determina mediante la ecuación 28.9.

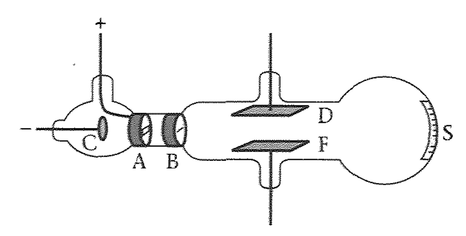


Figura 28.17 Tubo de Thomson utilizado para medir el cociente q/m para las partículas que forman los rayos catódicos (electrones). Los electrones procedentes del cátodo C pasan a través de las rendijas en A y B e inciden sobre una pantalla fosforescente S. El haz puede desviarse mediante un campo eléctrico situado entre las placas D y F o mediante un campo magnético (no indicado).

Con el campo magnético interrumpido, el haz se desvía en una cantidad Δy que consta de dos partes: la desviación Δy_1, que tiene lugar mientras los electrones se encuentran entre las placas, y Δy_2, que tiene lugar una vez que los electrones abandonan la región entre las placas (figura 28.18).

Sea x_1 la distancia horizontal a través de las placas deflectoras D y F. Si el electrón se mueve horizontalmente con velocidad v_0 al entrar en la región de las placas, el tiempo que transcurre en esta región es $t_1 = x_1/v_0$, y la velocidad vertical cuando abandona las placas es

$$v_y = at_1 = \frac{qE}{m}t_1 = \frac{qE}{m}\frac{x_1}{v_0}$$

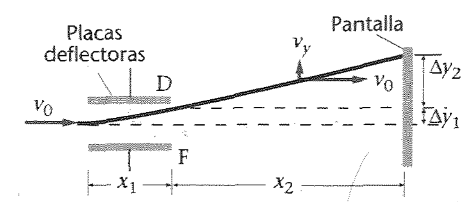


Figura 28.18 La desviación total del haz en los experimentos de J.J. Thomson consta de una desviación, Δy_1 mientras los electrones se encuentran entre las placas, más la desviación Δy_2 que ocurre en la región libre del campo entre las placas y la pantalla.

siendo E el campo eléctrico existente entre las placas. La desviación en esta región será

$$\Delta y_1 = \tfrac{1}{2}at_1^2 = \tfrac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{x_1}{v_0}\right)^2$$

El electrón entonces se mueve recorriendo una distancia horizontal adicional x_2 en la región libre de campo entre las placas de deflexión y la pantalla. Como la velocidad del electrón es constante en esta región, el tiempo necesario para alcanzar la pantalla es $t_2 = x_2/v_0$ y la desviación vertical adicional es

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE}{m}\frac{x_1}{v_0}\frac{x_2}{v_0}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

La desviación total en la pantalla es, por tanto,

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{x_1}{v_0}\right)^2 + \frac{qE}{m}\frac{x_1 x_2}{v_0^2} \qquad (28.10)$$

La desviación medida Δy puede utilizarse para determinar la relación carga/masa, q/m, según la ecuación 28.10.

■ EJEMPLO 28.5

Los electrones pasan sin desviarse a través de las placas del aparato de Thomson cuando el campo eléctrico es de 3000 V/m y existe un campo magnético cruzado de 1,40 G. Si las placas tienen 4 cm de longitud y el extremo de las placas dista 30 cm de la pantalla, determinar la desviación sobre la pantalla cuando se interrumpe el campo magnético.

Esquema del problema La masa y carga del electrón se conocen: $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg y $q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. La velocidad del electrón puede determinarse a partir de la relación que existe entre los campos eléctrico y magnético.

1. La desviación total del electrón viene dada por la ecuación 28.10:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{x_1}{v_0}\right)^2 + \frac{qE}{m}\frac{x_1 x_2}{v_0^2}$$

2. La velocidad v_0 es igual a E/B:

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{3000 \text{ V/m}}{1{,}40 \times 10^{-4} \text{ T}} = 2{,}14 \times 10^7 \text{ m/s}$$

3. Aplicar este valor de v_0, el valor dado de E y los valores conocidos de m y q para determinar Δy:

$$\Delta y = \frac{1}{2}\frac{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(3000\text{ V/m})}{9{,}11\times10^{-31}\text{ kg}}\left(\frac{0{,}04\text{ m}}{2{,}14\times10^{7}\text{ m/s}}\right)^2 + \frac{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(3000\text{ V/m})}{9{,}11\times10^{-31}\text{ kg}}\frac{(0{,}04\text{ m})(0{,}30\text{ m})}{(2{,}14\times10^{7}\text{ m/s})^2}$$

$$= 9{,}20\times10^{-4}\text{ m} + 1{,}38\times10^{-2}\text{ m}$$

$$= 0{,}92\text{ mm} + 13{,}8\text{ mm} = 14.7\text{ mm}$$

■ Espectrómetro de masas

El **espectrómetro de masas**, diseñado por vez primera por Francis William Aston en 1919, fue desarrollado para medir las masas de los isótopos. Estas medidas constituyen un medio importante para la determinación de la existencia de isótopos y su abundancia en la naturaleza. Por ejemplo, así se comprobó que el magnesio natural está formado por 78,7 por ciento de ^{24}Mg, 10,1 por ciento de ^{25}Mg y 11,2 por ciento de ^{26}Mg. Estos isótopos poseen masas en la relación aproximada 24:25:26.

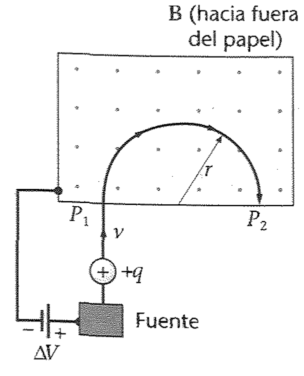


Figura 28.19 Dibujo esquemático de un espectrómetro de masas. Los iones procedentes de la fuente iónica se aceleran bajo una diferencia de potencial ΔV y entran en un campo magnético uniforme. El campo magnético es perpendicular y saliente del plano del papel, como indican los puntos dibujados. Los iones se curvan en arcos circulares y emergen en P_2. El radio de la circunferencia varía con la masa del ion.

La figura 28.19 muestra un dibujo esquemático simple de un espectrómetro de masas. Los iones procedentes de una fuente son acelerados por un campo eléctrico y entran en un campo magnético uniforme. Si los iones parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial ΔV, su energía cinética cuando entren en el campo magnético es igual a la pérdida de energía potencial, $q\,\Delta V$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\,\Delta V \qquad (28.11)$$

Los iones se mueven en una semicircunferencia de radio r dado por la ecuación 28.6, $r = mv/qB$ e inciden sobre una película fotográfica en el punto P_2, a una distancia $2r$ del punto P_1 por el que entraron en el campo magnético.

La velocidad v puede eliminarse entre las ecuaciones 28.6 y 28.11 para determinar m/q en función de las magnitudes conocidas ΔV, B y r. En primer lugar se despeja v de la ecuación 28.6 y se elevan al cuadrado los dos miembros:

www.elsolucionario.net

$$v^2 = \frac{r^2q^2B^2}{m^2}$$

Aplicando este valor de v^2 en la ecuación 28.11 se obtiene

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r^2q^2B^2}{m^2}\right) = q\,\Delta V$$

Simplificando esta ecuación y despejando m/q resulta

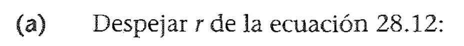
$$\frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2\,\Delta V} \tag{28.12}$$

En el espectrómetro de masas original de Aston, las diferencias de masas podían medirse con una precisión de 1 parte en 10000. La precisión se ha mejorado con la introducción de un selector de velocidades entre la fuente de iones y el imán, lo que incrementa la exactitud con la que pueden determinarse las velocidades de los iones incidentes.

OPCIONAL



EJEMPLO 28.6



Un ion de ^{58}Ni de carga $+e$ y masa $9{,}62 \times 10^{-26}$ kg se acelera a través de una diferencia de potencial de 3 kV y se desvía en un campo magnético de 0,12 T. (a) Determinar el radio de curvatura de la órbita del ion. (b) Determinar la diferencia que existe entre los radios de curvatura de los iones ^{58}Ni y ^{60}Ni. (Suponer que la relación de masas es 58/60.)

Esquema del problema El radio de curvatura r puede determinarse utilizando la ecuación 28.12. Teniendo en cuenta la dependencia de r con la masa, podemos determinar el radio de los iones ^{60}Ni a partir del radio de los iones ^{58}Ni y después hallar la diferencia.

(a) Despejar r de la ecuación 28.12:

$$r = \sqrt{\frac{2m\,\Delta V}{qB^2}} = \left[\frac{2(9{,}62\times10^{-26}\text{ kg})(3000\text{ V})}{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(0{,}12\text{ T})^2}\right]^{1/2} = 0{,}501\text{ m}$$

(b) 1. Sean r_1 y r_2 los radios de la órbita del ion ^{58}Ni y del ion ^{60}Ni, respectivamente. Utilizar el resultado de (a) para calcular la relación de r_2 a r_1:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1{,}017$$

2. Utilizar el resultado de la etapa anterior para calcular el radio r_2 del ion ^{60}Ni:

$$r_2 = 1{,}017r_1 = (1{,}017)(0{,}501\text{ m}) = 0{,}510\text{ m}$$

3. La diferencia de los radios orbitales $r_2 - r_1$ es:

$$r_2 - r_1 = 0{,}510\text{ m} - 0{,}501\text{ m} = 0{,}009\text{ m} = 9\text{ mm}$$

El ciclotrón

El ciclotrón fue inventado por E. O. Lawrence y M.S. Livingston en 1934 para acelerar partículas tales como protones o deuterones hasta conseguir una energía cinética elevada.[1] Para bombardear núcleos atómicos se utilizan partículas de alta energía; así se producen reacciones nucleares que se estudian con objeto de obtener información acerca del núcleo. Se utilizan también protones o deuterones de alta energía para producir materiales radiactivos y con fines médicos.

[1] El deuterón es el núcleo de hidrógeno pesado, ^{2}H, formado por un protón y un neutrón fuertemente ligados entre sí.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

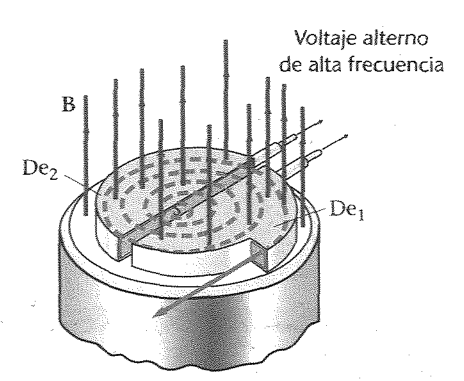


Figura 28.20 Dibujo esquemático de un ciclotrón. Se ha omitido la cara del polo superior del imán. Las partículas cargadas, tales como protones, procedentes de una fuente S situada en el centro, son aceleradas por la diferencia de potencial establecida a través del hueco entre las *des* del ciclotrón. Cuando las partículas llegan al hueco de nuevo, la diferencia de potencial ha cambiado de signo y vuelven a acelerarse describiendo un círculo mayor. Esta diferencia de potencial alterna su signo con el período del ciclotrón de la partícula, el cual es independiente del radio de la circunferencia descrita.

La figura 28.20 es un dibujo esquemático de un ciclotrón. Las partículas se mueven en el interior de dos recipientes metálicos semicirculares denominados *des* (debido a su forma). Los recipientes están contenidos en una cámara de vacío en el interior de un campo magnético proporcionado por un electroimán. En la región en la cual se mueven las partículas debe haberse realizado el vacío para que las partículas no pierdan energía y no sean dispersadas en choques con las moléculas del aire. Las *des* se mantienen a una diferencia de potencial ΔV que se alterna en el tiempo con período T, escogido de modo que sea igual al período del ciclotrón, $T = 2\pi m/qB$ (ecuación 28.7). Esta diferencia de potencial crea un campo eléctrico a través del espacio hueco comprendido entre las *des*. Al mismo tiempo no existe campo eléctrico dentro de las *des* debido al blindaje metálico.

Las partículas cargadas positivamente se inyectan inicialmente en la de_1 con una velocidad pequeña procedentes de una fuente de iones S próxima al centro de las *des*. Se mueven en una semicircunferencia en de_1 y llegan al hueco que hay entre de_1 y de_2 al cabo de un tiempo $\frac{1}{2}T$. El potencial se ajusta de modo que la de_1 está a mayor potencial que la de_2 cuando las partículas llegan al espacio hueco entre ambas. Cada partícula se acelera, por tanto, a través de este hueco a causa del campo eléctrico y gana una energía cinética igual a $q\,\Delta V$.

Al poseer más energía cinética, la partícula se mueve en un semicírculo de mayor radio en la de_2 y de nuevo llega al hueco después de un tiempo $\frac{1}{2}T$, porque el período es independiente de la velocidad de la partícula. En este tiempo el potencial entre las *des* se ha invertido de modo que la de_2 está ahora a mayor potencial. De nuevo la partícula se acelera a través del hueco y gana energía cinética adicional igual a $q\,\Delta V$. Cada vez que la partícula llega al hueco, es acelerada y gana energía cinética igual a $q\,\Delta V$. De este modo se mueve en órbitas semicirculares cada vez mayores hasta que eventualmente abandona el campo magnético. En un ciclotrón típico, cada partícula realiza de 50 a 100 revoluciones y emerge con energías de hasta varios centenares de megaelectrón-voltios (MeV).

Esta energía cinética de una partícula que emerge de un ciclotrón puede calcularse mediante la ecuación 28.6 sustituyendo r por el valor máximo del radio de las *des* y despejando el valor de v:

$$r = \frac{mv}{qB}, \qquad v = \frac{qBr}{m}$$

Por tanto,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{m}\right)r^2 \qquad \textbf{(28.13)}$$

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 28.7 **Un ciclotrón que acelera protones posee un campo magnético de 1,5 T y un radio máximo de 0,5 m. (a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón? (b) Determinar la energía cinética con que emergen los protones.**

(a) La frecuencia del ciclotrón viene dada por la ecuación 28.8:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(1{,}5\text{ T})}{2\pi(1{,}67\times10^{-27}\text{ kg})} = 2{,}29\times10^{7}\text{ Hz}$$
$$= 22{,}9\text{ MHz}$$

(b) 1. La energía cinética de los protones emergentes viene dada por la ecuación 28.13:

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\frac{(1{,}6\times10^{-19}\text{ C})(1{,}5\text{ T})^2}{1{,}67\times10^{-27}\text{ kg}}\right](0{,}5\text{ m})^2 = 4{,}31\times10^{-12}\text{ J}$$

2. Las energías de los protones y otras partículas elementales se expresan usualmente en electrón-voltios. Utilizar $1\text{ eV} = 1{,}6\times10^{-19}$ J para convertir los julios en eV:

$$E_c = 4{,}31\times10^{-12}\text{ J}\times\frac{1\text{ eV}}{1{,}6\times10^{-19}\text{ J}} = 26{,}9\text{ MeV}$$

Pares de fuerzas sobre espiras de corriente e imanes ■ 28.3

Una espira portadora de corriente no experimenta ninguna fuerza neta situada en un campo magnético uniforme, pero sobre ella se ejerce un par que tiende a girarla. La orientación de la espira puede describirse convenientemente mediante un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ que es perpendicular al plano de la espira, como se indica en la figura 28.21.

La figura 28.22 muestra las fuerzas ejercidas por un campo magnético uniforme sobre una espira rectangular cuyo vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ forma un ángulo θ con el campo magnético **B**. La fuerza neta sobre la espira es cero. Las fuerzas F_1 y F_2 tienen la magnitud

$$F_1 = F_2 = IaB$$

Estas fuerzas forman un par de modo que el momento es el mismo respecto a cualquier punto. El punto P de la figura 28.22 es un punto conveniente respecto al cual calcular el momento del par. La magnitud del momento es

$$\tau = F_2 b \text{ sen } \theta = IaBb \text{ sen } \theta = IAB \text{ sen } \theta$$

en donde $A = ab$ es el área de la espira. Si esta posee N vueltas, el momento del par tiene la magnitud

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

Este momento tiende a girar la espira de modo que su plano sea perpendicular a **B** (es decir, de modo que $\hat{\mathbf{n}}$ tenga la misma dirección que **B**).

El momento puede escribirse convenientemente en función del **momento dipolar magnético** μ (o simplemente **momento magnético**) de la espira de corriente, definido por

$$\boldsymbol{\mu} = NIA\hat{\mathbf{n}} \qquad \textbf{(28.14)}$$

Momento dipolar magnético de una espira de corriente

La unidad SI del momento magnético es el amperio-metro^2 ($A \cdot m^2$). En función del momento dipolar magnético, el momento sobre la espira de corriente viene dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(28.15)}$$

Momento sobre una espira de corriente

La ecuación 28.15, deducida para una espira rectangular, es válida en general para una espira plana de cualquier forma. El momento sobre cualquier espira es igual al producto vectorial del momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de la espira y el campo magnético **B**, en donde el momento magnético se define como un vector perpendicular al área de la espira (figura 28.23), de magnitud igual a NIA. Comparando la ecuación 28.15 con la ecuación 22.11 correspondiente al momento sobre un dipolo eléctrico, resulta que una espira de corriente en un campo magnético actúa del mismo modo que un dipolo eléctrico dentro de un campo eléctrico.

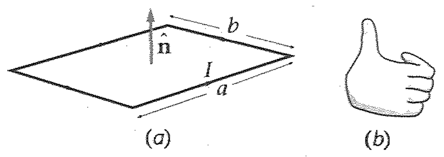


Figura 28.21 (*a*) La orientación de una espira de corriente viene descrita por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, perpendicular al plano de la espira. (*b*) Regla de la mano derecha para determinar el sentido de $\hat{\mathbf{n}}$. Cuando los dedos de la mano derecha se incurvan alrededor de la espira, con los dedos apuntando en la dirección de la corriente, el dedo pulgar señala la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$.

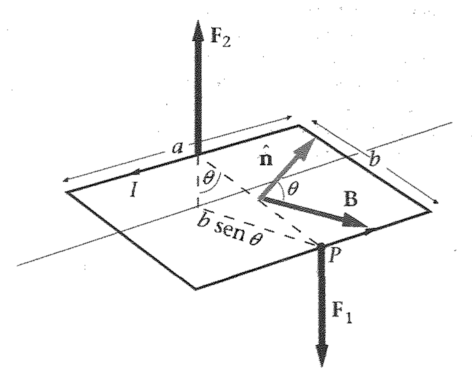


Figura 28.22 Espira de corriente rectangular cuyo vector unitario normal $\hat{\mathbf{n}}$ forma un ángulo θ con el campo magnético uniforme **B**. El momento del par sobre la espira tiene la magnitud IAB sen θ y su sentido es tal que $\hat{\mathbf{n}}$ tiende a girar hacia **B**.

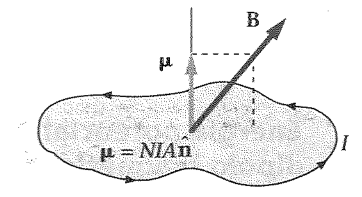


Figura 28.23 Una espira de corriente de forma arbitraria se describe por su momento magnético $\boldsymbol{\mu} = NIA\hat{\mathbf{n}}$. En un campo magnético **B** experimenta un momento $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$.

EJEMPLO 28.8 ■

Una espira circular de radio 2 cm posee 10 vueltas de alambre y transporta una corriente de 3A. El eje de la espira forma un ángulo de 30° con un campo magnético de 8000 G. Determinar el momento que actúa sobre la espira

1. La magnitud del momento del par viene dada por la ecuación 28.15: $\tau = |\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}| = \mu B \text{ sen } \theta = \mu B \text{ sen } 30°$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

2. Calcular la magnitud del momento magnético de la espira: $\mu = NIA = (10)(3\ \text{A})\pi(0{,}02\ \text{m})^2 = 3{,}77 \times 10^{-2}\ \text{A} \cdot \text{m}^2$

3. Sustituir este valor de μ y el valor dado de B para calcular τ: $\tau = \mu B \text{ sen } \theta = (3{,}77 \times 10^{-2}\ \text{A} \cdot \text{m}^2)(0{,}8\ \text{T})(\text{sen } 30°)$
$= 1{,}51 \times 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}$

■ EJEMPLO 28.9
¡Inténtelo!

Una espira de alambre circular de radio R y masa m por la que circula una corriente I (figura 28.24) yace sobre una superficie rugosa. Existe un campo magnético horizontal B. ¿Qué valor mínimo debe tener la corriente I para que un borde de la espira se levante de la superficie?

Esquema del problema La espira comenzará a levantarse cuando el momento magnético sea igual al momento gravitatorio (figura 28.25)

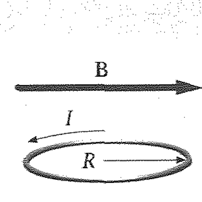


Figura 28.24

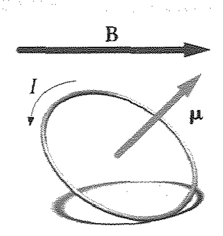


Figura 28.25

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Determinar el momento magnético que actúa sobre la espira.	$\tau_m = \mu B = I\pi R^2 B$
2. Determinar el momento gravitatorio ejercido sobre la espira	$\tau_g = mgR$
3. Igualar ambos momentos y despejar I.	$I = \dfrac{mg}{\pi RB}$

■ Energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético

Cuando un momento actúa a través de un ángulo, se realiza un trabajo. Cuando un dipolo gira a través de un ángulo $d\theta$ el trabajo realizado es

$$dW = -\tau\, d\theta = -\mu B \text{ sen } \theta\, d\theta$$

El signo menos aparece porque el momento tiende a disminuir θ. Haciendo este trabajo igual a la disminución de energía potencial, tenemos

$$dU = -dW = +\mu B \text{ sen } \theta\, d\theta$$

Integrando, resulta

$$U = -\mu B \cos \theta + U_0$$

Si elegimos la energía potencial de modo que sea cero cuando $\theta = 90°$, resulta $U_0 = 0$ y la energía potencial del dipolo es

$$U = -\mu B \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \qquad \textbf{(28.16)}$$

La ecuación 28.16 expresa la energía potencial de un dipolo magnético que forma un ángulo θ con un campo magnético.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 28.10

Una bobina rectangular cuadrada de 12 vueltas, con lados de 40 cm de longitud, transporta una corriente de 3A. Está situada en el plano *xy* como indica la figura 28.26 en un campo magnético uniforme B = 0,3 Ti + 0,4 Tk. Determinar (a) el momento magnético de la bobina y (b) el momento del par ejercido sobre la bobina. (c) Calcular la energía potencial de la bobina.

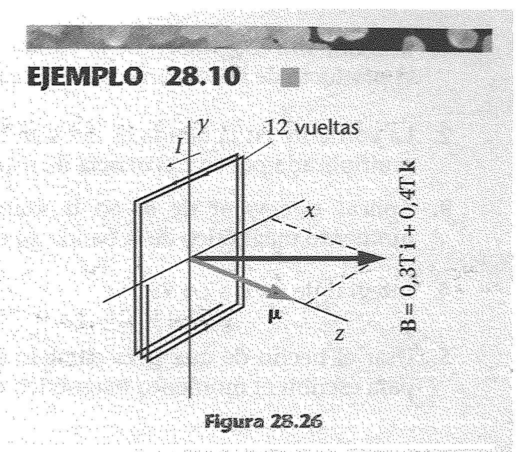


Figura 28.26

Esquema del problema En la figura 28.26 vemos que el momento magnético de la bobina se encuentra en la dirección *z* positiva.

(a) Calcular el momento magnético de la bobina:

$$\boldsymbol{\mu} = NIA\mathbf{k} = (12)(3\ \text{A})(0{,}40\ \text{m})^2\mathbf{k} = 5{,}76\ \text{A}\cdot\text{m}^2\mathbf{k}$$

(b) El momento del par sobre la bobina de corriente viene dado por la ecuación 28.15:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} = (5{,}76\ \text{A}\cdot\text{m}^2\mathbf{k})\times(0{,}3\ \text{T}\ \mathbf{i}+0{,}4\ \text{T}\ \mathbf{k}) = 1{,}73\ \text{N}\cdot\text{m}\ \mathbf{j}$$

(b) La energía potencial es el producto escalar de $\boldsymbol{\mu}$ y B con signo negativo

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -(5{,}76\ \text{A}\cdot\text{m}^2\mathbf{k})\cdot(0{,}3\ \text{T}\ \mathbf{i}+0{,}4\ \text{T}\ \mathbf{k}) = -2{,}30\ \text{J}$$

Observaciones Se ha tenido en cuenta que $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$ y $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$; $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$ y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$. El momento tiene la dirección positiva del eje *y*.

Ejercicio Calcular *U* para el caso en que la bobina gira de tal modo que $\boldsymbol{\mu}$ se alinea con B. (*Respuesta*: $U = -\mu B = -(5{,}76\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(0{,}5\ \text{T}) = -2{,}88$ J. Obsérvese que está energía potencial es menor que la deducida en el ejemplo. El momento tiende a girar la bobina hacia una posición de menor energía potencial.)

Cuando un pequeño imán permanente, tal como la aguja de una brújula, se sitúa en un campo magnético B, el campo ejerce un momento sobre el imán que tiende a girarle de modo que éste se alinea con el campo. Este efecto ocurre también con limaduras de hierro no imanadas, las cuales en presencia de un campo B se imanan. El imán en forma de barra se caracteriza por un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ que apunta desde el polo sur al polo norte. Un pequeño imán en forma de barra se comporta, por tanto, como una espira de corriente. Esto no es una coincidencia casual. El origen del momento magnético de una barra imanada reside en las corrientes circulares que resultan del movimiento de los electrones en los átomos del imán.

EJEMPLO 28.11

Un disco conductor de masa *M* y radio *R* posee una densidad superficial de carga σ y gira con velocidad angular ω alrededor de su eje. Determinar el momento magnético del disco en rotación.

Esquema del problema Se determina el momento magnético de un elemento circular de radio *r* y anchura *dr* y luego se integra (figura 28.27). La carga sobre el elemento es $dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi r\, dr$. Si la carga es positiva, el momento magnético tiene la misma dirección y sentido que $\boldsymbol{\omega}$, y en este caso sólo necesitamos calcular la magnitud.

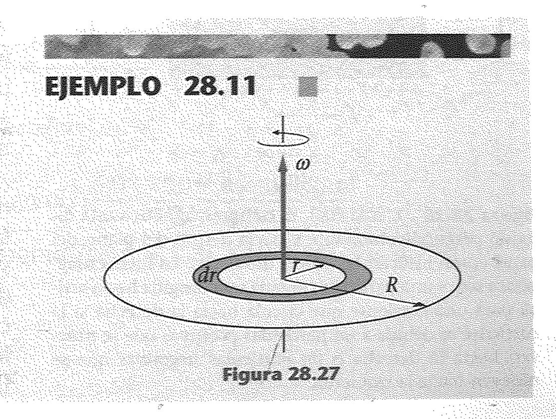


Figura 28.27

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

1. El momento magnético de la banda circular indicada es el producto de la corriente por el área de la espira: $d\mu = (dI)A = (dI)\,\pi r^2$

2. La corriente en la banda es la carga total sobre la banda multiplicada por su frecuencia de rotación: $dI = (dq)f = (\sigma\, dA)\dfrac{\omega}{2\pi} = (\sigma\, 2\pi r\, dr)\dfrac{\omega}{2\pi} = \sigma\omega r\, dr$

3. Aplicar este valor de dI en la etapa 1 para hallar el momento magnético de la banda $d\mu$ en función de r y dr: $d\mu = (dI)\,\pi r^2 = (\sigma\omega r\, dr)\,\pi r^2 = \pi\sigma\omega r^3\, dr$

4. Integrar de $r = 0$ a $r = R$: $\mu = \int d\mu = \int_0^R \pi\sigma\omega r^3\, dr = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$

5. Usar el hecho de que $\boldsymbol{\mu}$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ si σ es positivo para escribir el momento magnético como un vector: $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{4}\pi\sigma R^4\boldsymbol{\omega}$

Observaciones En función de la carga total $Q = \sigma\pi R^2$, el momento magnético es $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{4}QR^2\boldsymbol{\omega}$. El momento angular del disco es $\mathbf{L} = (\frac{1}{2}mR^2)\boldsymbol{\omega}$; por tanto, el momento magnético puede expresarse en la forma $\boldsymbol{\mu} = (Q/2M)\mathbf{L}$ que es un resultado general (véase problema 53.)

28.4 Efecto Hall

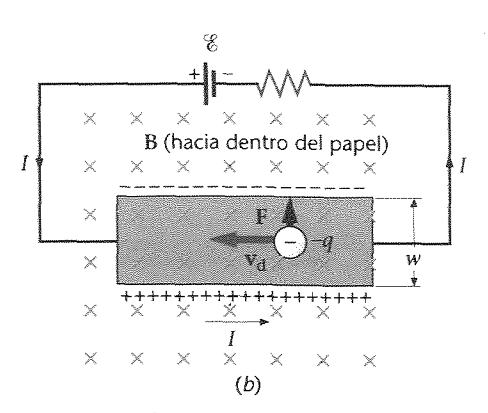


Figura 28.28 Efecto Hall. El campo magnético está dirigido perpendicularmente y hacia dentro del plano del papel como indican las cruces dibujadas. La fuerza magnética sobre una partícula cargada está dirigida hacia arriba para una corriente que circula hacia la derecha si la corriente es debida a (*a*) partículas positivas que se mueven hacia la derecha o (*b*) partículas negativas que se mueven hacia la izquierda.

Como hemos visto, cuando las cargas se mueven en un campo magnético experimentan una fuerza perpendicular a su movimiento. Por tanto, si estas cargas se desplazan en un alambre conductor, serán impulsadas hacia un lado del alambre. Debido a esto se produce una separación de carga en el alambre denominada **efecto Hall**. Este fenómeno nos permite determinar el signo de la carga en un portador y el número de portadores n por unidad de volumen del conductor.

La figura 28.28 muestra dos cintas conductoras cada una de las cuales transporta una corriente I hacia la derecha, pues sus extremos izquierdos están conectados al terminal positivo de una batería y sus extremos derechos al terminal negativo. Las cintas se encuentran en un campo magnético dirigido perpendicularmente hacia el papel. Supongamos de momento que la corriente está formada por partículas positivamente cargadas que se mueven hacia la derecha como indica la figura 28.28*a*. La fuerza magnética sobre estas partículas es $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ (en donde $\mathbf{v}_d$ es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga). Esta fuerza está dirigida hacia arriba. Las partículas positivas, por tanto, se mueven hacia la parte alta de la cinta, dejando el fondo de la misma con un exceso de carga negativa. Esta separación de carga produce un campo electrostático en la cinta que se opone a la fuerza magnética sobre los portadores de carga. Cuando las fuerzas electrostática y magnética se equilibran, los portadores de carga no se moverán ya más hacia arriba. En esta situación de equilibrio, la parte superior de la cinta está positivamente cargada, de modo que está a mayor potencial de la parte inferior negativamente cargada. Si la corriente consta de partículas negativamente cargadas, como indica la figura 28.28*b*, los portadores de carga se moverán hacia la izquierda (puesto que la corriente se mueve hacia la derecha). La fuerza magnética $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ se dirige de nuevo hacia arriba, pues los signos de ambos, q y $\mathbf{v}_d$, se han cambiado. De nuevo los portadores son forzados a la parte superior de la cinta, pero como éstos son negativos, la carga negativa se acumula en la parte superior de la cinta y la carga positiva en la parte inferior.

Una medida del signo de la diferencia de potencial entre la parte superior e inferior de la cinta nos dirá el signo de los portadores de carga. En los semiconductores, los portadores de carga pueden ser electrones negativos o huecos positivos. Una medida del signo de la diferencia de potencial nos dice cuáles son los dominantes en un semiconductor particular. Para un conductor metálico normal resulta que la parte superior de la cinta en la figura 28.28 está a menor potencial que la parte inferior, lo cual significa que la parte superior es portadora de una carga negativa. Por tanto, la figura 28.28*b* es la ilustración correcta de la corriente en un conductor normal. Este fue el tipo de experimento

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

que condujo al descubrimiento de que los portadores de carga en los conductores metálicos son negativos.

La diferencia de potencial entre la parte superior e inferior de la cinta se llama **voltaje Hall** y puede calcularse en función de la velocidad de desplazamiento. La magnitud de la fuerza magnética sobre los portadores de carga en la cinta es qv_dB. Esta fuerza magnética es equilibrada por la fuerza electrostática de magnitud qE, en donde E es el campo eléctrico debido a la separación de cargas. Así resulta $E = v_dB$. Si la anchura de la cinta es w, la diferencia de potencial es Ew. El voltaje Hall es por tanto,

$$V_H = Ew = v_dBw \tag{28.17}$$

Ejercicio Una cinta conductora de anchura $w = 2{,}0$ está situada en un campo magnético de 8000 G. El voltaje Hall medido resulta ser 0,64 μV. Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones. (*Respuesta*: $4{,}0 \times 10^{-5}$ m/s.)

Como la velocidad de desplazamiento en las corrientes ordinarias es muy pequeña, la ecuación 28.17 expresa que el voltaje Hall es también muy pequeño para cintas y campos magnéticos de dimensiones ordinarias. A partir de medidas del valor del voltaje Hall para una cinta de un tamaño determinado por la que circula una corriente conocida en el interior de un campo magnético de valor dado, podemos determinar el número de portadores de carga por unidad de volumen de la cinta. Según la ecuación 28.17, la intensidad de corriente es

$$I = nqv_dA$$

en donde A es la sección transversal de la cinta. Para una cinta de anchura w y espesor t, el área transversal es $A = wt$. Como los portadores de carga son electrones, la magnitud q es la carga de un electrón, e. La densidad numérica de los portadores de carga n viene así dada por

$$n = \frac{I}{Aqv_d} = \frac{I}{wtev_d} \tag{28.18}$$

Sustituyendo $v_dw = V_H/B$ en la ecuación 24.18, resulta

$$n = \frac{IB}{etV_H} \tag{28.19}$$

EJEMPLO 28.12

Un segmento conductor de plata de espesor 1 mm y anchura 1,5 cm transporta una corriente de 2,5 A en una región donde existe un campo magnético de magnitud 1,25 T perpendicular al segmento. En consecuencia se produce un voltaje Hall de 0,334 μV. (a) Calcular la densidad numérica de los portadores de carga. (b) Comparar la respuesta de (a) con la densidad numérica de átomos en la plata, de densidad $\rho = 10{,}5$ g/cm^3 y masa molecular $M = 107{,}9$ g/mol.

(a) Reemplazar por valores numéricos en la ecuación 28.19 para determinar n:

$$n = \frac{IB}{teV_H} = \frac{(2{,}5\ \text{A})(1{,}25\ \text{T})}{(0{,}001\ \text{m})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(3{,}34 \times 10^{-7}\ \text{V})}$$
$$= 5{,}85 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3$$

6. El número de átomos por unidad de volumen es $\rho N_A/M$:

$$n_a = \rho\frac{N_A}{M} = (10{,}5\ \text{g/cm}^3)\frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{107{,}9\ \text{g/mol}}$$
$$= 5{,}86 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3 = 5{,}86 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3$$

Observación Estos resultados indican que el número de portadores de carga en la plata es aproximadamente uno por átomo.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Aunque el voltaje Hall es ordinariamente muy pequeño, proporciona un método conveniente para medir campos magnéticos. Reajustando la ecuación 28.19 podemos escribir para el voltaje Hall

$$V_H = \frac{I}{nte}B \tag{28.20}$$

Una cinta puede calibrarse midiendo el voltaje para una determinada intensidad de corriente en un campo magnético conocido. La intensidad de un campo magnético B desconocido puede entonces medirse situando la cinta en este campo, haciendo circular una corriente por la cinta y midiendo V_H.

OPCIONAL

Efecto Hall cuántico

Según la ecuación 28.20, el voltaje Hall debe incrementarse linealmente con el campo magnético B para una determinada corriente en un segmento dado de conductor. En 1980, mientras estudiaba el efecto Hall en semiconductores a muy bajas temperaturas y campos magnéticos muy intensos, el físico alemán Klaus von Klitzing descubrió un gráfico escalonado de V_H en función de B, como indica la figura 28.29 en lugar de una línea recta. Es decir, el voltaje Hall está cuantizado. Por este descubrimiento del efecto Hall cuántico, von Klitzing recibió el Premio Nobel de Física de 1985.

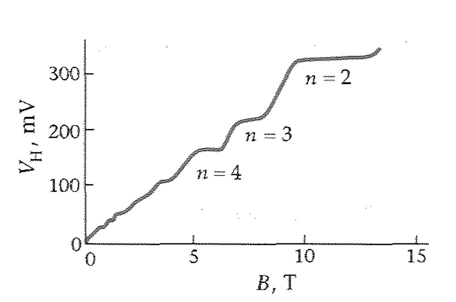


Figura 28.29 Un gráfico del voltaje Hall en función del campo magnético aplicado muestra tramos horizontales indicando que el voltaje Hall está cuantizado. Estos datos se tomaron a una temperatura de 1,39 K con una intensidad de corriente I fija de 25,52 μA.

Según la teoría del efecto Hall cuantizado, la resistencia Hall, definida por $R_H = V_H/I$, sólo puede tomar los valores

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{R_K}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28.21}$$

en donde n es un número entero y R_K la llamada **constante de von Klitzing**, relacionada por la carga electrónica fundamental e y la constante de Planck h por la expresión

$$R_K = \frac{h}{e^2} \tag{28.22}$$

Como la constante de von Klitzing puede medirse con una exactitud de una pocas partes en 10^9, el efecto Hall cuántico se utiliza actualmente para definir el patrón de resistencia. Desde enero de 1990, el ohmio se define de modo que R_K tiene exactamente el valor de 25 812,807 Ω.

Experimentos recientes han demostrado que en ciertas condiciones especiales la resistencia Hall viene dada por la ecuación 28.22 con el número entero n reemplazado por una serie de fracciones racionales. Actualmente, la teoría de este efecto Hall cuántico fraccional está incompleta.

www.elsolucionario.net

Resumen

1. El campo magnético describe una condición en el espacio, tal que las cargas móviles experimentan una fuerza perpendicular a su velocidad.
2. La fuerza magnética forma parte de la fuerza electromagnética, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza.
3. La magnitud y dirección de un campo magnético **B** vienen definidas por la fuerza **F** = q**v** × **B** ejercida sobre las cargas móviles.

www.elsolucionario.net

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
		1. Fuerza magnética
$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$	28.1	Sobre una carga móvil
$d\mathbf{F} = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$	28.5	Sobre un elemento de corriente
La unidad SI de campo magnético es el tesla (T). Una unidad comúnmente utilizada es el gauss (G), relacionada con el tesla por		Unidad de campo magnético
$1\text{ T} = 10^4\text{ G}$	28.3	
Una partícula de masa m y carga q que se mueve con velocidad v en un plano perpendicular a un campo magnético describe una órbita circular. El período y frecuencia de este movimiento circular son independientes del radio de la órbita o de la velocidad de la partícula.		**2. Movimiento de cargas puntuales**
$r = \dfrac{mv}{qB}$	28.6	Radio de la órbita circular
$T = \dfrac{2\pi m}{qB}$	28.7	Periodo del ciclotrón
$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{qB}{2\pi m}$	28.8	Frecuencia del ciclotrón
Un selector de velocidades está formado por campos eléctricos y magnéticos cruzados, de tal manera que las fuerzas eléctrica y magnética se equilibran para una partícula cuya velocidad viene dada por		Selector de velocidades (opcional)
$v = \dfrac{E}{B}$	28.9	
La desviación de una partícula cargada en un campo eléctrico depende de la velocidad de las partículas y es proporcional a la relación q/m de la misma. J.J. Thomson utilizó campos eléctricos y magnéticos cruzados para medir la velocidad de los rayos catódicos y después midió la relación q/m para estas partículas desviándolas en un campo eléctrico. Así demostró que todos los rayos catódicos estaban formados por partículas con la misma relación carga/masa. Estas partículas se llaman ahora electrones.		Medida de q/m (opcional)
La relación masa-carga de un ion de velocidad conocida puede determinarse midiendo el radio de la trayectoria circular descrita por el ion en un campo magnético conocido.		Espectrometría de masa (opcional)
		3. Espiras de corriente
$\boldsymbol{\mu} = NIA\hat{\mathbf{n}}$	28.14	Momento magnético
$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$	28.15	Momento del par
$U = -\mu B\cos\theta = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$	28.16	Energía potencial
La fuerza resultante que actúa sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es nula.		Fuerza resultante
Cuando una cinta conductora que transporta una corriente se sitúa dentro de un campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre los portadores de carga origina una separación de cargas que se denomina efecto Hall. Este fenómeno da lugar a un voltaje V_H, llamado voltaje Hall. El signo de los portadores de carga puede determinarse midiendo el signo del voltaje Hall y su número por unidad de volumen a partir de la magnitud de V_H.		**4. Efecto Hall**
$V_H = v_d B w = \dfrac{I}{nte}B$	28.17, 28.20	Voltaje Hall
Las medidas a temperaturas muy bajas en campos magnéticos muy grandes indican que la resistencia Hall $R_H = V_H/I$ está cuantizada y puede tomar valores dados por		Efecto Hall cuántico (opcional)
$R_H = \dfrac{V_H}{I} = \dfrac{R_K}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	28.21	
$R_K = \dfrac{h}{e^2} \approx 25\,813\ \Omega$	28.22	Constante de von Klitzing (opcional)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Guía de resolución de problemas

1. Dibujar un diagrama claro que incluya las características importantes del problema.
2. La naturaleza vectorial de la fuerza magnética se clarifica con un esquema que muestre **v** y **B**, a fin de aplicar con facilidad la regla de la mano derecha.
3. Para problemas con cables portadores de corriente, especificar el sentido de I y de nuevo aplicar la regla de la mano derecha.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES		
1. Fuerza magnética			
Determinar la fuerza magnética sobre una partícula cargada	Utilizar	$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$	**Ejemplo 28.1**
Determinar la fuerza magnética sobre un alambre portador de corriente	Utilizar	$\mathbf{F} = q\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$	**Ejemplo 28.2**
2. Movimiento de partículas			
Determinar el radio y la frecuencia del movimiento de una partícula cargada en un campo magnético	Aplicando la segunda ley de Newton —igualando la fuerza magnética y la fuerza centrípeta —resultan las relaciones $r = mv/qB$ y $f = 1/T = qB/2\pi m$.		**Ejemplos 28.3, 28.5, 28.6**
3. Momentos magnéticos			
Determinar el momento magnético de una espira	La magnitud del momento magnético es $\mu = NIA$, la dirección se determina mediante la regla de la mano derecha.		**Ejemplos 28.8, 28.9, 28.10**
Determinar el momento del par que actúa sobre una espira de corriente	Utilizar	$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$	**Ejemplos 28.8, 28.9, 28.10**
4. Efecto Hall			
Calcular la densidad de los portadores de carga en un conductor	Utilizar	$n = \dfrac{IB}{teV_{\mathrm{H}}}$	**Ejemplo 28.12**

www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

- Problemas conceptuales
- Problemas de secciones opcionales o exploratorios
- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Fuerza ejercida por un campo magnético

• **1** Cuando un tubo de rayos catódicos se sitúa horizontalmente en un campo magnético dirigido verticalmente hacia arriba, los electrones emitidos desde el cátodo siguen una de las líneas punteadas de la figura 28.30 hasta incidir en la pantalla del tubo. La trayectoria correcta es

(a) 1 (b) 2 (c) 3
(d) 4 (e) 5

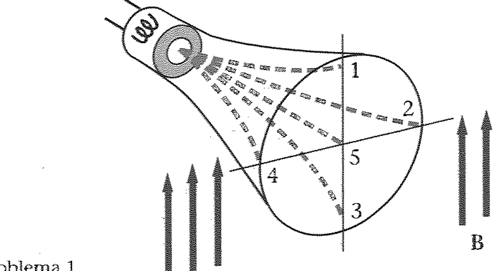


Figura 28.30 Problema 1.

• 2 ¿Por qué no se define B en la dirección de F, como se hace en el caso de E?

• 3 Hallar la fuerza magnética que actúa sobre un protón que se mueve con velocidad 4,46 Mn/s en el sentido positivo de las x en el interior de un campo magnético de 1,75 T dirigido en el sentido positivo de las z.

• 4 Una carga $q = -3{,}64$ nC se mueve con velocidad de $2{,}75 \times 10^6$ m/s **i**. Hallar la fuerza que actúa sobre la carga si el campo magnético es

(a) B = 0,38 T **j**, (b) B = 0,75 T **i** + 0,75 T **j**,
(c) B = 0,65 T **i**, (d) B = 0,75 T **i** + 0,75 T **k**.

• 5 Un campo magnético uniforme de valor 1,48 T está en la dirección y sentido positivo del eje de las z. Hallar la fuerza que actúa sobre un protón si su velocidad es

(a) **v** = 2,7 Mn/s **i**, (b) **v** = 3,7 Mn/s **j**,
(c) **v** = 6,8 Mm/s **k** y (d) **v** = 4,0 Mn/s **i** + 3,0 Mm/s **j**.

• 6 Un electrón se mueve con velocidad 2,75 Mm/s en el plano xy formando un ángulo de 60° con el eje x y un ángulo de 30° con el eje y. Un campo magnético de 0,85 T está dirigido en el sentido positivo del eje de las y. Hallar la fuerza que actúa sobre el electrón.

• 7 Un segmento de conductor recto de 2 m de largo forma un ángulo de 30° con un campo magnético uniforme de 0,37 T. Hallar la fuerza que actúa sobre el conductor si por él circula una corriente de 2 A.

• 8 Un segmento de conductor recto $I\ell$ = (2,5 A) (3 cm **i** + 4 cm **j**) se encuentra en un campo magnético uniforme B = 1,5 T **i**. Determinar la fuerza que actúa sobre el conductor.

• 9 ¿Cuál es la fuerza (magnitud, dirección y sentido) de un electrón con velocidad **v** = $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \times 10^6$ m/s en un campo magnético B = (0,8 **i** + 0,6 **j** – 0,4 **k**) T?

•• 10 El segmento conductor de la figura 28.31 transporta una corriente de 1,8 A de a a b y se encuentra en el interior de un campo magnético B = 1,2 T **k**. Determinar la fuerza total que actúa sobre el conductor y demostrar que es la misma que actuaría si se tratara de un segmento recto de a a b.

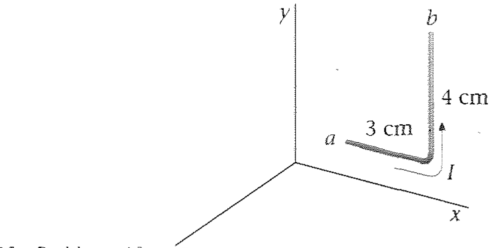


Figura 28.31 Problema 10.

•• 11 Un conductor recto, rígido y horizontal, de longitud 25 cm y masa 50 g está conectado a una fuente de fem por conductores flexibles. Un campo magnético de 1,33 T es horizontal y perpendicular al conductor. Hallar la corriente necesaria para hacer flotar el conductor, es decir, de modo que la fuerza magnética equilibre el peso del alambre.

•• 12 Un simple magnetómetro (*gausmetro*) para la medida de campos magnéticos horizontales consiste en un alambre rígido de 50 cm que cuelga de un pivote conductor de modo que su extremo libre hace contacto con una cubeta de mercurio. El mercurio proporciona un contacto eléctrico sin restringir el movimiento del alambre. El alambre posee una masa de 5 g y conduce una corriente hacia abajo.

(a) ¿Cuál es el desplazamiento angular de equilibrio del alambre de la posición vertical si el campo magnético horizontal es 0,04 T y la corriente 0,20 A?
(b) Si la corriente es 20 A y un desplazamiento de la vertical de 0,5 mm puede detectarse para el extremo libre, ¿cuál es la sensibilidad de medida de campos magnéticos horizontales para este magnetómetro?

•• 13 Un cable conductor por el que circula una corriente I tiene la forma de una espira semicircular de radio R situada sobre el plano xy. Existe un campo magnético uniforme B = B **k** perpendicular al plano de la espira (figura 28.32). Demostrar que la fuerza que actúa sobre la espira es F = $2IRB$ **j**.

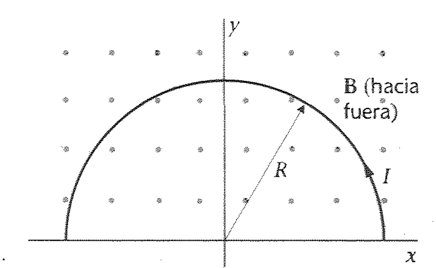


Figura 28.32 Problema 13.

•• 14 Un alambre de 10 cm de longitud transporta una corriente de 4,0 A en la dirección z positiva. La fuerza que actúa sobre este cable por causa de un campo magnético B es F = (–0,2 **i** + 0,2 **j**) N. Si este alambre se gira de tal modo que la corriente fluye en la dirección x positiva, la fuerza sobre el alambre es F = 0,2 **k** N. Determinar el campo magnético B.

•• 15 Un segmento de alambre de 10 cm de longitud transporta una corriente de 2,0 A en la dirección x positiva. La fuerza que actúa sobre este alambre debido a la presencia de un campo magnético B es F = (3,0 **j** + 2,0 **k**) N. Si el alambre se gira, de modo que la corriente fluye ahora en la dirección y positiva, la fuerza sobre el alambre es F = (–3,0 **i** – 2,0 **k**) N. Determinar el campo magnético B.

••• 16 Un alambre cerrado según una forma arbitraria transporta una corriente I dentro de un campo magnético uniforme B. Demostrar explícitamente que la fuerza total que actúa sobre la parte del alambre desde un punto a a otro punto b es F = $I\ell \times$ B, en donde ℓ es el vector de a a b.

Movimiento de una carga puntual en un campo magnético

• 17 Verdadero o falso: La fuerza magnética no acelera a una partícula porque es perpendicular a la velocidad de la partícula.

• 18 Una partícula cargada móvil entra en una región en la que experimenta una desviación súbita perpendicular a su movimiento. ¿Cómo podemos saber si la desviación ha sido motivada por un campo magnético o por un campo eléctrico?

• 19 Un protón se mueve en una órbita circular de radio 65 cm perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 0,75 T.

(c) ¿Cuál es el período correspondiente a este movimiento?
(d) Hallar la velocidad del protón.
(e) Hallar la energía cinética del protón.

• 20 Un electrón de energía cinética 45 keV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético de 0,325 T.

(a) Hallar el radio de la órbita.
(b) Hallar la frecuencia angular y el período del movimiento.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **21** Un electrón procedente del Sol con una velocidad de 1×10^7 m/s entra en el campo magnético terrestre por encima del ecuador en donde el campo magnético es 4×10^{-7} T. El electrón se mueve aproximadamente según una circunferencia, excepto en una pequeña desviación a lo largo de la dirección del campo magnético terrestre hacia el polo norte.

(a) ¿Cuál es el radio del movimiento circular?
(b) ¿Cuál es el radio del movimiento circular cerca del polo norte donde el campo magnético es 2×10^{-5} T?

•• **22** Protones, deuterones (cada uno de carga $+e$) y partículas alfa (de carga $+2e$) de la misma energía cinética entran en un campo magnético uniforme **B** que es perpendicular a sus velocidades. Sean r_p, r_d y r_α los radios de sus órbitas circulares. Hallar los cocientes r_d/r_p y r_α/r_p. Admitir que $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$.

•• **23** Un protón y una partícula alfa se mueven en un campo magnético uniforme en circunferencias de igual radio. Comparar

(a) sus velocidades,
(b) sus energías cinéticas y
(c) sus momentos angulares

(Véase problema 22.)

•• **24** Una partícula de carga q y masa m tiene una cantidad de movimiento $p = mv$ y una energía cinética $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$. Si se mueve en una órbita circular de radio r perpendicular a un campo magnético uniforme B, demostrar que

(a) $p = Bqr$ y **(b)** $E_c = B^2q^2r^2/2m$.

•• **25** Un haz de partículas entra con velocidad **v** en una región de campo magnético uniforme **B** que forma un pequeño ángulo θ con **v**. Demostrar que después de que una partícula se mueve una distancia $2\pi(m/qB)v \cos\theta$ medida a lo largo de la dirección de **B**, la velocidad de la partícula tiene la misma dirección que cuando entra en el campo.

•• **26** Un protón de velocidad 10^7 m/s entra en una región de campo magnético uniforme B = 0,8 T, dirigido hacia dentro de la página como muestra la figura 28.33. El ángulo θ es 60°. Determinar el ángulo ϕ y la distancia d.

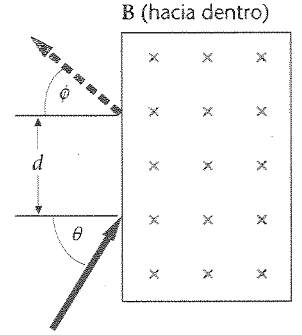


Figura 28.33 Problemas 26 y 27.

•• **27** Supongamos que en la figura 28.33, $B = 0,6$ T, la distancia $d = 0,4$ m y $\theta = 24°$. Determinar la velocidad v y el ángulo ϕ si las partículas son

(a) protones y **(b)** deuterones

Selectores de velocidades (opcional)

• **28** Un haz de partículas cargadas positivamente pasa sin desviarse de izquierda a derecha a través de un selector de velocidades en el cual el campo eléctrico está dirigido hacia arriba. El haz se invierte a continuación de modo que se propaga de derecha a izquierda. ¿Se desviará ahora el haz en el selector de velocidades? Si es así, ¿en qué dirección?

• **29** Un selector de velocidad tiene un campo magnético de valor 0,28 T perpendicular a un campo eléctrico de valor 0,46 MV/m.

(a) ¿Cuál deberá ser la velocidad de una partícula para pasar a través de dicho selector sin ser desviada?

¿Qué energía deberían tener

(b) los protones y
(c) los electrones para pasar a través del mismo sin ser desviados?

• **30** Un haz de protones se mueve a lo largo del eje x en su sentido positivo con una velocidad de 12,4 km/s a través de una región de campos cruzados equilibrados con desviación nula.

(a) Si existe un campo magnético de valor 0,85 T en el sentido positivo de las y, hallar el valor y dirección del campo eléctrico.
(b) ¿Serán desviados los electrones de la misma velocidad por estos campo? Si es así, ¿en qué dirección y sentido?

Medida de q/m (opcional)

•• **31** Las placas de un aparato Thomson q/m son de 6,0 cm de largo y están separadas por 1,2 cm. El extremo de las placas está a 30,0 cm de la pantalla del tubo. La energía cinética de los electrones es de 2,8 keV.

(a) Si se aplica un potencial de 25,0 V a través de las placas de deflexión, ¿en cuánto se desviará el haz?
(b) Hallar el valor de un campo cruzado que permita al haz pasar sin ser desviado.

Espectrómetro de masas (opcional)

•• **32** El cloro tiene dos isótopos estables, ^{35}Cl y ^{37}Cl cuyas abundancias naturales son, respectivamente, 76% y 24% (aproximadamente). El gas cloro ionizado con una sola carga ha de separarse en sus componentes isotópicos mediante un espectrómetro de masas. El campo magnético del espectrómetro es 1,2 T. ¿Cuál es el valor mínimo del potencial a través del cual deben acelerarse estos iones para que la separación entre ellos sea de 1,4 cm?

•• **33** Un ion ^{24}Mg simplemente ionizado (masa $3,983 \times 10^{-26}$ kg) se acelera a través de un potencial de 2,5 kV y se desvía en un campo magnético de 557 G que existe en un espectrómetro de masas.

(a) Hallar el radio de curvatura de la órbita del ion.
(b) ¿Cuál es la diferencia de los radios para los iones ^{26}Mg y ^{24}Mg? (Suponer que su relación de masas es 26/24.)

•• **34** Un haz de iones ^{6}Li y ^{7}Li pasa a través de un selector de velocidades y entra en un espectrómetro magnético. Si el diámetro de la órbita de los iones ^{6}Li es de 15 cm, ¿cuál es el diámetro de la correspondiente a los iones ^{7}Li?

•• **35** En el ejemplo 28.6, determinar el tiempo requerido para que un ion ^{58}Ni y un ion ^{60}Ni completen la trayectoria semicircular.

•• **36** Un espectrómetro de masas se encuentra precedido por un selector de velocidad constituido por placas paralelas separadas entre sí 2,0 mm y entre las que existe una diferencia de potencial de 160 V. El campo magnético entre las placas es de 0,42 T. El campo magnético en el espectrómetro de masas es de 1,2 T. Calcular

(a) la velocidad con la que se introducen los iones en el espectrómetro y
(b) la diferencia en los diámetros de las órbitas del ^{238}U y ^{235}U simplemente ionizados. (La masa de un ion ^{235}U es $3,903 \times 10^{-25}$ kg.)

El ciclotrón (opcional)

•• **37** Un ciclotrón para acelerar protones tiene un campo magnético de 1,4 T y un radio de 0,7 m.

(a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón?

www.elsolucionario.net

(b) Hallar la energía máxima de los protones cuando salen del mismo.
(c) ¿En qué variará la respuesta a este problema si se utilizan deuterones, que tienen la misma carga pero doble masa, en lugar de protones?

•• 38 Un determinado ciclotrón tiene un campo magnético de 1,8 T y está proyectado para acelerar protones hasta 25 MeV
(a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón?
(b) ¿Cuál deberá ser el radio mínimo del imán para obtener una energía de salida de 25 MeV?
(c) Si se aplica un potencial alternativo a las *des* con un valor máximo de 50 kV, ¿cuántas vueltas orbitales deberán realizar los protones antes de emerger con la energía de 25 MeV?

•• 39 Demostrar que la frecuencia del ciclotrón es la misma para deuterones que para partículas alfa y que es la mitad de la correspondiente a un protón en el interior del mismo campo magnético. (Véase problema 22.)

•• 40 Demostrar que el radio de la órbita de una partícula cargada en un ciclotrón es proporcional a la raíz cuadrada del número de órbitas recorridas.

Pares de fuerzas sobre espiras e imanes

• 41 ¿Qué orientación debe tener una espira de corriente para que el momento del par sea máximo?

• 42 Una bobina circular pequeña de 20 vueltas de alambre está en un campo magnético uniforme de 0,5 T de modo que la normal al plano de la bobina forma un ángulo de 60° con la dirección de **B**. El radio de la bobina es 4 cm y por ella circula una corriente de 3 A.
(a) ¿Cuál es el valor del momento magnético de la bobina?
(b) ¿Qué momento o par de fuerzas se ejerce sobre la bobina?

• 43 ¿Cuál es el momento del par máximo que actúa sobre una bobina circular de 400 vueltas de radio 0,75 cm que transporta una corriente de 1,6 mA y está situada en un campo magnético uniforme de 0,25 T?

• 44 Un alambre conductor se dobla en forma de un cuadrado de lado L = 6 cm y se sitúa en el plano xy. Transporta una corriente I = 2,5 A. ¿Cuál es el momento del par que actúa sobre el conductor si existe un campo magnético de 0,3 T
(a) en la dirección z, (b) en la dirección x?

• 45 Repetir el problema 44 para el caso en que el alambre se dobla en forma de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

•• 46 Una espira circular rígida de radio R y masa M transporta una corriente I y yace en el plano xy sobre una mesa plana rugosa. Existe un campo magnético horizontal de magnitud B. ¿Cuál es el valor mínimo de B para que un borde de la espira se levante sobre la mesa?

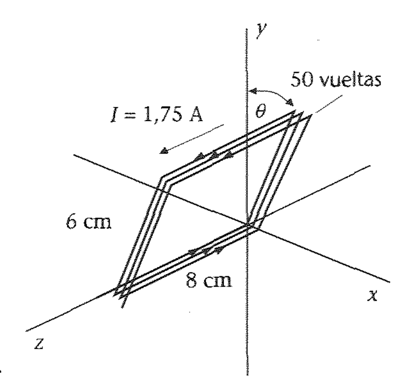


Figura 28.34 Problema 47 y 48.

•• 47 Una bobina rectangular de 50 vueltas tiene lados de 6,0 y 8,0 cm y transporta una corriente de 1,75 A. Está orientada como indica la figura 28.34 y pivota alrededor del eje z.
(a) Si el alambre situado en el plano xy forma un ángulo $\theta = 37°$ con el eje y como se indica, ¿qué ángulo forma el vector unitario normal $\hat{\mathbf{n}}$ con el eje x?
(b) Expresar $\hat{\mathbf{n}}$ en función de los vectores unitarios **i** y **j**.
(c) ¿Cuál es el momento magnético de la bobina?
(d) Determinar el momento del par que actúa sobre la bobina cuando se sitúa en un campo magnético uniforme **B** = 1,5 T **j**.
(e) Determinar la energía potencial de la bobina en este campo.

•• 48 La bobina del problema 47 pivota alrededor del eje z y se mantiene en diversas posiciones en un campo magnético uniforme **B** = 2,0 T **j**. Dibujar la posición de la bobina y determinar el momento del par cuando el vector unitario normal es
(a) $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{i}$, (b) $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{j}$, (c) $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{j}$ y (d) $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$.

Momentos magnéticos

• 49 La unidad SI correspondiente al momento magnético de una espira es A · m^2. Utilizar esta expresión para demostrar que 1 T = 1 N/A · m.

•• 50 Un pequeño imán de longitud 6,8 cm se coloca formando un ángulo de 60° respecto a la dirección de un campo magnético uniforme de valor 0,04 T. El momento del par observado tiene el valor 0,10 N · m. Hallar el momento magnético del imán.

•• 51 Una espira de alambre está formada por dos semicírculos conectados por dos segmentos rectos (figura 28.35). Los radios interior y exterior son 0,3 y 0,5 m, respectivamente. Por el circuito fluye una corriente de 1,5 A, siendo su sentido horario en el semicírculo exterior. ¿Cuál es el momento magnético de esta espira de corriente?

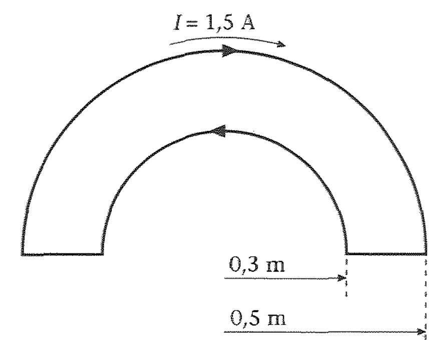


Figura 28.35 Problema 51.

•• 52 Un alambre de longitud L se arrolla en una bobina circular de N espiras. Demostrar que cuando esta bobina transporta una corriente I, su momento magnético tiene la magnitud $IL^2/4\pi N$.

•• 53 Una partícula de carga q y masa m se mueve en una circunferencia de radio r con una velocidad angular ω.
(a) Demostrar que la corriente media es $I = q\omega/2\pi$ y que el momento magnético tiene por valor $\mu = \frac{1}{2}q\omega r^2$.
(b) Demostrar que el movimiento angular de esta partícula tiene el valor $L = mr^2\omega$ y que los vectores de momento magnético y movimiento angular están relacionados por $\boldsymbol{\mu} = (q/2m)\mathbf{L}$.

••• 54 Una espira única de alambre se sitúa en circunferencia alrededor de un cartón de forma rectangular cuya longitud y anchura son 70 y 20 cm, respectivamente. El cartón se dobla entonces a lo largo de la línea perpendicular a su longitud que pasa por el punto medio entre los

www.elsolucionario.net



 www.elsolucionario.net

dos extremos, de tal modo que los dos planos formados por el cartón doblado forman un ángulo de 90°. Si la espira de alambre transporta una corriente de 0,2 A, ¿cuál es la magnitud del momento magnético de este sistema?

••• **55** Repetir el problema 54 para el caso en que la línea de doblez del cartón esté a 40 cm de un extremo.

••• **56** Un cilindro hueco de longitud L posee los radios R_i interior y R_o exterior (figura 28.36). El cilindro tiene una densidad de carga uniforme ρ. Deducir una expresión para el momento magnético en función de la velocidad angular de rotación del cilindro alrededor de su eje.

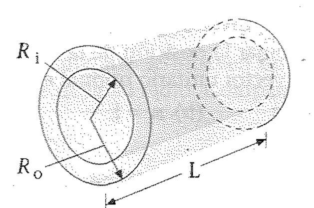


Figura 28.36 Problema 56.

••• **57** Una varilla no conductora de masa M y longitud ℓ tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ y se hace girar con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje que pasa a través de uno de sus extremos y es perpendicular a la varilla.

(a) Considerar un pequeño segmento de longitud dx y carga $dq = \lambda\, dx$ a una distancia x del eje de giro (fig. 28.37). Demostrar que el momento magnético de este segmento es $\frac{1}{2}\lambda\omega x^2\, dx$.

(b) Integrar el resultado para demostrar que el momento magnético total de la varilla es $\mu = \frac{1}{6}\lambda\omega\ell^3$

(c) Demostrar que el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ y el momento angular **L** están relacionados por $\boldsymbol{\mu} = (Q/2M)\, \mathbf{L}$, en donde Q es la carga total sobre la varilla.

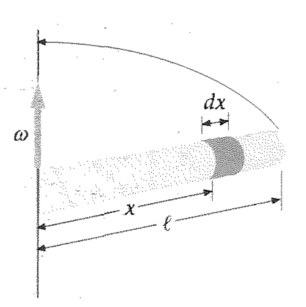


Figura 28.37 Problema 57.

••• **58** Un disco no uniforme, no conductor de masa M, radio R y carga total Q posee una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 r/R$ y una masa por unidad de área $\sigma_m = (M/Q)\sigma$. El disco gira con velocidad angular ω respecto a su eje.

(a) Demostrar que el momento magnético del disco tiene una magnitud $\mu = \frac{1}{5}\pi\omega\sigma_0 R^4 = \frac{3}{10}Q\omega R^2$.

(b) Demostrar que el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ y el momento angular **L** están relacionados por la expresión $\boldsymbol{\mu} = (Q/2M)\, \mathbf{L}$.

••• **59** Una corteza esférica de radio R posee una densidad superficial de carga σ. La esfera gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω. Determinar el momento magnético de esta esfera giratoria.

••• **60** Una esfera sólida de radio R posee una densidad de carga uniforme ρ. La esfera gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω. Determinar el momento magnético de la esfera giratoria.

••• **61** Un cilindro sólido de radio R y longitud L posee una densidad de carga uniforme $+\rho$ entre $r = 0$ y $r = R_s$ y una densidad igual de carga de signo opuesto, $-\rho$, entre $r = R_s$ y $r = R$. ¿Cuál debe ser el radio R_s para que al girar el cilindro alrededor de su eje el momento magnético sea cero?

••• **62** Un cilindro sólido de radio R y longitud L posee una densidad de carga negativa uniforme $\rho = -\rho_0$ entre $r = 0$ y $r = \frac{1}{2}R$ y una densidad de carga positiva de igual magnitud, $+\rho_0$, entre $r = \frac{1}{2}R$ y $r = R$ (figura 28.38). El cilindro gira alrededor de su eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Deducir una expresión para el momento magnético del cilindro.

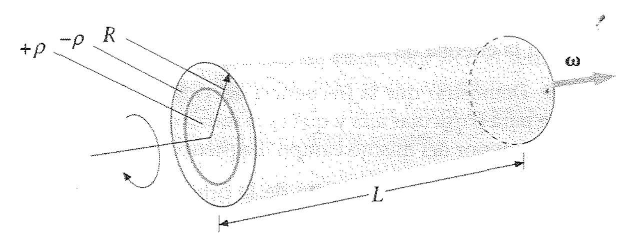


Figura 28.38 Problema 62.

••• **63** Una corteza cilíndrica de longitud L con radio interno R_i y radio externo R_o posee una densidad de carga uniforme, $+\rho_0$, entre R_i y el radio R_s y una densidad de carga de signo opuesto, $-\rho_0$, entre R_s y R_o. El cilindro gira alrededor de su eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Deducir una expresión para el momento magnético de este cilindro.

••• **64** Una esfera sólida de radio R posee una densidad de carga uniforme $+\rho_0$ entre $r = 0$ y $r = R_s$ y una densidad de carga igual de signo opuesto, $-\rho_0$, entre $r = R_s$ y $r = R$. La esfera gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω. Determinar R_s de modo que el momento magnético de la esfera sea cero. ¿Cuál es la carga neta que posee la esfera?

••• **65** Una esfera sólida de radio R posee una densidad de carga uniforme, $+\rho_0$, entre $r = 0$ y $r = \frac{1}{2}R$ y una densidad de carga igual de signo opuesto, $-\rho_0$, entre $r = \frac{1}{2}R$ y $r = R$. La esfera gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω. Deducir una expresión para el momento magnético de esta esfera en rotación.

Efecto Hall

• **66** Una cinta de metal de 2,0 cm de ancho y 0,1 cm de espesor lleva una corriente de 20 A y está situada en el interior de un campo magnético de 2,0 T, según se ve en la figura 28.39. El voltaje Hall se mide y resulta ser de 4,27μV.

(a) Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones en la cinta.

(b) Hallar la densidad numérica de los portadores de carga de la cinta.

(c) ¿Cuál de los puntos a o b se encuentra a mayor potencial?

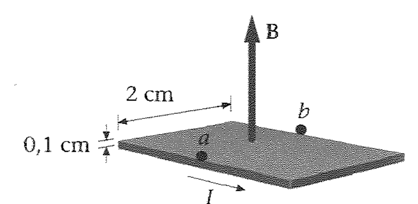


Figura 28.39 Problemas 66 y 67.

•• **67** La densidad numérica de electrones libres en el cobre es de $8{,}47 \times 10^{22}$ electrones por centímetro cúbico. Si la cinta de metal de la figura 24.39 es de cobre y la corriente es 10 A, hallar

(a) la velocidad de desplazamiento v_d y

(b) el voltaje Hall.

(Admitir que el campo magnético es 2,0 T.)

www.elsolucionario.net

009197

•• 68 Se utiliza una cinta de cobre ($n = 8{,}47 \times 10^{22}$ electrones por centímetro cúbico) de 2 cm y 0,1 cm de espesor para medir los valores de campos magnéticos desconocidos que son perpendiculares a la cinta. Hallar el valor de B cuando $I = 20$ A y el voltaje Hall es
(a) 2,00 μV, (b) 5,25 μV y (c) 8,00 μV.

•• 69 La sangre contiene iones cargados de modo que al moverse desarrolla un voltaje Hall a través del diámetro de una arteria. Una arteria gruesa con un diámetro de 0,85 cm tiene una velocidad de flujo de 0,6 m/s. Si una sección de esta arteria se encuentra en un campo magnético de 0,2 T, ¿cuál es la diferencia de potencial a través del diámetro de la arteria?

•• 70 El coeficiente Hall R viene definido por $R = E_y/J_xB_z$, en donde J_x es la corriente por unidad de área en la dirección x del conductor, B_z es el campo magnético en la dirección z, y E_y es el campo Hall en la dirección y. Demostrar que el coeficiente Hall es $1/nq$, en donde q es la carga de los portadores, $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C si se trata de electrones. (Los coeficientes Hall de los metales monovalente, tales como el cobre, la plata y el sodio, son por tanto, negativos.)

•• 71 El aluminio tiene una densidad de $2{,}7 \times 10^3$ kg/m^3 y una masa molar de 27 g/mol. El coeficiente Hall del aluminio es $R = -0{,}3 \times 10^{-10}$ m^3/C. (Véase problema 70 para la definición de R.) Determinar el número de electrones de conducción por átomo de aluminio.

•• 72 El magnesio es un metal divalente. Su densidad es $1{,}74 \times 10^3$ kg/m^3 y su masa molar 24,3 g/mol. Suponiendo que cada átomo de magnesio contribuye con dos electrones de conducción, ¿cuál sería el coeficiente Hall del magnesio? Comparar el resultado obtenido con el valor experimental de $-0{,}94 \times 10^{-10}$ m^3/C.

Problemas generales

• 73 Verdadero o falso:

(a) La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada móvil es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula.
(b) El momento del par que actúa sobre un imán tiende a alinear el momento magnético en la dirección del campo magnético.
(c) Una espira de corriente en un campo magnético uniforme se comporta como un pequeño imán.
(d) El período de una partícula que se mueve en círculo en un campo magnético es proporcional al radio del círculo.
(e) La velocidad de desplazamiento de los electrones en un alambre puede determinarse a partir del efecto Hall.

• 74 Demostrar que la fuerza sobre un elemento de corriente es la misma en dirección y magnitud independientemente de que las cargas que crean la corriente sean positivas, negativas o una mezcla de cargas positivas y negativas.

• 75 Un protón con una carga $+e$ se mueve con velocidad v formando un ángulo de 50° con la dirección de un campo magnético **B**. El componente de la fuerza resultante sobre el protón en la dirección de **B** es
(a) evB sen 50° cos 50° (b) evB cos 50°
(c) cero (d) evB sen 50°
(e) ninguno de los anteriores

• 76 Si el vector campo magnético está dirigido hacia el norte y una partícula cargada positivamente se mueve hacia el este, ¿cuál es la dirección de la fuerza magnética sobre la partícula?

• 77 Una partícula cargada positivamente se mueve hacia el norte en un campo magnético. La fuerza magnética sobre la partícula es hacia el noreste. ¿Cuál es la dirección del campo magnético?
(a) Hacia arriba. (b) Hacia el oeste
(c) Hacia el sur (d) Hacia abajo
(e) Esta situación no es posible

• 78 Un núcleo de ^{7}Li con una carga de $+e$ y una masa de 7u (1 u = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg) y un protón de carga $+e$ y masa 1 u se mueven ambos en un plano perpendicular a un campo magnético **B**. Las dos partículas tienen la misma cantidad de movimiento. La relación que existe entre el radio de curvatura de la trayectoria del protón R_p y el del núcleo de ^{7}Li, R_{Li} es
(a) $R_p/R_{Li} = 3$. (b) $R_p/R_{Li} = 1/3$.
(c) $R_p/R_{Li} = 1/7$. (d) $R_p/R_{Li} = 3/7$.
(e) ninguna de las anteriores.

• 79 Un electrón de velocidad v hacia la derecha entra en una región donde existe un campo magnético uniforme que apunta hacia fuera del papel. Al entrar en esta región, el electrón será
(a) desviado hacia fuera del plano del papel.
(b) desviado en el plano del papel.
(c) desviado hacia arriba.
(d) desviado hacia abajo.
(e) no desviado de su movimiento.

• 80 ¿En qué se diferencian las líneas de campo magnético de las líneas de campo eléctrico? ¿En qué son semejantes?

• 81 Un conductor largo paralelo al eje x lleva una corriente de 6,5 A en el sentido positivo de x. Existe un campo magnético uniforme de valor **B** = 1,35 T **j**. Hallar la fuerza por unidad de longitud del conductor.

• 82 Una partícula alfa (carga $+2e$) se mueve en una trayectoria circular de radio 0,5 m en el interior de un campo magnético de 1,0 T. Hallar
(a) el período,
(b) la velocidad y
(c) la energía cinética (en electronvoltios) de la partícula alfa.
Tomar $m = 6{,}65 \times 10^{-27}$ kg como masa de la partícula alfa.

• 83 Si conocemos la corriente I que circula por un conductor y el campo magnético **B** que atraviesa, la fuerza **F** que actúa sobre la corriente queda perfectamente determinada. Demostrar que el conocimiento de **F** e I no basta para la determinación completa de **B**.

•• 84 La intensidad de polo q_m de un imán en forma de barra se define por $q_m = |\boldsymbol{\mu}|/L$, en donde L es la longitud del imán. Demostrar que el momento del par ejercido por un campo magnético uniforme **B** sobre este imán es el mismo que si un fuerza $+q_m$**B** se ejerciera sobre el polo norte y una fuerza $-q_m$**B** se ejerciera sobre el polo sur.

•• 85 Una partícula de masa m y carga q entra en una región donde existe un campo magnético uniforme B a lo largo del eje x. La velocidad inicial de la partícula es $\mathbf{v} = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$, de modo que la partícula se mueve en una trayectoria helicoidal.
(a) Demostrar que el radio de la hélice es $r = mv_{0y}/qB$.
(b) Demostrar que la partícula tarda un tiempo $t = 2\pi m/qB$ en completar una órbita alrededor de la hélice.

•• 86 Una barra metálica de masa M está apoyada sobre un par de varillas conductoras horizontales separadas una distancia L y unidas a un dispositivo que suministra una corriente constante I al circuito, según se ve en la figura 28.40. Se establece un campo magnético uniforme B del modo indicado.
(a) Si no existe rozamiento y la barra parte del reposo cuando $t = 0$, demostrar que en el instante t la barra tiene una velocidad $v = (BI\ell/M)t$.
(b) ¿En qué sentido se moverá la barra?
(c) Si el coeficiente de rozamiento estático es μ_s, hallar el valor mínimo del campo B necesario para hacer que se ponga la barra en movimiento.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

B (hacia dentro)

I

Fuente de corriente constante

ℓ

Figura 28.40 Problema 86 y 87.

•• **87** En la figura 28.40 admitir que los conductores de apoyo carecen de rozamiento pero están inclinados hacia arriba de modo que forman un ángulo θ con la horizontal.

(a) ¿Qué campo magnético vertical B se necesita para que la barra no se deslice hacia abajo por los conductores?
(b) ¿Cuál es la aceleración de la barra si B es el doble del valor hallado en (a)?

•• **88** Una barra magnética larga y estrecha que posee un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ paralelo a su eje longitudinal está suspendida de su centro como la aguja de una brújula sin rozamiento. Situada en un campo magnético **B** la aguja se alinea con el campo. Si se desplaza un pequeño ángulo θ, demostrar que la aguja oscilará alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\mu B/I}$, en donde I es el momento de inercia respecto al punto de suspensión.

•• **89** Un alambre conductor es paralelo al eje y. Se mueve en la dirección x positiva con una velocidad de 20 m/s en un campo magnético $\mathbf{B} = 0{,}5\ \mathrm{T}\ \mathbf{k}$.

(a) Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre un electrón en el conductor.
(b) Debido a esta fuerza magnética, los electrones se mueven a un extremo del conductor, dejando el otro extremo positivamente cargado hasta que el campo eléctrico debido a esta separación de carga ejerce una fuerza sobre los electrones que equilibra la fuerza magnética. Determinar la magnitud y dirección de este campo eléctrico en estado estacionario.
(c) Suponemos que el cable móvil tiene 2 metros de longitud. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus dos extremos debido a este campo eléctrico?

••• **90** La estructura rectangular de la figura 28.41 puede girar libremente alrededor del eje A-A horizontal. La estructura es de 16 cm de longitud y 6 cm de anchura y su masa por unidad de longitud es de 20 g/cm. Un campo magnético uniforme B = 0,2 T tiene la dirección indicada. Por medio de los alambres superiores puede enviarse una corriente que circule por la estructura.

(a) Si no pasa corriente por la estructura, ¿cuál es el período de este péndulo físico para pequeñas oscilaciones?
(b) Si una corriente de 8,0 A pasa a través de la estructura rectangular en la dirección indicada por la flecha, ¿cuál es el período de este péndulo físico?
(c) Suponer que la dirección de la corriente es opuesta a la indicada. La estructura se desplaza de la vertical un cierto ángulo θ. ¿Cuál debe ser la magnitud de la corriente para que esta estructura se encuentre en equilibrio?

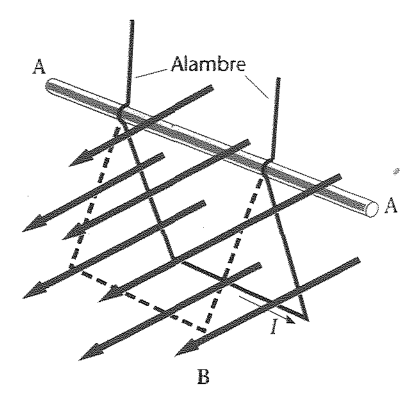


Figura 28.41 Problema 90.

••• **91** Un cable rígido, recto y horizontal de longitud 25 cm y masa 20 g, se soporta mediante contactos eléctricos en sus extremos, pero es libre de moverse verticalmente hacia arriba. El cable se encuentra en un campo magnético uniforme y horizontal, de magnitud 0,4 T perpendicular al cable. Un interruptor que conecta el cable con una batería se cierra y el cable se dispara hacia arriba alcanzando una altura máxima h. La batería suministra una carga total de 2 C durante el corto tiempo que hace contacto con el alambre. Determinar la altura h.

••• **92** Una esfera sólida de radio R posee una densidad de carga $-\rho_0$ en la región $r = 0$ a $r = R_s$ y una densidad de carga igual de signo contrario, $+\rho_0$, entre $r = R_s$ y $r = R$. La carga neta transportada por la esfera es cero.

(a) ¿Cuál debe ser la relación R/R_s?
(b) Si esta esfera gira con velocidad angular ω alrededor de un diámetro, ¿cuál es su momento magnético?

••• **93** Una espira circular de alambre de masa M transporta una corriente I en un campo magnético uniforme. Inicialmente está en equilibrio con su vector momento magnético alineado con el campo magnético. Damos a la espira un pequeño giro alrededor de un diámetro y luego se deja en libertad. ¿Cuál es el período del movimiento? (Suponer que el único momento ejercido sobre la espira se debe al campo magnético.)

••• **94** Un pequeño imán en forma de barra posee un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ que forma un ángulo θ con el eje x y se encuentra en un campo magnético no uniforme dado por $\mathbf{B} = B_x(x)\ \mathbf{i} + B_y(y)\ \mathbf{j}$. Utilizar $F_x = -dU/dx$ y $F_y = -dU/dy$ para demostrar que sobre el imán actúa una fuerza neta que viene dada aproximadamente por

$$\mathbf{F} \approx \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x}\mathbf{i} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial_y}\mathbf{j}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX ... 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - ... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO 29

Fuentes del campo magnético

Estas bobinas del Kettering Magnetics Laboratory de la Universidad de Oakland (EE.UU.) se denominan bobinas de Helmholtz. Se utilizan para neutralizar el campo magnético terrestre y proporcionar un campo magnético uniforme en una pequeña región del espacio con el fin de estudiar las propiedades magnéticas de la materia.

www.elsolucionario.net

Las primeras fuentes conocidas del magnetismo fueron los imanes permanentes. Un mes después de que Oersted anunciase su descubrimiento acerca de la desviación de la aguja de una brújula por la acción de una corriente eléctrica, Jean Baptiste Biot y Felix Savart describieron los resultados de sus medidas de la fuerza que actúa sobre un imán próximo a un conductor largo por el que circula corriente y analizaron estos resultados en función del campo magnético producido por cada elemento de la corriente. André Marie Ampére amplió estos experimentos y demostró que los propios elementos de corriente experimentan una fuerza en presencia de un campo magnético; en particular demostró que dos corrientes ejercen fuerzas entre sí.

Comenzaremos por considerar el campo magnético producido por una sola carga móvil y por las cargas en movimiento de un elemento de corriente. A continuación calcularemos los campos magnéticos producidos por algunas configuraciones de corriente comunes, tales como un segmento de alambre recto, un alambre largo y recto, una espira de corriente y un solenoide. Posteriormente abordaremos la ley de Ampère, que relaciona la integral lineal del campo magnético alrededor de una espira cerrada con la corriente total que atraviesa la espira. Finalmente consideraremos las propiedades magnéticas de la materia.

Campo magnético creado por cargas puntuales en movimiento 29.1

Cuando una carga puntual q se mueve con velocidad **v**, se produce un campo magnético B en el espacio dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (29.1)$$

Campo magnético de una carga móvil

www.elsolucionario.net

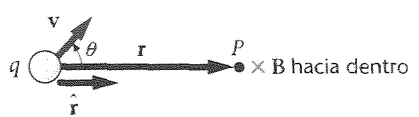


Figura 29.1 Una carga puntual q que se mueve con velocidad **v** produce un campo magnético **B** en un punto P del campo en la dirección $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$, en donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario dirigido desde la carga al punto del campo. El campo varía en razón inversa al cuadrado de la distancia desde la carga al punto considerado del campo y es proporcional al seno del ángulo que forman **v** y $\hat{\mathbf{r}}$. (La cruz azul en el punto del campo indica que la dirección del campo es perpendicular al papel y hacia dentro.)

en donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta desde la carga q al punto del campo P (figura 29.1) y μ_0 es una constante de proporcionalidad llamada **permeabilidad del espacio libre**,[1] de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A} = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \tag{29.2}$$

Las unidades de μ_0 son de tal índole que B resulta en teslas cuando q se expresa en culombios, v en metros por segundo y r en metros. La unidad N/A² procede del hecho de que 1 T = 1 N/A · m. La constante $1/4\pi$ se incluye arbitrariamente en la ecuación 29.1 a fin de que el factor 4π no aparezca en la ley de Ampère (ecuación 29.15), que estudiaremos en la sección 29.3.

EJEMPLO 29.1

Una carga puntual de magnitud q_1 = 4,5 nC se mueve con la velocidad 3,6 × 10⁷ m/s paralelamente al eje x a lo largo de la recta y = 3 m. Determinar el campo magnético producido en el origen por esta carga situada en el punto x = –4 m, y = 3 m, como indica la figura 29.2.

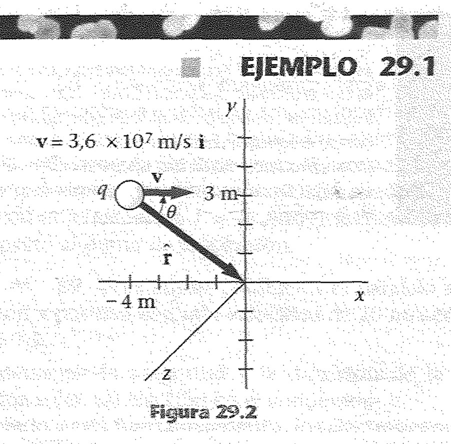


Figura 29.2

1. El campo magnético viene dado por la ecuación 29.1: $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, con $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$

2. Determinar $\hat{\mathbf{r}}$ y r de la figura 29.2 y escribir $\hat{\mathbf{r}}$ en función de **i** y **j**:

$$\mathbf{r} = 4\ \mathrm{m}\ \mathbf{i} - 3\ \mathrm{m}\ \mathbf{j}$$
$$r = \sqrt{4^2+3^2}\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$$
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{4\ \mathrm{m}\ \mathbf{i} - 3\ \mathrm{m}\ \mathbf{j}}{5\ \mathrm{m}} = 0{,}8\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{j}$$

3. Evaluar el producto vectorial: $\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}} = (v\mathbf{i})\times(0{,}8\mathbf{i}-0{,}6\mathbf{j}) = -0{,}6v\mathbf{k}$

4. Aplicar los resultados anteriores en la ecuación 29.1 para obtener **B**:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(-0{,}6v\,\mathbf{k})}{r^2}$$
$$= -(10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\,\frac{(4{,}5\times10^{-9}\ \mathrm{C})(0{,}6)3{,}6\times10^{7}(\mathrm{m/s})}{(5\ \mathrm{m})^2}\,\mathbf{k}$$
$$= -3{,}89\times10^{-10}\ \mathrm{T}\ \mathbf{k}$$

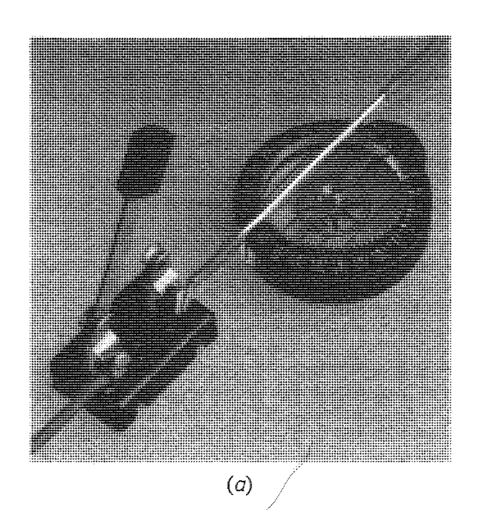
Observaciones También es posible determinar el campo magnético **B** sin determinar explícitamente el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$. Como puede verse en la figura, el producto vectorial $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$ tiene la dirección z negativa. Como la magnitud de $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$ es v sen θ, en donde sen θ = 3m/5 m = 0,6, resulta $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} = v$ sen $\theta\,(-\mathbf{k}) = -v(0{,}6)\mathbf{k}$ que coincide con el resultado obtenido en la etapa 2. Finalmente, este ejemplo muestra que el campo magnético debido a una carga móvil es muy pequeño. Consideremos, como comparación, que la magnitud del campo magnético terrestre próximo a su superficie es de unos 10^{-4} T.

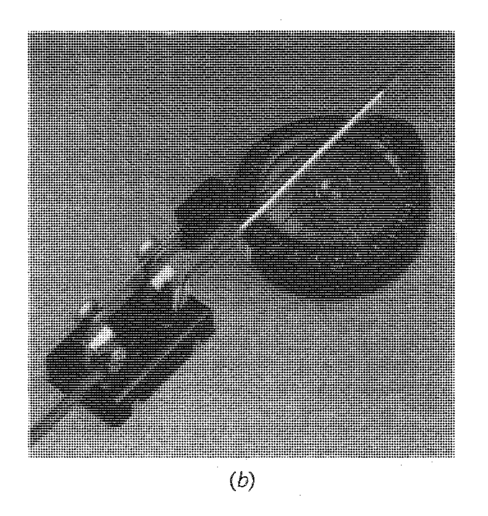
Ejercicio Determinar el campo magnético sobre el eje y en y = 3 y en y = 6 m. (*Respuestas*: **B** = 0, **B** = $3{,}89\times10^{-10}$ T **k**.)

[1] Adviértase que no debemos confundir μ_0 con el momento magnético μ.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net


(a)


(b)

Experimento de Oersted. (*a*) Si por el alambre no pasa corriente, la aguja de la brújula apunta al norte. (*b*) Al pasar corriente por el alambre, la aguja se desvía en la dirección del campo magnético resultante. La corriente en el alambre está dirigida hacia arriba, de izquierda a derecha. Para mejorar el contraste de la fotografía, se ha quitado el aislante que recubre el alambre.

Campo magnético creado por corrientes eléctricas: ley de Biot y Savart 29.2

En el capítulo anterior extendimos nuestra exposición de las fuerzas que actúan sobre cargas puntuales a las fuerzas que actúan sobre elementos de corriente reemplazando $q\mathbf{v}$ por el elemento de corriente $I\,d\boldsymbol{\ell}$. Lo mismo podemos hacer para deducir el campo magnético producido por un elemento de corriente. El campo magnético $d\mathbf{B}$ producido por un elemento de corriente $I\,d\boldsymbol{\ell}$ viene dado por la ecuación 29.1 sustituyendo $q\mathbf{v}$ por $I\,d\boldsymbol{\ell}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (29.3)$$

Ley de Biot y Savart

La ecuación 29.3, conocida como **ley de Biot y Savart**, fue también deducida por Ampère. Esta ley y la ecuación 29.1 son análogas a la ley de Coulomb correspondiente al campo eléctrico de una carga puntual. La fuente del campo magnético es una carga móvil $q\mathbf{v}$ o un elemento de corriente $I\,d\boldsymbol{\ell}$, del mismo modo que la carga q es la fuente del campo electrostático. El campo magnético decrece con el cuadrado de la distancia desde la carga móvil o elemento de corriente, de igual modo que el campo eléctrico decrece con el cuadrado de la distancia desde una carga puntual. Sin embargo, los aspectos direccionales de los campos eléctrico y magnético son completamente distintos. Mientras el campo eléctrico apunta en la dirección radial $\hat{\mathbf{r}}$ desde la carga puntual al punto del campo (para una carga positiva), el campo magnético es perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$ y a la dirección de movimiento de las cargas, $\mathbf{v}$, que es la dirección del elemento de corriente. En un punto situado a lo largo de la línea de un elemento de corriente, tal como el punto P_2 de la figura 29.3, el campo magnético debido a dicho elemento es cero, pues el ángulo θ entre $I\,d\boldsymbol{\ell}$ y el vector $\hat{\mathbf{r}}$ dirigido a ese punto es cero.

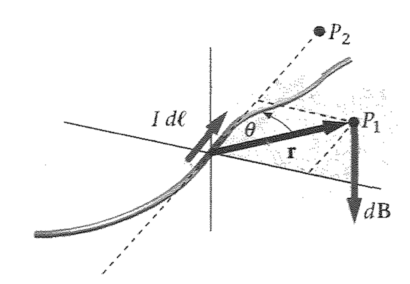


Figura 29.3 El elemento de corriente $I\,d\ell$ produce un campo magnético en el punto P_1 que es perpendicular tanto a $I\,d\ell$ como a $\hat{\mathbf{r}}$. Este elemento no produce campo magnético en el punto P_2, que está en la misma línea de $I\,d\ell$.

El campo magnético debido a la corriente total en un circuito puede calcularse utilizando la ley de Biot y Savart para calcular el campo debido a cada elemento de corriente y después sumando (integrando) para todos los elementos de corriente del circuito. Este cálculo es muy difícil excepto en los casos de circuitos de geometría simple.

B debido a una espira de corriente

La figura 29.4 muestra un elemento de corriente $I\,d\boldsymbol{\ell}$ de una espira de corriente de radio R y el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ dirigido desde el elemento al centro de la espira. El campo magnético en el centro de la espira debido a este elemento está dirigido a lo largo del eje de la misma y su magnitud viene dada por

 www.elsolucionario.net

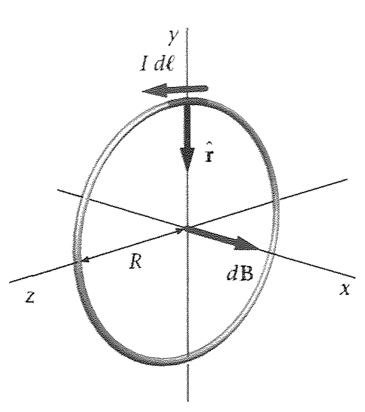


Figura 29.4 Elemento de corriente para el cálculo del campo magnético en el centro de una espira de corriente circular. Cada elemento produce un campo magnético dirigido a lo largo del eje de la espira.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\ell\, \text{sen}\,\theta}{R^2}$$

en donde θ es el ángulo que forman $I\, d\ell$ y $\hat{\mathbf{r}}$ que vale 90° para cada elemento de corriente, de modo que sen $\theta = 1$. El campo magnético debido a la corriente total se obtiene integrando para todos los elementos de corriente de la espira. Como R es constante para todos los elementos, se obtiene

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint d\ell$$

La integral de $d\ell$ alrededor de la espira completa es la longitud total $2\pi R$ o circunferencia de la espira. El campo magnético causado por la espira completa es, por tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad \textbf{(29.4)}$$

B en el centro de una espira de corriente

Ejercicio Hallar la corriente en una espira circular, de 8 cm de radio, que pueda crear un campo magnético de 2 G en el centro de la espira. (*Respuesta*: 25,5 A.)

La figura 29.5 muestra la geometría para calcular el campo magnético en un punto del eje de una espira circular de corriente a la distancia x de su centro. Consideremos en primer lugar el elemento de corriente situado en la parte superior de la espira. Aquí, como en todos los puntos de la espira, $I\, d\ell$ es tangente a la misma y perpendicular al vector $\hat{\mathbf{r}}$ dirigido desde el elemento de corriente al punto del campo P. El campo magnético $d\mathbf{B}$ debido a este elemento se encuentra en la dirección mostrada en la figura, perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$ y también perpendicular a $I\, d\ell$. La magnitud de $d\mathbf{B}$ es

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I|d\ell \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\ell}{x^2 + R^2}$$

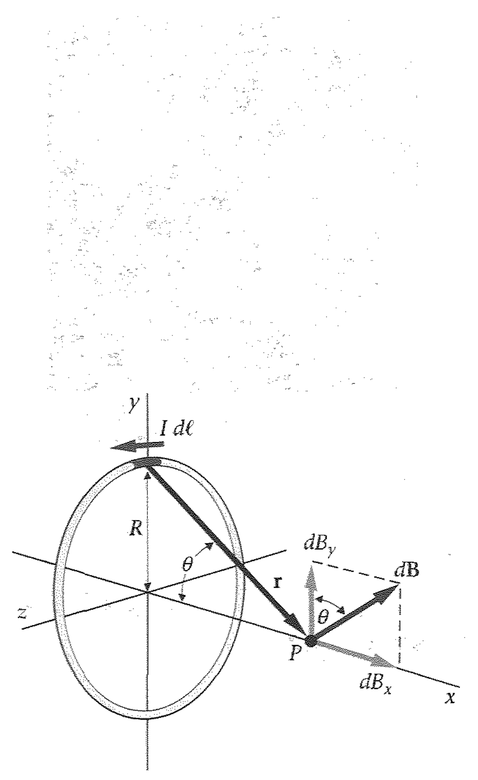


Figura 29.5 Geometría para el cálculo del campo magnético en un punto sobre el eje de una espira de corriente circular.

en donde se ha tenido en cuenta que $r^2 = x^2 + R^2$ y que $d\ell$ y $\mathbf{r}$ son perpendiculares, de modo que $|d\ell \times \hat{\mathbf{r}}| = d\ell$.

Cuando sumamos para todos los elementos de corriente de la espira, los componentes de $d\mathbf{B}$ perpendiculares al eje de la espira, tal como dB_y en la figura 29.5 suman cero, quedando sólo los componentes dB_x que son paralelos al eje. Por tanto, debemos calcular sólo el componente x del campo. Según la figura 29.5 tenemos

$$dB_x = dB\, \text{sen}\,\theta = dB\left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\ell}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Para determinar el campo debido a la espira completa, integraremos dB_x alrededor de la espira:

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\, d\ell$$

Como x y R no varían al sumar para todos los elementos de la espira, la expresión anterior puede escribirse en la forma

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint d\ell$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La integral de $d\ell$ alrededor de la espira es $2\pi R$. Por tanto,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR(2\pi R)}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad (29.5)$$

Campo magnético sobre el eje de una espira de corriente

Ejercicio Demostrar que la ecuación 29.5 se reduce a $B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}$ (ecuación 29.4) en el centro de la espira.

A grandes distancias de la espira, x es mucho mayor que R, de modo que $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} \approx |x|^3$. Por tanto,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I\pi R^2}{|x^3|}$$

o sea

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{|x^3|} \qquad (29.6)$$

Campo de un dipolo magnético sobre el eje del dipolo

en donde $\mu = I\pi R^2$ es la magnitud del momento magnético de la espira. Obsérvese la semejanza de esta expresión con la ecuación 22.10 correspondiente al campo eléctrico sobre el eje de un dipolo eléctrico de momento p:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{|x^3|}$$

Aunque no lo hemos demostrado, nuestro resultado de que una espira de corriente produce un campo dipolar magnético lejos de la misma, es válido en general para cualquier punto que esté sobre el eje o fuera del eje. Así, una espira de corriente se comporta como un dipolo magnético, ya que experimenta un momento $\mu \times B$ cuando se sitúa en un campo magnético externo (como vimos en el capítulo 28) y produce un campo dipolar magnético a gran distancia de él. La figura 29.6 muestra las líneas de campo magnético de una espira de corriente.



Figura 29.6 Líneas de campo magnético de una espira de corriente circular visualizadas mediante limaduras de hierro.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 29.2

Una bobina circular de radio 5,0 cm tiene 12 vueltas y se encuentra en el plano yz. Por ella circula una corriente de 4 A en un sentido tal que el momento magnético de la espira está dirigido a lo largo del eje x. Determinar el campo magnético sobre el eje x en (a) $x = 0$, (b) $x = 15$ cm y (c) $x = 3$ m.

Esquema del problema El campo magnético debido a una bobina de N vueltas es N veces mayor que el debido a una sola vuelta. (a) En $x = 0$ (centro de la espira) $B = \mu_0 NI/2R$ según la ecuación 29.4. La ecuación 29.5 expresa el valor del campo magnético sobre el eje debido a la corriente en una sola vuelta. Lejos de la bobina, como en el caso (c), el campo puede determinarse utilizando la ecuación 29.6. En este caso, como tenemos N espiras, el momento magnético es $\mu = NI\pi R^2$.

(a) B_x en el centro es N veces el dado por la ecuación 29.4 para una sola espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi NI}{R} = (10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\frac{2\pi(12)(4\ \mathrm{A})}{0{,}05\ \mathrm{m}} = 6{,}03\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

www.elsolucionario.net

(b) B_x sobre el eje es N veces el dado por la ecuación 29.5:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 NI}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$
$$= (10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\frac{2\pi(0{,}05\ \mathrm{m})^2(12)(4\ \mathrm{A})}{[(0{,}15\ \mathrm{m})^2+(0{,}05\ \mathrm{m})^2]^{3/2}}$$
$$= 1{,}91\times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

(c) **1.** Como 3 m es mucho mayor que el radio R = 0,05 m, podemos utilizar la ecuación 29.6 para el campo magnético lejos de la bobina:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{x^3}$$

2. La magnitud del momento magnético de la bobina es NIA:

$$\mu = NI\pi R^2 = (12)(4\ \mathrm{A})\pi(0{,}05\ \mathrm{m})^2 = 0{,}377\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

3. Aplicar μ y x = 3 m en B_x en la etapa 1:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{x^3} = (10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\frac{2(0{,}377\ \mathrm{A\cdot m^2})}{(3\ \mathrm{m})^3}$$
$$= 2{,}79\times 10^{-9}\ \mathrm{T}$$

Observaciones En la etapa 1, el campo producido por una bobina es muy superior al debido a una sola carga móvil (véase ejemplo 29.1). Como $x = 60R$ en (c), utilizamos una aproximación que es válida para $x \gg R$.

Ejercicio Determinar el campo magnético sobre el eje x en x = –15 cm. (*Respuesta*: Según la ecuación 29.5, vemos que B_x es simétrico en x y por tanto, $B_x = 1{,}91\times 10^{-5}$ T.)



■ EJEMPLO 29.3 ¡Inténtelo!

Una pequeña barra magnética de momento magnético μ = 0,03 A · m² se sitúa en el centro de la bobina del ejemplo 29.2, de modo que su momento magnético se encuentra en el plano xy y forma un ángulo de 30° con el eje x. Despreciando cualquier variación de B en la región ocupada por el imán, determinar el momento ejercido sobre el imán.

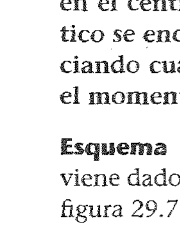


Figura 29.7

Esquema del problema El momento ejercido sobre un momento magnético viene dado por $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$. Como **B** se encuentra en la dirección x, podemos ver en la figura 29.7 que $\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$ posee la dirección z negativa.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular la magnitud del momento a partir de $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$.	$\tau = 9{,}04\times 10^{-6}\ \mathrm{N\cdot m}$
2. Indicar el sentido con un vector unitario.	$\boldsymbol{\tau} = -(9{,}04\times 10^{-6}\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$

■ Campo magnético B debido a una corriente en un solenoide

Un solenoide es un alambre arrollado en forma de una hélice con espiras muy próximas entre sí (figura 29.8). El solenoide se usa para producir un campo magnético intenso y uniforme en la región rodeada por sus espiras. Desempeña en magnetismo un papel análogo al de un condensador de placas paralelas con objeto de proporcionar un campo

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

electrostático uniforme e intenso entre sus placas. El campomagnético de un solenoide es esencialmente el de una serie de N espiras idénticas situadas unas junto a otras. En la figura 29.9 se muestran las líneas de campo magnético para dos espiras.

La figura 29.10 muestra las líneas de campo correspondientes a un solenoide largo y enrollado de forma compacta. Dentro del solenoide, las líneas son aproximadamente paralelas al eje y están espaciadas estrecha y uniformemente, indicando la existencia de un campo uniforme e intenso. Fuera del solenoide las líneas son mucho menos densas. Divergen en un extremo y convergen en el otro. Comparando esta figura con la figura 28.8 vemos que las líneas de campo de un solenoide, tanto en el interior como en el exterior, coinciden con las de una barra imanada de igual forma que el solenoide.

Consideremos un solenoide de longitud L formado por N vueltas de cable conductor que transporta una corriente de intensidad I. Elegimos el eje del solenoide como eje x, con el extremo izquierdo en $x = -a$ y el extremo derecho en $x = +b$ como indica la figura 29.11. Calculemos el campo magnético en el origen. La figura muestra un elemento del solenoide de longitud dx a una distancia x del origen. Si $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud, en este elemento existen $n\,dx$ vueltas de alambre, cada una de las cuales transporta una corriente I. Por tanto, el elemento es equivalente a una simple espira que transporta una corriente $di = nI\,dx$. El campo magnético en un punto sobre el eje x causado por una espira en el origen que transporta una corriente $nI\,dx$ viene dado por la ecuación 29.5 reemplazando I por $nI\,dx$:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 nI\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Esta expresión representa también el campo magnético en el origen debido a una espira de corriente en x. Determinaremos el campo magnético debido al solenoide completo integrando esta expresión desde $x = -a$ a $x = b$:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\,2\pi R^2 nI\int_{-a}^{b}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad \textbf{(29.7)}$$

La integral de la ecuación 29.7 puede determinarse mediante una tabla estándar. Su valor es:

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \left.\frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}}\right|_{-a}^{b} = \frac{b}{R^2\sqrt{b^2+R^2}} + \frac{a}{R^2\sqrt{a^2+R^2}}$$

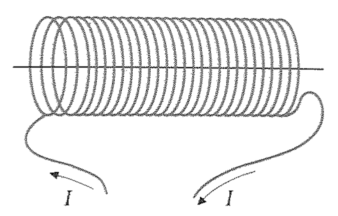


Figura 29.8 Un solenoide estrechamente arrollado puede considerarse como una serie de espiras de corriente circulares situadas paralelamente que transportan la misma corriente. En su interior se produce un campo magnético uniforme.

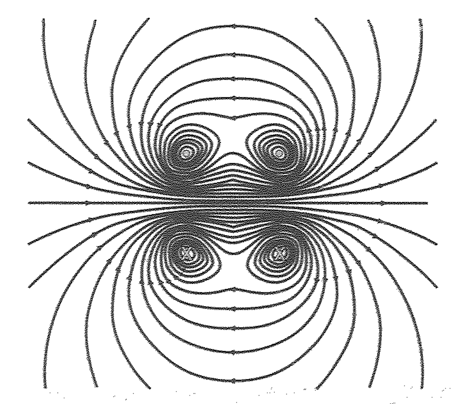


Figura 29.9 Líneas de campo magnético debidas a dos espiras que transportan la misma corriente en el mismo sentido. Los puntos donde las espiras cortan el plano de la página están marcados por una × cuando la corriente se dirige hacia dentro y por un punto cuando la corriente emerge. En la región comprendida entre las espiras, los campos magnéticos de las espiras individuales se suman, de modo que el campo resultante es intenso, mientras que en las regiones alejadas de las espiras, los campos se restan y el campo resultante es débil.

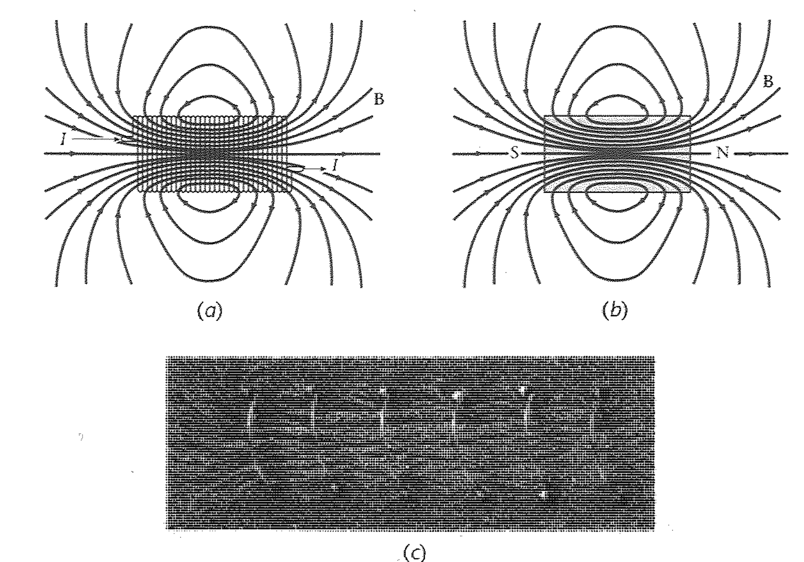


Figura 29.10 (*a*) Líneas de campo magnético de un solenoide. Las líneas son idénticas a las de una barra imanada de igual forma (*b*). (*c*) Líneas de campo magnético de un solenoide indicadas por limaduras de hierro.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

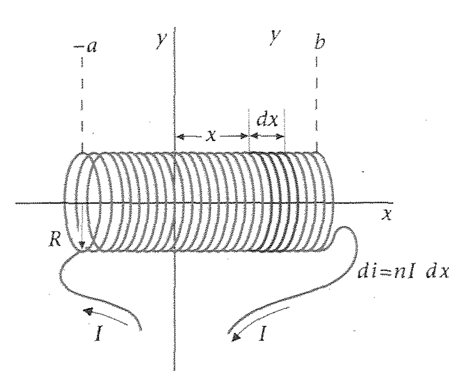


Figura 29.11 Geometría para el cálculo del campo magnético dentro de un solenoide sobre el eje. El número de vueltas en el elemento dx es $n\,dx$, en donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. El elemento dx se trata como una espira de corriente que transporta una corriente $di = nI\,dx$.

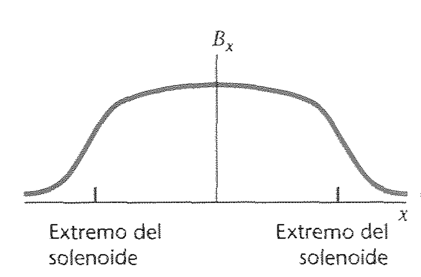


Figura 29.12 Gráfico del campo magnético sobre el eje dentro de un solenoide en función de la posición x sobre el eje. El campo interior al solenoide es casi constante excepto cerca de los extremos.

www.elsolucionario.net

Sustituyendo este valor en la ecuación 29.7 resulta

$$B_x = \frac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right) \qquad \textbf{(29.8)}$$

Para un solenoide largo, en el cual a y b son mucho mayores que R, los dos términos del paréntesis tienden a valer 1. Con esta aproximación el campo magnético es

$$B_x = \mu_0 nI \qquad \textbf{(29.9)}$$

Campo magnético B en el interior de un solenoide largo

Si el origen está en un extremo del solenoide, a o b será cero. Por tanto, si el otro extremo está a una distancia grande comparada con el radio, uno de los términos del paréntesis de la ecuación 29.9 es cero y el otro es 1, de modo que $B \approx \frac{1}{2}\mu_0 nI$. Por tanto, la magnitud de **B** en un punto próximo a cualquiera de los extremos de un solenoide largo es aproximadamente igual a la mitad que en los puntos interiores al solenoide, lejos de los extremos. La figura 29.12 es la representación del campo magnético sobre el eje de un solenoide en función de la posición (con el origen en el centro del solenoide). La aproximación de que el campo es constante, independientemente de la posición a lo largo del eje, es muy buena excepto en los puntos muy próximos a los extremos.

EJEMPLO 29.4 Determinar el campo magnético en el centro de un solenoide de longitud 20 cm, radio 1,4 cm y 600 vueltas, por el que circula una corriente de intensidad 4 A.

1. Calcularemos exactamente el campo mediante la ecuación 29.8:
$$B_x = \frac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

2. Para un punto en el centro del solenoide, $a = b = 10$ cm. Así, cada término entre los paréntesis de la ecuación 29.8 vale:
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} = \frac{10\text{ cm}}{\sqrt{(10\text{ cm})^2+(1{,}4\text{ cm})^2}} = 0{,}990$$

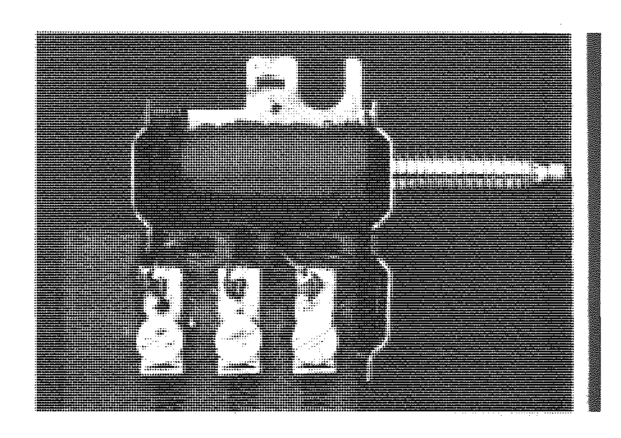
www.elsolucionario.net

3. Sustituyendo estos resultados en B_x, etapa 1:

$$B_x = \frac{1}{2}\,\mu_0 nI(0{,}990 + 0{,}990)$$
$$= (0{,}5)(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\left(\frac{600\ \text{vueltas}}{0{,}2\ \mathrm{m}}\right)(4\ \mathrm{A})(0{,}990 + 0{,}990)$$
$$= 1{,}50 \times 10^{-2}\ \mathrm{T}$$

Observaciones La aproximación obtenida usando la ecuación 29.9 supone reemplazar 0,99 por 1,00, es decir, una diferencia del 1 por ciento. Obsérvese también que la magnitud del campo magnético dentro del solenoide es bastante grande — unas 100 veces el campo magnético terrestre.

Ejercicio Calcular B_x utilizando la aproximación del solenoide de gran longitud. (*Respuesta*: $1{,}51 \times 10^{-2}$ T.)



Sección transversal del timbre de una puerta. Cuando pasa corriente por el solenoide exterior, su campo magnético hace que el émbolo interior choque con la campana del timbre.

Campo magnético B debido a una corriente en un conductor rectilíneo

La figura 29.13 muestra la geometría para el cálculo del campo magnético B en un punto P debido a la corriente que circula por el segmento de alambre recto que se indica. Escogemos el eje x a lo largo del alambre y el punto P está sobre el eje y. Debido a la simetría de este problema, cualquier dirección perpendicular al alambre podía escogerse como eje y.

En la figura se indica un elemento de corriente típico $I\,d\ell$ situado a una distancia x del origen. El vector **r** señala desde el elemento hasta el punto de campo P. La dirección del campo magnético en P debido a este elemento está dirigida hacia el lector según queda determinada por la dirección del producto $I\,d\ell \times \mathbf{r}$. Obsérvese que todos los elementos de corriente del conductor dan contribuciones en esta misma dirección y sentido y así solo necesitamos calcular la magnitud del campo. El campo debido al elemento de corriente indicado tiene el valor (ecuación 29.3):

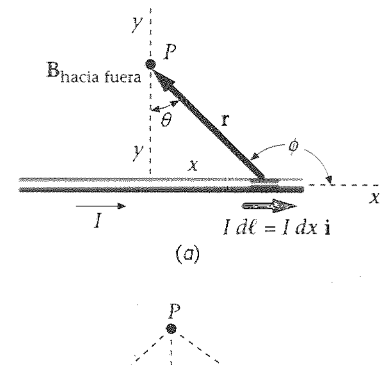
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx}{r^2}\,\text{sen}\,\phi$$

Más conveniente es escribir esta expresión en función de θ en lugar de ϕ:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx}{r^2}\cos\theta \qquad \textbf{(29.10)}$$

Para sumar los campos elementales de todos los elementos de corriente necesitamos relacionar las variables θ, r y x. Lo más sencillo es expresar x y r en función de θ. Así tenemos:

$$x = y\tan\theta$$



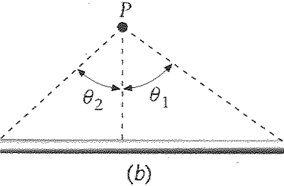
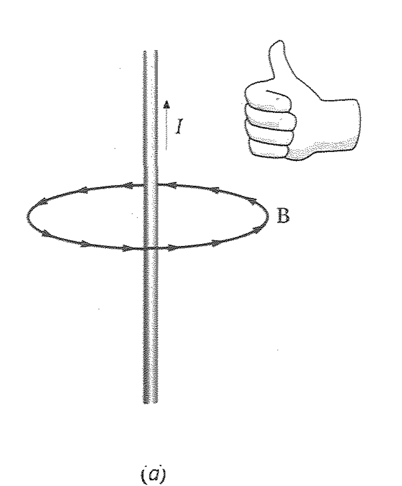


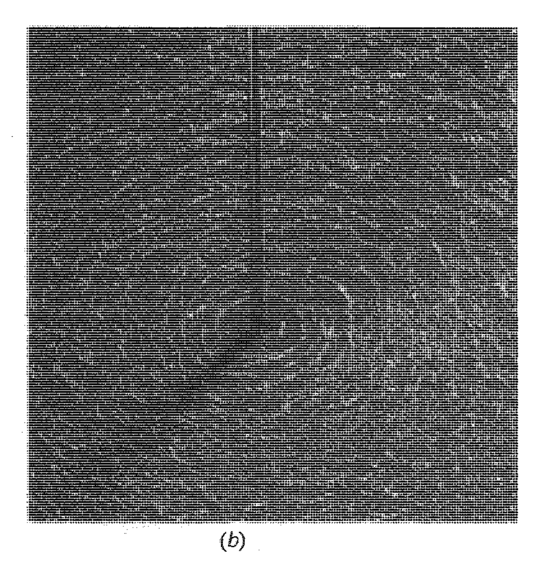
Figura 29.13 (*a*) Geometría para el cálculo del campo magnético en el punto P causado por un segmento rectilíneo de corriente. Cada elemento del segmento contribuye al campo magnético total en el punto P, que está dirigido hacia fuera del papel. (*b*) El resultado se expresa en función de los ángulos θ_1 y θ_2.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



(a)



(b)

Figura 29.14 (a) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético debido a un conductor largo y recto, portador de corriente. Las líneas de campo magnético rodean el conductor en la dirección de los dedos de la mano derecha cuando el dedo pulgar apunta en la dirección de la corriente. (b) Líneas de campo magnético debidas a un largo conductor visualizadas por limaduras de hierro.

Por tanto,

$$dx = y\sec^2\theta\, d\theta = y\,\frac{r^2}{y^2}d\theta = \frac{r^2}{y}\,d\theta$$

en donde hemos tenido en cuenta que sec $\theta = r/y$. Sustituyendo dx por esta expresión en la ecuación 29.10, resulta

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{r^2\,d\theta}{y}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{y}\cos\theta\,d\theta$$

Calculemos primeramente la contribución procedente de los elementos de corriente a la derecha del punto $x = 0$. Se suma respecto a todos estos elementos integrando desde $\theta = 0$, hasta $\theta = \theta_1$, siendo θ_1 el ángulo comprendido entre la línea perpendicular al conductor y la línea que va desde P hasta el extremo derecho del conductor, según está indicado en la figura 29.13b. Tenemos para esta contribución:

$$B_1 = \int_0^{\theta_1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{y}\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{y}\int_0^{\theta_1}\cos\theta\,d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{y}\,\mathrm{sen}\,\theta_1$$

Análogamente, la contribución procedente de los elementos a la izquierda de $x = 0$ es

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{y}\,\mathrm{sen}\,\theta_2$$

El campo magnético total debido al segmento conductor, es la suma de B_1 y B_2. Sustituyendo y por R, distancia perpendicular desde el segmento conductor al punto del campo, tenemos

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\mathrm{sen}\,\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_2) \qquad \textbf{(29.11)}$$

Campo magnético debido a un segmento de conductor recto

Este resultado expresa el campo magnético producido por un segmento de conductor en función de la distancia R perpendicular, y los ángulos subtendidos en el punto del campo por los extremos del conductor. Si éste es muy largo, los ángulos indicados son próximos a 90°. El resultado correspondiente a un conductor muy largo se obtiene de la ecuación 29.11 haciendo $\theta_1 = \theta_2 = 90°$:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R} \qquad \textbf{(29.12)}$$

Campo magnético debido a un conductor largo rectilíneo

En cualquier punto del espacio, las líneas de campo magnético de un conductor largo rectilíneo que transporta una corriente, son tangentes a un círculo de radio R alrededor del conductor, en donde R es la distancia perpendicular desde el conductor al punto del campo. La dirección de **B** puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha como se indica en la figura 29.14a. Las líneas de campo magnético rodean el conductor como se indica en la figura 29.14b.

El resultado expresado por la ecuación 29.12 fue determinado experimentalmente por Biot y Savart en 1820. Mediante su análisis determinaron la expresión del campo magnético debido a un elemento de corriente, dada por la ecuación 29.3.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 29.5

Determinar el campo magnético en el centro de una espira de corriente cuadrada, de lado L = 50 cm, por la cual circula una corriente de intensidad 1,5 A.

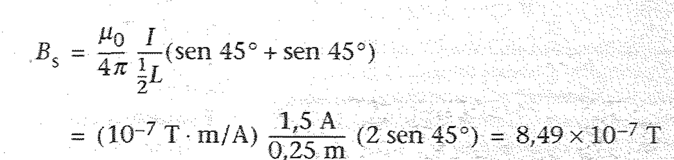


Figura 29.15

Esquema del problema El campo magnético en el centro de la espira es la suma de las contribuciones debidas a cada uno de los cuatro lados del cuadrado. En la figura 29.15 podemos ver que cada lado produce un campo de igual magnitud apuntando hacia fuera de la página. Por tanto, usaremos la ecuación 29.11 para un lado determinado y multiplicaremos por 4 para el campo total.

1. El campo total es 4 veces mayor que el campo producido por uno de los lados: $B = 4B_s$

2. Calcular el campo magnético B_s debido a un lado determinado de la espira. Obsérvese en la figura que $R = \frac{1}{2}L$ y $\theta_1 = \theta_2 = 45°$:

$$B_s = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\frac{1}{2}L}(\text{sen } 45° + \text{sen } 45°)$$

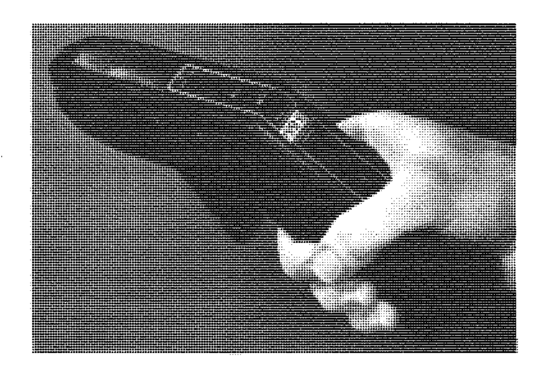
$$= (10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\ \frac{1{,}5\ \text{A}}{0{,}25\ \text{m}}\ (2\ \text{sen } 45°) = 8{,}49\times 10^{-7}\ \text{T}$$

3. Multiplicar este valor por 4 para determinar el campo total: $B = 4B_s = 4(8{,}49\times 10^{-7}\ \text{T}) = 3{,}39\times 10^{-6}\ \text{T}$

Ejercicio Comparar el campo magnético en el centro de una espira de corriente circular de radio R con el campo creado en el centro de una espira de corriente cuadrada de lado $L = 2R$. ¿Cuál es mayor? (*Respuesta*: B es mayor en el caso del círculo aproximadamente en un 10%.)

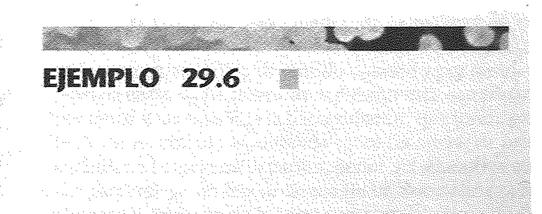
Ejercicio Determinar el campo magnético a una distancia de 20 cm de un alambre recto y largo que transporta una corriente de 5 A. (*Respuesta*: $B = 5{,}00\times 10^{-6}$ T.)

Obsérvese en el ejercicio anterior que el campo magnético próximo a un alambre portador de corriente de tamaño ordinario es pequeño. A 20 cm de un alambre recto y largo, portador de 5 A, es sólo el 1% del campo magnético terrestre.



Pistola de corriente para medir la intensidad de la corriente eléctrica. Las mordazas de la pistola rodean el conductor sin tocarlo. El campo magnético producido por el conductor al paso de la corriente se mide con un dispositivo basado en el efecto Hall que está montado sobre la pistola. Este dispositivo acusa un voltaje proporcional al campo magnético, el cual a su vez es proporcional a la corriente que circula por el conductor.

EJEMPLO 29.6



Un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente de intensidad de 1,7 A en la dirección z positiva, se encuentra a lo largo de la línea x = –3 cm, y = 0. Un conductor semejante que transporta una corriente de 1,7 A en la dirección z positiva está situado sobre la línea x = +3 cm, y = 0 como indica la figura 29.16. Determinar el campo magnético en un punto sobre el eje y en y = 6 cm.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

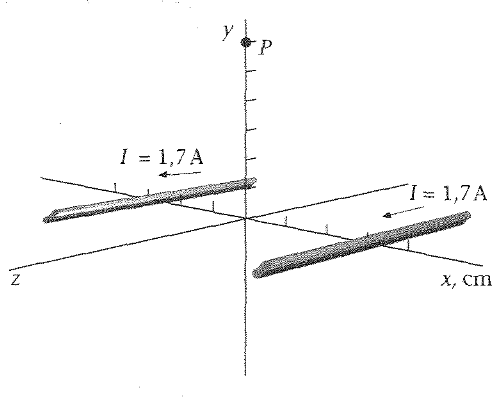


Figura 29.16

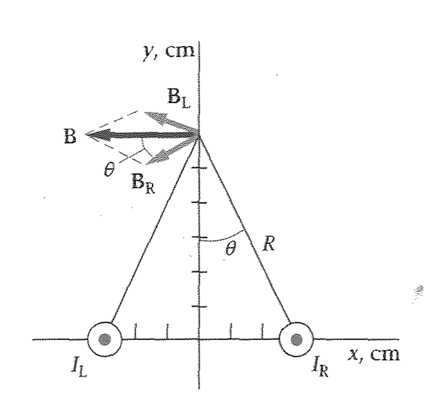


Figura 29.17

Esquema del problema El campo magnético en el punto P es el vector suma del campo B_L debido al alambre situado a la izquierda en la figura 29.17 y el campo B_R situado a la derecha. Como ambos alambres transportan la misma corriente y se encuentran a igual distancia de P, las magnitudes B_L y B_R son iguales. B_L es perpendicular a la recta R que une el alambre izquierdo con el punto P y B_R es perpendicular a la recta que une el alambre derecho con el punto P.

1. El campo en P es el vector suma de los campos B_L y B_R: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_R$

2. En la figura 29.17 puede verse que el campo magnético se encuentra en la dirección x negativa y tiene la magnitud $2B_L \cos\theta$: $\mathbf{B} = -2B_L \cos\theta\, \mathbf{i}$

3. Las magnitudes de B_L y B_R vienen dadas por la ecuación 29.12: $B_L = B_R = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}$

4. R es la distancia de cada alambre al punto P. Su magnitud puede determinarse de la figura y se sustituye en las expresiones de B_L y B_R:

$$R = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2} = 6{,}71\text{ cm}$$

$$B_L = B_R = (10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})\,\frac{2(1{,}7\text{ A})}{0{,}0671\text{ m}} = 5{,}07\times 10^{-6}\text{ T}$$

5. De la figura se obtiene $\cos\theta$: $\cos\theta = \frac{6\text{ cm}}{R} = \frac{6\text{ cm}}{6{,}71\text{ cm}} = 0{,}894$

6. Sustituir los valores de $\cos\theta$ y B_L en la ecuación obtenida en la etapa 2 para B: $\mathbf{B} = -2(5{,}07\times 10^{-6}\text{ T})(0{,}894)\mathbf{i} = -9{,}07\times 10^{-6}\text{ T}$

Ejercicio Determinar B en el origen. (*Respuesta*: 0.)

Ejercicio Determinar B en el origen suponiendo que I_R se dirige perpendicularmente *hacia* la página. (*Respuesta*: $\mathbf{B} = 2{,}27 \times 10^{-5}$ Tj.)

Definición del amperio

Podemos utilizar la ecuación 29.12 correspondiente al campo magnético producido por un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente, y la ecuación 28.5 ($d\mathbf{F} = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$) correspondiente a la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un segmento de conductor portador de corriente, para determinar la fuerza ejercida por una corriente larga y rectilínea sobre otra. La figura 29.18 muestra dos conductores paralelos, largos y rectilíneos que transportan corriente en la misma dirección. Consideremos la fuerza que actúa sobre un segmento $d\ell_2$ por el que circula la corriente I_2 como se indica. El campo magnético B_1 en este segmento debido a la corriente I_1 es perpendicular al segmento $I_2\, d\ell_2$ como se indica en la figura. Esto es cierto para todos los elementos de

www.elsolucionario.net

corriente a lo largo del conductor. La fuerza magnética sobre el segmento de corriente $I_2\, d\ell_2$ está dirigida hacia la corriente I_1. De igual modo, un segmento de corriente $I_1\, d\ell_1$ experimentará una fuerza magnética dirigida hacia la corriente I_2. Así pues, dos corrientes paralelas se atraen una a la otra. Si una de las corrientes se invierte, la fuerza se invertirá, es decir, dos corrientes antiparalelas se repelerán. La atracción o repulsión de corrientes paralelas o antiparalelas fue descubierta experimentalmente por Ampère una semana después de conocer el descubrimiento de Oersted del efecto de una corriente sobre la aguja imantada de una brújula.

La magnitud de la fuerza magnética sobre el segmento $I_2\, d\ell_2$ es

$$dF_2 = |I\, d\boldsymbol{\ell}_2 \times \mathbf{B}_1|$$

Como el campo magnético en el segmento $I_2\, d\ell_2$ es perpendicular a éste, tenemos

$$dF_2 = I_2\, d\ell_2 B_1$$

Si la distancia R entre los conductores es mucho menor que su longitud, el campo en $I_2\, d\ell_2$ debido a la corriente I_1 es aproximadamente igual al campo debido a un conductor infinitamente largo, portador de corriente, dado por la ecuación 29.12. La magnitud de la fuerza sobre el segmento $I_2\, d\ell_2$ es, por tanto,

$$dF_2 = I_2\, d\ell_2\, \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{dF_2}{d\ell_2} = I_2\, \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = 2\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, \frac{I_1 I_2}{R} \tag{29.13}$$

En el capítulo 18, el culombio fue definido en función del amperio, pero la definición del amperio fue aplazada. Ahora podemos definir el amperio del modo siguiente:

El amperio es aquella corriente constante que si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, situados en el vacío con una separación de un metro, produce entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

Definición —Amperio

Esta definición del amperio hace que la permeabilidad del espacio libre sea exactamente $4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2. También permite determinar la unidad de corriente (y por tanto la unidad de carga eléctrica) mediante un experimento mecánico. En la práctica, como es natural, se escogen las corrientes de modo que estén mucho más próximas que 1 m; así no es necesario que los conductores sean tan largos y, sin embargo, la fuerza resulta suficientemente grande para poderse medir con exactitud.

La figura 29.19 muestra una **balanza de corriente** que puede utilizarse para calibrar un amperímetro a partir de la definición fundamental del amperio. El conductor superior situado directamente sobre el conductor inferior está libre para poder girar alrededor de unos bordes en forma de cuchilla y equilibrado de modo que los conductores están separados a una corta distancia. Los conductores se conectan en serie de modo que circula la misma corriente pero en sentidos opuestos, de modo que se repelen en lugar de atraerse. La fuerza de repulsión puede medirse colocando pesos sobre el conductor superior hasta que se consigue de nuevo el equilibrio en la separación original. La fuerza de repulsión se determina midiendo el peso total que se necesita para equilibrar el conductor superior.

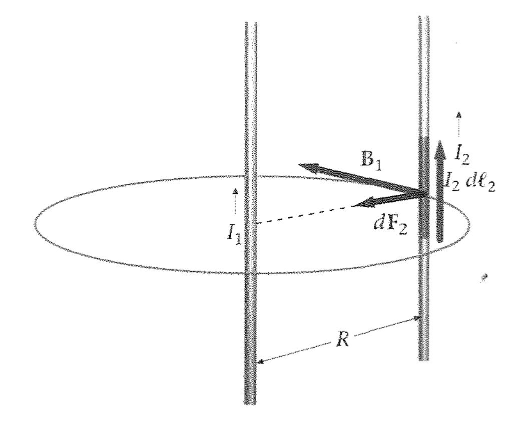
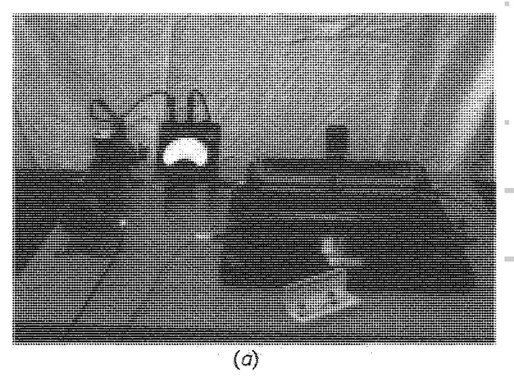
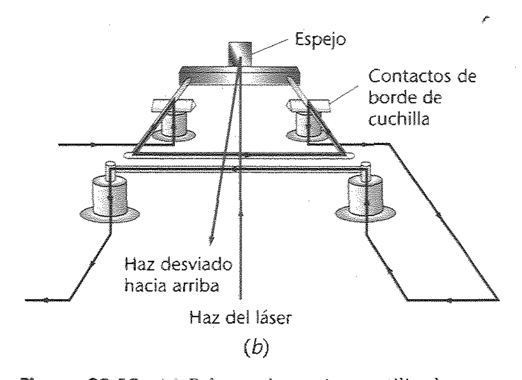


Figura 29.18 Dos conductores rectilíneos y largos portadores de corrientes paralelas. El campo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la corriente I_1 es perpendicular a la corriente I_2. La fuerza que actúa sobre la corriente I_2 está dirigida hacia la corriente I_1. Existe una fuerza igual y opuesta ejercida por la corriente I_2 sobre I_1. Las corrientes, por tanto, se atraen mutuamente.

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

Figura 29.19 (*a*) Balanza de corriente utilizada en un laboratorio de física elemental para calibrar un amperímetro. (*b*) Diagrama esquemático de la balanza de corriente en (*a*). Las dos barras paralelas transportan corrientes iguales, pero de sentido opuesto y por tanto, se repelen entre sí. La fuerza de repulsión está equilibrada por pesos situados sobre la barra superior, que forma parte de un rectángulo equilibrado sobre las aristas de unas cuchillas. El espejo en la parte superior del aparato se utiliza para reflejar un haz de láser a fin de determinar exactamente la posición de la barra superior.

 www.elsolucionario.net



EJEMPLO 29.7
¡Inténtelo!

Dos barras rectilíneas de 50 cm de longitud y separadas 1,5 mm en una balanza de corriente transportan corrientes de 15 A de intensidad en direcciones opuestas. ¿Qué masa debe situarse en la barra superior para equilibrar la fuerza magnética de repulsión?

Esquema del problema La ecuación 29.13 expresa la magnitud de la fuerza magnética por unidad de longitud ejercida por la barra inferior sobre la superior. Determinar esta fuerza para una barra de longitud L e igualarla con el peso mg.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Igualar el peso mg con la fuerza magnética de repulsión de las barras.	$mg = 2\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{I_1 I_2}{R} L$
2. Despejar la masa m.	$m = 1{,}53 \times 10^{-3}$ kg $= 1{,}53$ g

Observación Sólo son necesarios 1,53 g para equilibrar el sistema. La fuerza magnética ejercida entre dos cables portadores de corriente es relativamente pequeña, incluso para corrientes tan grandes como 15 A separadas por solo 1,5 mm.

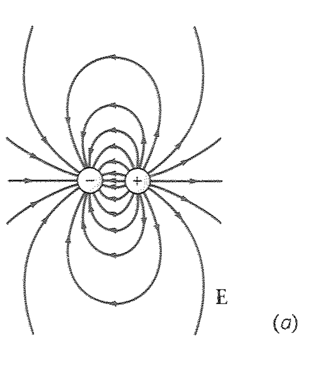
29.3 Ley de Gauss para el magnetismo

Las líneas del campo magnético indicadas en las figuras 29.6, 29.9 y 29.10 difieren de las líneas del campo eléctrico en que las líneas de **B** son curvas cerradas, mientras que las líneas de **E** comienzan y terminan sobre las cargas eléctricas. El equivalente magnético de una carga eléctrica es un polo magnético que parece encontrarse en los extremos de un imán en forma de barra. Sin embargo, aunque parece que las líneas del campo magnético divergen del polo norte fuera de la barra (figura 29.10*b*), realmente apuntan hacia este polo dentro de la barra. Estas líneas entran en el polo sur del imán desde el exterior, pero salen del mismo dentro del imán. Si un extremo de una barra magnética está incluido en una superficie, el número de líneas del campo magnético que dejan la superficie es exactamente igual al número de las que entran en la superficie. Es decir, el flujo neto del campo a través de cualquier superficie cerrada es cero:[1]

$$\phi_{\mathrm{m,neto}} = \oint_S B_n \, dA = 0 \qquad \textbf{(29.14)}$$

Ley de Gauss para el magnetismo

en donde la definición del flujo magnético ϕ_m es exactamente análoga al flujo eléctrico con **E** reemplazado por **B**. Este resultado es la ley de Gauss del magnetismo. Es la afirmación matemática de que no existen puntos en el espacio a partir de los cuales las líneas de campo divergen, o puntos en los cuales las líneas convergen. Es decir, los polos magnéticos aislados no existen. La unidad fundamental del magnetismo es el dipolo magnético. La figura 29.20 compara las líneas de **B** de un dipolo magnético con las líneas de **E** de un dipolo eléctrico. Obsérvese que lejos de los dipolos, las líneas son idénticas. Sin embargo dentro del dipolo, las líneas de **E** son de sentido opuesto a las de **B**. Las líneas de **E** divergen de la carga positiva y convergen sobre la negativa, mientras que las líneas de **B** son bucles cerrados.



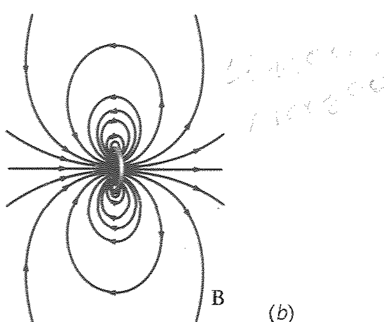


Figura 29.20 (*a*) Líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico. (*b*) Líneas del campo magnético de un dipolo magnético. Lejos de los dipolos, las líneas del campo son idénticas. En la región entre las cargas en (*a*) el campo eléctrico es de signo opuesto al momento del dipolo, mientras que dentro de la espira en (*b*), el campo magnético es paralelo al momento del dipolo.

[1] Recuérdese que el flujo neto del campo eléctrico es una medida del número neto de líneas que salen de una superficie cerrada y es igual a $Q_{\mathrm{interior}}/\epsilon_0$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Ley de Ampère 29.4

En el capítulo 23 vimos que en distribuciones de carga altamente simétricas podíamos calcular el campo eléctrico más fácilmente si se utilizaba la ley de Gauss en lugar de la ley de Coulomb. Una situación semejante se presenta en magnetismo. La ley de Ampère, que relaciona el componente tangencial de **B**, sumado alrededor de una curva cerrada C con la corriente I_C que pasa a través de la curva puede utilizarse para obtener una expresión del campo magnético en situaciones con un alto grado de simetría. En forma matemática, la **ley de Ampère** es:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_C, \qquad C \text{ cualquier curva cerrada} \tag{29.15}$$

Ley de Ampère

en donde I_C es la corriente neta que penetra en el área limitada por la curva C. La ley de Ampère es válida para cualquier curva C en tanto las corrientes sean continuas, es decir, no comiencen o terminen en cualquier punto finito. Es útil para calcular el campo magnético **B** en situaciones con alto grado de simetría, en las cuales la integral de línea $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ puede escribirse como el producto de B por cierta longitud. La ley de Ampère y la ley de Gauss son ambas de considerable importancia teórica e igualmente válidas haya o no simetría; no obstante, si no hay simetría, no son útiles para el cálculo de campos eléctricos o magnéticos.

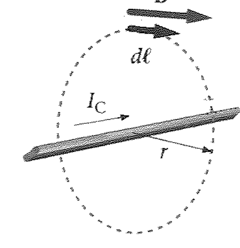


Figura 29.21 Geometría para el cálculo del campo magnético de un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente, mediante la ley de Ampère. Sobre una circunferencia que rodea al conductor, el campo magnético es constante y tangente a la misma.

La aplicación más simple de la ley de Ampère es la determinación del campo magnético creado por un conductor infinitamente largo y rectilíneo portador de una corriente. La figura 29.21 muestra una curva circular alrededor de un punto situado sobre un alambre largo en el centro del mismo. Si suponemos que estamos lejos de los extremos del conductor, podemos usar la simetría para eliminar la posibilidad de cualquier componente de **B** paralelo al alambre. Podemos suponer que el campo magnético es tangente a este círculo y que posee la misma magnitud B en cualquier punto del círculo. La ley de Ampère, por tanto, nos dará:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B \oint_C d\ell = \mu_0 I_C$$

en donde se ha tenido en cuenta que B tiene el mismo valor en todos los puntos del círculo. La integral de $d\ell$ alrededor del círculo es igual a $2\pi r$ y la intensidad I_C es la que corresponde al alambre. Así se obtiene

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

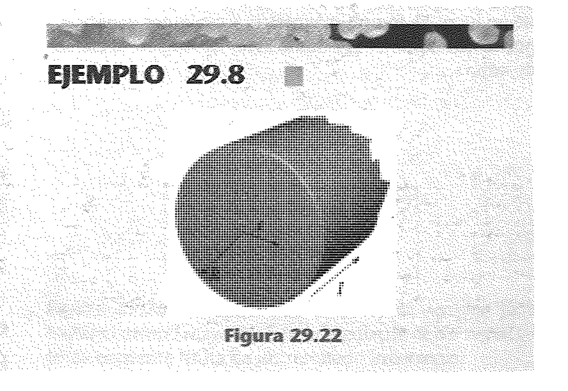
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}$$

que es la ecuación 29.12.

EJEMPLO 29.8

Un alambre largo y recto de radio a transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda el área transversal del conductor. Determinar el campo magnético dentro y fuera del alambre.

Esquema del problema Utilizaremos la ley de Ampère para calcular **B** en virtud del alto grado de simetría. A una distancia r (figura 29.22) sabemos que **B** es tangente a la circunferencia de radio r alrededor del conductor y constante en magnitud en todos los puntos de la misma. La corriente a través de C depende que r sea menor o mayor que el radio del alambre R.


Figura 29.22

 www.elsolucionario.net

1. Aplicar la ley de Ampère a un círculo de radio r:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = B \oint_C d\ell = B2\pi r = \mu_0 I_C$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_C}{r}$$

2. Fuera del alambre, $r > R$ y la corriente total pasa a través de la curva C:

$$I_C = I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

3. Dentro del alambre $r < R$ y la corriene que pasa a través de C es $(\pi r^2/\pi R^2)$ multiplicado por la corriente total I:

$$I_C = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_C}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{(r^2/R^2)I}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} Ir$$

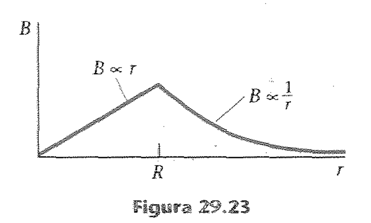


Figura 29.23

Observación Dentro del alambre, el campo crece con la distancia desde el centro del conductor. La figura 29.23 muestra el gráfico de B en función de r para este ejemplo.

Vemos en el ejemplo 29.8 que el campo magnético debido a una corriente uniformemente distribuida sobre un alambre de radio R viene dado por

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} Ir, \qquad r \le R$$
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad r \ge R \tag{29.16}$$

En nuestra siguiente aplicación de la ley e Ampère calcularemos el campo magnético de un **toroide**, formado por espiras de conductor arrolladas alrededor de una figura en forma de neumático como indica la figura 29.24. Tenemos N vueltas de conductor, cada una transportando una corriente I. Para calcular B, determinaremos la integral lineal $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell$ alrededor de una circunferencia de radio r centrada en el centro del toroide. Por simetría, $\mathbf{B}$ es tangente a este círculo y constante en magnitud en todos los puntos de la circunferencia. Por tanto,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = B2\pi r = \mu_0 I_C$$

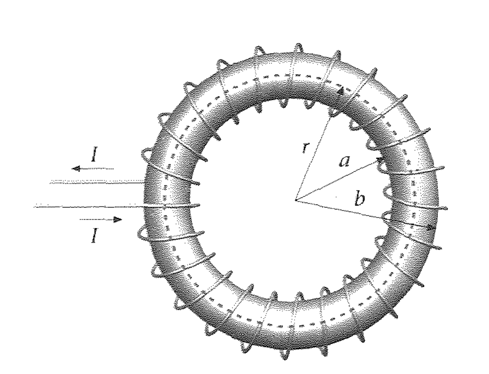


Figura 29.24 Un toroide está formado por espiras de alambre arrolladas alrededor de una figura en forma de neumático. El campo magnético a cualquier distancia r puede determinarse aplicando la ley de Ampère al círculo de radio r.

Sean a y b los radios interior y exterior del toroide, respectivamente. La corriente total a través del círculo de radio r para $a < r < b$ es NI. La ley de Ampère nos da

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = B2\pi r = \mu_0 I_C = \mu_0 NI$$

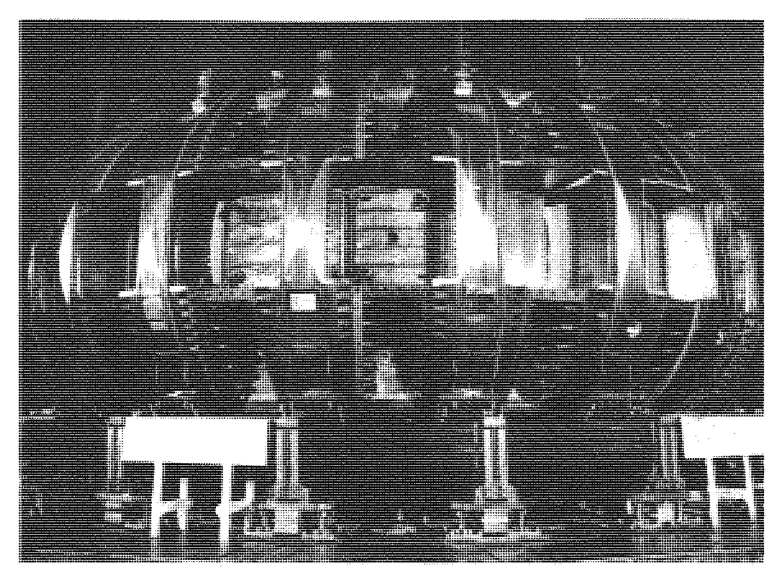
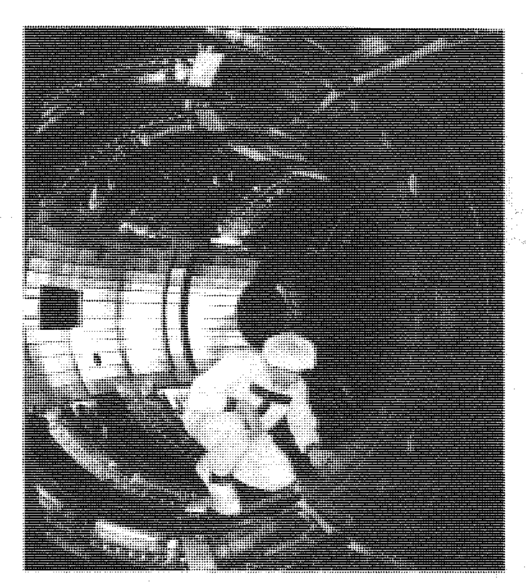
o sea,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \qquad a < r < b \tag{29.17}$$

Campo magnético interior al toroide estrechamente arrollado

Si r es menor que a, no existe corriente a través del círculo de radio r. Si r es mayor que b, la corriente total a través de r es cero, pues por cada corriente I hacia dentro de la página de la figura 29.24 en la superficie interna del toroide, existe una corriente igual I

www.elsolucionario.net

(*a*) El reactor de ensayo de fusión Tokamak es un gran toroide que produce un campo magnético para confinar partículas cargadas. Las bobinas que contienen unos 10 km de alambre de cobre, refrigerado por agua, transportan una corriente pulsante con un valor pico de 73 000 A y produce un campo magnético de 5,2 T durante 3 s. (*b*) Inspección del ensamblaje del Tokamak desde el interior del toroide.

hacia fuera de la página en la superficie exterior. Así el campo magnético es cero, tanto para $r < a$ y $r > b$.

$$B = 0, \qquad r<a \text{ o } r>b$$

El campo magnético interior al toroide no es uniforme, sino que decrece con r. Sin embargo, si el diámetro de las espiras del toroide, $b - a$, es mucho menor que su radio medio, la variación de r desde $r = a$ a $r = b$ es pequeña y B es aproximadamente uniforme como en un solenoide.

Limitaciones de la ley de Ampère

La ley de Ampère es útil para calcular el campo magnético sólo cuando existe un alto grado de simetría. Consideremos la espira de corriente indicada en la figura 29.25. De acuerdo con la ley de Ampère, la integral de línea $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ alrededor de una curva tal como la C de la figura es igual a μ_0 multiplicado por la corriente I de la espira. Aunque la ley de Ampère es cierta para esta curva, el campo magnético **B** no es constante a lo largo de una curva cualquiera que rodea la corriente ni es tangente en todos los puntos a dicha curva. Así pues, no hay simetría suficiente en este caso para permitirnos calcular **B** a partir de la ley de Ampère.

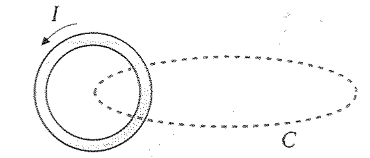


Figura 29.25 La ley de Ampère es válida para la curva C que envuelve a la corriente de la espira circular pero no es útil para hallar **B** debido a que **B** no es constante sobre la curva no tangente a ella.

La figura 29.26 muestra un segmento de corriente finita de longitud ℓ. Deseamos encontrar el campo magnético en el punto P, el cual equidista de los extremos del segmento y está a una distancia r desde el centro del segmento. Una aplicación directa de la ley de Ampère nos da de nuevo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Este resultado es el mismo que en el caso de un conductor infinitamente largo puesto que tenemos los mismos razonamientos de simetría. El resultado no concuerda con el obtenido a partir de la ley de Biot-Savart. Esta ley da un resultado menor que depende de la longitud del segmento de corriente y concuerda con la experiencia. Si el segmento de corriente es sólo una parte de un circuito continuo que transporta una corriente, como se indica en la figura 29.27, la ley de Ampère es válida para la curva C, pero no puede utilizarse para determinar el campo magnético en el punto P porque no hay simetría.

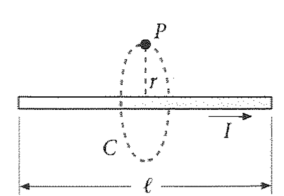


Figura 29.26 La aplicación de la ley de Ampère para hallar el campo magnético en la mediatriz de un segmento de corriente finita da un resultado incorrecto.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

En la figura 29.28, la corriente en el segmento surge de un pequeño conductor esférico con una carga inicial $+Q$ a la izquierda del segmento y otra $-Q$ a la derecha. Cuando se conectan ambas cargas, durante un corto tiempo se produce en el segmento una corriente $I = -dQ/dt$ hasta que las esferas se descargan. En este caso, tenemos la simetría necesaria para suponer que B es tangente a la curva y constante en magnitud a lo largo de la misma. En una situación como ésta, en la cual la corriente es discontinua en el espacio, la ley de Ampère no es válida. En el capítulo 32 veremos como Maxwell fue capaz de modificar la ley de Ampère, de modo que fuera válida para todas las corrientes. Cuando la forma generalizada de Maxwell para la ley de Ampère se utiliza para calcular el campo magnético correspondiente a un segmento de corriente como el indicado en la figura 29.28 el resultado concuerda con el obtenido mediante la ley de Biot y Savart.

29.5 El magnetismo en la materia

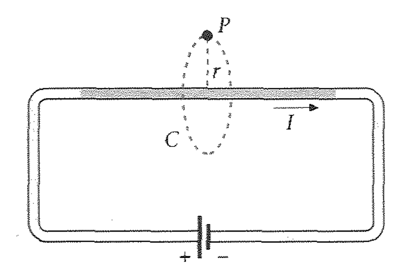


Figura 29.27 Si el segmento de corriente de la figura 29.25 es una parte de un circuito completo, la ley de Ampère para la curva C es correcta, pero no existe la simetría suficiente para utilizarla con objeto de hallar el campo magnético en el punto P.

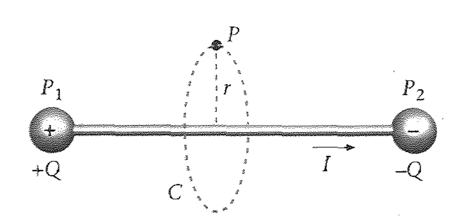


Figura 29.28 Si el segmento de corriente de la figura 29.26 es debido a un flujo momentáneo de carga desde un pequeño conductor a la izquierda hasta otro a la derecha, hay suficiente simetría para utilizar la ley de Ampère y calcular el campo magnético en P, pero la ley de Ampère no es válida porque la corriente no es continua en el espacio.

Los átomos tienen momentos dipolares magnéticos debido al movimiento de sus electrones y debido al momento dipolar magnético intrínseco asociado al espín de los electrones. A diferencia de los dipolos eléctricos, la alineación de los dipolos magnéticos paralelos a un campo magnético externo tiende a *incrementar* el campo. Podemos analizar esta diferencia comparando las líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico con las líneas del campo magnético de un dipolo magnético, tal como una pequeña espira de corriente, como muestra la figura 29.20. Lejos de los dipolos las líneas de campo son idénticas. Sin embargo, entre las cargas del dipolo eléctrico, las líneas de campo se oponen a la dirección del momento dipolar, mientras que dentro de la espira de corriente, las líneas de campo magnético son paralelas al momento dipolar magnético. Así, pues, en un material magnéticamente polarizado, los dipolos magnéticos crean un campo magnético *paralelo* a los vectores del momento-dipolar-magnético.

Podemos clasificar los materiales en tres categorías, **paramagnéticos**, **diamagnéticos** y **ferromagnéticos** de acuerdo con el comportamiento de sus momentos magnéticos en un campo magnético externo. El paramagnetismo surge del alineamiento parcial de los espines electrónicos (en los metales) o de los momentos magnéticos atómicos o moleculares en presencia de un campo magnético externo en la dirección del campo. En los materiales paramagnéticos, los dipolos magnéticos no interaccionan fuertemente entre sí y normalmente están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo, los dipolos se alinean parcialmente en la dirección del campo, produciendo así un incremento del mismo. Sin embargo, a temperaturas ordinarias y con campos externos normales, sólo una fracción muy pequeña de las moléculas se ven alineadas debida a que el movimiento térmico tiende a desordenar su orientación. El aumento del campo magnético total es, por consiguiente, muy pequeño. El ferromagnetismo es mucho más complicado. Debido a una fuerte interacción entre los dipolos magnéticos vecinos, puede conseguirse un alto grado de alineación incluso con campos magnéticos externos débiles, originando así un incremento muy grande del campo total. Incluso en el caso de que no exista ningún campo magnético externo, los materiales magnéticos pueden tener sus dipolos magnéticos alineados, como sucede en el caso de los imanes permanentes. El diamagnetismo surge de los momentos dipolares magnéticos orbitales inducidos por un campo magnético externo. Estos momentos magnéticos son opuestos a la dirección del campo magnético aplicado y, por tanto, debilitan el campo magnético total B. Este efecto realmente ocurre en todos los materiales, pero como los momentos magnéticos inducidos son muy pequeños comparados con los momentos magnéticos permanentes, el diamagnetismo viene enmascarado por los efectos paramagnéticos o ferromagnéticos. El diamagnetismo, por tanto, sólo se observa en materiales que no poseen momentos magnéticos permanentes.

Imantación y susceptibilidad magnética

Cuando un material se sitúa en un campo magnético intenso, tal como el de un solenoide, el campo magnético de éste tiende a alinear los momentos dipolares magnéticos (permanentes o inducidos) dentro del material, el cual se magnetiza. Un material que

www.elsolucionario.net

experimenta este proceso se describe por su **imantación** M, que se define por el momento dipolar magnético neto por unidad de volumen del material:

$$\mathbf{M} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dV} \tag{29.18}$$

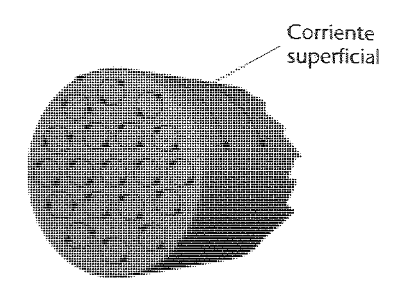


Figura 29.29 Modelo de espiras de corriente atómicas en el cual todos los dipolos atómicos son paralelos al eje del cilindro. La corriente neta en cualquier punto dentro del material es cero debido a la cancelación de los átomos vecinos. El resultado es una corriente superficial semejante a la de un solenoide.

Mucho antes de conocerse la estructura atómica o molecular, Ampère propuso un modelo de magnetismo en el cual la imantación de los materiales era debida a corrientes circulares microscópicas dentro del material imantado. Actualmente se sabe que estas corrientes circulares son el resultado del movimiento intrínseco de las cargas atómicas. Consideremos un cilindro de material imantado. La figura 29.29 muestra las corrientes atómicas circulares en el cilindro alineadas con sus momentos magnéticos a lo largo del eje del cilindro. Debido a la cancelación de las corrientes circulares vecinas, la corriente neta en cualquier punto interior del material es cero y el único resultado es una corriente neta sobre la superficie del mismo. Esta corriente superficial (figura 29.30), llamada **corriente amperiana**, es semejante a la corriente real en los arrollamientos del solenoide.

La figura 29.31 muestra una pequeña sección en forma de disco de área transversal A, longitud $d\ell$ y volumen $dV = A\ d\ell$. Sea di la corriente amperiana sobre la superficie del disco. La magnitud del momento dipolar magnético del disco es la misma que la de una corriente circular de área A que transporta una corriente di:

$$d\mu = A\ di$$

La imantación M del disco es el momento magnético por unidad de volumen:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A\ di}{A\ d\ell} = \frac{di}{d\ell} \tag{29.19}$$

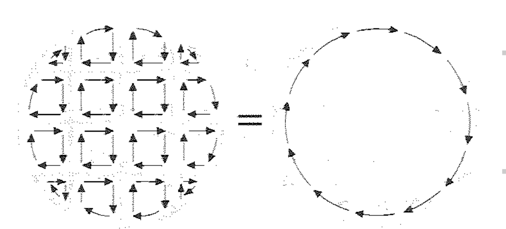


Figura 29.30 Las corrientes en las espiras adyacentes en el interior de un material uniformemente imantado se cancelan permaneciendo sólo una corriente superficial. Esta cancelación tiene lugar en todo punto interior, cualquiera que sea la forma de las espiras.

Así, la magnitud del vector imantación es la corriente amperiana por unidad de longitud a lo largo de la superficie del material imantado. De este resultado se deduce que las unidades de M son amperios por metro.

Sea un cilindro de imantación uniforme M paralelo a su eje. Como hemos visto, el efecto de la imantación es el mismo que si el cilindro transportara una corriente superficial por unidad de longitud de magnitud M. Esta corriente es semejante a la transportada por un solenoide arrollado compactadamente. Para un solenoide, la corriente por unidad de longitud es nI, en donde n es el número de vueltas por unidad de longitud e I la corriente en cada vuelta. La magnitud del campo magnético B_m dentro del cilindro y lejos de sus extremos viene dado por la ecuación 29.9 para un solenoide reemplazando nI por M:

$$B_m = \mu_0 M \tag{29.20}$$

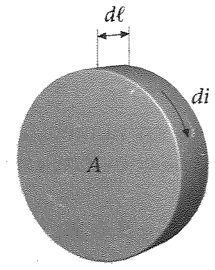


Figura 29.31 Disco elemental para el estudio de la relación entre la imantación M y la corriente superficial por unidad de longitud.

Situemos un cilindro de material magnético dentro de un largo solenoide de n vueltas por unidad de longitud que transporta una corriente I. El campo aplicado del solenoide $\mathbf{B}_{ap}$ ($B_{ap} = \mu_0 nI$) imanta el material, de modo que éste adquiere una imantación M. el campo magnético resultante en un punto interior al solenoide y lejos de sus extremos debido a la corriente en el solenoide más el material imantado es

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} + \mu_0 \mathbf{M} \tag{29.21}$$

En los materiales paramagnético y ferromagnético, **M** posee la misma dirección y sentido que $\mathbf{B}_{ap}$; en los materiales diamagnéticos, **M** se opone a $\mathbf{B}_{ap}$. En los materiales paramagnéticos y diamagnéticos la imantación resulta proporcional al campo magnético aplicado que produce el alineamiento de los dipolos magnéticos del material. Podemos escribir

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}_{ap}}{\mu_0} \tag{29.22}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Explorando la naturaleza

La fuerza magnética y la conservación del momento lineal

La fuerza magnética ejercida por una carga móvil sobre otra se determina combinando la ecuación 28.1 que nos da la fuerza ejercida por un campo magnético sobre una carga móvil y la ecuación 29.1 que expresa el campo magnético ejercido por una carga. La fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$ ejercida por una carga q_1 que se mueve con velocidad v_1 sobre una carga q_2 de velocidad v_2 viene dada por

$$\mathbf{F}_{1,2} = q_2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = q_2\mathbf{v}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{1,2}}{r_{1,2}^2}\right) \quad \textbf{(E29.1a)}$$

en donde $\mathbf{B}_1$ es el campo magnético en la posición de la carga q_2 debido a la carga q_1, y $\hat{\mathbf{r}}_{1,2}$ es el vector unitario que apunta de q_1 a q_2. Igualmente, la fuerza $\mathbf{F}_{2,1}$ ejercida por una carga q_2 que se mueve con velocidad v_2 sobre una carga q_1 de velocidad v_1 viene expresada por

$$\mathbf{F}_{2,1} = q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = q_1\mathbf{v}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{2,1}}{r_{2,1}^2}\right) \quad \textbf{(E29.1b)}$$

Estas relaciones son notables por el hecho de que la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 no es generalmente igual y opuesta a la ejercida por la carga q_2 sobre la carga q_1. Es decir, estas fuerzas no obedecen la tercera ley de Newton, como puede demostrarse considerando el caso especial ilustrado en la figura E29.1. Aquí, el campo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la carga q_1 sobre la carga q_2 tiene la dirección z negativa y la fuerza sobre q_2 está dirigido hacia la izquierda en la dirección x negativa. Sin embargo, el campo magnético $\mathbf{B}_2$ debido a q_2 sobre q_1 es cero ya que q_1 se encuentra en la línea de movimiento de q_2. Por tanto, la fuerza magnética ejercida por q_2 sobre q_1 es nula. Así pues, existe una fuerza neta $\mathbf{F}_{1,2}$, que actúa sobre el sistema de las dos cargas. El sistema acelerará en la dirección de esta fuerza y el momento lineal no se conserva.

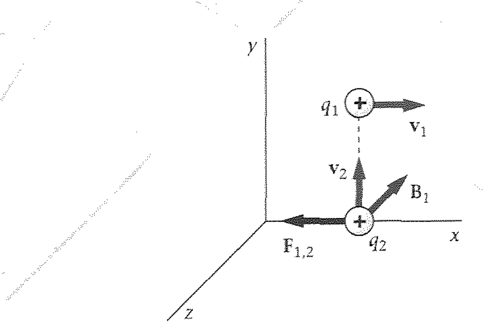


Figura E29.1 Las fuerzas ejercidas por dos cargas móviles entre sí no son iguales y opuestas. El campo magnético $\mathbf{B}_1$ producido por la carga q_1 sobre q_2 tiene la dirección z negativa y, por tanto, ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$ sobre q_2 a la izquierda en la dirección x negativa. Sin embargo, el campo $\mathbf{B}_2$ ejercido por la carga q_2 sobre q_1 es nulo, de tal modo que no hay fuerza sobre q_1.

Esta aparente violación de la ley de conservación del momento lineal resulta al considerar la fuerza ejercida por una carga sobre

en donde χ_m es un número sin dimensiones llamado **susceptibilidad magnética**. La ecuación 29.21 se convierte en

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} + \mu_0\mathbf{M} = \mathbf{B}_{ap}(1 + \chi_m) = K_m\mathbf{B}_{ap} \quad \textbf{(29.23)}$$

en donde

$$K_m = 1 + \chi_m \quad \textbf{(29.24)}$$

se denomina **permeabilidad relativa** del material. Para los materiales paramagnéticos, χ_m es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. Para los materiales diamagnéticos es un número negativo pequeño independiente de la temperatura. La tabla 29.1 se expone la susceptibilidad magnética de diversos materiales paramagnéticos y diamagnéticos. Como puede verse, en los sólidos reseñados esta magnitud es del orden de 10^{-5} y $K_m \approx 1$.

Tabla 29.1 Susceptibilidad magnética de diversos materiales a 20 °C

Material	χ_m
Aluminio	$2{,}3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1{,}66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0{,}98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2{,}2 \times 10^{-5}$
Oro	$-3{,}6 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1{,}2 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-3{,}2 \times 10^{-5}$
Plata	$-2{,}6 \times 10^{-5}$
Sodio	$-0{,}24 \times 10^{-5}$
Titanio	$7{,}06 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$6{,}8 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (1 atm)	$-9{,}9 \times 10^{-9}$
Dióxido de carbono (1 atm)	$-2{,}3 \times 10^{-9}$
Nitrógeno (1 atm)	$-5{,}0 \times 10^{-9}$
Oxígeno (1 atm)	2090×10^{-9}

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

otra como una fuerza que actúa a distancia y despreciar el momento transportado por los campos eléctrico y magnético de las cargas móviles. Ya vimos en el capítulo 22 que existe una energía asociada al campo eléctrico y veremos posteriormente que existe también energía asociada a un campo magnético. Los tratamientos avanzados de los campos eléctrico y magnético de las cargas móviles demuestran que también existe un momento asociado a estos campos. Cuando las cargas se mueven como en la figura E29.1, el momento lineal producido cuando el sistema acelera hacia la izquierda se equilibra con el momento lineal en dirección opuesta transportado por los campos, el momento total del sistema se conserva.

Los campos electromagnéticos producidos por cargas móviles, también transportan momento angular. Consideremos la figura E29.2 que muestra una carga puntual q_1, de vector posición $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, la cual se mueve paralelamente al eje x con velocidad $\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{i}$ y una segunda carga puntual q_2 en el origen, que se mueve a lo largo del eje x con velocidad $\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{i}$. Calculemos la fuerza magnética ejercida por cada una de las cargas sobre la otra, suponiendo que ambas son positivas.

Determinemos primero la fuerza que actúa sobre la carga q_1. Observemos que el vector $\mathbf{r}_{2,1}$ dirigido de la carga q_2 a la carga q_1 es justamente $\mathbf{R}$. Usando la expresión $\hat{\mathbf{r}}_{2,1} = \mathbf{R}/R$ tenemos

$$\frac{\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{2,1}}{r_{2,1}^2} = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{v_2\mathbf{i} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}{R^3} = \frac{yv_2}{R^3}\,\mathbf{k}\text{ o}$$

de modo que el campo magnético producido por la carga q_2 en la posición de la carga q_1 es

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{2,1}}{r_{2,1}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2yv_2}{R^3}\,\mathbf{k}$$

La fuerza magnética ejercida por la carga q_2 sobre la carga q_1 es, por tanto,

$$\mathbf{F}_{2,1} = q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = q_1v_1\mathbf{i} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2yv_2}{R^3}\mathbf{k}$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v_1v_2y}{R^3}\,\mathbf{j}$$

Como se indica en la figura, esta fuerza está dirigida hacia abajo y es paralela al eje y.

Para determinar la fuerza magnética ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2, observemos que el vector $\mathbf{r}_{1,2}$ desde la carga q_1 a la carga q_2 es $-\mathbf{R}$. Por tanto, el campo magnético producido por la carga q_1 en la posición de la carga q_2 es

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}^2}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times (-\mathbf{R})}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1yv_1}{R^3}\,\mathbf{k}$$

La fuerza magnética ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 es, por tanto,

$$\mathbf{F}_{1,2} = q_2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = q_2v_2\mathbf{i} \times \left(-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1yv_1}{R^3}\,\mathbf{k}\right)$$
$$= +\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v_1v_2y}{R^3}\,\mathbf{j}$$

En este caso, las fuerzas son iguales y opuestas como indica la figura 2*b*, pero no están situadas sobre la línea que une ambas partículas. Por tanto, las fuerzas magnéticas ejercen el momento de un par sobre el sistema de las dos partículas. Aquí, la falta aparente de conservación del momento angular debido a la existencia de este par de fuerzas se resuelve considerando el momento angular transportado por el campo electromagnético.

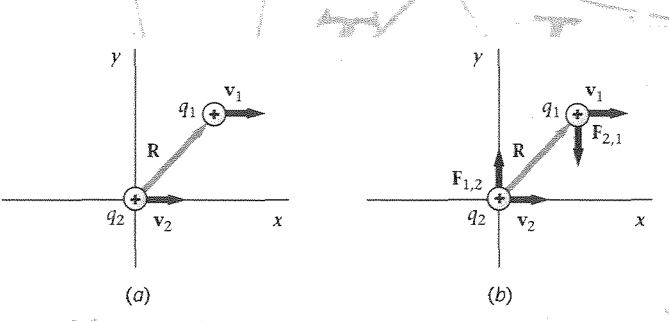


Figura E29.2 (*a*) Dos cargas se mueven en direcciones paralelas (*b*). Las fuerzas magnéticas ejercidas por las cargas entre sí son iguales y opuestas, pero no se encuentran a lo largo de la línea que une las cargas.

La imantación de los materiales ferromagnéticos que estudiaremos posteriormente es mucho más complicada. La permeabilidad relativa K_m definida como el cociente B/B_{ap} no es constante y sus valores máximos varían entre 5000 y 100 000. En el caso de los imanes permanentes, K_m no puede definirse, ya que estos materiales exhiben la imantación incluso en ausencia de un campo aplicado.

Momentos magnéticos atómicos

La imantación de una sustancia paramagnética o ferromagnética puede relacionarse con los momentos magnéticos permanentes de los átomos individuales o electrones de la sustancia. El momento magnético orbital de un electrón atómico puede deducirse semiclásicamente aunque es de origen mecánico-cuántico. En efecto, consideremos una partícula de masa m y carga q que se mueve con velocidad v en un círculo de radio r, como muestra la figura 29.32. La magnitud del momento angular de la partícula es

$$L = mvr \qquad \textbf{(29.25)}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

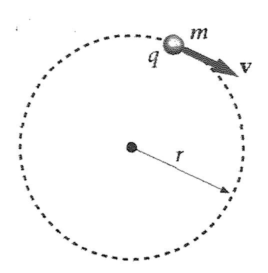


Figura 29.32 Partícula de carga q y masa m moviéndose en un círculo de radio r. El momento angular está dirigido hacia el papel y su magnitud es mvr; el momento magnético está dirigido hacia el papel (si q es positivo) y su magnitud es $\frac{1}{2}\,qvr$.

La magnitud del momento magnético es el producto de la corriente por el área del círculo

$$\mu = IA = I\pi r^2$$

Si T es el tiempo durante el cual la carga completa una revolución, la intensidad de la corriente (carga que pasa por un punto en la unidad de tiempo) es q/T. Como el período T es igual a la distancia $2\pi r$ dividida por la velocidad v, la intensidad es

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

El momento magnético es, por tanto,

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r}\,\pi r^2 = \frac{1}{2}\,qvr \qquad \textbf{(29.26)}$$

Teniendo en cuenta que $vr = L/m_q$ (ecuación 29.5) resulta para el momento magnético

$$\mu = \frac{q}{2m}\,L$$

Si la carga q es positiva, el momento angular y el momento magnético tienen igual sentido. Podemos por tanto escribir:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\,\mathbf{L} \qquad \textbf{(29.27)}$$

Relación clásica entre el momento magnético y el momento angular

La ecuación 29.27 es la relación general clásica entre el momento magnético y el momento angular. Se cumple también en la teoría cuántica del átomo para el momento angular orbital, pero no para el momento angular de espín intrínseco del electrón. Para el espín electrónico, el momento magnético es el doble que el previsto por esta ecuación.[1] El factor extra 2 es un resultado de la teoría cuántica que no tiene analogía en la mecánica clásica.

Como el momento angular está cuantizado, el momento magnético de un átomo también lo está. El cuanto del momento angular es $\hbar = h/2\pi$, en donde h es la constante de Planck. Por tanto, podemos expresar el momento magnético en función de $\mathbf{L}/\hbar$:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q\hbar}{2m}\,\frac{\mathbf{L}}{\hbar}$$

Para un electrón, $m = m_e$ y $q = -e$, de modo que el momento magnético del electrón debido a su movimiento orbital es

$$\boldsymbol{\mu}_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e}\,\frac{\mathbf{L}}{\hbar} = -\mu_B\,\frac{\mathbf{L}}{\hbar} \qquad \textbf{(29.28)}$$

Momento magnético debido al movimiento orbital de un electrón

[1] Las medidas de precisión indican que el momento magnético del electrón debido a su espín es 2,00232 veces mayor que el previsto por la ecuación 29.25. Este resultado, y el fenómeno del propio espín del electrón, fue previsto en 1927 por P. Dirac, quien combinó la relatividad especial y la mecánica cuántica en una ecuación de onda relativista llamada ecuación de Dirac. El hecho de que el momento magnético intrínseco del electrón sea aproximadamente el doble del valor esperado es una muestra evidente de que el modelo simple del electrón como una esfera con espín no debe tomarse al pie de la letra.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

en donde

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{J/T} = 5{,}79 \times 10^{-5}\ \text{eV/T} \qquad (29.29)$$

Magnetón de Bohr

es la unidad cuántica del momento magnético llamada **magnetón de Bohr**. El momento magnético de un electrón debido a su momento angular de espín intrínseco **S** es

$$\boldsymbol{\mu}_S = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\mathbf{S}}{\hbar} = -2\mu_B \frac{\mathbf{S}}{\hbar} \qquad (29.30)$$

Momento magnético debido al espín electrónico

Aunque el cálculo del momento magnético de un átomo es un problema complicado en teoría cuántica, el resultado para todos los electrones, de acuerdo con la teoría y la experiencia, es que el momento magnético es del orden de unos pocos magnetones de Bohr. Para los átomos de momento angular neto nulo, el momento magnético neto es cero.[1]

Si todos los átomos o moléculas de un material poseen alineados sus momentos magnéticos, el momento magnético por unidad de volumen del material es el producto del número de moléculas por unidad de volumen n y el momento magnético μ de cada molécula. En este caso límite, la **imantación de saturación** M_s es

$$M_s = n\mu \qquad (29.31)$$

El número de moléculas por unidad de volumen puede determinarse a partir de la masa molecular $\mathcal{M}$, la densidad del material ρ y el número de Avogadro N_A:

$$n = \frac{N_A(\text{átomos/mol})}{\mathcal{M}(\text{kg/mol})}\,\rho(\text{kg/m}^3) \qquad (29.32)$$

EJEMPLO 29.9

Determinar la imantación de saturación y el campo magnético que se produce en el hierro, suponiendo que cada átomo de este metal tiene un momento magnético de 1 magnetón de Bohr.

Esquema del problema Determinamos el número de moléculas por unidad de volumen a partir de la densidad del hierro $\rho = 7{,}9 \times 10^3$ kg/m³ y su masa molecular $\mathcal{M} = 55{,}8 \times 10^{-3}$ kg/mol.

1. El campo magnético de saturación es el producto del número de moléculas por unidad de volumen y el momento magnético de cada molécula:

$$M_s = n\mu$$

2. Calcular el número de moléculas por unidad de volumen a partir del número de Avogadro, la masa molecular y la densidad:

$$n = \frac{N_A}{\mathcal{M}}\rho = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{55{,}8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}(7{,}9 \times 10^3\ \text{kg/m}^3) = 8{,}52 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3$$

[1] La estructura cortical de los átomos se trata en el capítulo 37.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

3. Aplicar este resultado y $\mu = 1$ magnetón de Bohr para calcular la imantación de saturación:

$$M_s = n\mu = (8{,}52\times10^{28}\ \text{átomos/m}^3)(9{,}27\times10^{-24}\ \text{A}\cdot\text{m}^2) = 7{,}90\times10^5\,\text{A/m}$$

4. El campo magnético sobre el eje de un cilindro largo de hierro resultante de esta imantación máxima viene dado por $B = \mu_0 M_s$:

$$B = \mu_0 M_s = (4\pi\times10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(7{,}90\times10^5\ \text{A/m}) = 0{,}993\ \text{T} \approx 1\ \text{T}$$

Observaciones El campo magnético de saturación medido en el hierro recocido es aproximadamente 2,16 T, lo que indica que el momento magnético de un átomo de hierro es algo superior a 2 magnetones de Bohr. Este momento magnético es debido principalmente a los espines de dos electrones no apareados en el átomo de hierro.

OPCIONAL

Paramagnetismo

El paramagnetismo se presenta en sustancias cuyos átomos tienen unos momentos magnéticos permanentes que interactúan entre sí sólo muy débilmente, dando lugar a una susceptibilidad magnética χ_m positiva y muy pequeña. Cuando no existe ningún campo magnético externo, estos momentos magnéticos están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo tienden a alinearse paralelamente al campo, pero esta alineación está contrarrestada por la tendencia que tienen los momentos a orientarse aleatoriamente debido al movimiento térmico. la fracción de los momentos que se alinean con el campo depende de la intensidad de éste y de la temperatura. Esta fracción es normalmente pequeña, pues la energía de un momento magnético en un campo magnético externo es típicamente mucho menor que la energía interna de un átomo del material, la cual es del orden de kT, siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta.

La energía potencial de un dipolo magnético de momento $\boldsymbol{\mu}$ en un campo magnético externo **B** viene dada por la ecuación 28.16:

$$U = -\mu B\cos\theta = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

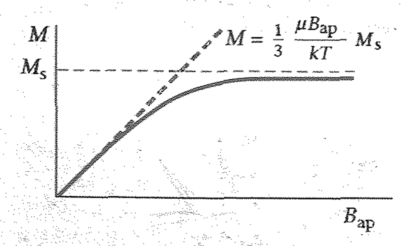


Figura 29.33 Representación gráfica de la imantación M en función del campo aplicado B_{ap}. En campos muy intensos, la imantación se aproxima al valor de saturación M_s. Este valor se alcanza sólo a muy bajas temperaturas. En campos débiles, la imantaicón es aproximadamente proporcional a B_{ap}, resultado conocido como ley de Curie.

La energía potencial cuando el momento es paralelo al campo ($\theta = 0$) es, por tanto, menor que cuando es antiparalelo ($\theta = 180°$) en la cantidad $2\,\mu B$. Para un momento magnético típico de 1 magnetón de Bohr y un campo magnético intenso de 1 T, la diferencia de energía potencial es

$$\Delta U = 2\mu_B B = 2(5{,}79\times10^{-5}\ \text{eV/T})(1\ \text{T}) = 1{,}16\times10^{-4}\ \text{eV}$$

A una temperatura normal de $T = 300$ K, la energía térmica típica kT es

$$kT = (8{,}62\times10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 2{,}59\times10^{-2}\ \text{eV}$$

la cual es unas 200 veces mayor que $2\mu_B B$. Así, incluso en un campo magnético intenso de 1 T, la mayor parte de los momentos magnéticos estarán aleatoriamente orientados a causa de los movimientos térmicos, a menos que la temperatura sea muy baja.

La figura 29.33 muestra un gráfico de la imantación M en función de un campo magnético externo aplicado B_{ap} a una determinada temperatura. En campos muy intensos, casi todos los momentos magnéticos están alineados con el campo y $M \approx M_s$. (Para los campos magnéticos alcanzables en un laboratorio, esto sólo puede ocurrir a temperaturas muy bajas.) Cuando $B_{ap} = 0$, $M = 0$, lo que indica que la orientación de los momentos es completamente aleatoria. En campos débiles, la imantación es aproximadamente pro-

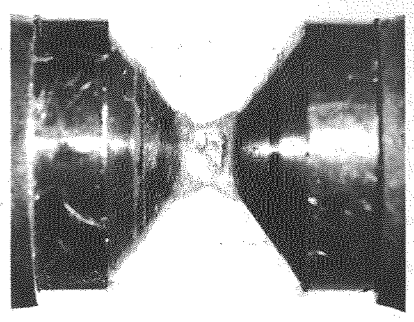
www.elsolucionario.net

porcional al campo aplicado, lo que viene indicado por la línea naranja de trazos de la figura. En esta región, la imantación viene dada por

$$M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s \qquad (29.33)$$

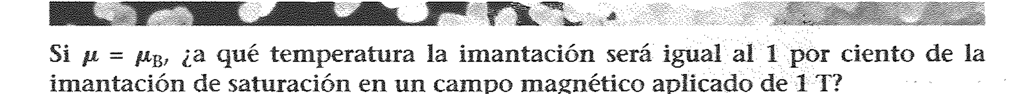
Ley de Curie

Obsérvese que ($\mu B_{ap}/kT$) es el cociente entre la energía máxima de un dipolo en el campo magnético y la energía térmica característica. El hecho de que la imantación varía en razón inversa con la temperatura absoluta fue descubierto experimentalmente por Pierre Curie y se conoce con el nombre de **ley de Curie**.



El oxígeno líquido, paramagnético, es atraído por el campo magnético de un imán permanente. Como el campo magnético no es uniforme sobre los dipolos magnéticos se ejerce una fuerza neta.

OPCIONAL



EJEMPLO 29.10

Si $\mu = \mu_B$, ¿a qué temperatura la imantación será igual al 1 por ciento de la imantación de saturación en un campo magnético aplicado de 1 T?

1. Sustituir $M = 0{,}01\ M_s$ en la ley de Curie: $M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s = 0{,}01 M_s$

2. Despejar T: $T = \frac{\mu B_{ap}}{0{,}03k} = \frac{(5{,}79 \times 10^{-5}\text{ eV/T})(1\text{ T})}{(0{,}03)(8{,}62 \times 10^{-5}\text{ eV/K})} = 22{,}4\text{ K}$

Observación Incluso para un campo magnético intenso de 1 T, la imantación es inferior al 1 por ciento de saturación a temperaturas por encima de 22,4 K.

Ejercicio Si $\mu = \mu_B$, ¿qué fracción de la imantación de saturación es M a 300 K para un campo magnético externo de 15 000 G? (*Respuesta*: $M/M_s = 1{,}12 \times 10^{-3}$.)

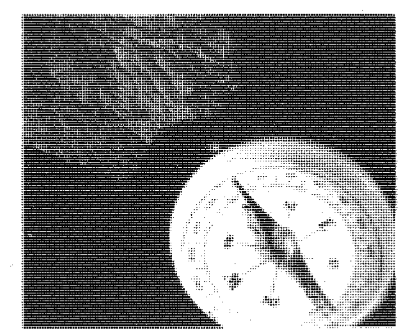
www.elsolucionario.net

Ferromagnetismo

El ferromagnetismo se presenta en el hierro puro, cobalto y níquel y en aleaciones de estos metales entre sí. También tiene lugar en el gadolinio, disprosio y en pocas sustancias más. El ferromagnetismo es debido a una interacción intensa entre los electrones de una banda parcialmente llena del metal o entre los electrones localizados que forman momentos magnéticos sobre moléculas o átomos vecinos. Esta interacción, llamada **interacción de intercambio**, disminuye la energía de un par de electrones con espines paralelos.

Los materiales ferromagnéticos tienen valores positivos muy grandes de susceptibilidad magnética χ_m (medidos en las condiciones descritas posteriormente). En estas sustancias un campo magnético externo pequeño puede producir un grado muy alto de alineación de los momentos dipolares magnéticos atómicos, que en algunos casos, puede persistir incluso aunque no exista campo magnetizante externo. Esto es así debido a que los momentos dipolares magnéticos de los átomos de estas sustancias ejercen fuerzas intensas sobre sus vecinos, de modo que en una pequeña región del espacio los momentos están alineados unos con otros aun cuando no exista un campo externo. Esta pequeña región se llama **dominio magnético**. El tamaño de un dominio es normalmente microscópico. Dentro del dominio, todos los momentos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineación varía de un dominio a otro de modo que el momento magnético neto de un trozo macroscópico de material es cero en su estado normal. La figura 29.34 ilustra esta situación. La mecánica cuántica predice la existencia

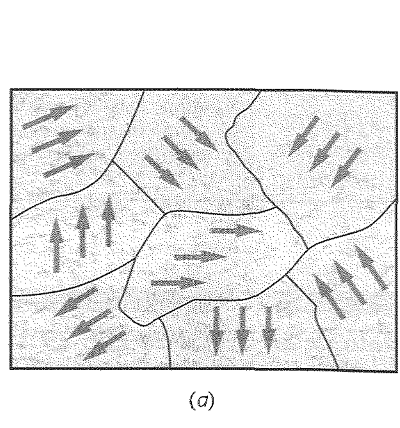
OPCIONAL



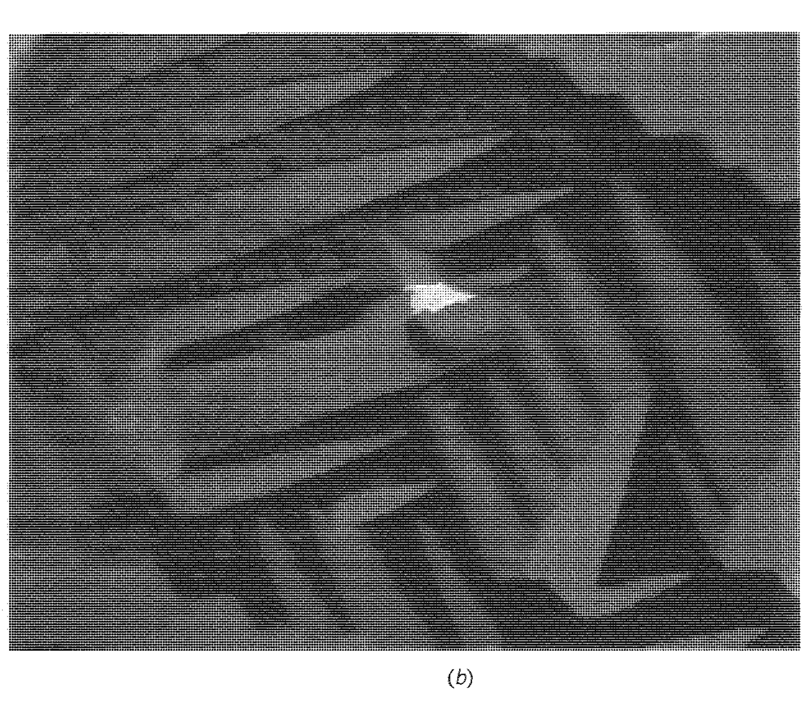
Un fragmento de magnetita (piedra imán) atrae la aguja de una brújula.

www.elsolucionario.net

OPCIONAL



(a)



(b)

Figura 29.34 (a) Ilustración esquemática de los dominios ferromagnéticos. Dentro de un dominio, los dipolos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineamiento varía de un dominio a otro, de modo que el momento magnético neto es nulo. Un pequeño campo magnético externo puede causar el ensanchamiento de aquellos dominios que se alinean paralelamente al campo, o producir la rotación de la dirección de alineamiento dentro del dominio. En cualquier caso, el resultado es un momento magnético neto paralelo al campo. (b) Dominios magnéticos sobre la superficie de un cristal de Fe-3%Si observado mediante un microscopio electrónico de barrido con análisis de polarización. Los cuatro colores indican cuatro posibles orientaciones de los dominios.

www.elsolucionario.net

de fuerzas dipolares en estas sustancias que no pueden ser explicadas mediante la física clásica. A temperaturas por encima de una temperatura crítica, denominada **temperatura de Curie**, la agitación térmica es suficiente para destruir esta alineación y los materiales ferromagnéticos se transforman en paramagnéticos.

Cuando se aplica un campo magnético externo, los límites de los dominios se desplazan y al mismo tiempo la dirección de alineación dentro de un dominio puede variar de modo que exista un momento magnético neto en dirección del campo aplicado. Puesto que el grado de alineación es grande incluso en el caso de un campo externo pequeño, el campo magnético producido en el material por los dipolos suele ser frecuentemente mucho mayor que el campo externo.

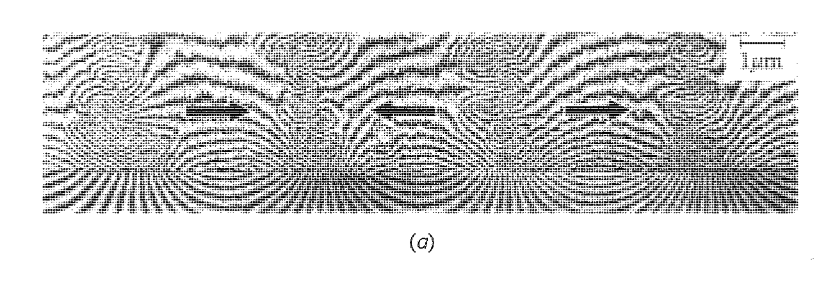
Consideremos la imantación de una barra larga de hierro en el interior de un solenoide haciendo que aumente gradualmente la corriente que circula por los arrollamientos del solenoide. Admitiremos que la barra y el solenoide son suficientemente grandes para permitirnos despreciar los efectos de los extremos. Como los momentos magnéticos inducidos están en la misma dirección que el campo aplicado, $\mathbf{B}_{ap}$ y $\mathbf{M}$ son paralelos. Por tanto, el campo magnético en el centro de la barra es

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = \mu_0 nI + \mu_0 M \tag{29.34}$$

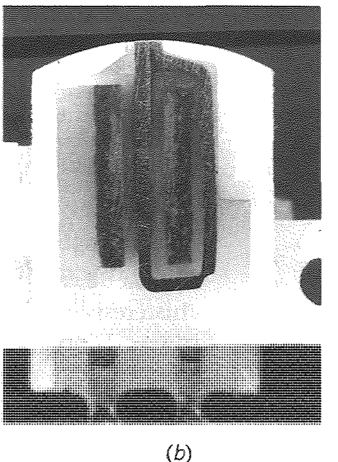
En los materiales ferromagnéticos, el campo magnético $\mu_0 M$ debido a los momentos magnéticos es con frecuencia superior al campo magnetizante en un factor de varios miles.

La figura 29.35 muestra una representación de B en función del campo magnetizante B_{ap}. Cuando la corriente se hace crecer gradualmente desde cero, B aumenta desde cero a lo largo de la parte de la curva que empieza en el origen O y llega al punto P_1. La tendencia hacia la horizontal de esta curva cerca del punto P_1 indica que la imantación M se está aproximando a su valor de saturación M_s, que se presenta cuando todos los dipolos atómicos están alineados. Por encima de la saturación, B crece sólo porque el campo

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

(*a*) Líneas de campo magnético sobre una cinta magnetofónica de cobalto. Las flechas indican los bits magnéticos codificados. (*b*) Sección transversal de una cabeza grabadora de cintas magnéticas. La corriente procedente de un amplificador de audio se envía a los alambres conductores que rodean un núcleo magnético en la cabeza grabadora donde produce un campo magnético. Cuando la cinta pasa por una abertura situada sobre el núcleo de la cabeza, el campo magnético que la bordea codifica la información en la cinta.

magnetizante $B_{ap} = \mu_0 nI$ crece también. Cuando B_{ap} se hace disminuir gradualmente desde el punto P_1, no existe una disminución correspondiente de la imantación. El desplazamiento de los dominios en un material ferromagnético no es completamente reversible, y parte de la imantación permanece, aun cuando B_{ap} se reduzca a cero, según se indica en la figura. Este efecto se denomina histéresis, del griego *hysteron*, que significa posterior, retraso, y la curva en la figura 29.35 se llama **curva de histéresis**. El valor del campo magnético en el punto r cuando B_{ap} es cero se denomina **campo remanente** B_r. En este punto la barra de hierro es un imán permanente. Si la corriente en el solenoide se invierte ahora de modo que B_{ap} tiene sentido opuesto, el campo magnético B es gradualmente llevado a cero en el punto c. La parte restante de la curva de histéresis se obtiene mediante un aumento adicional de la corriente en sentido opuesto hasta que se alcanza el punto P_2, que corresponde a la saturación en sentido opuesto, y luego haciendo disminuir la corriente hasta cero en el punto P_3 y aumentando la corriente de nuevo en el sentido inicial.

Como la imantación M depende de la historia previa del material y puede tener un valor grande, incluso cuando el campo aplicado es nulo, su relación con éste no es simple. Sin embargo, si nos limitamos a aquella parte de la curva de imantación desde el origen al punto P_1 de la figura 29.35, M y B_{ap} son paralelos y M es cero cuando B_{ap} es cero. Podemos, por tanto, definir la susceptibilidad magnética como en la ecuación 29.22:

$$M = \chi_m \frac{B_{ap}}{\mu_0}$$

y

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = B_{ap}(1 + \chi_m) = K_m \mu_0 nI = \mu nI \qquad \textbf{(29.35)}$$

en donde,

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 = K_m \mu_0 \qquad \textbf{(29.36)}$$

se denomina **permeabilidad** del material. (Para las sustancias paramagnéticas y diamagnéticas, χ_m es mucho menor que 1, de modo que la permeabilidad μ y la permeabilidad del espacio libre μ_0 son prácticamente iguales.)

Como B no varía linealmente con B_{ap} (basta ver la figura 29.35), la permeabilidad relativa no es constante. El valor máximo de K_m tiene lugar para un valor de la imantación considerablemente menor que la imantación de saturación. En la tabla 29.2 se relacionan el campo magnético de saturación $\mu_0 M_s$ y los valores máximos de K_m para algunos materiales ferromagnéticos. Obsérvese que los valores máximos de K_m son muy superiores a la unidad.

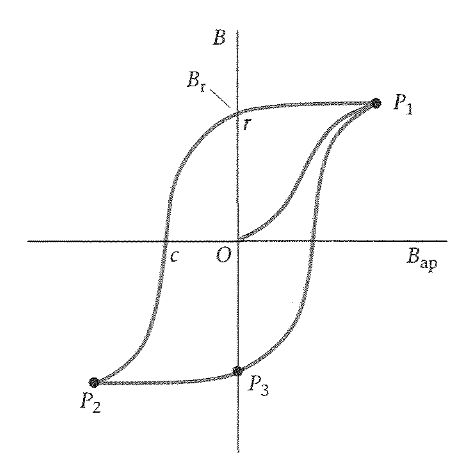


Figura 29.35 Representación gráfica de B en función del campo aplicado B_{ap}. La curva exterior se denomina curva de histéresis. El campo B_r es el campo remanente. Permanece cuando el campo aplicado retorna a cero.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

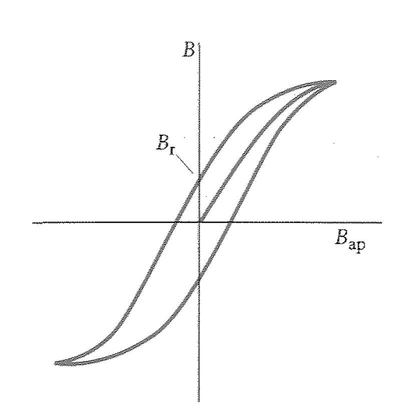
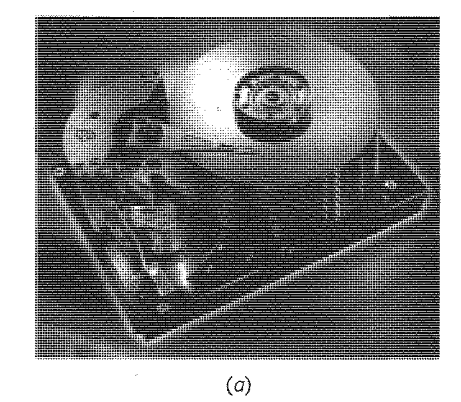


Figura 29.36 Curva de histéresis de un material magnéticamente blando. El campo remanente es muy pequeño comparado con el de un material magnéticamente duro, tal como el de la figura 29.35.

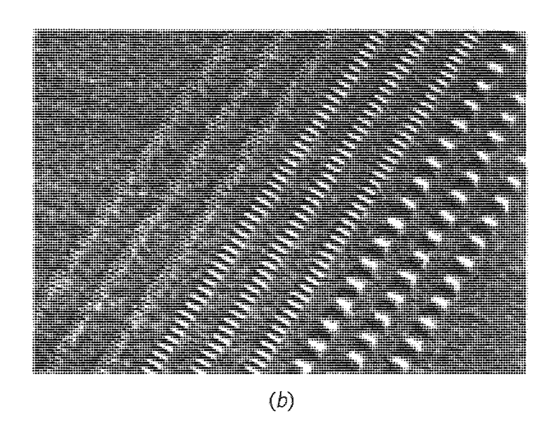
Tabla 29.2 Valores máximos de $\mu_0 M$ y K_m para algunos materiales ferromagnéticos

Material	$\mu_0 M$, T	K_m
Hierro (recocido)	2,16	5500
Hierro-silicio (96% Fe, 4% Si)	1,95	7000
Permalloy (55% Fe, 45% Ni)	1,60	25 000
Metal-mu (77% Ni, 16% Fe, 5% Cu, 2% Cr)	0,65	100 000

El área incluida en la curva de histéresis es proporcional a la energía disipada en forma de calor en el proceso irreversible de imantación y desimantación. Si el efecto de histéresis es pequeño, el área encerrada por el ciclo es pequeña, lo que indica que las pérdidas de energía son pequeñas y el material se denomina **magnéticamente blando**. El hierro dulce o blando es un ejemplo. La curva de histéresis en el caso de un material magnéticamente blando se indica en la figura 29.36. En este caso el campo remanente B_r es casi cero, siendo la pérdida de energía por ciclo muy pequeña. Los materiales magnéticamente blandos se utilizan como núcleos de transformador para permitir que el campo magnético B pueda variar sin incurrir en una gran pérdida de energía cuando el campo varía muchas veces por segundo. Por otra parte, es deseable un gran campo remanente en un imán permanente. Los materiales **magnéticamente duros**, como el acero al carbono y la aleación Alnico 5, se utilizan en los imanes permanentes.



(*a*)



(*b*)

(*a*) Mecanismo impulsor del disco duro de un ordenador para el almacenamiento magnético de información. (*b*) Un diagrama de ensayo magnético sobre un disco duro, aumentado 2400 veces. Las regiones claras y oscuras corresponden a campos magnéticos de sentidos opuestos. La región uniforme alrededor del diagrama es una región del disco que ha sido borrado justo antes de la impresión.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 29.11

Un largo solenoide con 12 vueltas por centímetro posee un núcleo de hierro recocido. Cuando la intensidad de corriente es de 0,50 A, el campo magnético dentro del núcleo de hierro es 1,36 T. Determinar (a) el campo aplicado B_{ap}, (b) la permeabilidad relativa K_m y (c) la imantación M.

Esquema del problema El campo aplicado es justamente el de un gran solenoide dado por $B_{ap} = \mu_0 nI$. Como el campo magnético total es conocido, podemos determinar la permeabilidad relativa a través de su definición ($K_m = B/B_{ap}$) y determinar M a partir de la expresión $B = B_{ap} + \mu_0 M$.

(a) El campo aplicado viene dado por la ecuación 29.10:

$$B_{ap} = \mu_0 nI = (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(1200\ \text{vueltas/m})(0{,}50\ \text{A}) = 7{,}54 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

(b) La permeabilidad relativa es el cociente de B por B_{ap}:

$$K_m = \frac{B}{B_{ap}} = \frac{1{,}36\ \text{T}}{7{,}54 \times 10^{-4}\ \text{T}} = 1{,}80 \times 10^3 = 1800$$

www.elsolucionario.net

(c) La imanación M se determina a partir de la ecuación 29.34:

$$\mu_0 M = B - B_{ap}$$

$$= 1{,}36\ \text{T} - 7{,}54 \times 10^{-4}\ \text{T} \approx B = 1{,}36\ \text{T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1{,}36\ \text{T}}{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}} = 1{,}08 \times 10^{6}\ \text{A/m}$$

Observaciones El campo magnético aplicado de $7{,}54 \times 10^{-4}$ T es una fracción despreciable del campo total de 1,36 T. Obsérvese que el valor 1800 de K_m es considerablemente menor que el valor máximo de 5500 de la tabla 29.2. Nótese también que la susceptibilidad $\chi_m = K_m - 1 \approx K_m$ con una exactitud de tres dígitos con la cual hemos calculado K_m.

Diamagnetismo

Los materiales diamagnéticos son aquellos que tienen valores negativos muy pequeños de susceptibilidad magnética χ_m. El diamagnetismo fue descubierto por Faraday en 1846 cuando vio que un trozo de bismuto era repelido por un polo cualquiera de un imán; lo que indica que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto de sentido opuesto al campo.

Podemos comprender cualitativamente este efecto mediante la figura 29.37, que muestra dos cargas positivas que se mueve en órbitas circulares con la misma velocidad pero en sentidos opuestos. Sus momentos magnéticos tienen sentidos opuestos y se contrarrestan entre sí.[1] En presencia de un campo magnético externo **B** dirigido hacia el papel, las cargas experimentan una fuerza extra $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ de dirección radial. Para la carga de la izquierda, esta fuerza extra está dirigida hacia el centro, incrementando la fuerza centrípeta. Si la carga ha de permanecer en la misma órbita circular, debe acelerar de modo que mv^2/r iguale a la fuerza centrípeta total.[2] Su momento magnético dirigido hacia fuera se incrementa. Para la carga de la derecha, la fuerza extra es radial pero alejándose del centro, de modo que la partícula debe disminuir la velocidad para mantener su órbita circular. Su momento magnético, dirigido hacia dentro, disminuye. En ambos casos, la variación del momento magnético de las cargas en dirección hacia fuera de la página es opuesta al campo magnético externo. Como los momentos magnéticos permanentes de las dos cargas son iguales y de sentidos opuestos, su suma es nula, quedando sólo los momentos magnéticos inducidos, que son ambos opuestos a la dirección del campo magnético aplicado.

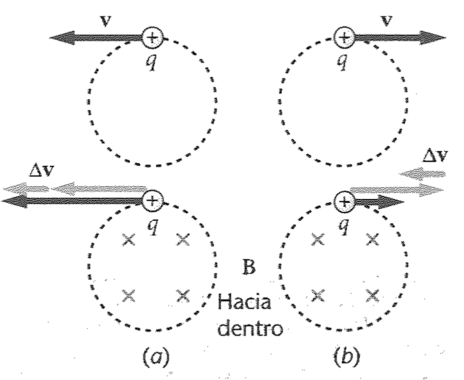


Figura 29.37 (*a*) Carga positiva que se mueve circularmente en sentido contrario al de las agujas del reloj con un momento magnético dirigido hacia el lector. Al aplicar un campo magnético externo, dirigido hacia el papel, la fuerza magnética incrementa la fuerza centrípeta y, por tanto, la velocidad de la partícula debe aumentar. La variación positiva del momento magnético es hacia fuera. (*b*) Carga positiva moviéndose en sentido horario en un círculo con su momento magnético hacia el papel. Al aplicar un campo magnético externo hacia el papel la fuerza magnética disminuye la fuerza centrípeta y la velocidad de la partícula disminuye. Como en el caso (*a*), el cambio en el momento magnético es hacia fuera.

Una sustancia será diamagnética si sus átomos tienen momento angular neto cero y, por tanto, no poseen momento magnético permanente. (El momento angular neto de un átomo depende de su estructura electrónica, tema que estudiaremos en el capítulo 37.) Los momentos magnéticos inducidos que causan el diamagnetismo poseen magnitudes del orden de 10^{-5} magnetones de Bohr. Como este valor es mucho menor que el de los momentos magnéticos permanentes de los átomos de los materiales paramagnéticos o ferromagnéticos, los cuales no poseen estructuras electrónicas de capas completas, el efecto diamagnético en estos átomos viene enmascarado por el alineamiento de sus momentos magnéticos permanentes. Sin embargo, como este alineamiento decrece con la temperatura, todos los materiales son teóricamente diamagnéticos a temperaturas suficientemente altas.

Cuando un superconductor se sitúa en un campo magnético externo se inducen en su superficie corrientes eléctricas, de tal modo que el campo magnético neto en el superconductor es cero. Consideremos una barra superconductora dentro de un solenoide de n vueltas por unidad de longitud. Cuando el solenoide se conecta a una fuente de fem de modo que transporta una corriente I, el campo magnético debido al solenoide es $\mu_0 nI$. Una corriente superficial de $-nI$ por unidad de longitud se induce sobre la barra super-

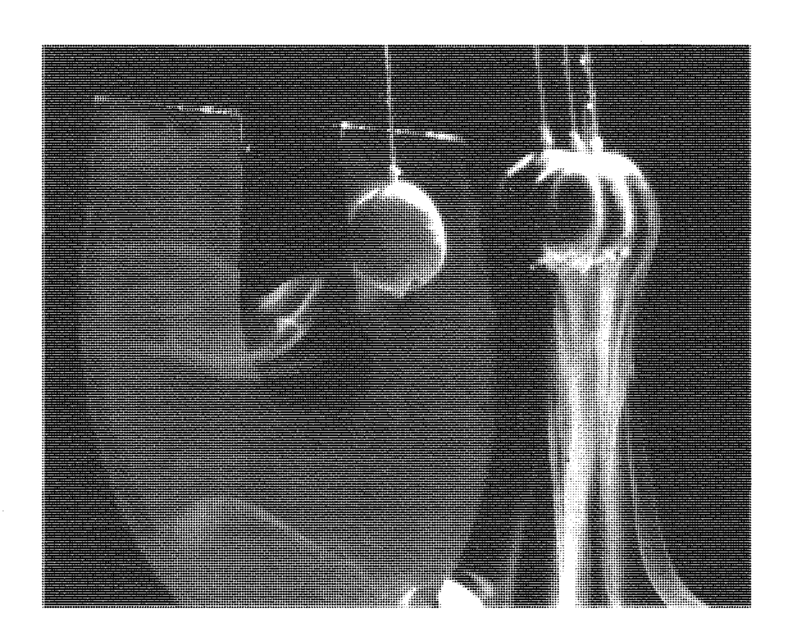
[1] Es más sencillo considerar cargas positivas, aunque son los electrones con carga negativa los que proporcionan los momentos magnéticos de la materia.

[2] El electrón acelera debido al campo eléctrico inducido por el campo magnético variable, un efecto llamado inducción que veremos en el capítulo 30.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL



Un superconductor es un material diamagnético perfecto. Aquí, la masa oscilante superconductora del péndulo es repelida por el imán permanente.

conductora que compensa el campo debido al solenoide, de modo que el campo neto dentro del superconductor es nulo. Según la ecuación 29.23

$$B = B_{ap}(1 + \chi_m) = 0$$

de modo que

$$\chi_m = -1$$

Por tanto, un superconductor es un material diamagnético perfecto, es decir, posee una susceptibilidad magnética igual a −1.

www.elsolucionario.net

Resumen

1. Los campos magnéticos surgen de las cargas móviles y, por tanto, de las corrientes.
2. La ley de Biot y Savart describe el campo magnético producido por un elemento de corriente.
3. La ley de Ampère relaciona la integral lineal del campo magnético alrededor de una curva cerrada con la corriente total que pasa a través del área limitada por la curva.
4. El vector de imantación **M** describe el momento magnético por unidad de volumen de la materia.
5. La relación clásica $\boldsymbol{\mu} = (q/2\,m)\mathbf{L}$ se deduce de las definiciones del momento angular y del momento magnético.
6. El magnetón de Bohr es una unidad conveniente de los momentos atómicos y nucleares magnéticos.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. **Campo magnético, B**	
Debido a una carga puntual móvil	$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (29.1)$$ en donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la carga al punto del campo y μ_0 es una constante llamada permeabilidad del espacio libre, de magnitud $$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A} = 4\pi\times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \qquad (29.2)$$

www.elsolucionario.net

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\ell \times \hat{r}}{r^2} \quad (29.3)$$

Debido a un elemento de corriente (ley de Biot y Savart)

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (29.5)$$

Sobre el eje de una espira de corriente

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x^3|} \quad (29.6)$$

Sobre el eje de una espira de corriente lejos de la espira

en donde μ es el momento magnético.

$$B = \mu_0 n I \quad (29.9)$$

Dentro de un solenoide y lejos de los extremos

donde n es el número de vueltas por unidad de longitud.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2) \quad (29.11)$$

Debido a un alambre rectilíneo portador de corriente

en donde R es la distancia perpendicular al conductor y θ_1 y θ_2 son los ángulos subtendidos en el punto del campo por los extremos del conductor

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \quad (29.12)$$

Debido a un alambre rectilíneo, infinitamente largo

La dirección de B es tal que las líneas de campo magnético rodean el conductor en el sentido indicado por los dedos de la mano derecha cuando el pulgar apunta en la dirección de la corriente.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \qquad a < r < b \quad (29.17)$$

Dentro de un toroide

2. Líneas del campo magnético

El campo magnético viene indicado por líneas paralelas a B en cualquier punto y su densidad es proporcional a la magnitud de B. Las líneas magnéticas no empiezan ni terminan en ningún punto del espacio. Forman espiras continuas y cerradas.

3. Ley de Gauss para el magnetismo

$$\phi_{\text{m, neto}} = \oint_S B_n\, dA = 0 \quad (29.14)$$

4. Polos magnéticos

Los polos magnéticos siempre aparecen por pares. Nunca se han encontrado polos magnéticos aislados.

5. Ley de Ampère

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_C \quad (29.15)$$

en donde C es cualquier curva cerrada.

Validez de la ley de ampère

La ley de Ampère sólo es válida si las corrientes son continuas. Puede utilizarse para deducir expresiones del campo magnético en situaciones de alto grado de simetría, tales como un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente; un toroide estrechamente arrollado; y un solenoide largo estrechamente arrollado.

6. Materiales magnéticos

Todos los materiales pueden clasificarse en paramagnéticos, ferromagnéticos o diamagnéticos.

Imantación

Un material imantado se describe por su vector imantación **M**, que se define como el momento del dipolo magnético neto por unidad de volumen del material:

$$\mathbf{M} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dV} \quad (29.18)$$

El campo magnético debido a un cilindro imantado uniformemente es el mismo que produciría el cilindro si transportara una corriente por unidad de longitud de magnitud M sobre su superficie. Esta corriente, debida al movimiento intrínseco de las cargas atómicas en el cilindro se denomina corriente amperiana.

7. B en materiales magnéticos

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (29.21)$$

Susceptibilidad magnética, χ_m

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}_{ap}}{\mu_0} \quad (29.22)$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

En los materiales paramagnéticos χ_m es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. En los materiales diamagnéticos (no superconductores), χ_m es una constante pequeña negativa independiente de la temperatura. Para los superconductores, $\chi_m = -1$. En los materiales ferromagnéticos, la imantación depende no sólo de la corriente magnetizante, sino también de la historia pasada del material.

Permeabilidad relativa

$$\mathbf{B} = K_m \mathbf{B}_{ap} \tag{29.23}$$

donde

$$K_m = 1 + \chi_m \tag{29.24}$$

8. Momentos magnéticos atómicos

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \quad \text{(clásico)} \tag{29.27}$$

donde **L** es el momento angular de la partícula.

Orbital

$$\boldsymbol{\mu}_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\mathbf{L}}{\hbar} = -\mu_B\frac{\mathbf{L}}{\hbar} \tag{29.28}$$

Espín

$$\boldsymbol{\mu}_s = -2\times\frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\mathbf{S}}{\hbar} = -2\mu_B\frac{\mathbf{S}}{\hbar} \tag{29.30}$$

Magnetón de Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2} \tag{29.29}$$

$$= 9{,}27\times10^{-24}\ \mathrm{J/T} = 5{,}79\times10^{-5}\ \mathrm{eV/T}$$

donde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

y $h = 6{,}67\times10^{-34}$ J · s es la constante de Planck.

9. Paramagnetismo (opcional)

Los materiales paramagnéticos poseen momentos magnéticos atómicos permanentes con direcciones aleatorias en ausencia de un campo magnético externo. En un campo externo, algunos de estos dipolos se alinean produciendo una pequeña contribución al campo total que se suma al campo externo. El grado de alineamiento es pequeño excepto en campos muy intensos y a muy bajas temperaturas. A temperaturas ordinarias, el movimiento térmico tiende a mantener las direcciones aleatorias de los momentos magnéticos.

Ley de Curie

En campos débiles, la imantación es aproximadamente proporcional al campo aplicado e inversamente proporcional a la temperatura absoluta.

$$M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ap}}{kT}M_s \tag{29.33}$$

10. Ferromagnetismo (opcional)

Los materiales ferromagnéticos poseen pequeñas regiones de espacio llamadas dominios magnéticos, dentro de los cuales los momentos magnéticos atómicos permanentes están alineados. En ausencia de un campo magnético, la dirección de alineamiento en un dominio es independiente de la que existe en otros, de modo que no se produce un campo magnético neto. Al imantarse, los dominios de un material ferromagnético se alinean produciendo una contribución muy intensa al campo magnético. Esta alineación puede persistir incluso cuando se retira el campo externo, dando lugar a un magnetismo permanente.

11. Diamagnetismo (opcional)

Materiales diamagnéticos son aquellos en los cuales los momentos magnéticos de todos los electrones de cada átomo se anulan, de modo que cada átomo posee un momento magnético cero en ausencia de un campo externo. Al aplicar un campo externo, se induce un pequeño momento magnético que tiende a debilitar el campo. Este efecto es independiente de la temperatura. Los superconductores son materiales diamagnéticos con susceptibilidad igual a –1.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Guía de resolución de problemas

1. Dibujar un diagrama claro que incluya las características importantes del problema. La naturaleza vectorial del campo magnético puede clarificarse con un diagrama que muestre **v** y $\hat{\mathbf{r}}$ (para cargas puntuales móviles) o bien $d\ell$ y $\hat{\mathbf{r}}$ (para un elemento de corriente). Indíquese la dirección de **B**.
2. En los problemas con simetría cilíndrica, como, por ejemplo, un cable muy largo que transporta corriente, puede utilizarse la ley de Ampère para calcular B.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. B debido a cargas móviles	
Determinar el campo magnético producido por una carga puntual móvil.	Utilizar $$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$ en donde $\hat{\mathbf{r}}$ apunta desde la carga al punto del campo. **Ejemplo 29.1**
2. B debido a corrientes	
Determinar el campo magnético sobre el eje de una espira de corriente.	A una distancia x de la espira, B_x viene dado por $$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$ En el centro de la espira ($x = 0$), $B_x = \mu_0 I/2R$. A gran distancia ($x >> R$), $$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{x^3}$$ donde $\mu = NI\pi R^2$. **Ejemplo 29.2**
Determinar el campo magnético en el interior de un solenoide.	El resultado general es $$B_x = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$ en donde a y b son las distancias del punto del campo a cada extremo del solenoide. Para un solenoide largo, $B = \mu_0 nI$. **Ejemplo 29.4**
Determinar el campo magnético debido a una corriente en un alambre recto.	Utilizar $$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2)$$ en donde θ_1 y θ_2 son los ángulos desde el punto del campo a cada uno de los extremos del alambre y la perpendicular a éste. Para un alambre muy largo, $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}$$ **Ejemplos 29.5, 29.6, 29.7**
Determinar la fuerza ejercida por un cable sobre otro.	Calcular **B** en un cable, producido por la corriente que circula por el otro cable. Después utilizar $$d\mathbf{F} = I\,d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B} \qquad \text{o} \qquad \frac{F}{d\ell} = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{R}$$ para la fuerza ejercida entre dos cables paralelos portadores de corriente. **Ejemplo 29.7**

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

3. Momentos sobre los imanes — El momento ejercido sobre un imán en un campo B viene dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$ **Ejemplo 29.3**

4. Ley de Ampère

Utilizar la ley de Ampère para determinar el campo magnético — Determinar una curva C tal que B sea tangencial a la curva y constante a lo largo de la misma. Después usar $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_C$ y deducir B de la integral **Ejemplo 29.8**

5. B en la materia

Determinar el campo magnético de saturación en un material — Multiplicar el número de moléculas por unidad de volumen por el momento magnético de cada molécula para obtener la imantación M. Después utilizar $B_m = \mu_0 M$ **Ejemplo 29.9**

Determinar la permeabilidad relativa y la imantación de un material ferromagnético conocido el campo total (opcional) — Calcular el campo aplicado B_{ap} y utilizar $K_m = B/B_{ap}$. Después utilizar $\mu_0 M = B - B_{ap}$. **Ejemplo 29.11**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
••• Desafiante, para alumnos avanzados

Cargas puntuales móviles

• **1** Comparar las direcciones de las fuerzas eléctricas y magnéticas entre dos cargas positivas que se mueven a lo largo de trayectorias paralelas,
(a) en el mismo sentido y (b) en sentidos opuestos.

• **2** En el tiempo $t = 0$, una partícula de carga $q = 12\ \mu$C está localizada en $x = 0$, $y = 2$ m; su velocidad en ese instante es $\mathbf{v} = 30$ m/s $\mathbf{i}$. Determinar el campo magnético en
(a) el origen; (b) $x = 0$, $y = 1$ m; (c) $x = 0$, $y = 3$ m; y (d) $x = 0$, $y = 4$ m.

• **3** Determinar el campo magnético para la partícula del problema 1 en
(a) $x = 1$ m, $y = 3$ m;
(b) $x = 2$ m, $y = 2$ m; y
(c) $x = 2$ m, $y = 3$ m.

• **4** Un protón (carga $+e$), que se mueve con una velocidad de $\mathbf{v} = 1 \times 10^4$ m/s $\mathbf{i} + 2 \times 10^4$ m/s $\mathbf{j}$ está localizado en $x = 3$ m, $y = 4$ m en un cierto instante. Determinar el campo magnético en las siguientes posiciones:
(a) $x = 2$ m, $y = 2$ m;
(b) $x = 6$ m, $y = 4$ m; y
(c) $x = 3$ m, $y = 6$ m.

• **5** Un electrón gira alrededor de un protón en una órbita de $5{,}29 \times 10^{-11}$ m. Determinar el campo magnético en el protón producido por el movimiento orbital del electrón.

•• **6** Dos cargas iguales q localizadas en (0, 0, 0) y (0, b, 0) en el tiempo cero se mueven con velocidad v en la dirección x positiva ($v << c$). Determinar la relación que existe entre las magnitudes de la fuerza magnética y electrostática sobre cada una de ellas.

Ley de Biot y Savart

• **7** La ley de Biot y Savart es semejante a la ley de Coulomb porque ambas
(a) son leyes inversas al cuadrado
(b) tratan con fuerzas sobre partículas cargadas
(c) tratan de cargas en exceso
(d) incluyen la permeabilidad del espacio libre
(e) no son de naturaleza eléctrica

• **8** Un elemento pequeño de corriente $I\,d\boldsymbol{\ell}$, en el que $d\boldsymbol{\ell} = 2$ mm $\mathbf{k}$, tiene una corriente $I = 2$ A y está centrado en el origen. Hallar el campo magnético $d\mathbf{B}$ en los puntos siguientes:
(a) En el eje x en $x = 3$ m, (b) en el eje x en $x = -6$ m, (c) en el eje z en $z = 3$ m, (d) en el eje y en $y = 3$ m.

• **9** En el caso del elemento de corriente del problema 8 hallar el valor e indicar la dirección de $d\mathbf{B}$ en el punto $x = 0$, $y = 3$ m, $z = 4$ m.

• **10** En el caso del elemento de corriente del problema 8, hallar el valor de $d\mathbf{B}$ e indicar su dirección en un diagrama para los puntos
(a) $x = 2$ m, $y = 4$ m, $z = 0$; (b) $x = 2$ m, $y = 0$, $z = 4$ m.

Espiras de corriente

• **11** ¿Es B uniforme en todos los puntos dentro de una espira de corriente? Razonar la respuesta.

• **12** Una sola espira de alambre de radio 3 cm transporta una corriente de 2,6 A. ¿Cuál es la magnitud de B sobre el eje de la espira en
(a) el centro de la espira, (b) a 1 cm del centro, (c) a 2 cm del centro y (d) a 35 cm del centro?

• **13** Una sola espira circular de radio 10,0 cm ha de producir un campo en su centro que equilibre exactamente el campo terrestre en el

www.elsolucionario.net

ecuador, que vale 0,7 G y está dirigido hacia el norte. Hallar la corriente en el conductor y hacer un esquema que muestre la orientación de la espira y de la corriente.

•• **14** ¿En qué punto del eje de la espira del problema 13 el campo magnético es
(a) el 10 por ciento del campo en el centro,
(b) el 1 por ciento del campo en el centro y
(c) el 0,1 por ciento del campo en el centro?

•• **15** Una sola espira circular de radio 8,5 cm ha de producir un campo en su centro que neutralice exactamente el campo terrestre de magnitud 0,7 G dirigido 70° por debajo de la dirección horizontal norte. Determinar la intensidad de la corriente y hacer un esquema que muestre la orientación de la espira y la corriente.

•• **16** Una espira circular de radio R por la que circula una corriente I está centrada en el origen con su eje dirigido a lo largo del eje x. Su corriente es tal que produce un campo magnético en el sentido positivo del eje de las x.
(a) Hacer un esquema de B_x en función de x para todos los puntos del eje x. Incluir tanto valores positivos como negativos de x. Comparar este esquema con el correspondiente a E_x debido a un anillo cargado del mismo tamaño.
(b) Otra segunda espira idéntica por la que circula la misma corriente y en el mismo sentido está en un plano paralelo al plano yz con su centro en el punto $x = d$. Hacer un esquema del campo magnético en el eje x debido a cada bobina por separado y el campo resultante debido a ambas bobinas. Demostrar a partir de este esquema que dB_x/dx es cero en el punto medio entre las bobinas.

•• **17** Dos bobinas que están separadas por una distancia igual a su radio y que transportan corrientes iguales de modo que sus campos axiales se suman, se denominan bobinas de Helmholtz. Una característica de las bobinas de Helmholtz es que el campo magnético resultante entre ellas es muy uniforme. Sea $R = 10$ cm, $I = 20$ A y $N = 300$ vueltas para cada bobina. Situar una de ellas en el plano yz con su centro en el origen y la otra en un plano paralelo en $x = 10$ cm.
(c) Calcular el campo resultante B_x en los puntos $x = 5$ cm, $x = 7$ cm, $x = 9$ cm y $x = 11$ cm.
(d) Utilizar los resultados obtenidos y el hecho de que B_x es simétrico alrededor del punto medio de las bobinas para representar B_x en función de x. (Véase también el problema 18.)

••• **18** Dos bobinas de Helmholtz de radio R poseen sus ejes a lo largo del eje x (véase problema 17). Una de las bobinas está en el plano yz y la otra en un plano paralelo a $x = R$. Demostrar que en el punto medio de las bobinas ($x = \frac{1}{2}R$), $dB_x/dx = 0$, $d^2B_x/dx^2 = 0$ y $d^3B_x/dx^3 = 0$. Esto demuestra que el campo magnético en puntos próximos al punto medio es aproximadamente igual al correspondiente al punto medio.

Segmentos de corriente rectilíneos

• **19** Dos cables paralelos situados en el plano del papel transportan corrientes iguales en sentidos opuestos como muestra la figura 29.38. En un punto a mitad de distancia entre los cables, el campo magnético es
(e) cero
(f) hacia dentro de la página
(g) hacia fuera de la página
(h) hacia la parte alta o hacia la parte baja de la página
(i) hacia uno de los dos cables

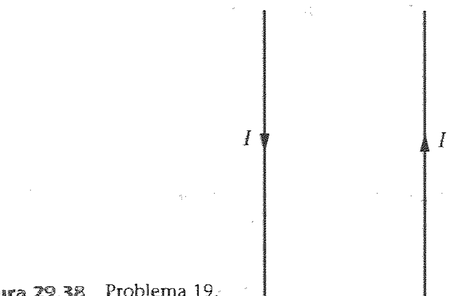


Figura 29.38 Problema 19.

• **20** Dos cables paralelos transportan corrientes I_1 e $I_2 = 2I_1$ en el mismo sentido. Las fuerzas F_1 y F_2 que actúan sobre los cables están relacionadas por
(a) $F_1 = F_2$ (b) $F_1 = 2F_2$ (c) $2F_1 = F_2$
(d) $F_1 = 4F_2$ (e) $4F_1 = F_2$

• **21** Un alambre transporta una corriente eléctrica en sentido vertical hacia arriba. ¿Cuál es el sentido del campo magnético producido por el cable a una distancia de 2 m al norte del alambre
(a) Norte (b) Este (c) Oeste
(d) Sur (e) Hacia arriba

• **22** Dos cables portadores de corriente son perpendiculares entre sí. La corriente en uno de ellos fluye verticalmente hacia arriba y la corriente en el otro fluye horizontalmente hacia el este. El cable horizontal se encuentra a la distancia de un metro al sur del vertical. ¿Cuál es el sentido de la fuerza magnética neta sobre el cable horizontal?
(a) Norte (b) Este (c) Oeste (d) Sur
(e) No se ejerce una fuerza magnética neta sobre el cable horizontal.

• **23** Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 10 A. Hallar el valor de B a una distancia de
(a) 10 cm, (b) 50 cm y (c) 2 m del centro del conductor.

Los problemas 24 a 29 se refieren a la figura 29.39, que muestra dos conductores rectilíneos largos, paralelos al eje x que están contenidos en el plano xy. Uno de los conductores está en y = –6 cm y el otro en y = +6 cm. La corriente que circula por cada conductor es de 20 A.

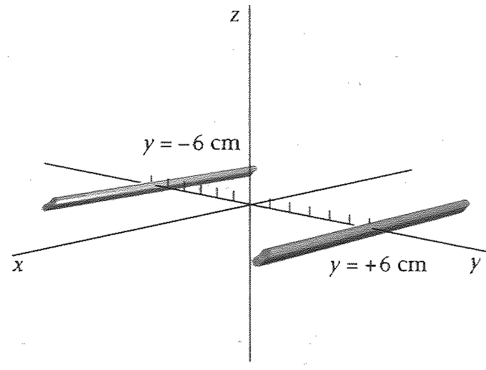


Figura 29.39 Problemas 24-29.

• **24** Si las corrientes de la figura 29.39 circulan en el sentido negativo del eje de las x, hallar B en los puntos situados en el eje y en
(a) $y = -3$ cm, (b) $y = 0$, (c) $y = +3$ cm, (d) $y = +9$ cm.

• **25** Hacer una representación esquemática de B_z en función de y para los puntos situados sobre el eje y cuando ambas corrientes circulan en el sentido negativo de las x.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **26** Hallar B en los puntos situados en el eje y como en el problema 24, pero en el caso en que la corriente que circula por el conductor en $y = -6$ cm circula en el sentido negativo del eje de las x, y la corriente en el otro circula en $y = +6$ cm en el sentido positivo del eje de las x.

• **27** Hacer un esquema de B_z en función de y para los puntos situados sobre el eje y cuando las corrientes tienen sentidos opuestos a los indicados en el problema 26.

• **28** Hallar B en el punto situado en el eje z a $z = +8$ cm si
(a) las corrientes son paralelas, como en el problema 24;
(b) las corrientes son antiparalelas como en el problema 26.

• **29** Hallar el valor de la fuerza por unidad de longitud ejercida por un conductor sobre el otro.

• **30** Dos cables paralelos, largos y rectilíneos, separados 8,6 cm, transportan corrientes de igual magnitud I. Se repelen entre sí con una fuerza por unidad de longitud de 3,6 nN/m.
(a) ¿Son las corrientes paralelas o antiparalelas?
(b) Determinar I.

•• **31** La corriente en el conductor de la figura 29.40 es 8,0 A. Hallar B en el punto P debido a cada segmento del conductor y sumar para hallar el valor resultante de B.

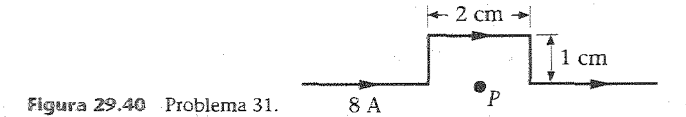


Figura 29.40 Problema 31.

•• **32** Un conductor de 16 cm de longitud está suspendido por cables flexibles encima de un conductor rectilíneo largo. Se establecen en los conductores corrientes iguales y opuestas de modo que el conductor de 16 cm flota a 1,5 mm por encima del conductor largo sin que en los cables de suspensión aparezca ninguna tensión. Si la masa del conductor de 16 cm es 14 g, ¿cuál es la corriente?

•• **33** Tres conductores rectilíneos largos y paralelos pasan a través de los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm, según se ve en la figura 29.41, en donde los puntos indican que la corriente está dirigida hacia el lector y la cruz significa que está dirigida hacia el papel. Si cada corriente vale 15,0 A, hallar
(a) la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre el conductor superior y
(b) el campo magnético B en dicho conductor debido a los otros dos conductores inferiores.

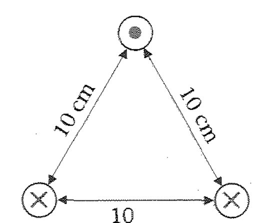


Figura 29.41 Problemas 33 y 34.

•• **34** Resolver el problema 33 con la corriente invertida en el vértice inferior derecho de la figura 29.41.

•• **35** Un conductor aislado infinitamente largo está sobre el eje x y transporta una corriente de intensidad I en la dirección x positiva. Un segundo conductor infinitamente largo y aislado está sobre el eje y y transporta la corriente I en la dirección y positiva. ¿En qué punto del plano xy el campo magnético resultante es cero?

•• **36** Un cable conductor infinitamente largo, situado a lo largo del eje z transporta una corriente de 20 A en la dirección z positiva. Un segundo cable también infinitamente largo, es paralelo al eje z en $x = 10$ cm.
(a) Determinar la intensidad de la corriente en el segundo alambre sabiendo que el campo magnético en $x = 2$ cm es cero.
(b) ¿Cuál es el campo magnético en $x = 5$ cm?

•• **37** Tres alambres conductores muy largos y paralelos se hacen pasar por los vértices de un cuadrado, según se muestra en la figura 29.42. Calcular el campo magnético B en el vértice no ocupado cuando
(a) el sentido de todas las intensidades de corriente es hacia dentro del papel,
(b) I_1 e I_3 circulan en el sentido hacia dentro e I_2 hacia fuera, y
(c) I_1 e I_2 hacia dentro e I_3 hacia fuera.

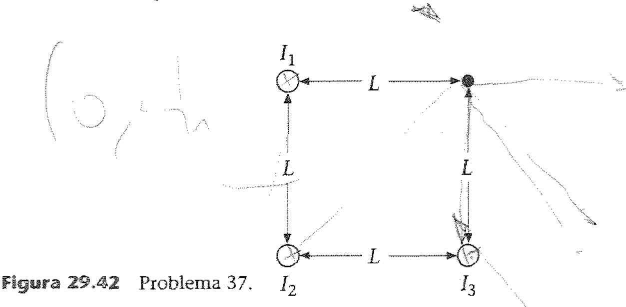


Figura 29.42 Problema 37.

•• **38** Cuatro alambres largos, rectos y paralelos transportan cada uno la corriente I. En un plano perpendicular a los alambres, éstos se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado a. Determinar la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre uno de los alambres si
(a) todas las corrientes se encuentran en la misma dirección y
(b) las corrientes que fluyen por los alambres en vértices adyacentes tienen sentidos opuestos.

•• **39** Un cilindro no conductor infinitamente largo de radio R está situado a lo largo del eje z. En la mitad superior del cilindro hay cinco cables conductores largos, paralelos al mismo e igualmente espaciados. Cada cable transporta una corriente I en la dirección z positiva. Determinar el campo magnético sobre el eje z.

Solenoides

• **40** Un solenoide de longitud 30 cm, radio 1,2 cm y 300 vueltas transporta una corriente de 2,6 A. Determinar el campo magnético sobre el eje del solenoide
(a) en el centro,
(b) dentro del solenoide en un punto situado a 10 cm de un extremo, y
(c) en un extremo.

• **41** Un solenoide de 2,7 m de longitud posee un radio de 0,85 cm y 600 vueltas. Por él circula una corriente I de 2,5 A. Determinar aproximadamente el campo magnético B sobre el eje del solenoide.

•• **42** Un solenoide posee n vueltas por unidad de longitud, un radio R y por él circula una corriente I. Su eje coincide con el eje x y uno de sus extremos se encuentra en $x = -\frac{1}{2}\ell$ y el otro en $x = +\frac{1}{2}\ell$, siendo ℓ la longitud total del solenoide. Demostrar que el campo magnético B en cualquier punto del eje x viene dado por

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad \textbf{(29.37)}$$

en donde

$$\cos\theta_1 = \frac{x + \frac{1}{2}\ell}{[R^2 + (x + \frac{1}{2}\ell)^2]^{1/2}}$$

www.elsolucionario.net

y

$$\cos\theta_2 = \frac{x - \frac{1}{2}\ell}{[R^2 + (x - \frac{1}{2}\ell)^2]^{1/2}}$$

••• **43** En el problema 42 se obtiene una fórmula para el campo magnético a lo largo del eje de un solenoide. Para $x >> \ell$ y $\ell > R$, los ángulos θ_1 y θ_2 de la ecuación 29.37 son muy pequeños, de modo que la aproximación de ángulos pequeños $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ es válida.

(a) Dibujar un diagrama y demostrar que

$$\theta_1 \approx \frac{R}{x + \frac{1}{2}\ell} \qquad \text{y} \qquad \theta_2 \approx \frac{R}{x - \frac{1}{2}\ell}$$

(b) Demostrar que el campo magnético en un punto alejado de los extremos del solenoide puede escribirse en la forma

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{q_m}{r_1^2} - \frac{q_m}{r_2^2}\right) \qquad \textbf{(29.38)}$$

en donde $r_1 = x - \frac{1}{2}\ell$ es la distancia al extremo próximo del solenoide, $r_2 = x + \frac{1}{2}\ell$ es la distancia al extremo alejado y $q_m = nI\pi R^2 = \mu/\ell$, siendo $\mu = NI\pi R^2$ el momento magnético del solenoide.

••• **44** En este problema debe deducirse la ecuación 29.38 por otro método. Consideremos un solenoide estrechamente arrollado, largo, de longitud ℓ y radio $R << \ell$ situado a lo largo del eje x con su centro en el origen. Posee N vueltas y transporta una corriente I. Consideremos un elemento del solenoide de longitud dx.

(a) ¿Cuál es el momento magnético de este elemento?

(b) Demostrar que el campo magnético dB debido a este elemento en un punto x_0 sobre el eje x, lejos del elemento, viene dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\, nIA\, \frac{dx}{x'^3}$$

en donde $A = \pi R^2$ y $x' = x_0 - x$ es la distancia desde el elemento al punto del campo.

(c) Integrar esta expresión desde $x = -\frac{1}{2}\ell$ a $x = +\frac{1}{2}\ell$ para obtener la ecuación 29.38

Ley de Ampère

• **45** La ley de Ampère es válida

(a) cuando hay un alto grado de simetría.
(b) cuando no hay simetría.
(c) cuando la corriente es constante.
(d) cuando el campo magnético es constante.
(e) en todas estas situaciones si la corriente es continua.

• **46** Una corteza cilíndrica de paredes delgadas, rectilínea y larga, de radio R transporta una corriente I. Determinar B dentro y fuera del cilindro.

• **47** En la figura 29.43 una corriente vale 8 A y está dirigida hacia el papel, la otra corriente vale 8 A y está dirigida hacia el lector y cada una de las curvas es una trayectoria circular.

(a) Hallar $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ para cada trayectoria indicada.
(b) ¿Cuál de las trayectorias, si es que la hay, puede utilizarse para hallar B en cualquier punto debido a estas corrientes?

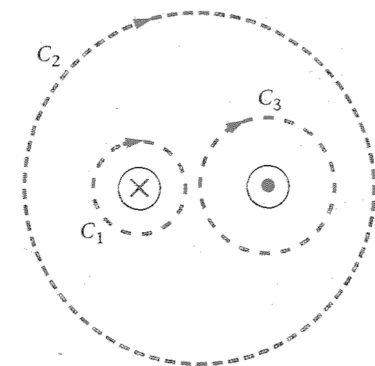


Figura 29.43 Problema 47.

• **48** Un cable coaxial muy largo tiene un conductor interior y una corteza conductora cilíndrica exterior concéntrica con la anterior de radio R. En un extremo, el conductor y la corteza están unidos a los terminales opuestos de una batería de modo que existe una corriente que circula por ambos. Admitir que el cable es rectilíneo y hallar B

(a) en puntos alejados de los extremos y entre el conductor y la corteza y
(b) en el exterior del cable.

•• **49** Por un conductor de radio 0,5 cm, circula una corriente de 100 A uniformemente distribuida en toda su sección recta. Hallar B

(a) a 0,1 cm del centro del conductor,
(b) en la superficie del mismo y
(c) en un punto exterior al conductor a 0,2 cm de la superficie del conductor.
(d) Construir un gráfico de B en función de la distancia al centro del conductor.

•• **50** Demostrar que no es posible obtener un campo magnético uniforme en el que no existe ningún campo disperso, como se ve en la figura 29.44, debido a que viola la ley de Ampère. Comprobarlo aplicando la ley de Ampère a la curva rectangular indicada por las líneas a trazos.

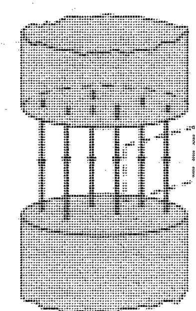


Figura 29.44 Problema 50.

•• **51** Un cable coaxial está formado por un conductor sólido interno cilíndrico de radio 1,00 mm y una corteza cilíndrica externa conductora de radio interno 2,00 mm y un radio externo de 3,00 mm. Por el conductor interior circula una corriente de intensidad 18 A y una corriente igual retorna por el conductor exterior. Las corrientes son uniformes en toda la sección transversal de cada conductor. Determinar el valor numérico de $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ para una trayectoria circular cerrada (centrada en el eje del cable y en un plano perpendicular al eje) de radio r para

(a) $r = 1{,}50$ mm, (b) $r = 2{,}50$ mm y (c) $r = 3{,}50$ mm.

•• **52** Una corteza cilíndrica gruesa infinitamente larga de radio interior a y radio exterior b transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda la sección transversal de la corteza. Determinar el campo magnético en

(a) $r < a$, (b) $a < r < b$, y (c) $r > b$.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **53** La figura 29.45 muestra un solenoide que transporta una corriente I con n vueltas por unidad de longitud. Aplicar la ley de Ampère a la línea rectangular indicada para deducir una expresión de B, suponiendo que éste es uniforme dentro del solenoide y nulo en el exterior.

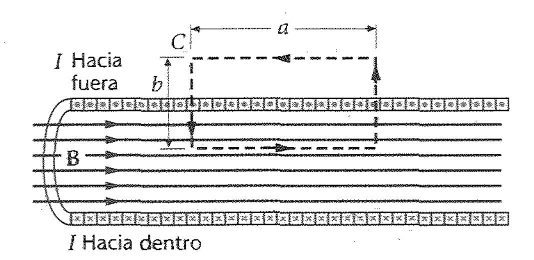


Figura 29.45 Problema 53.

•• **54** Un toroide con un arrollamiento compacto, de radio interior 1 cm y radio exterior 2 cm, posee 1000 vueltas de alambre y transporta una corriente de 1,5 A.

(a) ¿Cuánto vale el campo magnético a una distancia de 1,1 cm del centro?
(b) ¿Cuánto vale a 1,5 cm del centro?

•• **55** El plano xz contiene una lámina infinita de corriente en la dirección z positiva. La intensidad de corriente por unidad de longitud (a lo largo de la dirección x) es λ. La figura 29.46a muestra un punto P por encima de la lámina ($y > 0$) y dos porciones de la lámina de corriente especificada por I_1 e I_2.

(a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético **B** en P debido a las dos porciones de la corriente indicadas?
(b) ¿Cuál es la dirección del campo magnético **B** en P debido a la lámina entera?
(c) ¿Cuál es la dirección de **B** en un punto por debajo de la lámina ($y < 0$)?
(d) Aplicar la ley de Ampère a la figura rectangular mostrada en la figura 29.46b y demostrar que el campo magnético en cualquier punto por encima de la lámina viene dado por $\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mu_0\lambda\mathbf{i}$.

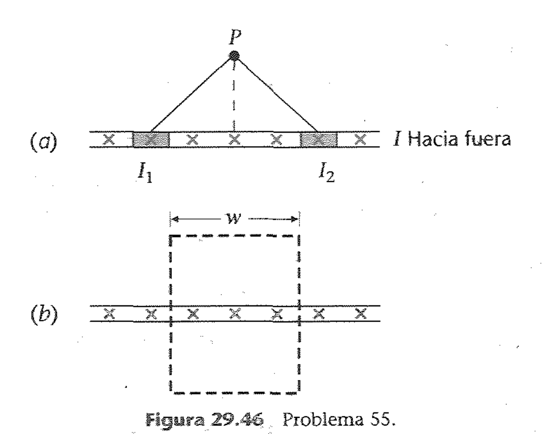


Figura 29.46 Problema 55.

Imantación y susceptibilidad magnética

• **56** Verdadero o falso:

(a) El diamagnetismo es el resultado de los momentos dipolares magnéticos inducidos.
(b) El paramagnetismo es el resultado del alineamiento parcial de los momentos dipolares magnéticos permanentes.

• **57** Si la susceptibilidad magnética es positiva

(a) los efectos paramagnéticos o los efectos ferromagnéticos deben ser mayores que los diamagnéticos.
(b) los efectos diamagnéticos deben ser mayores que los paramagnéticos.
(c) los efectos diamagnéticos deben ser mayores que los ferromagnéticos.
(d) los efectos ferromagnéticos deben ser mayores que los paramagnéticos
(e) los efectos paramagnéticos deben ser mayores que los ferromagnéticos.

• **58** Un solenoide con arrollamiento compacto de 20 cm de largo tiene 400 vueltas por las que circula una corriente de 4 A de modo que su campo axial tiene la dirección z. Despreciando los extremos, hallar B y B_{ap} en el centro cuando

(a) no existe ningún núcleo en el solenoide y
(b) existe un núcleo de hierro en el solenoide con una imantación $M = 1{,}2 \times 10^6$ A/m.

• **59** ¿Cuáles de los cuatro gases relacionados en la tabla 29.1 son diamagnéticos y cuáles son paramagnéticos?

• **60** Si el solenoide del problema 58 tiene un núcleo de aluminio, hallar B_{ap}, M y B en el centro, despreciando los efectos de los extremos.

• **61** Repetir el problema 60 en el caso de un núcleo de tungsteno.

• **62** Un solenoide largo está arrollado alrededor de un núcleo de tungsteno y transporta una corriente.

(a) Si se extrae el núcleo mientras la corriente se mantiene constante, ¿el campo magnético dentro del solenoide crece o decrece?
(b) ¿En qué porcentaje?

• **63** Cuando una muestra de líquido se inserta en un solenoide que transporta una corriente de intensidad constante, el campo magnético dentro del solenoide disminuye en un 0,004 por ciento. ¿Cuál es la susceptibilidad magnética del líquido?

• **64** Un solenoide largo que transporta una corriente de 10 A tiene 50 vueltas/cm. ¿Cuál es el campo magnético en el interior del solenoide si

(a) está vacío,
(b) está lleno de aluminio, y
(c) está lleno de plata.

•• **65** Un ingeniero intenta llenar un solenoide con una mezcla de oxígeno y nitrógeno a la temperatura ambiente y presión de 1 atmósfera, de tal modo que K_m sea exactamente igual a la unidad. Se supone que los momentos dipolares magnéticos de las moléculas del gas están todos alineados y que la susceptibilidad de un gas es proporcional a la densidad numérica de sus moléculas. ¿En que relación deben estar las densidades numéricas de las moléculas de oxígeno y nitrógeno para que $K_m = 1$?

•• **66** Un cilindro de material magnético se sitúa en el interior de un largo solenoide de n vueltas por unidad de longitud por el que circula una corriente de intensidad I. La tabla 29.3 nos ofrece el campo magnético B en función de nI. Utilizar estos valores para representar B en función de B_{ap} y K_m en función de nI.

Tabla 29.3

nI, A/m	0	50	100	150	200	500	1000	10000
B, T	0	0,04	0,67	1,00	1,2	1,4	1,6	1,7

•• **67** Una pequeña muestra magnética posee forma de disco. Tiene un radio de 1,4 cm, un espesor de 0,3 cm y una imantación uni-

www.elsolucionario.net

forme en todo su volumen. El momento magnético de la muestra es $1{,}5 \times 10^{-2}$ A·m^2.

(a) ¿Cuál es su imantación **M**?
(b) Si esta imantación es debida al alineamiento de N electrones, cada uno de los cuales posee un momento magnético de 1 μ_B, ¿cuál es el valor de N?
(c) Si la imantación tiene lugar a lo largo del eje del disco, ¿cuál es la magnitud de la corriente superficial amperiana?

•• **68** El momento magnético de la Tierra es aproximadamente 9×10^{22} A·m^2.

(a) Si la imantación del núcleo terrestre fuera $1{,}5 \times 10^9$ A/m, ¿cuál sería su volumen?
(b) ¿Cuál es el radio de este núcleo supuesto esférico y centrado en la Tierra?

Momentos magnéticos atómicos

•• **69** El níquel tiene una densidad de 8,7 g/cm^3 y una masa molar de 58,7 g/mol. Su imantación de saturación es $\mu_0 M_s = 0{,}61$ T. Calcular el momento magnético en magnetones de Bohr de un átomo de níquel.

•• **70** Repetir el problema 69 para el cobalto, que tiene una densidad de 8,9 g/cm^3, una masa molar de 58,9 g/mol y una imantación de saturación de $\mu_0 M_s = 1{,}79$ T.

Paramagnetismo (opcional)

• **71** Demostrar que la ley de Curie predice que la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética viene dada por $\chi_m = \mu\mu_0 M_s/3kT$.

•• **72** En un modelo sencillo del paramagnetismo podemos considerar que cierta fracción f de las moléculas tienen sus momentos magnéticos alineados con el campo magnético externo y el resto de ellas están orientadas al azar, de modo que no contribuyen al campo magnético.

(a) Utilizar este modelo de la ley de Curie para demostrar que a una temperatura T y con un campo externo B esta fracción de moléculas alineadas es $f = \mu_B/3kT$.
(b) Calcular esta fracción para $T = 300$ K, $B = 1$T, admitiendo que μ es un magnetón de Bohr.

•• **73** Admitir que el momento magnético de un átomo de aluminio es 1 magnetón de Bohr. La densidad del aluminio es 2,7 g/cm^3 y su masa molar es de 27 g/mol.

(a) Calcular M_s y $\mu_0 M_s$, para el aluminio.
(b) Utilizar el resultado del problema 71 para calcular χ_m a $T = 300$ K.
(c) Explicar por qué el resultado de (b) es mayor que el valor que se muestra en la tabla 29.1.

•• **74** Un toroide de N vueltas, de radio medio R y radio de su sección transversal r, siendo $r \ll R$, transporta por su arrollamiento una corriente de intensidad I (figura 29.47). Cuando se rellena el toroide con cierto material, se denomina *anillo de Rowlan*. Hallar B_{ap} y B en dicho anillo. Admitir que la imantación **M** en todos los puntos es paralela a $\mathbf{B}_{ap}$.

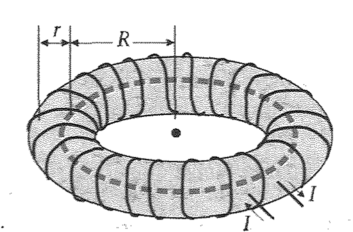


Figura 29.47 Problema 74.

•• **75** Un toroide se rellena con oxígeno líquido, cuya susceptibilidad magnética es 4×10^{-3}. El toroide posee 2000 vueltas y transporta una corriente de 15 A. Su radio medio es de 20 cm y el radio de su sección transversal, 0,8 cm.

(a) ¿Cuál es la imantación M?
(b) ¿Cuál es el campo magnético B?
(c) ¿Cuál es el porcentaje en que se ha incrementado el campo B producido por el oxígeno líquido?

•• **76** Un toroide de radio medio 14 cm y área de la sección transversal de 3 cm^2 está arrollado con alambre fino a razón de 60 vueltas/cm, medidas a lo largo de su circunferencia media, transportando una corriente de intensidad 4 A. El núcleo está relleno de un material paramagnético, cuya susceptibilidad es $2{,}9 \times 10^{-4}$.

(a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético dentro de la sustancia?
(b) ¿Cuál es la magnitud de la imantación?
(c) ¿Cuál sería la magnitud del campo magnético si no estuviera presente el núcleo paramagnético?

Ferromagnetismo (opcional)

• **77** En el caso del hierro recocido la permeabilidad K_m tiene un valor máximo de unos 5500 para $B_{ap} = 1{,}57 \times 10^{-4}$ T. Hallar M y B cuando K_m es máximo.

•• **78** La imantación de saturación en el caso del hierro recocido tiene lugar cuando $B_{ap} = 0{,}201$ T. Hallar la permeabilidad μ y la permeabilidad relativa K_m en la saturación (ver tabla 29.2).

•• **79** La fuerza coercitiva se define como el campo magnético aplicado necesario para anular B a lo largo de la curva de histéresis (punto c de la figura 29.35). Para un determinado imán permanente en forma de barra es $B_{ap} = 5{,}53 \times 10^{-2}$ T. El imán en forma de barra ha de desimantarse situándolo en el interior de un solenoide largo de 15 cm de longitud y 600 vueltas. ¿Cuál es la corriente mínima necesaria que ha de circular por el solenoide para desimantar el imán?

•• **80** Un solenoide largo tiene 50 vueltas/cm y por él circula una corriente de 2 A. Al solenoide lo atraviesa un núcleo de hierro y se mide B resultando valer 1,72 T.

(a) ¿Cuál es el valor de B_{ap} (despreciando los efectos de los extremos)?
(b) ¿Cuál es el valor de M?
(c) ¿Cuál es la permeabilidad relativa K_m en este caso?

•• **81** Cuando la corriente que circula por el solenoide del problema 15 es 0,2 A, el campo magnético medido resulta valer 1,58 T.

(a) Despreciando los efectos de los extremos, ¿cuánto vale B_{ap}?
(b) ¿Cuánto vale M?
(c) ¿Cuánto vale la permeabilidad relativa K_m?

•• **82** Un solenoide largo con núcleo de hierro que posee 2000 vueltas/m transporta una corriente de 20 mA. Con esta corriente, la permeabilidad relativa del núcleo de hierro es 1200.

(a) ¿Cuál es el campo magnético dentro del solenoide?
(b) Cuando se extrae el núcleo de hierro, determinar la corriente necesaria para producir el mismo campo dentro del solenoide.

•• **83** Dos alambres largos y rectilíneos están separados 4,0 cm e incluidos en un aislante uniforme, cuya permeabilidad relativa es $K_m = 120$. Los alambres transportan 40 A en sentidos opuestos.

(a) ¿Cuál es el campo magnético en el punto medio del plano de los alambres?
(b) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre los alambres?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **84** El toroide del problema 75 tiene su núcleo relleno de hierro. Cuando la corriente es de 10 A, el campo magnético en el toroide es 1,8 T.

(a) ¿Cuál es la imantación M?

(b) Determinar los valores de K_m, μ y χ_m correspondientes a la muestra de hierro.

•• **85** ¿Cuál sería el resultado del problema 76 si sustituyéramos el núcleo paramagnético por hierro dulce, cuya permeabilidad relativa es 500?

•• **86** Un alambre largo y rectilíneo con un radio de 1,0 mm se recubre con un material ferromagnético aislante de espesor 3,0 mm y una permeabilidad magnética relativa, $K_m = 400$. El alambre así recubierto se encuentra en el aire. El alambre en sí mismo no es magnético y transporta una corriente de 40 A.

(a) Determinar el campo magnético dentro del alambre en función del radio r.

(b) Determinar el campo magnético dentro del material ferromagnético en función del radio r.

(c) Determinar el campo magnético fuera del material ferromagnético en función de r.

(d) ¿Cuáles serán las magnitudes y direcciones de las corrientes amperianas sobre las superficies del material ferromagnético que expliquen los campos magnéticos observados?

Problemas generales

• **87** Verdadero o falso

(a) El campo magnético debido a un elemento de corriente es paralelo a este elemento.

(b) El campo magnético debido a un elemento de corriente varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia desde el elemento.

(c) El campo magnético debido a un alambre largo varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia desde el alambre.

(d) La ley de Ampère es válida sólo si existe un alto grado de simetría.

(e) La ley de Ampère es válida sólo para corrientes continuas.

• **88** ¿Puede una partícula tener momento angular y carecer de momento magnético?

• **89** ¿Puede una partícula tener momento magnético y carecer de momento angular?

• **90** Un anillo de alambre circular transporta una corriente I. ¿Existe momento angular asociado con el momento magnético de la espira? Si es así, ¿por qué no se observa?

• **91** Un tubo hueco transporta una corriente. Dentro del tubo, $\mathbf{B} = 0$. ¿Por qué ocurre esto y en cambio $\mathbf{B}$ es intenso dentro de un solenoide?

• **92** Cuando una corriente pasa a través del cable de la figura 29.48, ¿éste tiende a agruparse o a formar un círculo?

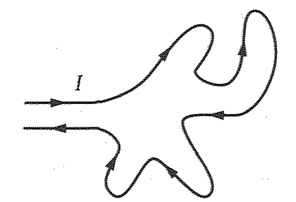


Figura 29.48 Problema 92.

• **93** Determinar el campo magnético en el punto P de la figura 29.49.

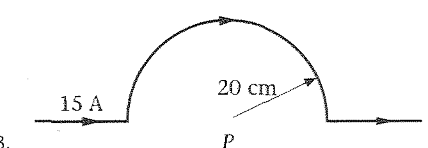


Figura 29.49 Problema 93.

• **94** Hallar el campo magnético en el punto P de la figura 29.50 que es el centro común de los dos arcos de semicircunferencia.

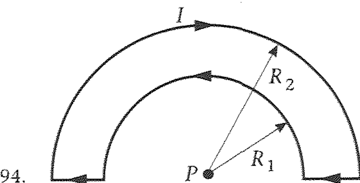


Figura 29.50 Problema 94.

•• **95** Un conductor de longitud ℓ se arrolla en forma de una bobina circular de N espiras y transporta una corriente de intensidad I. Demostrar que el campo magnético en el centro de la bobina viene dado por $B = \mu_0 \pi N^2 I/\ell$.

•• **96** Un conductor muy largo que transporta una corriente I se dobla en la forma indicada en la figura 29.51. Determinar el campo magnético en el punto P.

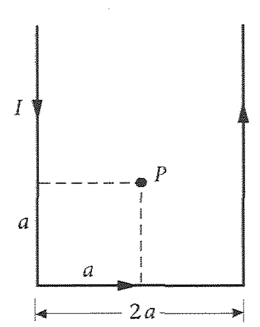


Figura 29.51 Problema 96.

•• **97** Una espira conductora de longitud ℓ transporta una corriente I. Comparar el campo magnético en el centro de la espira para los casos en que

(a) se trata de una circunferencia,

(b) un cuadrado y

(c) un triángulo equilátero. ¿Cuál campo es mayor?

•• **98** Un cable de transmisión de energía por el cual circulan 50,0 A está situado a 2,0 m por debajo de la superficie terrestre, pero se ignora su dirección y posición precisa. Explicar cómo podría localizarse utilizando una brújula. Admitir que se encuentra en el ecuador, en donde el campo magnético terrestre es 0,7 G dirigido hacia el norte.

•• **99** Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 20 A, según se ve en la figura 29.52. Una bobina rectangular con dos de sus lados paralelos al conductor recto tiene sus lados de 5 y 10 cm estando su lado más próximo a una distancia de 2 cm del conductor. La bobina transporta una corriente de 5 A.

(a) Determinar la fuerza que actúa sobre cada segmento de la bobina rectangular.

(b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la bobina?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

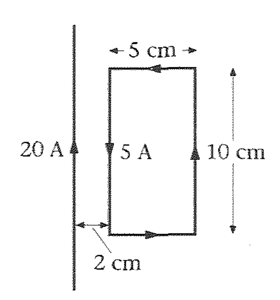


Figura 29.52 Problema 99.

•• **100** La espira cerrada que se muestra en la figura 29.53 transporta una corriente de 8,0 A en sentido antihorario. El radio del arco exterior es de 60 cm y el del interior 40 cm. Determinar el campo magnético en el punto *P*.

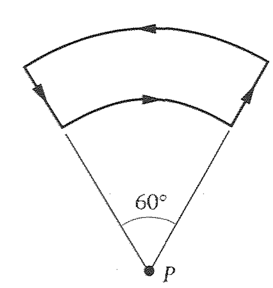


Figura 29.53 Problema 100.

•• **101** Un circuito cerrado está formado por dos semicírculos de radios 40 y 20 cm conectados entre sí por segmentos rectilíneos, como se muestra en la figura 29.54. Una corriente fluye por este circuito en sentido horario. Determinar el campo magnético en el punto *P*.

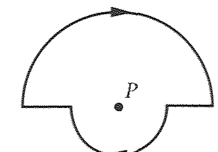


Figura 29.54 Problema 101.

•• **102** Por un conductor rectilíneo muy largo circula una corriente de 20,0 A. Un electrón está a 1,0 cm del centro del conductor y se mueve con una velocidad de $5{,}0 \times 10^6$ m/s. Hallar la fuerza sobre el electrón cuando se mueve

(a) directamente alejándose del conductor,
(b) paralelo al conductor en el sentido de la corriente y
(c) perpendicular al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica con el conductor.

•• **103** Una corriente *I* está distribuida uniformemente en toda la sección transversal de un conductor recto y largo de radio 1,40 mm. En la superficie del conductor, el campo magnético tiene la magnitud $B = 2{,}46$ mT. Determinar la magnitud del campo magnético

(a) a 2,10 mm del eje y
(b) a 0,60 mm del eje.
(c) Determinar la intensidad *I* de la corriente.

•• **104** Una bobina circular de 50 vueltas y radio 10,0 cm transporta una corriente de 4,0 A. En el centro de esta gran bobina existe una pequeña bobina de 20 vueltas de radio 0,5 cm que transporta una corriente de 1,0 A. Los planos de las dos bobinas son perpendiculares. Determinar el momento ejercido por la bobina grande sobre la pequeña. (Despreciar cualquier variación de *B* debida a que la gran bobina cubre la región ocupada por la pequeña.)

•• **105** La figura 29.55 muestra un imán en forma de barra suspendido por un delgado alambre que le proporciona un momento de restitución $-\kappa\theta$. El imán tiene 16 cm de longitud, una masa de 0,8 kg, un momento dipolar de $\mu = 0{,}12$ A · m^2 y está localizado en una región donde puede establecerse un campo magnético uniforme *B*. Cuando el campo magnético externo es 0,2 T y el imán experimenta un pequeño desplazamiento angular $\Delta\theta$, la barra oscila alrededor de su posición de equilibrio con un período de 0,500 s. Determinar la constante κ y el período de este péndulo de torsión cuando $B = 0$.

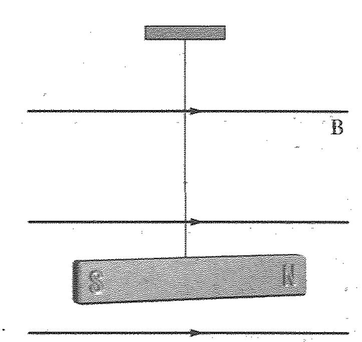


Figura 29.55 Problema 105.

•• **106** Una barra imantada larga y estrecha que tiene su momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ paralelo a su eje más largo está suspendida por el centro como la aguja de una brújula sin rozamiento. Situada en un campo magnético B, la aguja se alinea con el campo. Si se desplaza un pequeño ángulo θ, demostrar que la aguja oscilará alrededor de su posición de equilibrio con la frecuencia $f = (1/2\pi)\sqrt{\mu B/I}$, en donde *I* es el momento de inercia alrededor del punto de suspensión.

•• **107** Un pequeño imán en forma de barra de masa 0,1 kg y momento magnético $\mu = 0{,}04$ A · m^2 está localizado en el centro de una espira de 0,2 m de diámetro. Por la espira fluye una corriente de 5,0 A. En equilibrio, la barra está alineada con el campo debido a la espira. Se da un desplazamiento a la barra a lo largo del eje de la espira y se deja en libertad. Demostrar que si el desplazamiento es pequeño, la barra magnética ejecuta un movimiento armónico simple; y determinar el período de este movimiento.

•• **108** Supongamos que la aguja del problema 106 es una barra de hierro uniformemente imantada de 8 cm de longitud y un área transversal de 3 mm^2. Consideremos que el momento dipolar magnético de cada átomo de hierro es 2,2 μ_B y que todos ellos poseen alineados sus momentos dipolares. Calcular la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio cuando el campo magnético es 0,5 G.

•• **109** La aguja de una brújula magnética posee una longitud de 3 cm, un radio de 0,85 mm y una densidad de $7{,}96 \times 10^3$ kg/m^3. Puede girar libremente en un plano horizontal, donde el componente horizontal del campo magnético terrestre es 0,6 G. Cuando se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, la aguja efectúa un movimiento armónico simple alrededor de su punto medio con una frecuencia de 1,4 Hz.

(a) ¿Cuál es el momento dipolar magnético de la aguja?
(b) ¿Cuál es la imantación *M*?
(c) ¿Cuál es la corriente amperiana en la superficie de la aguja? (Véase problema 106.)

•• **110** Una barra de hierro de longitud 1,4 m tiene un diámetro de 2 cm y una imantación uniforme de $1{,}72 \times 10^6$ A/m en la dirección de su eje longitudinal. La barra, estacionaria en el espacio, se desimanta súbitamente de modo que desaparece su imantación. ¿Cuál es la velocidad angular de rotación de la barra si el momento angular se conserva? (Suponer que la ecuación 29.27 se cumple, siendo *m* la masa de un electrón y $q = -e$.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **111** El momento dipolar magnético de un átomo de hierro vale 2,219 μ_B.

(a) Si todos los átomos de una barra de hierro de longitud 20 cm y área transversal 2 cm^2 tienen alineados sus momentos dipolares, ¿cuál es el momento dipolar de la barra?

(b) ¿Qué momento debe aplicarse para mantener la barra en posición perpendicular a un campo magnético de 0,25 T?

•• **112** Puede construirse un amperímetro relativamente barato, denominado *galvanómetro de tangentes*, utilizando el campo terrestre. Una bobina circular plana de N espiras y un radio R está orientada de modo que el campo B_c que se produce en el centro de la bobina está dirigido hacia el este o hacia el oeste. Se coloca en el centro de la misma una brújula. Cuando no circula corriente por la bobina, la brújula señala hacia el norte. Cuando existe una corriente I, la brújula señala en la dirección del campo magnético resultante **B** formando un ángulo θ con el norte. Demostrar que la corriente I está relacionada con θ y con el componente horizontal del campo terrestre B_t por

$$I = \frac{2RB_t}{\mu_0 N} \operatorname{tg}\theta$$

•• **113** Un conductor recto infinitamente largo se dobla en la forma indicada en la figura 29.56. La porción circular tiene un radio de 10 cm con su centro a la distancia r de la parte recta. Determinar r de modo que el campo magnético en el centro de la porción circular sea cero.

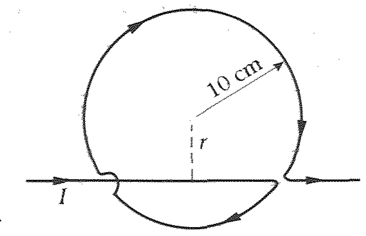


Figura 29.56 Problema 113.

•• **114**

(a) Determinar el campo magnético en el punto P generado por la corriente de intensidad I que circula por el conductor mostrado en la figura 29.57.

(b) Utilizar el resultado de (a) para determinar el campo en el centro de un polígono de N lados. Demostrar que cuando N es muy grande, el resultado se aproxima al del campo magnético en el centro de un círculo.

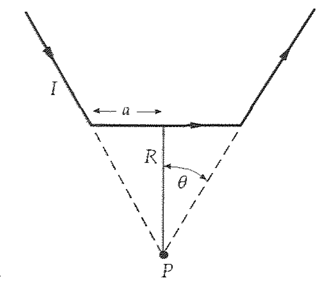


Figura 29.57 Problema 114.

•• **115** La corriente que circula por un conductor cilíndrico largo de radio R = 10 cm varía con la distancia al eje del mismo según la relación $I(r)$ = (50 A/m)r. Determinar el campo magnético en

(a) r = 5 cm, **(b)** en r = 10 cm y **(c)** r = 20 cm.

•• **116** La figura 29.58 muestra un alambre infinitamente largo, portador de una corriente I_1 = 10 A y una espira cuadrada que transporta una corriente I_2 = 5 A. La longitud de los lados de la espira es de 20 cm y el lado paralelo más próximo al alambre dista de éste 10 cm.

(a) Determinar el momento que actúa sobre la espira respecto a un eje que pasa por el lado superior de ésta.

(b) Determinar la fuerza neta sobre la espira.

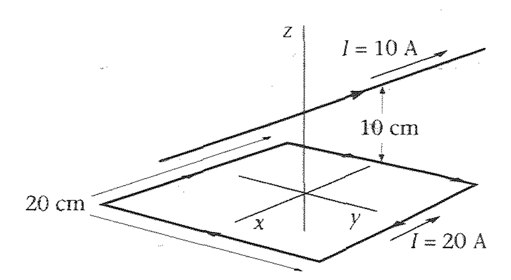


Figura 29.58 Problema 116.

•• **117** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón en su estado fundamental gira alrededor de un protón con un radio de 5,29 × 10^{-11} m. En un sistema de referencia en el cual este electrón se encuentra en reposo, el protón gira alrededor del electrón con el mismo radio y la misma velocidad angular que posee el electrón en el sistema de referencia del protón en reposo. En consecuencia, en el sistema en reposo del electrón, el campo magnético debido al movimiento del protón tiene la misma magnitud que el calculado en el problema 5. El electrón posee un momento magnético intrínseco de magnitud μ_B. Determinar la diferencia energética entre las dos posibles orientaciones del momento magnético intrínseco del electrón, paralela o antiparalela al campo magnético, debido al movimiento aparente del protón. (Esta diferencia energética se observa espectroscópicamente y se conoce como *desdoblamiento de estructura fina*.)

•• **118** El protón posee también un momento magnético intrínseco cuya magnitud es 1,52 × 10^{-3} μ_B. La orientación del momento magnético del protón está cuantizada; sólo puede ser paralela o antiparalela al campo magnético en la posición del protón. Utilizando el resultado del problema 117, determinar la diferencia de energía del átomo de hidrógeno en el modelo de Bohr para las dos posibles orientaciones del momento magnético del protón. Despreciar el campo magnético sobre el protón debido al momento magnético intrínseco del electrón. (Esta diferencia de energía se denomina *desdoblamiento de estructura hiperfina*.)

•• **119** En el cálculo del desdoblamiento de la estructura hiperfina del problema 118 se ha despreciado el campo magnético en la posición del protón debido al momento magnético intrínseco del electrón. Calcular el campo magnético debido al momento magnético intrínseco del electrón a una distancia de 5,29 × 10^{-11} m y comparar su magnitud en la posición del protón con el debido al movimiento orbital del electrón. (*Sugerencia*: Suponer que el espín del electrón es perpendicular al plano de su órbita y demostrar que la magnitud del campo magnético a una mayor distancia de un dipolo magnético sobre una línea perpendicular al dipolo viene dada por $B = (\mu_0/4\pi)\mu/r^3$.)

••• **120** Un disco de radio R lleva una carga fija de densidad σ y gira con velocidad angular ω.

(a) Consideremos un anillo circular de radio r y anchura dr con carga dq. demostrar que la corriente producida por este anillo es $dI(\omega/2\pi)dq = \omega\sigma r\, dr$.

(b) Utilizar este resultado de la parte (a) para demostrar que el campo magnético en el centro del disco es $B = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R$.

(c) Utilizar el resultado de la parte (a) para hallar el campo magnético en un punto situado en el eje del disco a una distancia x del centro.

••• **121** Un conductor rectilíneo muy largo posee una sección transversal circular de radio R y por él circula una intensidad de corriente I. En el interior del conductor se ha practicado un orificio cilíndrico de

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

radio a, cuyo eje es paralelo al eje del conductor y se encuentra a una distancia b de éste (figura 29.59). Hacemos coincidir el eje del conductor con el eje z, y el eje del orificio cumple la condición $x = b$. Calcular el campo magnético B en los puntos

(a) sobre el eje x en $x = 2R$, y
(b) sobre el eje y en $y = 2R$.
(*Indicación*: Considerar una distribución de corriente uniforme a lo largo del cilindro de radio R, y que circula una corriente en sentido opuesto por el orificio.)

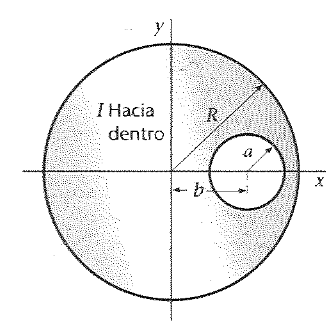


Figura 29.59 Problema 121.

••• **122** Demostrar para el cilindro sobre el que se ha practicado un orificio del problema 121, que el campo magnético en el interior del orificio es uniforme y calcular su módulo y dirección.

••• **123** Una espira cuadrada de lado ℓ está en el plano yz con su centro en el origen. Transporta una corriente I. Determinar el campo magnético B en cualquier punto sobre el eje x y demostrar que para x mucho mayor que ℓ,

$$B \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{x^3}$$

en donde $\mu = I\ell^2$ es el momento magnético de la espira.

••• **124** Una espira circular recorrida por una corriente I se encuentra en el plano yz con su eje a lo largo del eje x.

(a) Evaluar la integral de línea $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\ell$ a lo largo del eje de la espira desde $x = -\ell_1$ a $x = +\ell_1$.
(b) Demostrar que cuando $\ell_1 \rightarrow \infty$, la integral de línea se aproxima a $\mu_0 I$. Este resultado puede relacionarse con la ley de Ampère cerrando la curva de integración con una semicircunferencia de radio ℓ para la cual $B \approx 0$ para valores muy grandes de ℓ.

••• **125** La corriente en un conductor largo cilíndrico de radio R viene dada por $I(r) = I_0(1 - e^{r/a})$. Deducir las expresiones correspondientes al campo magnético debido a esta corriente para $r < R$ y $r > R$.

••• **126** En el ejemplo 29.8 calculamos el campo magnético interior y exterior a un alambre de radio R portador de una corriente uniforme I. Consideremos un filamento de corriente a una distancia r del centro del alambre. Demostrar que este filamento experimenta una fuerza dirigida hacia el centro del alambre y que, por tanto, la distribución de corriente no puede ser totalmente uniforme. Este efecto llamado *efecto de pinzamiento* (*pinch-effect*) depende de la magnitud de la corriente, pero generalmente puede despreciarse. Consideremos un alambre de cobre de diámetro 2,0 cm que transporta una corriente nominalmente uniforme de 400 A. Calcular la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre una región anular de corriente, de 0,1 mm de espesor, en la periferia del alambre. Suponer que la corriente es transportada por los electrones de conducción. ¿Qué distancia hacia el centro del alambre tendría que desplazarse esta región de corriente anular para que la fuerza electrostática entre los electrones y los iones positivos fijos en la periferia equilibren justamente la fuerza magnética?

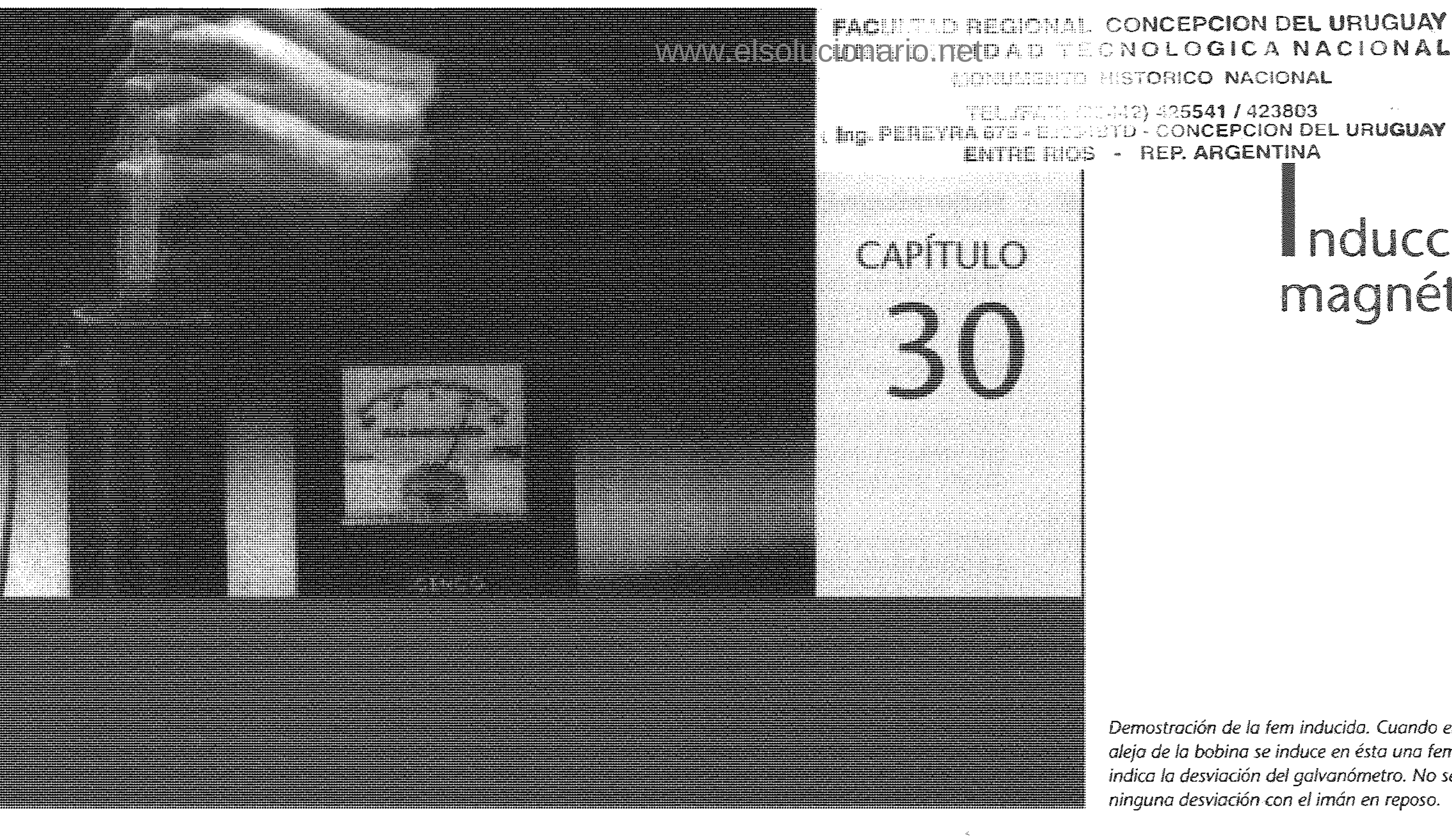
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 30

Inducción magnética

Demostración de la fem inducida. Cuando el imán se aleja de la bobina se induce en ésta una fem, como indica la desviación del galvanómetro. No se observa ninguna desviación con el imán en reposo.

www.elsolucionario.net

A principios de la década de 1830, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry en Norteamérica descubrieron independientemente que un campo magnético induce una corriente en un conductor, siempre que el campo magnético sea *variable*. Las fuerzas electromotrices y las corrientes causadas por los campos magnéticos variables se denominan **fems inducidas** y **corrientes inducidas**. En sí mismo, el proceso se denomina **inducción magnética**.

A veces, al extraer la clavija del enchufe de un circuito eléctrico observamos la producción de una pequeña chispa. Antes de la desconexión, el cordón eléctrico transporta una corriente, que como sabemos genera un campo magnético alrededor de la corriente. Al desconectar, la corriente cesa bruscamente y el campo magnético que le rodea se colapsa. El campo magnético variable produce una fem que tiende a mantener la corriente original engendrando así una chispa a través del enchufe. Una vez que el campo magnético se ha anulado y, por tanto, deja de ser variable, la fem es cero.

Los campos magnéticos variables pueden también obtenerse con corrientes variables o mediante imanes móviles. La fotografía que ilustra el comienzo de este capítulo es una simple demostración de las corrientes inducidas. Los extremos del hilo de una bobina se conectan a un galvanómetro y un imán intenso se introduce o se extrae de la bobina. La desviación momentánea de la aguja del galvanómetro *durante* el movimiento indica la existencia de una corriente eléctrica inducida en el circuito bobina-galvanómetro. También se produce una corriente inducida si la bobina se acerca o se aleja del conductor, o si la bobina gira en un campo magnético fijo. Una bobina que gira en un campo magnético es el elemento básico de un generador que convierte la energía mecánica o térmica en energía eléctrica.

Todos los métodos de inducción magnética pueden resumirse mediante una simple expresión llamada ley de Faraday, que relaciona la fem inducida en un circuito con el cambio de flujo magnético a través del circuito.

 www.elsolucionario.net

30.1 ■ Flujo magnético

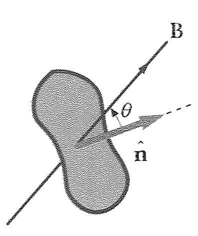


Figura 30.1 Si el campo B forma un ángulo θ con la normal al área de un bucle, el flujo a través del mismo es $B \cos \theta A$.

El flujo de un campo magnético a través de una superficie se define de un modo análogo al flujo de un campo eléctrico (sección 22.2). Sea dA un elemento de área sobre la superficie y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario perpendicular al elemento (figura 30.1). El flujo magnético ϕ_m se define por la expresión

$$\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_S B_n\, dA \qquad (30.1)$$

Definición —Flujo magnético

La unidad de flujo magnético es la del campo magnético multiplicada por la unidad del área, tesla-metro cuadrado, y se denomina **weber** (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \qquad (30.2)$$

Como el campo magnético es proporcional al número de líneas de campo magnético por unidad de área, el flujo magnético es proporcional al número de líneas que atraviesan el área.

Ejercicio Demostrar que 1 weber por segundo es un voltio.

Si la superficie es un plano de área A y B es constante en magnitud y dirección sobre la superficie y forma un ángulo θ con el vector unitario normal, el flujo es

$$\phi_m = BA \cos \theta$$

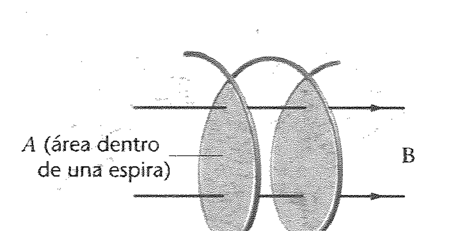


Figura 30.2 El área A total vinculada a una bobina de dos vueltas es igual al doble del área correspondiente a una vuelta. En general, el área vinculada a una bobina de N vueltas es igual al producto de N por el área de cada vuelta.

Con frecuencia trataremos el flujo a través de una bobina que contiene varias vueltas de alambre. Si la bobina contiene N vueltas, el flujo a su través es igual al producto de N por el flujo que atraviesa una sola vuelta (figura 30.2):

$$\phi_m = NBA \cos \theta \qquad (30.3)$$



■ EJEMPLO 30.1

Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de 40 cm de longitud, 2,5 cm de radio y 600 vueltas, cuando transporta una corriente de 7,5 A.

Esquema del problema El campo magnético B dentro del solenoide está uniformemente dirigido a lo largo de su eje. Por tanto, es perpendicular al plano de las espiras. Necesitamos determinar B dentro del solenoide y luego multiplicar B por NA.

1. El flujo magnético es el producto del número de vueltas, el campo magnético y el área de las espiras: $\phi_m = NBA$

2. El campo magnético dentro del solenoide viene dado por $B = \mu_0 nI$, en donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud: $\phi_m = N\mu_0(N/\ell)IA = \mu_0 N^2 IA/\ell$

3. Expresar el área de las espiras en función de su radio: $A = \pi r^2$

4. Sustituir los valores determinados para calcular el flujo:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \mu_0 N^2 IA/\ell \\ &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(600 \text{ vueltas})^2(7{,}5 \text{ A})\pi(0{,}025 \text{ m})^2/(0{,}40 \text{ m}) \\ &= 1{,}66 \times 10^{-2} \text{ Wb}\end{aligned}$$

Observación Obsérvese que $\phi_m = NBA$ y B es proporcional al número de vueltas. Por tanto, el flujo es proporcional a N^2.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Fem inducida y ley de Faraday ■ 30.2

Los experimentos de Faraday, Henry y otros, demostraron que si el flujo magnético a través de un área rodeada por un circuito varía por cualquier medio, se induce una fem que es igual en magnitud a la variación por unidad de tiempo del flujo inducido en el circuito. La fem se detecta usualmente observando una corriente en el circuito, pero aparece incluso aunque el circuito sea incompleto (abierto), de modo que no existe corriente. En nuestras exposiciones previas, la fem en un circuito se localizó en una región específica del mismo, por ejemplo, entre los terminales de la batería. Sin embargo, la fem inducida por un flujo magnético variable puede considerarse distribuida a través del circuito.

El flujo magnético a través de un circuito puede variarse de muchas maneras distintas: la corriente que produce el flujo puede aumentarse o hacerse disminuir; pueden moverse unos imanes permanentes alejándolos o acercándolos al circuito; el propio circuito puede moverse alejándose o acercándose a la fuente de flujo; o puede aumentarse o disminuirse el área del circuito en el interior de un campo magnético fijo. En todos los casos, se induce una fem en el circuito cuyo valor es igual a la variación del flujo magnético por unidad de tiempo.

Consideremos una sola espira de un conductor en un campo magnético, como se indica en la figura 30.3. Si el flujo a través de la espira es variable, se induce en la misma una fem. Como esta fem es el trabajo realizado por unidad de carga, debe existir una fuerza ejercida sobre la carga asociada con la fem. La fuerza por unidad de carga es el campo eléctrico **E**, inducido en este caso por el flujo variable. La integral lineal del campo eléctrico alrededor de un circuito completo es igual al trabajo realizado por unidad de carga, el cual, por definición, es la fem del circuito:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell \qquad (30.4)$$

Definición —fem

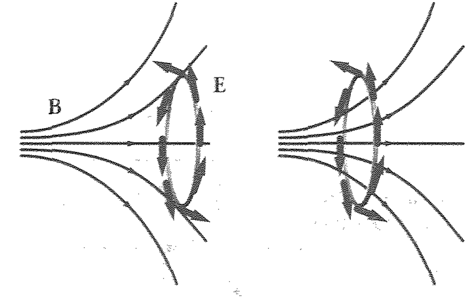


Figura 30.3 Cuando el flujo magnético que atraviesa la espira de alambre es variable, se induce en la misma una fem. La fem se distribuye a través de toda la espira y equivale a un campo eléctrico no conservativo **E** paralelo al alambre. En esta figura, el sentido de **E** corresponde al caso en el cual el flujo que atraviesa la espira es creciente.

Los campos eléctricos que hemos estudiado previamente eran el resultado de cargas eléctricas estáticas. Estos campos son conservativos, lo cual significa que la integral lineal del campo electrostático alrededor de una curva cerrada es cero. Sin embargo, el campo eléctrico resultante de un flujo magnético variable no es conservativo. La integral de línea alrededor de una curva cerrada es igual a la fem inducida, la cual es igual a la variación con el tiempo del flujo magnético:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad (30.5)$$

Ley de Faraday

Este resultado se conoce con el nombre de **ley de Faraday**. El signo negativo de la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida, lo cual discutiremos más adelante.

EJEMPLO 30.2

Un campo magnético uniforme forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 4 cm. El campo varía a razón de 85 T/s. Determinar la magnitud de la fem inducida en la bobina.

Esquema del problema La fem inducida es igual a N veces la variación de flujo a través de cada vuelta por unidad de tiempo. Como B es uniforme, el flujo a través de cada vuelta es simplemente $\phi_m = BA \cos\theta$, en donde $A = \pi r^2$ es el área de una espira.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

1. La magnitud de la fem viene dada por la ley de Faraday: $|\mathscr{E}| = \dfrac{d\phi_m}{dt}$

2. Para un campo uniforme, el flujo es: $\phi_m = NBA \cos\theta$

3. Sustituir ϕ_m por esta expresión y calcular $|\mathscr{E}|$: $|\mathscr{E}| = \dfrac{d\phi_m}{dt} = \dfrac{d}{dt}(NBA \cos\theta) = NA \cos\theta \dfrac{dB}{dt}$

$= (300)(3{,}14)(0{,}04\text{ m})^2 \cos 30° (85\text{ T/s}) = 111\text{ V}$

Ejercicio Si la resistencia de la bobina es 200 Ω, ¿cuál es la corriente inducida? (*Respuesta*: 0,555 A.)

EJEMPLO 30.3
¡Inténtelo!

Una bobina de 80 vueltas tiene un radio de 5,0 cm y una resistencia de 30 Ω. Determinar cuál debe ser la variación del campo magnético perpendicular al plano de la bobina para inducir en ésta una corriente de 4,0 A.

Esquema del problema La variación por unidad de tiempo del campo magnético está relacionada con la variación del flujo, que a su vez depende de la fem inducida según la ley de Faraday. La fem en la bobina es igual a IR.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Escribir el flujo magnético en función de B, N y el radio r y despejar B	$\phi_m = N\pi r^2 B$ $B = \dfrac{\phi_m}{N\pi r^2}$
2. Derivar B respecto al tiempo.	$\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{1}{N\pi r^2}\dfrac{d\phi_m}{dt}$
3. Utilizar la ley de Faraday para relacionar la variación con el tiempo del flujo y la fem.	$\dfrac{d\phi_m}{dt} = \mathscr{E}$
4. Calcular la fem en la bobina a partir de la corriente y resistencia de la bobina.	$\mathscr{E} = IR = 120\text{ V}$
5. Sustituir los valores de E, N y r para calcular dB/dt.	$\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{1}{N\pi r^2}\dfrac{d\phi_m}{dt} = 191\text{ T/s}$



EJEMPLO 30.4

Un campo magnético B es perpendicular al plano de la página y es uniforme en una región circular de radio R, como se indica en la figura 30.4. Fuera de la región circular, B vale 0. La variación por unidad de tiempo de la magnitud de B es dB/dt. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en el plano de la página (a) a una distancia $r < R$ a partir del centro de la región circular y (b) a una distancia $r > R$, en donde $B = 0$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Esquema del problema El campo magnético **B** está dirigido hacia la página y es uniforme en una región circular de radio R. Cuando B varía, el flujo magnético también varía y se induce una fem $\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ alrededor de cualquier curva que incluya el flujo. El campo eléctrico inducido se obtiene aplicando la ley de Faraday. Como sólo nos interesan las magnitudes escalares, despreciaremos el signo menos y utilizaremos $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = d\phi_m/dt$. Para aprovechar la simetría del sistema elegiremos una curva circular de radio r para el cálculo de la integral lineal. Por simetría, **E** es tangente a esta curva y posee la misma magnitud en cualquier punto de la misma. Calcularemos entonces el flujo magnético ϕ_m y su derivada respecto al tiempo. Igualando la integral y la derivada respecto al tiempo, obtenemos una expresión para **E**.

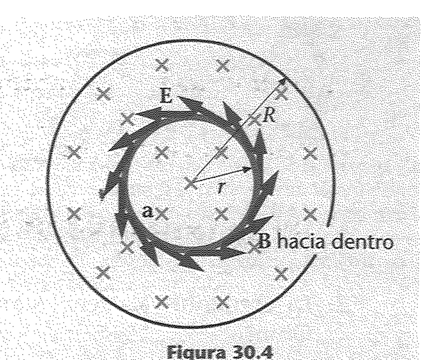


Figura 30.4

(a) 1. E se determina a partir de la integral lineal para un círculo de radio $r < R$. **E** es tangente al círculo y su magnitud es constante:
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E(2\pi r)$$

2. La integral lineal se calcula a partir de la ley de Faraday:
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d\phi_m}{dt}$$

3. Para $r < R$, B es constante sobre el círculo. Como **B** es perpendicular al plano del círculo, el flujo es simplemente BA:
$$\phi_m = BA = B\pi r^2$$

4. Calcular la derivada de ϕ_m respecto al tiempo:
$$\frac{d\phi_m}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

5. Sustituir estos resultados para $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ y despejar E:
$$2\pi r E = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$
$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}, \qquad r < R$$

(b) 1. Para un círculo de radio $r > R$, en donde el campo magnético es nulo, la integral lineal es la misma que antes:
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E(2\pi r)$$

2. Como $B = 0$, para $r > R$, el flujo magnético es $\pi r^2 B$:
$$\phi_m = \pi R^2 B$$

3. Aplicar la ley de Faraday para deducir E:
$$2\pi r E = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$
$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}, \qquad r > R$$

Observaciones En este ejemplo el campo eléctrico está producido por un campo magnético variable y no por cargas eléctricas. Si las cargas hubieran creado el campo, **E** comenzaría en las cargas positivas y terminaría en las cargas negativas. Como las cargas no están presentes, **E** forma círculos sin comienzo ni fin. Obsérvese también que la fem existe en cualquier curva cerrada que limite el área a través de la cual el flujo magnético es variable, haya o no un alambre o circuito a lo largo de la curva.



EJEMPLO 30.5

Una pequeña bobina de N vueltas tiene su plano perpendicular a un campo magnético uniforme B, pasa como indica la figura 30.5. La bobina se conecta a un integrador de corriente ©, un aparato destinado a medir la carga total que pasa a través de ella. Determinar la carga que pasa a través de la bobina, cuando ésta gira 180° alrededor de su diámetro.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Esquema del problema Cuando la bobina de la figura 30.5 gira, el flujo magnético que pasa a través de ella varía, dando lugar a una fem, $\mathcal{E}$. Esta, a su vez, produce una corriente $I = \mathcal{E}/R$, siendo R la resistencia total del circuito. Como $I = dQ/dt$, podemos determinar la carga que pasa a través de la bobina integrando I; es decir, $Q = \int dQ = \int I\,dt$.

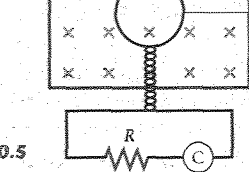


Figura 30.5

1. La carga total es la integral de la corriente: $Q = \int dQ = \int I\,dt$

2. La corriente y la fem están relacionadas por la ley de Ohm: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

3. La magnitud de la fem $\mathcal{E}$ viene dada por la ley de Faraday: $|\mathcal{E}| = \dfrac{d\phi_m}{dt}$

4. Sustituir estos resultados para obtener la carga; $Q = \int I\,dt = \int \dfrac{\mathcal{E}}{R}\,dt = \dfrac{1}{R}\int \dfrac{d\phi_m}{dt}\,dt = \dfrac{1}{R}\int d\phi_m = \dfrac{\Delta\phi_m}{R}$

5. El flujo inicial a través de la bobina es $\phi_{m,i} = NBA$. Cuando la bobina gira 180°, el flujo se invierte. Así, $\phi_{m,f} = -NBA$ y se calcula $\Delta\phi_m$: $\Delta\phi_m = \phi_{m,f} - \phi_{m,i} = (NBA) - (-NBA) = 2NBA$

6. Combinando los dos resultados anteriores se obtiene Q: $Q = \dfrac{2NBA}{R}$

Observaciones La carga Q es independiente del tiempo invertido en la rotación de la bobina. Sólo influye la variación del flujo magnético. Una bobina utilizada de este modo se llama *bobina exploradora*. Se usa para medir campos magnéticos. Por ejemplo, si el integrador de corriente © mide la carga total Q que pasa a través de la bobina cuando ésta gira 180°, el campo magnético resulta ser $B = RQ/2NA$.

Ejercicio Una bobina exploradora de 40 vueltas y radio 3 cm, posee una resistencia de 16 Ω. Si la bobina gira 180° en un campo magnético de 500 G, ¿cuánta carga pasa a su través? (*Respuesta*: 7,07 mC.)

30.3 Ley de Lenz

El signo negativo de la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducidas pueden determinarse mediante un principio general físico llamado **ley de Lenz**:

> La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.

Ley de Lenz

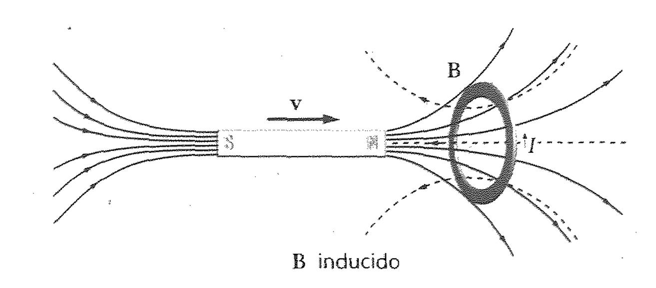


Figura 30.6 Cuando el imán en forma de barra se mueve hacia la espira, la fem inducida en ésta produce una corriente en el sentido indicado. El campo magnético debido a la corriente inducida en la espira (indicado por las líneas de puntos) produce un flujo que se opone al incremento de flujo a través de la espira debido al movimiento del imán.

www.elsolucionario.net

Este enunciado de la ley de Lenz no especifica el tipo de variación que causa la fem y la corriente inducidas. Intencionadamente queda sin concretar para cubrir una diversidad de condiciones. Algunos ejemplos aclararán este punto.

La figura 30.6 muestra una barra magnética que se mueve acercándose a una espira de resistencia R. Como el campo magnético B correspondiente a la barra está dirigido hacia la derecha emergiendo de su polo norte, el movimiento del imán hacia la espira tiende a incrementar el flujo a través de la espira. (El campo magnético en la espira es más intenso cuando el imán está más próximo.) La corriente inducida en la espira produce a su vez un campo magnético propio. Esta corriente inducida posee el sentido que se muestra en la figura, de tal modo que el flujo magnético producido se opone al del imán. El campo magnético inducido tiende a *disminuir* el flujo que atraviesa la espira. Si el imán se desplazara alejándose de la espira, el flujo producido por el imán que atraviesa la espira disminuiría y la corriente inducida en ésta tendría un sentido opuesto al de la figura 30.6. En este caso, la corriente produciría un campo magnético hacia la derecha, el cual tendería a incrementar el flujo a través de la espira. Como es lógico, el desplazamiento de la espira acercándose o alejándose del imán produce el mismo efecto que el movimiento del imán. Sólo importa el movimiento relativo.

La figura 30.7 muestra el momento magnético inducido de la espira de corriente cuando el imán se aproxima, del mismo modo que se indica en la figura 30.6. La espira actúa como un pequeño imán con su polo norte a la izquierda y su polo sur a la derecha. Como los polos opuestos se atraen y los polos iguales se repelen, el momento magnético inducido de la espira repele la barra magnética, es decir se opone a su movimiento hacia la espira. Así, la ley de Lenz puede expresarse en función de las fuerzas en lugar de los flujos. Si la barra magnética se mueve hacia la espira, la corriente inducida debe producir un momento magnético que se oponga a este cambio.

Obsérvese que la ley de Lenz es una exigencia de la ley de conservación de la energía. Si la corriente de la espira en la figura 30.7 fuera opuesta al sentido indicado, el momento magnético inducido de la espira atraería al imán cuando éste se mueve hacia ella y se aceleraría. Si comenzamos con el imán a gran distancia de la espira y le damos un pequeño empuje hacia ésta, la fuerza debida a la corriente inducida estaría dirigida hacia la espira, lo cual incrementaría la velocidad del imán. Este incremento provocaría un aumento de la variación del flujo por unidad de tiempo, es decir, un incremento de la corriente inducida, y con ello, aumentaría la fuerza que actúa sobre el imán. Por tanto, la energía cinética del imán y el ritmo con que se genera el calor por efecto Joule en la espira (I^2R) se incrementarían sin la presencia de una fuente de energía. Ello violaría el principio de conservación de la energía.

En la figura 30.8 el imán está en reposo y la espira se mueve alejándose de él. En la figura se indican también la corriente inducida y el momento magnético. En este caso el momento magnético de la espira atrae el imán, según exige la ley de Lenz, oponiéndose al movimiento de la espira.

En la figura 30.9, cuando se hace variar la corriente en el circuito 1, existe un cambio en el flujo que atraviesa el circuito 2. Supóngase que el interruptor S situado en el circuito 1 está inicialmente abierto y por tanto no hay corriente en este circuito (figura 30.9*a*). Cuando se cierra el interruptor (figura 30.9*b*), la corriente en el circuito 1 no alcanza su valor estacionario $\mathscr{E}_1/R_1$ instantáneamente, sino que tarda un tiempo breve para variar desde cero a este valor final. Durante este tiempo, mientras la corriente está aumentado, el flujo del circuito 2 está variando y existe una corriente inducida en dicho circuito en el sentido indicado. Cuando la corriente del primer circuito alcanza su valor estacionario, el flujo deja de ser variable y no existirá ninguna corriente inducida en el circuito 2. Cuando se abra el interruptor en el circuito 1 (figura 30.9*c*) y la corriente disminuya hasta cero, aparecerá momentáneamente en el circuito 2 una corriente inducida en sentido opuesto. Es importante tener muy en cuenta que existe una fem inducida sólo *mientras el flujo está variando*. La fem no depende de la magnitud del flujo, sino solamente de la rapidez con que se verifica el cambio. Un flujo estacionario grande a través de un circuito no produce una fem inducida.

Como ejemplo siguiente consideramos el circuito aislado sencillo que se muestra en la figura 30.10. Cuando existe una corriente en el circuito, existe un flujo magnético a través del mismo debido a su propia corriente. Cuando la corriente varía, el flujo en la bobina también varía y existirá una fem inducida en el circuito. Esta fem *autoinducida* se

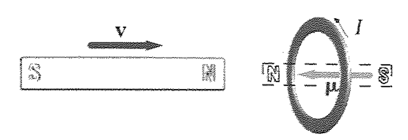


Figura 30.7 El momento magnético de la espira μ (indicado en la figura como si se tratara de un imán) debido a la corriente inducida es tal que se opone al movimiento de la barra imanada. Aquí, la barra se mueve hacia la espira, de modo que el momento magnético inducido repele la acción de la barra.

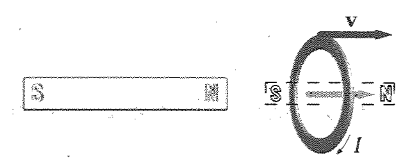


Figura 30.8 Cuando la espira se aleja de la barra magnética estacionaria, el momento magnético inducido en la misma atrae a la barra, oponiéndose de nuevo al movimiento relativo.

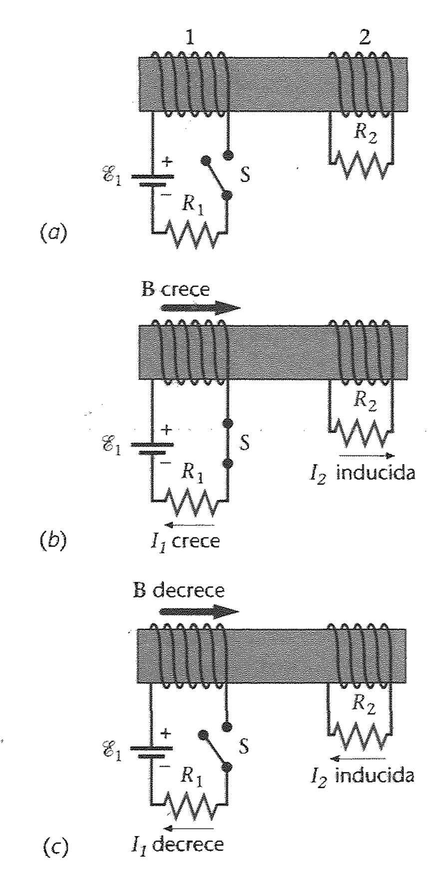


Figura 30.9 (*a*) Dos circuitos adyacentes. (*b*) En el momento de cerrar el interruptor, I_1 empieza a crecer en el sentido indicado. El flujo variable en el circuito 2 induce una corriente I_2. El flujo debido a I_2 se opone al aumento de flujo debido a I_1. (*c*) Cuando se abre el interruptor, I_1 disminuye y B también. La corriente inducida I_2 tiende a mantener el flujo en el circuito oponiéndose al cambio.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

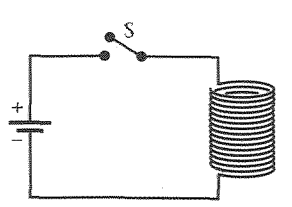


Figura 30.10 La bobina con muchas espiras de conductor origina un flujo grande para una corriente determinada en el circuito. La fem inducida en este circuito cuando la corriente varía se opone a dicha variación.

opone a la variación de la corriente y se denomina **fuerza contra electromotriz**. Debido a esta fem autoinducida, la corriente de un circuito no puede saltar instantáneamente desde cero hasta un valor finito o desde cierto valor determinado hasta cero. El primero que observó este efecto fue Henry, cuando experimentaba con un circuito compuesto por muchas vueltas de alambre como el de la figura 30.10, dispositivo que proporciona un flujo grande a través del circuito incluso aunque la corriente sea pequeña. Henry observó la presencia de una chispa que saltaba en el interruptor cuando intentaba abrir el circuito. Esta chispa se debe a la gran fem inducida que se presenta cuando la corriente varía rápidamente, como sucede al abrir el interruptor. En este caso la fem inducida intenta mantener la corriente original. La gran fem inducida produce una gran caída de tensión a través del interruptor cuando éste se abre. El campo eléctrico entre los bornes del interruptor es suficientemente grande para arrancar electrones de las moléculas del aire, produciendo la ruptura del dieléctrico. Cuando las moléculas del dieléctrico de aire están ionizadas, el aire conduce la corriente eléctrica en forma de chispa.

■ EJEMPLO 30.6

Una bobina rectangular de 80 vueltas, 20 cm de anchura y 30 cm de longitud está situada en un campo magnético B = 0,8 T dirigido hacia dentro de la página (figura 30.11). Como indica la figura sólo la mitad de la bobina se encuentra en la región del campo magnético. La resistencia de la bobina es de 30 Ω. Determinar la magnitud y dirección de la corriente inducida al desplazarse la bobina con una velocidad de 2 m/s (a) hacia la derecha, (b) hacia arriba y (c) hacia abajo.

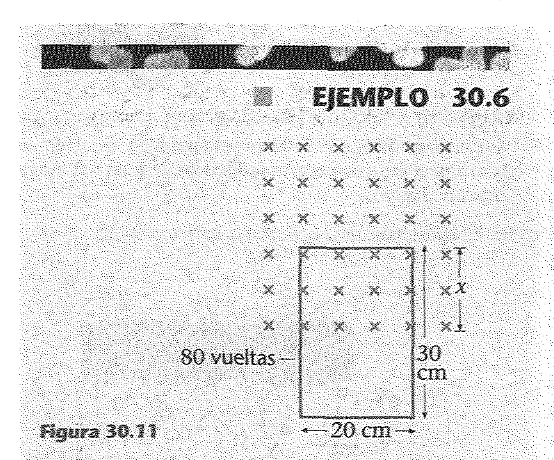


Figura 30.11

Esquema del problema La corriente es igual a la fem inducida dividida por la resistencia. La fem inducida en el circuito cuando se mueve el carrete puede calcularse a partir de la variación temporal del flujo a través del circuito. El flujo es proporcional a la distancia x. La dirección de la corriente se determina a partir de la ley de Lenz.

(a) 1. La magnitud de la corriente inducida es igual a la fem divida por la resistencia: $I = \dfrac{|\mathcal{E}|}{R}$

2. La magnitud de la fem inducida viene dada por la ley de Faraday: $|\mathcal{E}| = \dfrac{d\phi_m}{dt}$

3. Cuando la bobina se mueve hacia la derecha (o hacia la izquierda), el flujo no cambia (hasta que la bobina sale de la región del campo magnético). La corriente es, por tanto, cero: $|\mathcal{E}| = \dfrac{d\phi_m}{dt} = 0$; $I = 0$

(b) 1. El flujo es el producto de B por el área, lo cual viene dada por (20 cm)x: $\phi_m = NB(20\text{ cm})x$

2. Calcular la derivada del flujo respecto al tiempo cuando la bobina se mueve hacia arriba: $\dfrac{d\phi_m}{dt} = NB(20\text{ cm})\dfrac{dx}{dt} = (80)(0{,}8\text{ T})(0{,}20\text{ m})(2\text{ m/s}) = 25{,}6\text{ V}$

3. Calcular la magnitud de la corriente: $I = |\mathcal{E}|/R = \dfrac{25{,}6\text{ V}}{30\ \Omega} = 0{,}853\text{ A}$

4. Como el flujo hacia dentro crece, la corriente inducida tendrá el sentido que dé lugar a un flujo hacia fuera: La corriente tiene sentido antihorario.

(c) Cuando la ~~corriente~~ BOBINA se mueve hacia abajo a 2 m/s, la corriente posee la misma magnitud que cuando se mueve hacia arriba, pero dirigida en sentido opuesto: I = 0,853 A en sentido horario

Observaciones Cuando la bobina se mueve hacia abajo, el flujo hacia dentro disminuye de manera que la corriente inducida tiene el sentido horario y se produce un flujo hacia dentro.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Fem de movimiento ■ 30.4

OPCIONAL

La figura 30.12 muestra una varilla conductora que se desliza a lo largo de dos conductores que están unidos a una resistencia. Existe un campo magnético **B** uniforme dirigido hacia el papel. Como el área del circuito se incrementa cuando la varilla se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través del circuito crece también y, por tanto, se induce una fem en el circuito. Si llamamos ℓ a la distancia que separa a los conductores que sirven de raíles y x a la distancia desde el extremo izquierdo de los raíles a la varilla en un instante dado, el área encerrada por el circuito es ℓx, y el flujo magnético en este instante es

$$\phi_m = BA = B\ell x$$

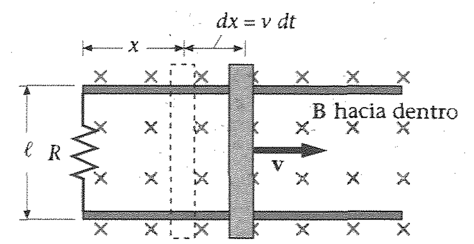


Figura 30.12 Varilla deslizante sobre raíles conductores en el interior de un campo magnético. Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el área del circuito crece y el flujo magnético que le atraviesa se incrementa. En el circuito se induce una fem de magnitud $B\ell v$ produciéndose una corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual genera un flujo saliente del papel que se opone al cambio.

Cuando la barra se mueve a través de una distancia dx, el área incluida en el circuito cambia en $dA = \ell\, dx$ y el flujo se modifica en $d\phi_m = B\ell\, dx$. La variación de flujo por unidad de tiempo es

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

en donde $v = dx/dt$ es la velocidad de la barra. Por tanto, la magnitud de la fem inducida en este circuito es

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\phi_m}{dt} = B\ell v$$

En este caso el sentido de la fem tiende a producir una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj. El flujo producido por esta corriente inducida es saliente respecto al papel, oponiéndose al incremento de flujo provocado por el movimiento de la barra. Como la corriente inducida se dirige hacia arriba en la barra, se genera en la misma una fuerza de magnitud $I\ell B$. El sentido de esta fuerza, de acuerdo con la regla de la mano derecha, es hacia la izquierda, oponiéndose al movimiento de la barra. Si ésta se impulsa con cierta velocidad inicial **v** hacia la derecha y luego se deja en libertad, la fuerza generada por la corriente inducida frena la barra hasta detenerla. Para mantener la barra en movimiento, debe ejercerse una fuerza externa hacia la derecha.

La fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético se denomina **fem de movimiento**. En general

> Fem de movimiento es toda fem inducida por el movimiento relativo de un campo magnético y un segmento de corriente.

Definición de fem de movimiento

La fem de movimiento se induce en una barra o alambre conductor que se mueve en un campo magnético incluso cuando el circuito no está completo y no existe corriente.

La figura 30.13 muestra un electrón en una barra conductora que se mueve a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia el papel. Como el electrón se mueve horizontalmente con la barra, actúa sobre él una fuerza magnética que posee un componente hacia abajo de magnitud qvB. Debido a esta fuerza magnética, los electrones libres de la barra se mueven hacia abajo, lo que da lugar a una carga neta negativa en la parte inferior de la barra y, por tanto, a una carga neta positiva en la parte superior. Los electrones continúan desplazándose hacia abajo hasta que el campo eléctrico producido por las cargas separadas ejerce una fuerza hacia arriba sobre los electrones de magnitud qE que equilibra la fuerza magnética qvB. En el equilibrio, el campo eléctrico en la barra es, por tanto,

$$E = vB$$

La diferencia de potencial a través de la barra es

$$\Delta V = E\ell = vB\ell$$

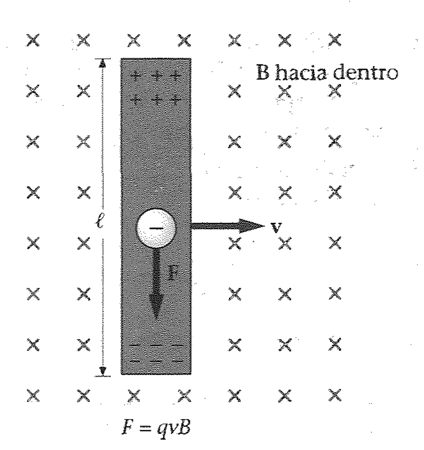


Figura 30.13 Un electrón en una barra conductora que se mueve a través de un campo magnético experimenta una fuerza magnética que tiene un componente hacia abajo. Los electrones se desplazan hacia la parte baja de la barra, dejando positiva la parte alta de la misma. La separación de cargas produce un campo eléctrico de magnitud $E = vB$. El potencial en la parte alta de la barra es mayor que en el fondo, siendo su valor $E\ell = vB\ell$.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

Esta diferencia de potencial es igual a la magnitud de la fem inducida, es decir, la fem de movimiento:

$$|\mathscr{E}| = vB\ell \qquad (30.6)$$

Fem de movimiento

Ejercicio Una barra de 40 cm de longitud se mueve a la velocidad de 12 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 3000 G. Su vector velocidad es perpendicular a su longitud. Determinar la fem inducida en la barra. (*Respuesta*: 1,44 V.)



■ **EJEMPLO 30.7**
¡Inténtelo!

En la figura 30.12, sea $B = 0{,}6$ T, $v = 8$ m/s, $\ell = 15$ cm y $R = 25\ \Omega$, y suponer que la resistencia de las barras y los raíles es despreciable. Determinar (a) la fem inducida en el circuito, (b) la intensidad de corriente en el circuito, (c) la fuerza necesaria para mover la barra con velocidad constante y (d) la potencia disipada en la resistencia.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

	Etapas	*Respuestas*
(a)	Calcular la fem inducida mediante la ecuación 30.6.	$\mathscr{E} = Bv\ell = 0{,}72$ V
(b)	Determinar la intensidad de corriente a partir de la ley de Ohm.	$I = \dfrac{\mathscr{E}}{R} = 28{,}8$ mA
(c)	La fuerza necesaria para desplazar la barra con velocidad constante es igual y opuesta a la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la barra, de magnitud $IB\ell$. Calcular la magnitud de esta fuerza.	$F = IB\ell = 2{,}59$ mN
(d) 1.	Determinar la potencia disipada en la resistencia.	$P = I^2R = 20{,}7$ mW
2.	Comprobar la respuesta anterior calculando la potencia ejercida por la fuerza a partir de $P = Fv$.	$P = Fv = 20{,}7$ mW



■ **EJEMPLO 30.8**

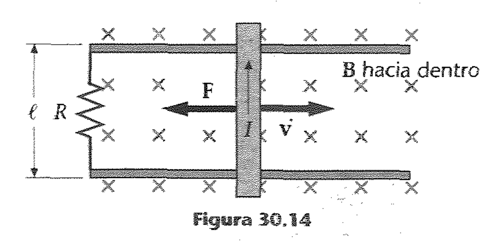


Figura 30.14

Una barra de masa m se desliza sin rozamiento sobre unos raíles conductores en una región de campo magnético constante B. En el tiempo $t = 0$, la barra se mueve con velocidad inicial v_0 y se suprime la fuerza externa que actúa sobre ella. Determinar la velocidad de la barra en función del tiempo.

Esquema del problema La velocidad de la barra cambia porque una fuerza magnética actúa sobre la corriente inducida. El movimiento de la barra a través de un campo magnético induce una fem $\mathscr{E} = B\ell v$ y, por tanto, una corriente en la barra, $I = \mathscr{E}/R$. Esto hace que sobre la barra actúe una fuerza magnética, $F = IB\ell$. Conocida la fuerza, aplicamos la segunda ley de Newton para determinar la velocidad en función del tiempo. Tómese como positiva la dirección de la velocidad inicial (figura 30.14).

1. Aplicar la segunda ley de Newton a la barra: $\quad F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

2. La fuerza ejercida sobre la barra es la fuerza magnética, la cual es proporcional a la corriente: $\quad F = IB\ell$

www.elsolucionario.net

U09197

3. La corriente es igual a la fem de movimiento dividida por la resistencia de la barra: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\ell v}{R}$

4. Con estos resultados determinar la magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre la barra: $F = IB\ell = \frac{B\ell v}{R} B\ell = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$

5. La fuerza es opuesta a la dirección de movimiento, como muestra la figura 30.14 y, por tanto, es negativa. Según la segunda ley de Newton: $-\frac{B^2\ell^2 v}{R} = m\frac{dv}{dt}$

6. Separar variables, integrar la velocidad de v_0 a v e integrar el tiempo de 0 a t

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\,t$$

7. Despejar v: $v = v_0 e^{-(B^2\ell^2/mR)t}$

Observaciones Si la fuerza fuera constante, la velocidad de la barra disminuiría linealmente con el tiempo. Sin embargo, como la fuerza es proporcional a la velocidad de la barra (etapa 4), la fuerza es grande inicialmente, pero disminuye cuando la velocidad decrece. En principio, la barra no debería nunca cesar en su movimiento. Aún así, la barra se mueve sólo una distancia finita. (Véase problema 37.)

Corrientes de Foucault o turbillonarias ■ 30.5

En los ejemplos que acabamos de estudiar las corrientes producidas por un flujo variable se establecieron en circuitos definidos. Frecuentemente un flujo variable establece unas corrientes circulantes, denominadas **corrientes de Foucault** o **turbillonarias**, en un trozo de metal como el núcleo de un transformador. El calor producido por estas corrientes constituye una pérdida de potencia en el transformador. Consideremos un bloque conductor entre las piezas polares de un electroimán como indica la figura 30.15. Si el campo magnético B entre las piezas polares varía con el tiempo (como sucede si la corriente en los arrollamientos del imán es una corriente alterna), el flujo que atraviesa cualquier circuito cerrado en el bloque, tal como el indicado por la curva C en la figura, será un flujo variable. Como la curva C pertenece a un conductor, se producirá una corriente a lo largo de la trayectoria. En esta figura hemos indicado sólo uno de los muchos trayectos cerrados por los que circularán corrientes si varía el campo magnético B situado entre las piezas polares.

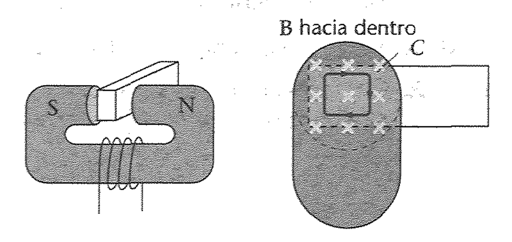


Figura 30.15 Corrientes turbillonarias o de Foucault. Si el campo magnético a través de un metal varía, se induce una fem en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal como la curva C indicada. La fem inducida produce una corriente en este circuito.

Puede hacerse una demostración que compruebe la existencia de corrientes de Foucault sacando una lámina de cobre o de aluminio que está situada entre los polos de un imán permanente intenso (figura 30.16). Parte del área encerrada por la curva C en esta figura está en el interior del campo magnético y otra parte es exterior al mismo. Cuando se tira de la lámina hacia la derecha, el flujo a través de esta curva disminuye (admitiendo que el flujo dirigido hacia el papel es positivo). De acuerdo con la ley de Faraday y la ley de Lenz existirá una corriente en el sentido de las agujas del reloj inducida a lo largo de esta curva. Puesto que esta corriente está dirigida hacia arriba en la región situada entre las piezas polares, el campo magnético ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda sobre la corriente, que se opone al movimiento de la lámina. Se puede apreciar esta fuerza sobre la lámina si se intenta tirar rápidamente de la misma a través de un campo magnético fuerte.

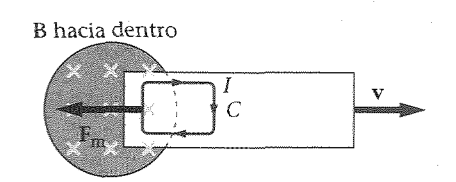


Figura 30.16 Demostración de las corrientes turbillonarias. Cuando el bloque metálico se empuja hacia la derecha, existe una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la corriente inducida que se opone al movimiento.

Las corrientes circulantes o corrientes de Foucault normalmente son molestas debido a que el calor producido no solamente constituye una pérdida de potencia sino que hay

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

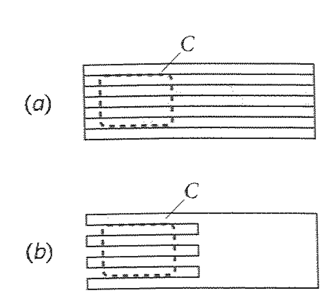


Figura 30.17 Las corrientes de Foucault en un bloque de metal pueden reducirse obstruyendo las trayectorias de conducción. (*a*) Si el bloque se construye con láminas de metal pegadas conjuntamente, la resistencia del pegamento aumenta la resistencia del bucle *C*. (*b*) Recortando el metal como se indica, también se reducen las corrientes de Foucault.

que disiparlo. La pérdida de potencia puede reducirse aumentando la resistencia de los caminos posibles que han de seguir las corrientes de Foucault, como se ven en la figura 30.17*a*. En este caso el bloque conductor está en forma de láminas, es decir, formado por unas tiras pequeñas pegadas juntas. Debido al pegamento aislante que separa las tiras, las corrientes de Foucault están confinadas esencialmente a ellas. Se han roto por lo tanto los grandes circuitos por donde pueden circular las corrientes de Foucault y se reduce en gran manera la pérdida de potencia. Si la lámina está recortada como se ve en la figura 30.17*b*, para reducir las corrientes de Foucault, será también muy reducida la fuerza que se observa.

Las corrientes turbillonarias no son siempre perjudiciales. Por ejemplo, se utilizan a menudo para amortiguar oscilaciones molestas. Así, las balanzas mecánicas muy sensibles, si no poseen un sistema de amortiguamiento, al pesar una masa pequeña oscilan muchas veces antes de alcanzar el equilibrio. Para evitar esto, estas balanzas se diseñan de modo que una pequeña pieza de metal se mueve entre los polos de un imán mientras la balanza oscila. Las corrientes de Foucault resultantes amortiguan las oscilaciones de modo que el equilibrio se alcanza rápidamente. Otro ejemplo es el frenado magnético de algunos vagones de transporte rápido. Estos vagones poseen un gran electroimán en posición sobre los raíles. Cuando se envía corriente al electroimán, se inducen corrientes de Foucault en los raíles debido al movimiento del imán y las fuerzas magnéticas proporcionan una fuerza de arrastre al vagón que lo frena.

30.6 ■ Inductancia

■ Autoinducción

El flujo magnético que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el mismo y con las corrientes que circulan por circuitos próximos.[1] Consideremos una espira por la que circula una corriente I. La corriente produce un campo magnético B que varía de un punto a otro, pero en todos los puntos B es proporcional a I. El flujo magnético a través de la espira, por tanto, es también proporcional a I:

$$\phi_m = LI \quad (30.7)$$

Definición —Autoinducción

en donde L es una constante llamada **autoinducción** de la espira. La autoinducción depende de la forma geométrica de la espira. La unidad SI de inductancia es el **henrio** (H) y según la ecuación 30.7 es igual a la unidad de flujo, el weber, dividido por la unidad de intensidad de corriente, el amperio:

$$1\ \mathrm{H} = 1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\ \frac{\mathrm{T\cdot m^2}}{\mathrm{A}}$$

En principio, la autoinducción de cualquier espira o circuito puede calcularse suponiendo la existencia de una corriente I, determinando **B** en cada punto, calculando el flujo ϕ_m, y usando la ecuación $L = \phi_m/I$. En la práctica, el cálculo es muy difícil. Sin embargo, existe un caso, el de un solenoide arrollado apretadamente, cuya autoinducción puede calcularse directamente. El campo magnético en un solenoide de estas características, de longitud ℓ y N vueltas que transporta una corriente I fue calculado en el ejemplo 30.1:

$$\phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I A}{\ell} = \mu_0 n^2 I A \ell \quad (30.8)$$

en donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. Como es lógico, el flujo es proporcional a la intensidad de corriente I. La constante de proporcionalidad es la autoinducción:

[1] Suponemos que no hay imanes permanentes en los alrededores.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A \ell \qquad (30.9)$$

Autoinducción de un solenoide

La autoinducción es proporcional al cuadrado del número de vueltas por unidad de longitud n y al volumen $A\ell$. Así pues, lo mismo que la capacidad, la autoinducción depende sólo de factores geométricos. De acuerdo con las dimensiones de la ecuación 30.9, μ_0 puede expresarse en henrios por metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

EJEMPLO 30.9 ■

Determinar la autoinducción de un solenoide de longitud 10 cm, área 5 cm^2, y 100 vueltas.

Esquema del problema Para calcular la autoinducción en henrios mediante la ecuación 30.9 expresaremos todas las magnitudes en unidades SI.

1. L viene expresada por la ecuación 30.9: $L = \mu_0 n^2 A\ell$
2. Convertir las magnitudes conocidas en unidades SI:
   $\ell = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}$
   $A = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
   $n = N/\ell = (100 \text{ vueltas})/(0{,}1 \text{ m}) = 1000 \text{ vueltas/m}$
   $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
3. Sustituir estos valores en L:
   $L = \mu_0 n^2 A\ell$
   $= (4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(10^3 \text{ vueltas/m})^2(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0{,}1 \text{ m})$
   $= 6{,}28 \times 10^{-5} \text{ H}$

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo magnético debido a la corriente también se modifica y, por tanto, en el circuito se induce una fem. Como la autoinducción del circuito es constante, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (30.10)$$

Así pues, la fem autoinducida es proporcional a la variación con el tiempo de la intensidad de corriente. Una bobina o solenoide con muchas vueltas posee una gran autoinducción y se denomina **inductor**. En los circuitos se representa con el símbolo ⌒ՈՈՈ⌒. Frecuentemente podemos despreciar la autoinducción del resto del circuito comparado con la de un inductor.

Ejercicio Determinar el valor de la variación con el tiempo de la intensidad de corriente en el ejemplo 30.9 para inducir una fem de 20 V. (*Respuesta*: $3{,}18 \times 10^5$ A/s.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Inductancia mutua

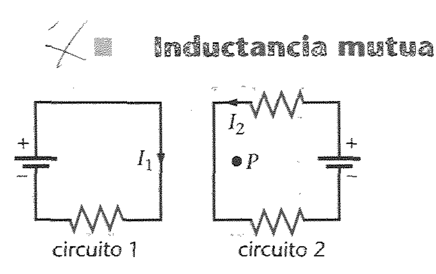


Figura 30.18 Dos circuitos adyacentes. El campo magnético en el punto P se debe parcialmente a la corriente I_1 y parcialmente a I_2. El flujo a través de cualquiera de los circuitos es la suma de dos términos uno proporcional a I_1 y el otro a I_2.

Cuando dos o más circuitos están próximos uno al otro, como indica la figura 30.18 el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no sólo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por los circuitos próximos. Sea I_1 la corriente en el circuito 1 de la izquierda en la figura 30.18 e I_2 la del circuito 2 a la derecha. El campo magnético en un punto P posee un componente debido a I_1 y otro componente debido a I_2. La contribución de cada circuito al campo total es proporcional a la corriente en cada uno de ellos. Podemos, pues, escribir el flujo que atraviesa el circuito 2, ϕ_{m2}, como la suma de dos partes, una proporcional a la corriente I_1 y la otra proporcional a la corriente I_2:

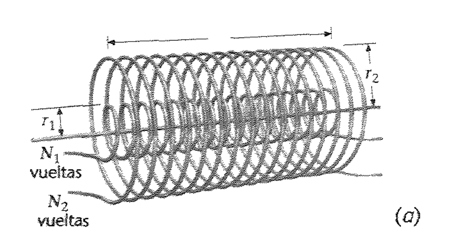
$$\phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{2,1} I_1 \qquad (30.11a)$$

Definición —Inductancia mutua

en donde L_2 es la autoinducción del circuito 2 y $M_{2,1}$ es la **inductancia mutua** de los dos circuitos. La inductancia mutua depende de la disposición geométrica entre ambos. En particular, podemos ver que si los circuitos están bastante separados, el flujo a través del circuito 2 debido a la corriente I_1 será pequeño y la inductancia mutua también lo será. Puede escribirse una ecuación semejante a la 30.11a para el flujo que atraviesa el circuito 1:

$$\phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{1,2} I_2 \qquad (30.11b)$$

en donde L_1 es la autoinducción del circuito1.



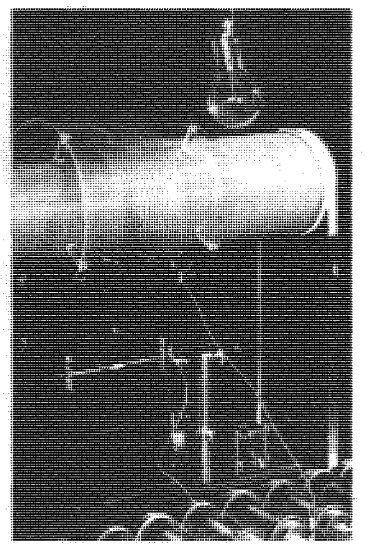


Figura 30.19 (*a*) Un solenoide largo y estrecho se encuentra dentro de otro más ancho de igual longitud. Una corriente en uno de los solenoides produce flujo magnético en el otro. (*b*) Carrete de Tesla que ilustra la geometría de los cables de la parte (*a*). Este dispositivo funciona como un transformador (capítulo 31). La corriente alterna de bajo voltaje del arrollamiento exterior se transforma en una corriente alterna de mayor voltaje en el arrollamiento interior. El voltaje alterno inducido en los campos variables es suficientemente grande para encender la bombilla situada encima de las bobinas.

Podemos calcular la inductancia mutua de los solenoides concéntricos de espiras apretadas como los que se muestran en la figura 30.19. Sea ℓ la longitud común de ambos solenoides y supongamos que el solenoide interior tiene N_1 vueltas y radio r_1 y que el solenoide exterior tiene N_2 vueltas y radio r_2. Calcularemos primero la inductancia mutua $M_{2,1}$ suponiendo que el solenoide interior transporta una corriente I_1 y determinando el flujo magnético ϕ_{m2} debido a esta corriente a través del solenoide exterior. El campo magnético debido a la corriente en el solenoide es constante en el espacio dentro del solenoide y vale

$$B_1 = \mu_0 (N_1/\ell) I_1 = \mu_0 n_1 I_1 \qquad (30.12)$$

El flujo que atraviesa el solenoide exterior debido a este campo magnético es, por tanto,

$$\phi_{m2} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 \ell (\pi r_1^2) I_1$$

Obsérvese que el área utilizada para calcular el flujo que atraviesa el solenoide exterior no es el área de dicho solenoide, πr_2^2, sino el área del solenoide interior πr_1^2, ya que el campo magnético debido al solenoide interior es cero fuera del mismo. La inductancia mutua es, por tanto,

$$M_{2,1} = \frac{\phi_{m2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2 \qquad (30.13)$$

Ejercicio Calcular la inductancia mutua $M_{1,2}$ de los solenoides concéntricos de la figura 30.19 determinando el flujo a través del solenoide interno debido a una corriente I_2 en el solenoide externo. (*Respuesta*: $M_{1,2} = M_{2,1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2$.)

Obsérvese en el ejercicio anterior que $M_{1,2} = M_{2,1}$. Puede demostrarse que éste es un resultado general. Por ello, prescindiremos de los subíndices de la inductancia mutua y escribiremos simplemente M.

30.7 Energía magnética

Un inductor almacena energía magnética, del mismo modo que un condensador almacena energía eléctrica. Consideremos el circuito formado por una inductancia L y una resistencia R en serie con una batería de fem $\mathcal{E}_0$ y un interruptor S como se muestra en la

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

figura 30.20. Se supone que R y L son la resistencia e inductancia del circuito completo. El interruptor está inicialmente abierto, de modo que no pasa corriente por el circuito. Un poco después se cierra el interruptor, aparece una corriente I en el circuito, una caída de potencial IR a través de la resistencia y una fuerza contraelectromotriz $L\,dI/dt$ en el inductor. En el diagrama del circuito se especifican los signos más y menos sobre el inductor para indicar el sentido de la fem cuando crece la corriente, es decir, cuando dI/dt es positivo. Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff en este circuito, resulta

$$\mathcal{E}_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \textbf{(30.14)}$$

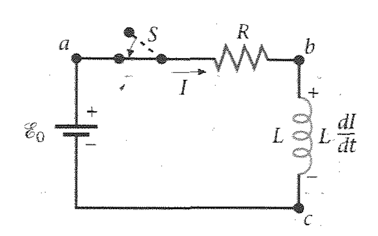


Figura 30.20 Inmediatamente después de cerrado el interruptor S, la corriente comienza a crecer en este circuito y una fuerza contraelectromotriz de magnitud $L\,dI/dt$ se genera en el inductor. La caída de potencial a través de la resistencia IR, más la caída de potencial a través del inductor es igual a la fem de la

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por la intensidad de corriente I y reajustando resulta:

$$\mathcal{E}_0 I = I^2R + LI\frac{dI}{dt} \qquad \textbf{(30.15)}$$

El término $\mathcal{E}_0 I$ es la potencia suministrada por la batería. El término I^2R es la potencia disipada en forma de calor en la resistencia del circuito. El término $LI\,dI/dt$ representa la energía que por unidad de tiempo incide en el inductor. Si U_m es la energía en el inductor, se verifica

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

o también,

$$dU_m = LI\,dI$$

Integrando esta ecuación desde el tiempo $t = 0$ cuando la corriente es nula hasta $t = \infty$, cuando la corriente ha alcanzado su valor final I_f, resulta:

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI\,dI = \tfrac{1}{2}LI_f^2$$

La energía almacenada en un inductor que transporta una corriente I viene dada por

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad \textbf{(30.16)}$$

Energía almacenada en un inductor

En el proceso de producir una corriente en un inductor, se crea un campo magnético en el espacio interior a la bobina del mismo. Es decir, podemos imaginar que la energía almacenada en un inductor es energía almacenada en el campo magnético creado. En el caso especial de un solenoide, el campo magnético está relacionado con la corriente I y el número de vueltas por unidad de longitud n por

$$B = \mu_0 nI$$

y la autoinducción viene expresada por la ecuación 30.9:

$$L = \mu_0 n^2 A\ell$$

en donde A es el área transversal y ℓ la longitud. Sustituyendo I por $B/\mu_0 n$ y L por $\mu_0 n^2 A\ell$ en la ecuación 30.16 resulta

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 A\ell\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}A\ell$$

La magnitud $A\ell$ es el volumen del espacio contenido dentro del solenoide, donde se crea el campo magnético. La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía magnética** u_m:

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\right)B^2 \quad \textbf{(30.17)}$$

Densidad de energía magnética

Aunque está ecuación se ha obtenido para el caso especial del campo magnético en un solenoide, el resultado es general. Es decir, siempre que exista un campo magnético en el espacio, la energía magnética por unidad de volumen viene dada por la ecuación 30.17. Obsérvese la semejanza con la densidad de energía eléctrica en un campo eléctrico (ecuación 25.13):

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \textbf{(30.18)}$$

EJEMPLO 30.10 **Cierta región del espacio contiene un campo magnético de 200 G y un campo eléctrico de $2{,}5 \times 10^6$ N/C. Determinar (a) la densidad de energía total y (b) la energía en una caja cúbica de lado $\ell = 12$ cm.**

Esquema del problema La densidad de energía total es la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética, $u = u_e + u_m$. La energía en un volumen $\mathcal{V}$ viene dada por $U = u\mathcal{V}$.

(a) 1. Calcular la densidad de energía eléctrica:

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}(8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(2{,}5\times10^6\ \mathrm{N/C})^2 = 27{,}7\ \mathrm{J/m^3}$$

2. Calcular la densidad de energía magnética:

$$u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{(0{,}02\ \mathrm{T})^2}{(4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2})} = 159\ \mathrm{J/m^3}$$

3. La densidad de energía total es la suma de las dos contribuciones anteriores:

$$u = u_e + u_m = 27{,}7\ \mathrm{J/m^3} + 159\ \mathrm{J/m^3} = 187\ \mathrm{J/m^3}$$

(b) La energía total en la caja es $U = u\mathcal{V}$ en donde $\mathcal{V} = \ell^3$ es el volumen de la caja:

$$U = u\mathcal{V} = u\ell^3 = (187\ \mathrm{J/m^3})(0{,}12\ \mathrm{m})^3 = 0{,}323\ \mathrm{J}$$

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

30.8 ■ Circuitos *RL*

Un circuito que contiene una resistencia y un inductor tal como el indicado en la figura 30.20 se denomina **circuito *RL***. Como todos los circuitos contienen resistencia y autoinducción, el análisis de un circuito *RL* puede aplicarse en cierta extensión a todo circuito.[1] Para el circuito de la figura 30.20 la aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff nos dio la ecuación 30.14:

$$\mathcal{E}_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Podemos entender muchas de las características de la corriente en este circuito a partir de la ecuación anterior sin necesidad de resolverla. Inicialmente (justo después de cerrar

[1] Todos los circuitos tienen también capacidades entre partes del mismo a potenciales diferentes. Incluiremos los efectos de la capacidad en el capítulo 31, cuando estudiemos circuitos de ca. Ahora se desprecia la capacidad con objeto de simplificar el análisis y resaltar los efectos de la inductancia.

OPCIONAL

el interruptor) la corriente es nula y la fuerza contraelectromotriz $L\ dI/dt$ es igual a la fem de la batería $\mathscr{E}_0$. Haciendo $I = 0$ en la ecuación 30.14, resulta

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{L} \qquad \textbf{(30.19)}$$

Cuando la corriente crece, IR crece también y dI/dt aumenta. Obsérvese que la corriente no puede saltar súbitamente de cero a un valor finito como lo haría si no tuviera inductancia. Cuando existe una inductancia ($L \neq 0$), dI/dt es finita y, por tanto, la corriente debe ser continua en el tiempo. En un tiempo breve, la corriente alcanza un valor positivo I, y su variación con el tiempo es

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}_0}{L} - \frac{IR}{L}$$

En este momento la corriente es todavía creciente, pero su ritmo de crecimiento es menor que en el instante $t = 0$. El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo dI/dt igual a cero. El valor final de la corriente es, por tanto

$$I_f = \frac{\mathscr{E}_0}{R} \qquad \textbf{(30.20)}$$

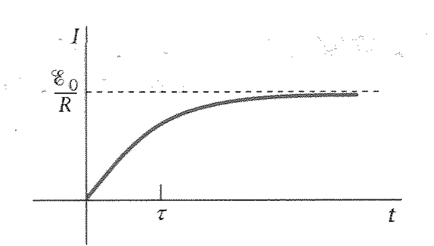


Figura 30.21 Variación de la intensidad de corriente en función del tiempo en un circuito *LR*. En el instante $t = \tau = L/R$, la corriente es igual al 63% de su valor máximo $\mathscr{E}_0/R$.

La figura 30.21 muestra la variación de la corriente en este circuito en función del tiempo. Esta figura es semejante a la que representa la variación de la carga en un condensador cuando éste se carga en un circuito *RC* (figura 26.41).

La ecuación 30.14 tiene la misma forma que la ecuación 26.34 correspondiente a la carga de un condensador y puede resolverse de igual modo. El resultado es

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathscr{E}_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = I_f(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \textbf{(30.21)}$$

en donde

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \textbf{(30.22)}$$

es la **constante de tiempo** del circuito. Cuanto mayor es la autoinducción L o menor la resistencia R, más tiempo exige el establecimiento máximo de la corriente.

EJEMPLO 30.11

Una bobina de autoinducción 5,0 mH y una resistencia de 15,0 Ω se sitúa entre los terminales de una batería de 12 V de resistencia interna despreciable. (a) ¿Cuál es la corriente final? (b) ¿Cuál es la corriente al cabo de 100 μs?

Esquema del problema La intensidad de corriente final es $I_f = \mathscr{E}_0/R$, expresada por la ecuación 30.20. La corriente en función del tiempo viene dada por la ecuación 30.21, $I = I_f(1 - e^{-t/\tau})$ en donde $\tau = L/R$.

(a) Utilizar la ecuación 30.20 para determinar la corriente final, I_f: $\quad I_f = \frac{\mathscr{E}_0}{R} = \frac{12\ \text{V}}{15\ \Omega} = 0{,}800\ \text{A}$

(b) 1. Utilizar la ecuación 30.21 para expresar la corriente I en cualquier instante t: $\quad I = I_f(1 - e^{-t/\tau})$

2. Calcular la constante de tiempo τ: $\quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{5 \times 10^{-3}\ \text{H}}{15\ \Omega} = 333\ \mu\text{s}$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

3. Utilizar este valor de τ para calcular I para $t = 300\ \mu$s: $I = I_f(1 - e^{-t/\tau}) = (0{,}800\ \text{A})(1 - e^{-100/333})$
$= (0{,}800\ \text{A})(1 - 0{,}741) = 0{,}207\ \text{A}$

Ejercicio ¿Cuánta energía se almacena en este inductor cuando se alcanza la corriente final? (*Respuesta*: $U_m = \frac{1}{2}LI_f^2 = 1{,}6 \times 10^{-3}$ J.)

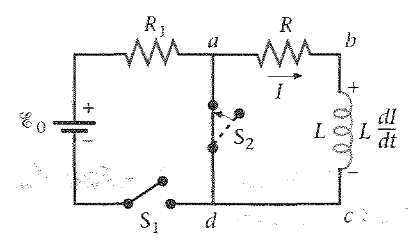


Figura 30.22 Un circuito RL con dos interruptores para que la batería pueda eliminarse del circuito. Después de que la corriente de la bobina alcanza su valor máximo con S_1 cerrado, se cierra S_2 y se abre S_1.

En la figura 30.22, el circuito posee un interruptor adicional que nos permite eliminar la batería, y una resistencia adicional R_1 para proteger a esta última de modo que no resulte cortocircuitada cuando ambos interruptores estén momentáneamente cerrados. Cuando S_2 está abierto y S_1 cerrado, la corriente crece en el circuito del modo que acabamos de analizar, excepto en que ahora la resistencia total es $R_1 + R$ y la corriente final $\mathscr{E}_0/(R_1 + R)$. Supongamos que S_1 se ha cerrado durante un tiempo largo, de modo que la corriente es aproximadamente estacionaria en su valor final, que llamaremos I_0. En el tiempo $t = 0$ cerramos el interruptor S_2 y abrimos el S_1 (para eliminar la batería de cualquier consideración). Tenemos ahora un circuito con una resistencia y una bobina solamente (malla *abcda*) sobre las cuales circula una corriente inicial I_0. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito resulta

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

o sea,

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I \tag{30.23}$$

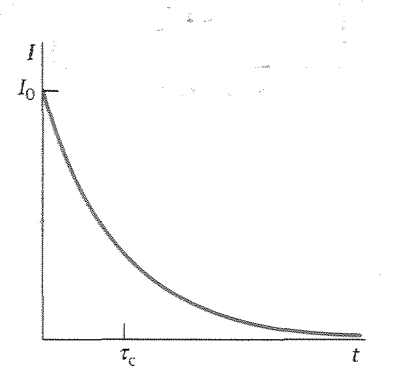


Figura 30.23 Intensidad de corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 30.22. La corriente decrece exponencialmente con el tiempo.

La ecuación 30.23 es de la misma forma que la ecuación 26.28 correspondiente a la descarga de un condensador. Puede resolverse por integración directa. Omitiremos los detalles de la integración y simplemente expresaremos la solución. La corriente I viene dada por

$$I = I_0 e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/\tau} \tag{30.24}$$

en donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo. La figura 30.23 muestra la corriente en función de tiempo.

Ejercicio Determinar la constante de tiempo de un circuito de resistencia 85 Ω e inductancia 6 mH. (*Respuesta*: 70,6 ms.)

EJEMPLO 30.12

Determinar el calor total producido en la resistencia R de la figura 30.22 cuando la corriente que circula por el inductor disminuye desde su valor inicial I_0 hasta 0.

Esquema del problema El calor producido por unidad de tiempo I^2R varía con el tiempo y, por tanto, debemos integrar.

1. El calor producido por unidad de tiempo es I^2R: $P = \frac{dW}{dt} = I^2R$

2. La energía total disipada en forma de calor en la resistencia es la integral de dW de $t = 0$ a $t = \infty$: $W = \int_0^\infty I^2R\ dt$

3. La corriente I viene dada por la ecuación 30.24: $I = I_0 e^{-Rt/L}$

4. Aplicar el valor de la corriente en la integral: $W = \int_0^\infty I^2R\ dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-2Rt/L} R\ dt$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

5. La integración puede hacerse sustituyendo $x = 2Rt/L$:

$$x = 2Rt/L$$

$$dt = \frac{L}{2R}\,dx$$

$$W = I_0^2 R \frac{L}{2R}\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

6. La integral que aparece en la etapa 5 vale 1. Por tanto:

$$W = \tfrac{1}{2}LI_0^2$$

OPCIONAL

Observación El calor total producido es igual a la energía $\frac{1}{2}LI_0^2$ almacenada originalmente en el inductor.

EJEMPLO 30.13

Determinar las corrientes I_1, I_2 e I_3 en el circuito que se muestra en la figura 30.24, (a) inmediatamente después de cerrar el interruptor S y (b) al cabo de un largo tiempo de cerrar S. Pasado este largo tiempo, se abre el interruptor. Determinar las tres corrientes (c) inmediatamente después de abrir el interruptor y (d) un largo tiempo después de abrir S.

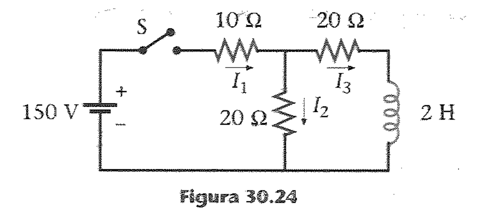


Figura 30.24

Esquema del problema (a) Simplificaremos el cálculo teniendo en cuenta que la corriente en un inductor no puede cambiar bruscamente. Por tanto, la corriente en el inductor debe ser cero inmediatamente después de cerrar el interruptor, porque era cero antes. (b) Cuando la corriente alcanza su valor final, dI/dt es igual a cero y, por tanto, no hay caída de potencial a través del inductor. Este actúa como un cortocircuito, es decir, como un alambre de resistencia nula. (c) Inmediatamente después de abrir el interruptor, la corriente en el inductor sigue siendo la misma que antes de la apertura. (d) Un tiempo largo después de abrir el interruptor, todas las corrientes son nulas.

(a) La corriente a través del inductor es nulo, lo mismo que antes del cierre. La corriente en el circuito de la izquierda es igual a la fem dividida por la resistencia equivalente de las dos resistencias en serie:

$$I_1 = I_2 = \frac{150\text{ V}}{10\,\Omega + 20\,\Omega} = 5\text{ A}$$

$$I_3 = 0$$

(b) 1. Al cabo de un largo tiempo, la corriente es estacionaria y el inductor actúa como un cortocircuito, de modo que tenemos dos resistencias de 20 Ω en paralelo, asociadas en serie con la resistencia de 10 Ω. Dibujar de nuevo el circuito (figura 30.25) y determinar la resistencia equivalente de las resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$R_{eq} = 10\,\Omega$$

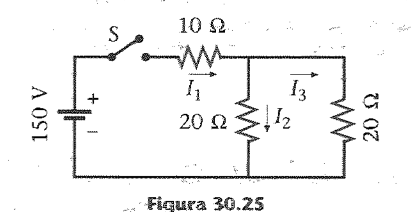


Figura 30.25

2. Determinar la corriente I_1:

$$I_1 = \frac{150\text{ V}}{10\,\Omega + 10\,\Omega} = 7{,}5\text{ A}$$

3. Determinar I_2 e I_3 teniendo en cuenta que las corrientes en las resistencias en paralelo deben ser iguales:

$$I_2 = I_3 = 3{,}75\text{ A}$$

(c) Cuando el interruptor se abre de nuevo, I_1 debe ser cero y la corriente en el inductor I_3 permanece momentáneamente siendo la misma, 3,75 A. Por tanto $I_2 = -I_3$:

$$I_1 = 0$$

$$I_3 = 3{,}75\text{ A}$$

$$I_2 = -I_3 = -3{,}75\text{ A}$$

(d) Un largo tiempo después de abrir el interruptor, todas las corrientes son nulas:

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

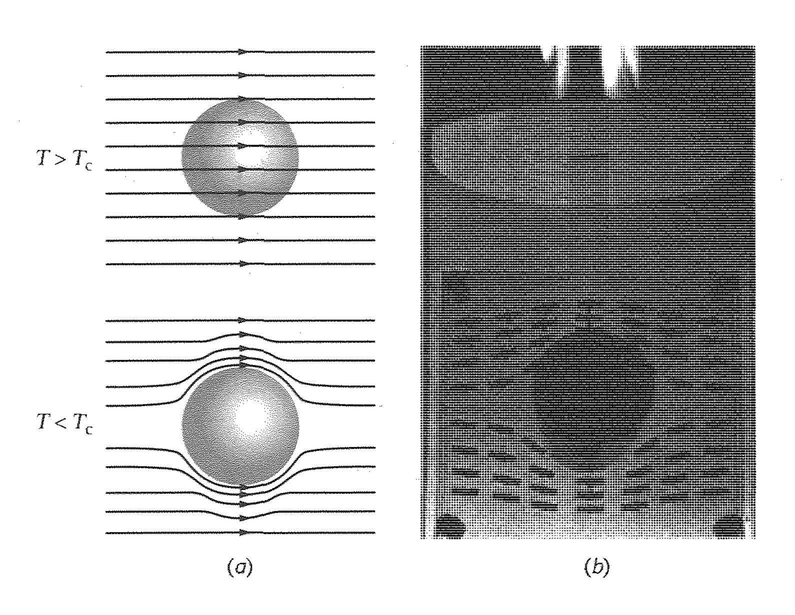


Figura 30.26 (*a*) El efecto Meissner en una esfera superconductora enfriada dentro de un campo magnético externo constante. Cuando la temperatura desciende por debajo del valor crítico T_c, las líneas del campo magnético son expulsadas de la esfera. (*b*) Demostración del efecto Meissner. Un cilindro de estaño superconductor se sitúa con su eje perpendicular a un campo magnético horizontal. La dirección de las líneas de campo vienen indicadas por agujas de brújula débilmente imanadas que se intercalan entre láminas de lucita, de modo que pueden girar libremente.

30.9 ■ Propiedades magnéticas de los superconductores

Los superconductores poseen resistividades nulas por debajo de una temperatura crítica T_c, la cual varía según el material. En presencia de un campo magnético B, la temperatura crítica es menor que la correspondiente en ausencia de campo. Cuando el campo magnético crece, la temperatura crítica disminuye. Si el campo magnético es mayor que cierto valor crítico B_c, la superconductividad no existe a ninguna temperatura.

■ Efecto Meissner

Cuando un superconductor se enfría por debajo de la temperatura crítica en un campo magnético externo, las líneas del campo magnético son expulsadas del superconductor, de modo que el campo magnético dentro del material es nulo (figura 30.26). Este efecto fue descubierto por Meissner y Ochsenfeld en 1933 y se conoce ahora con el nombre de **efecto Meissner**. El mecanismo por el cual las líneas del campo magnético son expulsadas es una corriente superconductora inducida sobre la superficie del superconductor. La levitación magnética que se muestra en la figura de la página 717 es debida a la repulsión que se produce entre el imán permanente que produce el campo externo y el campo magnético producido por las corrientes inducidas en el superconductor. El efecto Meissner completo solo se verifica en ciertos materiales llamados **superconductores del tipo I**. La figura 30.27*a* muestra un gráfico del producto $\mu_0 M$ (M es la imantación) en función del campo magnético aplicado, B_{ap} para un superconductor del tipo I. Para un campo magnético menor que el campo crítico B_c, el campo magnético $\mu_0 M$ inducido en el superconductor es igual y opuesto al campo magnético externo. Los valores de B_c para los superconductores del tipo I son siempre demasiado pequeños para que tales materiales sean útiles en las bobinas de un imán superconductor.

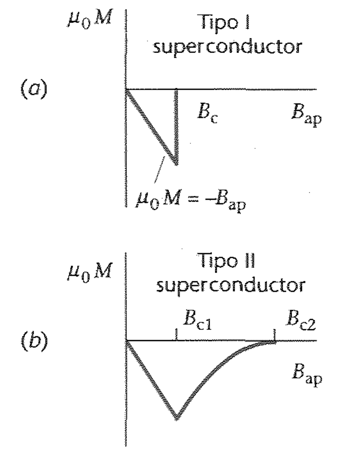


Figura 30.27 Gráficos del producto $\mu_0 M$ en función del campo magnético aplicado para los superconductores del tipo I y del tipo II. (*a*) En los del tipo I el campo magnético resultante es cero por debajo de un campo aplicado crítico B_c porque el campo debido a las corrientes inducidas en la superficie del superconductor neutraliza exactamente el campo aplicado. Por encima del campo crítico, el material es un conductor normal y la imantación es demasiado pequeña para verse a esta escala. (*b*) En un superconductor del tipo II, el campo magnético comienza a penetrar el material cuando alcanza el valor B_{c1}, pero éste permanece superconductor hasta un campo B_{c2} después de lo cual se convierte en un conductor normal.

Otros materiales, llamados **superconductores del tipo II**, poseen una curva de imantación semejante a la de la figura 30.27*b*. Estos materiales son usualmente aleaciones o metales que poseen resistividades grandes en el estado normal. Los superconductores del tipo II exhiben las propiedades eléctricas de los superconductores excepto cuando actúa el efecto Meissner hasta el campo crítico B_{c2} que puede ser varios cientos de veces superior a los valores típicos de los campos críticos para superconductores del tipo I. Por ejemplo, la aleación Nb_3Ge tiene un campo crítico B_{c2} = 34 T. Tales materiales pueden utilizarse para la construcción de imanes superconductores de campo intenso. Por debajo del campo crítico B_{c1}, el comportamiento de un superconductor del tipo II es el mismo que el de otro del tipo I. En la región comprendida entre los campos B_{c1} y B_{c2} se dice que el superconductor está en estado de vórtice.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Cuantización del flujo

OPCIONAL

Consideremos un anillo superconductor de área A portadora de una corriente. Existirá un flujo magnético $\phi_m = B_n A$ a través del anillo debido a la corriente mencionada y quizá a otras corrientes externas al anillo. Según la ley de Faraday, si el flujo se modifica, se inducirá una fem en el anillo que será proporcional a la variación temporal del flujo. Pero no existirá fem en el anillo debido a su resistencia nula. El flujo a través del anillo se "congela" y no puede variar.

Otro efecto que resulta del tratamiento mecánico-cuántico de la superconductividad es que el flujo total a través de la espira está cuantizado y viene dado por

$$\phi_m = n\frac{h}{2e}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{30.25}$$

La unidad más pequeña del flujo llamada **fluxón** es

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}0678 \times 10^{-15}\ \mathrm{T \cdot m^2} \tag{30.26}$$

Resumen

1. La ley de Faraday y la ley de Lenz son leyes fundamentales de la física.
2. La inductancia es una propiedad de un elemento de circuito que relaciona el flujo que atraviesa el elemento con la corriente.

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
		1. Flujo magnético ϕ_m
$\phi_m = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$	(30.1)	Definición general
$\phi_m = NBA\cos\phi$	(30.3)	Campo constante, bobina de n vueltas
$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T\cdot m^2}$	(30.2)	Unidades
$\phi_m = LI$	(30.7)	Debido a la corriente en un circuito
$\phi_{m1} = L_1 I_1 + M I_2 \quad \phi_{m2} = L_2 I_2 + M I_1$	(30.11)	Debido a la corriente en dos circuitos
$\phi_m = n\frac{h}{2e}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	(30.25)	Cuantización (opcional)
$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}0678 \times 10^{-15}\ \mathrm{T\cdot m^2}$	(30.26)	Fluxón (opcional)
		2. fem
$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$	(30.4)	Definición
$\lvert\mathcal{E}\rvert = vB\ell$	(30.6)	fem de movimiento (opcional)
$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$	(30.10)	Autoinducida (fuerza contraelectromotriz)
$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$	(30.5)	**3. Ley de Faraday**
La fem inducida y la corriente inducida tienen un sentido tal que se opone al cambio que les produce.		**4. Ley de Lenz**
		5. Inductancia
$\phi_m = LI$	(30.7)	Autoinducción

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Autoinducción de un solenoide	$L = \mu_0 n^2 A\ell$	(30.9)
Inductancia mutua	$\phi_{m1} = MI_2 \quad \phi_{m2} = MI_1$	
Unidades	$1\ \text{H} = 1\ \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}^2}{\text{A}}$ $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ H/m	
6. Energía magnética		
Energía en un inductor	$U_m = \frac{1}{2}LI^2$	(30.16)
Densidad de energía en un campo magnético	$u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$	(30.17)

7. Circuitos *RL* (opcional) En un circuito *RL*, formado por una resistencia *R*, una inductancia *L* y una batería de fem $\mathscr{E}_0$ en serie, la corriente no alcanza su valor máximo *I* instantáneamente, sino que tarda cierto tiempo. Si la corriente es inicialmente cero, su valor al cabo de cierto tiempo *t* viene dado por

Corriente
$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathscr{E}_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = I_f(1 - e^{-t/\tau}) \quad (30.21)$$

Constante de tiempo, τ
$$\tau = \frac{L}{R} \quad (30.22)$$

Guía para la resolución de problemas

Comenzar dibujando un diagrama neto que incluya las características importantes del problema. Mostrar la dirección de **B** a fin de calcular correctamente el flujo magnético. Si *B* varía con el tiempo, es útil incluir en el dibujo el sentido del campo eléctrico inducido **E**. En problemas de circuitos, especificar el sentido de la corriente *I* y mostrar cuál es el extremo del inductor que posee el mayor potencial

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES	
1. Flujo		
Determinar el flujo magnético a través de una bobina de *N* vueltas.	Utilizar $\phi_m = NBA\cos\phi$ si *B* es uniforme o $\phi_m = \int_S NB_n\, dA$ si *B* varía.	**Ejemplos 30.1, 30.2**
2. fem inducida		
Determinar el campo eléctrico inducido **E** o la fem inducida $\mathscr{E}$ debida a un flujo magnético variable.	Utilizar la ley de Faraday $\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\phi_m}{dt}$	**Ejemplos 30.2, 30.3, 30.4, 30.5, 30.6**
Determinar la fem producida por el movimiento a través de un campo magnético.	La magnitud de la fem de movimiento es $\mathscr{E} = vB\ell$. El sentido viene dado por la ley de Lenz.	**Ejemplos 30.7, 30.8**
3. Inductancia		
Calcular la inductancia de un solenoide.	Utilizar $L = \mu_0 n^2 A\ell$.	**Ejemplo 30.9**
4. Energía magnética		
Calcular la energía magnética y la densidad de energía magnética.	La energía magnética es $U_m = \frac{1}{2}LI^2$ y la densidad de energía magnética, $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.	**Ejemplo 30.10**

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

5. **Circuitos *RL***

Determinar la corriente en un circuito simple *RL*.

Utilizar $I = I_f(1 - e^{-t/\tau})$ para un interruptor cerrado en $t = 0$ e $I = I_0e^{-t/\tau}$ para un interruptor abierto en $t = 0$. En ambos casos $\tau = L/R$. **Ejemplo 30.11**

Determinar la corriente en un circuito con inductores, inmediatamente después de abrir o cerrar un interruptor o mucho después de cerrar un interruptor.

Inmediatamente después de abrir o cerrar el paso de corriente en un inductor, la intensidad en éste no se modifica. Mucho después de cerrar un interruptor el inductor actúa como un alambre sin resistencia. **Ejemplo 30.11**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Flujo magnético

• **1** Un campo magnético uniforme de magnitud 2000 G es paralelo al eje *x*. Una espira cuadrada de lado 5 cm forma un ángulo θ con el eje *z* como muestra la figura 30.28. Determinar el flujo magnético a través de la espira cuando

(a) $\theta = 0$, **(b)** $\theta = 30°$, **(c)** $\theta = 60°$, y **(d)** $\theta = 90°$

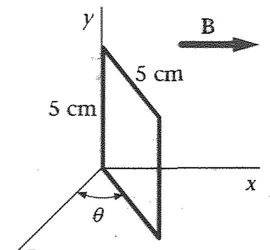


Figura 30.28 Problema 1.

• **2** Una bobina circular tiene 25 vueltas y un radio de 5 cm. Se encuentra en el ecuador donde el campo magnético terrestre es 0,7 G norte. Determinar el flujo magnético a través de la bobina cuando

(a) su plano es horizontal,
(b) su plano es vertical y su eje apunta al norte,
(c) su plano es vertical y su eje apunta al este, y
(d) su plano es vertical y su eje forma un ángulo de 30° con el norte.

• **3** Un campo magnético de 1,2 T es perpendicular a una bobina cuadrada de 14 vueltas. La longitud de cada lado de la bobina es 5 cm.

(a) Determinar el flujo magnético a través de la bobina.
(b) Determinar el flujo magnético para el caso en que el campo magnético forma un ángulo de 60° con la normal al plano de la bobina.

• **4** Una bobina circular de radio 3,0 cm tiene su plano perpendicular a un campo magnético de 400 G.

(a) ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa la bobina, si ésta posee 75 vueltas?
(b) ¿Cuántas vueltas debe tener la bobina para que el flujo sea de 0,015 Wb?

• **5** Un campo magnético uniforme B es perpendicular a la base de una semiesfera de radio *R*. Calcular el flujo magnético que atraviesa la superficie esférica de la semiesfera.

•• **6** Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de longitud 25 cm, radio1 cm y 400 vueltas, que transporta una corriente de 3 A.

•• **7** Resolver el problema 6 para el caso de un solenoide de longitud 30 cm, radio 2 cm y 800 vueltas que transporta una corriente de intensidad 2 A.

•• **8** Una bobina circular de 15 vueltas de 4 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme de 4000 G en la dirección positiva de *x*. Determinar el flujo que atraviesa la bobina cuando el vector unitario normal al plano de la bobina es

(a) $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{i}$, **(b)** $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{j}$, **(c)** $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})\hat{\mathbf{n}}\sqrt{2}$, **(d)** $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$, y **(e)** $\hat{\mathbf{n}} = 0{,}6\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j}$.

•• **9** Un solenoide posee *n* vueltas por unidad de longitud, radio R_1 y transporta una corriente *I*.

(a) Una bobina circular grande de radio $R_2 > R_1$ y *N* vueltas rodea el solenoide en un punto alejado de los extremos del solenoide. Determinar el flujo magnético que atraviesa la bobina.
(b) Una bobina circular pequeña de radio $R_3 < R_1$ está introducida completamente dentro del solenoide, lejos de sus extremos con su eje paralelo al del solenoide. Determinar el flujo magnético a través de esta pequeña bobina.

•• **10** Un alambre largo y rectilíneo transporta la corriente *I*. Una espira rectangular con dos lados paralelos al alambre tiene los lados *a* y *b*, siendo *d* la distancia entre el lado más próximo y el alambre, como indica la figura 30.29

(a) Calcular el flujo magnético que atraviesa la espira rectangular. *Indicación*: Calcular el flujo a través de una banda de área $dA = b\,dx$ e integrar desde $x = d$ a $x = d + a$.
(b) Evaluar la respuesta para $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $d = 2$ cm e $I = 20$ A.

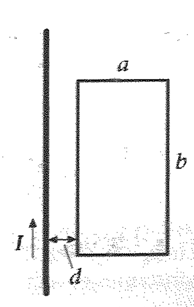


Figura 30.29 Problemas 10 y 46.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

••• 11 Un conductor largo y cilíndrico de radio R transporta una corriente I que está uniformemente distribuida en su área transversal. Determinar el flujo magnético por unidad de longitud a través del área indicada en la figura 30.30.

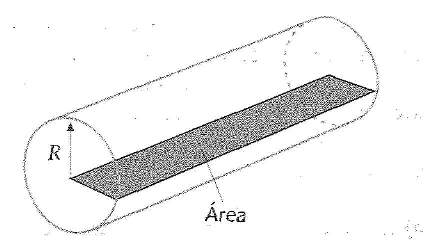


Figura 30.30 Problema 11.

••• 12 Una bobina rectangular en el plano de la página tiene las dimensiones a y b. Un alambre largo que transporta una corriente I se sitúa directamente por encima de la bobina (figura 30.31)

(a) Deducir una expresión para el flujo magnético a través de la bobina en función de x para $0 \leq x \leq 2b$

(b) ¿Para qué valor de x el flujo que atraviesa la bobina es un máximo?

(c) ¿Para qué valor de x el flujo es un mínimo?

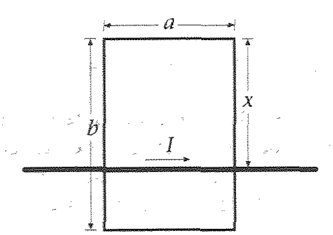


Figura 30.31 Problema 12.

Fem inducida y ley de Faraday

• 13 Una espira conductora se encuentra en el plano de está página y transporta una corriente inducida en sentido horario. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones podía ser cierta?

(a) Un campo magnético constante está dirigido hacia la página.

(b) Un campo magnético constante está dirigido desde la página hacia fuera.

(c) Un campo magnético creciente está dirigido hacia la página.

(d) Un campo magnético decreciente está dirigido hacia la página.

(e) Un campo magnético decreciente está dirigido desde la página hacia fuera.

• 14 Se establece un campo magnético uniforme B perpendicular al plano de una espira de radio 5,0 cm, 0,4 Ω de resistencia y una autoinducción despreciable. El valor de B se aumenta a un ritmo de 40 mT/s. Hallar

(a) la fem inducida en la espira,

(b) la corriente inducida en la espira y

(c) la producción de calor Joule en la espira por unidad de tiempo.

• 15 El flujo que atraviesa una espira viene dado por $\phi_m = (t^2 - 4t) \times 10^{-1}$ Wb, donde t se da en segundos.

(a) Hallar la fem inducida $\mathscr{E}$ en función del tiempo.

(b) Hallar ϕ_m y $\mathscr{E}$ para $t = 0$, $t = 2$ s, $t = 4$ s y $t = 6$ s.

• 16

(a) En el caso del flujo dado en el problema 15, representar gráficamente ϕ_m y $\mathscr{E}$ en función de t.

(b) ¿En qué instante es máximo el flujo? ¿Cuál es la fem en ese instante?

(c) ¿En qué instantes es cero el flujo? ¿Cuál es la fem en esos instantes?

• 17 El campo magnético del problema 4 se reduce uniformemente a cero en 0,8 s. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la bobina de la parte (b)?

• 18 Un solenoide de longitud 25 cm y radio 0,8 cm posee 400 vueltas y se encuentra en un campo magnético externo de 600 G que forma un ángulo de 50° con el eje del solenoide.

(a) Determinar el flujo magnético a través del solenoide.

(b) Determinar la magnitud de la fem inducida en el solenoide si el campo magnético externo se reduce a cero en 1,4 s.

•• 19 Una bobina circular de 100 vueltas tiene un diámetro de 2,0 cm y una resistencia de 50 Ω. El plano de la bobina es perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 1,0 T. El campo sufre una inversión de sentido repentina.

(a) Hallar la carga total que pasa a través de la bobina.

Si la inversión emplea un tiempo de 0,1 s, hallar

(b) la corriente media que circula por dicho circuito y

(c) la fem media en el mismo.

•• 20 En el ecuador, una bobina de 1000 vueltas, 300 cm² de área de sección recta y 15 Ω de resistencia se orienta de modo que su plano es perpendicular al campo magnético terrestre de 0,7 G. Si se hace girar 90° la bobina, ¿cuánta carga fluirá a su través?

•• 21 Una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 5,0 cm se conecta a un integrador de corriente. La resistencia total del circuito es 20 Ω. El plano de la bobina se orienta inicialmente de modo que sea perpendicular al campo magnético terrestre en un punto determinado. Cuando la bobina gira 90°, la carga que pasa a través del integrador se mide y resulta ser igual a 9,4 μC. Calcular el valor del campo magnético terrestre en dicho punto.

•• 22 Una espira conductora circular elástica se expansiona a una velocidad constante, de modo que su radio viene dado por $R = R_0 + vt$. La espira se encuentra en una región de campo magnético constante perpendicular a la misma. ¿Cuál es la fem generada en la espira? Despreciar efectos posibles de autoinducción.

•• 23 El alambre del problema 12 se sitúa en $x = b/4$.

(a) Deducir una expresión para la fem inducida en la bobina si la corriente varía con el tiempo según la relación $I = 2t$.

(b) Si $a = 1,5$ m y $b = 2,5$ m, ¿cuál debería ser la resistencia de la bobina para que la corriente inducida fuese 0,1 A? ¿Cuál es el sentido de la corriente?

•• 24 Repetir el problema 23 suponiendo que el alambre se sitúa en $x = b/3$.

Ley de Lenz

• 25 Dar el sentido de la corriente inducida en el circuito de la derecha de la figura 30.32 cuando a la resistencia del circuito de la izquierda repentinamente se le hace

(a) crecer y (b) disminuir.

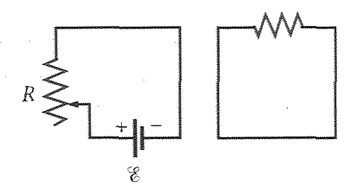


Figura 30.32 Problema 25.

•• 26 Las dos espiras circulares de la figura 30.33 tienen sus planos paralelos entre sí. Cuando se mira desde A hacia B existe en A una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj. Dar el sentido de la

www.elsolucionario.net

corriente en la espira B y establecer si las espiras se atraen o repelen entre sí, si la corriente en la espira A está

(a) creciendo y (b) decreciendo.

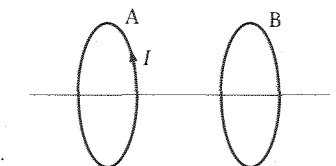


Figura 30.33 Problema 26.

•• 27 Un imán en forma de barra se mueve con velocidad constante a lo largo del eje de una espira como se indica en la figura 30.34.

(a) Hacer un esquema cualitativo del flujo ϕ_m que atraviesa la espira en función del tiempo. Indicar el tiempo t_1 en que el imán está la mitad introducido en la espira.
(b) Hacer un esquema de la corriente I que hay en la espira en función del tiempo, escogiendo I positivo cuando tiene sentido contrario al de las agujas del reloj vista la espira desde la izquierda.

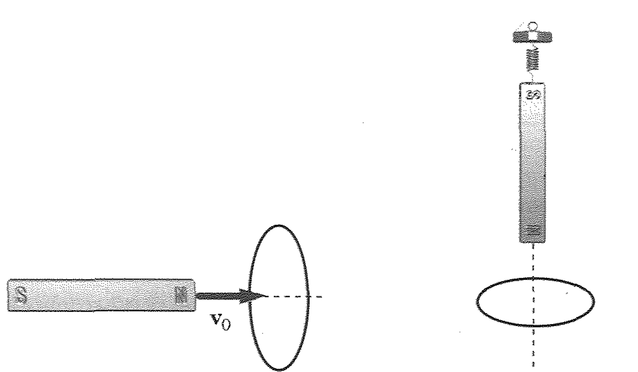


Figura 30.34 Problema 27.

Figura 30.35 Problema 28.

•• 28 Una barra magnética está montada en el extremo de un muelle arrollado en espiral de modo que oscila con movimiento armónico simple a lo largo del eje de una espira, como se muestra en la figura 30.35.

(a) Representar gráficamente el flujo ϕ_m que atraviesa la espira en función del tiempo. Indicar el tiempo t_1, cuando el imán está a mitad de camino a través de la espira.
(b) Representar la intensidad de corriente I en la espira en función del tiempo, eligiendo como positivo el sentido de I cuando coincide con el sentido contrario al de las agujas del reloj, visto desde arriba.

Fem de movimiento (opcional)

• 29 Una varilla de 30 cm de longitud se mueve a 8 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 500 G. Su velocidad es perpendicular a la longitud de la varilla. Hallar

(a) la fuerza magnética ejercida sobre un electrón de la varilla,
(b) el campo electrostático **E** existente en la varilla, y
(c) la diferencia de potencial V entre sus extremos.

• 30 Hallar la velocidad de la varilla del problema 29 si la diferencia de potencial entre sus extremos es de 6 V.

• 31 En la figura 30.14, sea $B = 0{,}8$ T, $v = 10{,}0$ m/s, $\ell = 20$ cm, y $R = 2\ \Omega$. Hallar

(a) la fem inducida en el circuito,
(b) la corriente en el circuito y
(c) la fuerza necesaria para mover la varilla con velocidad constante suponiendo un rozamiento despreciable.
(d) Hallar la potencia suministrada por la fuerza hallada en la parte (c), y
(e) la producción de calor I^2R por unidad de tiempo.

• 32 Resolver el problema 31 en el caso de $B = 1{,}5$ T, $v = 6$ m/s, $\ell = 40$ cm y $R = 1{,}2\ \Omega$.

•• 33 Una espira rectangular de 10 cm por 5,0 cm y con una resistencia de 2,5 Ω se mueve por una región de un campo magnético uniforme de $B = 1{,}7$ T (figura 30.36) con velocidad constante $v = 2{,}4$ cm/s. El extremo delantero de la espira entra en la región del campo magnético en el instante $t = 0$.

(a) Hallar el flujo que atraviesa la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico del mismo.
(b) Hallar la fem y la corriente inducida en la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico de las mismas. Despreciar cualquier autoinducción de la espira y ampliar los gráficos desde $t = 0$ hasta $t = 16$ s.

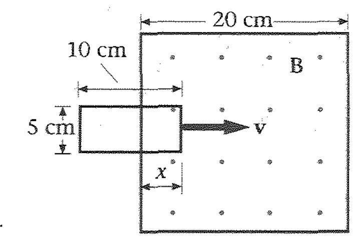


Figura 30.36 Problema 33.

•• 34 Un campo magnético uniforme de magnitud 1,2 T posee la dirección del eje z. Una barra conductora de longitud 15 cm se encuentra paralelamente al eje y y oscila en la dirección x con una elongación dada por $x = (2\text{ cm})\cos 120\pi t$. ¿Cuál es la fem inducida en la barra?

•• 35 En la figura 30.37, la barra posee una resistencia R y los raíles son de resistencia despreciable. Una batería de fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna despreciable se conecta entre los puntos a y b de tal modo que la corriente en la barra está dirigida hacia abajo. La barra se encuentra en reposo en el instante $t = 0$.

(a) Determinar la fuerza que actúa sobre la barra en función de la velocidad v y escribir la segunda ley de Newton para la barra cuando su velocidad es v.
(b) Demostrar que la barra alcanza una velocidad límite y determinar la expresión correspondiente.
(c) ¿Cuál es el valor de la intensidad de corriente cuando la barra alcanza su velocidad límite?

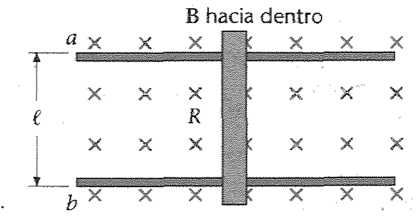


Figura 30.37 Problemas 35 y 38.

•• 36 En el ejemplo 30.8, determinar la energía total disipada en la resistencia y demostrar que es igual a $\frac{1}{2}mv_0^2$.

•• 37 Determinar la distancia total recorrida por la barra en el ejemplo 30.8.

•• 38 La barra de la figura 30.37 posee una resistencia R y los raíles son de resistencia despreciable. Un condensador de carga Q_0 y capacidad C se conecta entre los puntos a y b de tal modo que la corriente en la barra se dirige hacia abajo. La barra está en reposo para $t = 0$.

(a) Escribir la ecuación del movimiento de la barra sobre los raíles.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(b) Demostrar que la velocidad límite de la barra sobre los raíles está relacionada con la carga final en el condensador.

•• 39 En la figura 30.38 una barra conductora de masa m y resistencia despreciable desliza sin rozamiento a lo largo de dos raíles paralelos de resistencia despreciable, separados por una distancia ℓ y conectados por una resistencia R. Los raíles están sujetos a un plano largo e inclinado que forma un ángulo ϕ con la horizontal. Como se indica en la figura, el campo magnético está dirigido hacia arriba.

(a) Demostrar que existe una fuerza retardatriz dirigida hacia arriba sobre el plano inclinado dada por $F = (B^2\ell^2 v \cos^2 \phi)R$

(b) Demostrar que la velocidad terminal de la barra es $v_t = mgR$ sen $\phi/(B^2\ell^2 \cos^2 \phi)$.

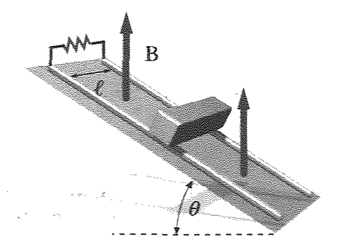


Figura 30.38 Problemas 39, 42 y 43.

•• 40 Un péndulo simple formado por un alambre de longitud L soporta una bola metálica de masa m. El alambre posee una masa despreciable y se mueve en el interior de un campo magnético horizontal y uniforme B. Este péndulo ejecuta un movimiento armónico simple de amplitud angular θ_0. ¿Cuál es la fem generada a lo largo del alambre?

•• 41 Un alambre situado a lo largo del eje z transporta la corriente $I = 20$ A en el sentido positivo de dicho eje. Una pequeña esfera conductora de radio $R = 2$ cm se encuentra inicialmente en reposo sobre el eje y a una distancia $h = 45$ m por encima del alambre. La esfera se deja caer en el instante $t = 0$.

(a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de la esfera en el instante $t = 3$ s? Suponer que el único campo magnético es el producido por el alambre.

(b) ¿Cuál es el voltaje a través de la esfera en el instante $t = 3$ s?

•• 42 En la figura 30.38, sea $\theta = 30°$, $m = 0{,}4$ kg, $\ell = 15$ m y $R = 2{,}0\ \Omega$. La barra parte del reposo de la parte más alta del plano inclinado en el tiempo $t = 0$. Los raíles tienen resistencia despreciable. Existe un campo magnético constante verticalmente dirigida hacia arriba de magnitud 1,2 T.

(a) Determinar la fem inducida en la barra en función de su velocidad hacia abajo por los raíles.

(b) Expresar la ley del movimiento de Newton para la barra; demostrar que la barra se aproxima a una velocidad límite y determinar su velocidad.

•• 43 Cuando la barra del problema 42 ha alcanzado su velocidad terminal, ¿cuál es la potencia disipada en la resistencia? ¿Cómo se modifica por unidad de tiempo la energía potencial de la barra?

••• 44 Un cilindro conductor sólido de radio 0,1 m y masa 4 kg descansa sobre raíles conductores horizontales (figura 30.39). Los raíles, separados por una distancia $a = 0{,}4$ m, poseen una superficie áspera, de modo que el cilindro rueda en lugar de deslizar. Una batería a 12 V está conectada a los raíles, como se indica en la figura. La única resistencia significativa del circuito es la resistencia de contacto de 6 Ω entre el cilindro y los raíles. El sistema se encuentra en un reposo próximo a la batería.

(a) ¿Cuál debe ser la magnitud y dirección de B para que el cilindro tenga una aceleración inicial de 0,1 m/s² hacia la derecha?

(b) Determinar la fuerza sobre el cilindro en función de su velocidad v.

(c) Determinar la velocidad límite del cilindro.

(d) ¿Cuál es la energía cinética del cilindro cuando ha alcanzado su velocidad límite? (Despreciar el campo magnético debido a la corriente en el sistema cilindro-raíles-batería y suponer que la densidad de corriente en el cilindro es uniforme.)

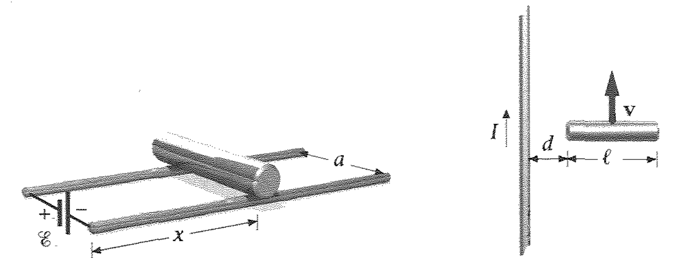


Figura 30.39 Problema 44.

Figura 30.40 Problema 45.

••• 45 Una barra de longitud ℓ es perpendicular a un conductor rectilíneo largo por el que circula una corriente I, según puede verse en la figura 30.40. El extremo cercano de la barra está a una distancia d del conductor. La barra se mueve con una velocidad v en el sentido de la corriente I.

(a) Demostrar que la diferencia de potencial entre los extremos de la barra viene dada por

$$V = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, v \ln \frac{d+\ell}{d}$$

(b) Utilizar la ley de Faraday para obtener este resultado considerando el flujo que atraviesa un área rectangular $A = \ell vt$ barrida por la barra.

••• 46 La espira del problema 10 se mueve alejándose del alambre con una velocidad constante v. En el instante $t = 0$, el lado izquierdo de la espira se encuentra a una distancia d del alambre largo rectilíneo.

(a) Calcular la fem generada en la espira determinando la fem de movimiento en cada segmento de la misma, paralelo al alambre. Explicar por qué se desprecia la fem en los segmentos perpendiculares al alambre.

(b) Calcular la fem en la espira calculando primero el flujo a través de la misma en función del tiempo y después usando la expresión $\mathscr{E} = -d\phi_m/dt$; compárese la respuesta con la obtenida en la parte (a).

••• 47 Una barra conductora de longitud ℓ gira a velocidad angular constante ω alrededor de un extremo en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme B (figura 30.41).

(a) Demostrar que la fuerza magnética sobre una carga q situada a una distancia r del eje de giro es $Bqr\omega$.

(b) Demostrar que la diferencia de potencial existente entre los extremos de la barra es $V = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$.

(c) Dibujar una línea radial cualquiera en el plano a partir de la cual midamos el ángulo $\theta = \omega t$. Demostrar que el área de la región en forma de cuña entre la línea de referencia y la barra es $A = \frac{1}{2}\ell^2\theta$. Calcular el flujo que atraviesa esta área y demostrar que $\mathscr{E} = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$ se deduce a partir de la ley de Faraday aplicada a dicha área.

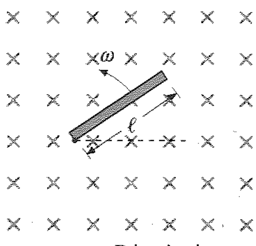


Figura 30.41 Problema 47. B hacia dentro

www.elsolucionario.net

Inductancia

• **48** ¿Cómo se modificaría la autoinducción de un solenoide si
(a) la misma longitud de alambre se arrollara sobre un cilindro de igual diámetro, pero de longitud doble;
(b) una longitud doble de alambre se arrollara sobre el mismo cilindro;
(c) la misma longitud de alambre se arrollara sobre un cilindro de igual longitud, pero de diámetro doble?

• **49** Por una bobina con una autoinducción de 8,0 H circula una corriente de 3 A, y varía a razón de 200 A/s.
(a) Hallar el flujo magnético que atraviesa la bobina.
(b) Hallar la fem inducida en la misma.

• **50** Por una bobina de autoinducción L circula una corriente I, dada por $I = I_0$ sen $2\pi ft$. Hallar el flujo ϕ_m y la fem autoinducida y representarlos gráficamente en función del tiempo.

•• **51** Un solenoide tiene una longitud de 25 cm, un radio de 1 cm y 400 vueltas. Por él circula una corriente de 3 A. Hallar
(a) B sobre el eje y en el centro del solenoide;
(b) el flujo que atraviesa el solenoide admitiendo que B es uniforme;
(c) la autoinducción del solenoide, y
(d) la fem inducida en el solenoide cuando la corriente varía a razón de 150 A/s.

•• **52** Dos solenoides de radios 2 cm y 5 cm son coaxiales. Cada uno de ellos tiene 25 cm de longitud y poseen respectivamente 300 y 1000 vueltas. Determinar su inductancia mutua.

•• **53** Un alambre largo y aislado con una resistencia lineal de 18 Ω/m se utiliza para construir la resistencia de un circuito. En primer lugar el alambre se dobla por la mitad y después se arrolla en forma cilíndrica como indica la figura 30.42. El diámetro de esta forma cilíndrica es de 2 cm, su longitud 25 cm y la longitud total del alambre 9 m. Determinar la resistencia y la inductancia de esta resistencia.

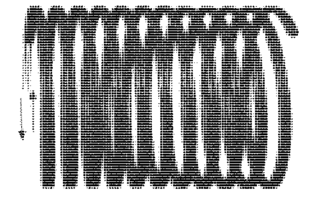


Figura 30.42 Problema 53.

•• **54** La figura 30.43 muestra dos solenoides largos cada uno de 2000 vueltas de alambre. El solenoide exterior es de 20 cm de longitud y diámetro 2 cm. El solenoide interior es de 10 cm de longitud y diámetro 1 cm. Determinar la inductancia efectiva de este dispositivo.

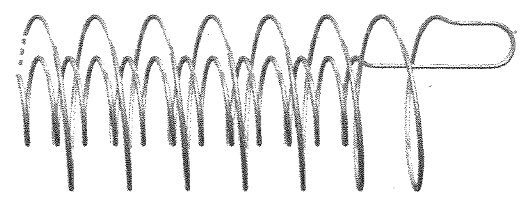


Figura 30.43 Problema 54.

••• **55** El circuito 2 de la figura 30.44 posee una resistencia total de 300 Ω. Cuando el interruptor S del circuito 1 está cerrado, a través del galvanómetro del circuito 2 fluye una cara total de 2×10^{-4} C. Después de un largo tiempo, la corriente del circuito 1 es de 5 A. ¿Cuál es la inductancia mutua entre las dos bobinas?

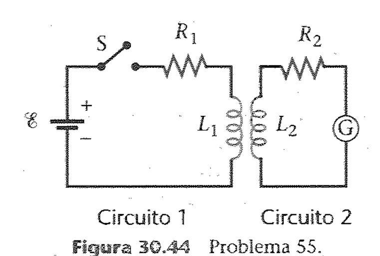


Figura 30.44 Problema 55.

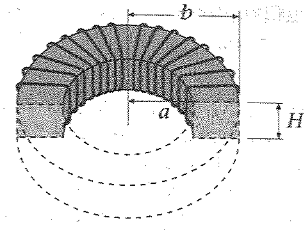


Figura 30.45 Problema 56.

••• **56** Demostrar que la inductancia de un toroide de sección rectangular como indica la figura 30.45 viene dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h \ln (b/a)}{2\pi}$$

en donde N es el número total de vueltas, a es el radio interior, b el radio exterior y h la altura del toroide.

Energía magnética

• **57** Si la corriente que circula por un inductor se duplica, la energía que se almacena en el mismo será
(a) la misma. (b) el doble.
(c) cuatro veces mayor. (d) la mitad.
(e) la cuarta parte.

• **58** Se conecta una bobina cuya autoinducción es 2,0 H y su resistencia 12,0 Ω a una batería de 24 V y de resistencia interna despreciable.
(a) ¿Cuál es la corriente final?
(b) ¿Cuánta energía se almacena en la bobina cuando se alcanza el valor final de la corriente?

• **59** En un volumen de 1,0 m³ existe un campo eléctrico de 10^4 V/m y un campo magnético de 1 T, hallar
(a) la energía magnética,
(b) la energía eléctrica y
(c) la energía total.

•• **60** En una onda electromagnética plana, tal como una onda luminosa, los valores de los campos eléctrico y magnético están relacionados por $E = cB$, en donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ es la velocidad de la luz. Demostrar que en este caso las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales.

•• **61** Por un solenoide de 2000 vueltas, 4 cm² de área y una longitud de 30 cm, circula una corriente de 4,0 A.
(a) Calcular la energía magnética almacenada mediante la expresión $\frac{1}{2}LI^2$.
(b) Dividir la respuesta obtenida en la parte (a) por el volumen del solenoide para hallar la energía magnética por unidad de volumen de éste.
(c) Hallar B en el solenoide.
(d) Calcular la densidad de energía magnética a partir de $u_m = B^2/2\mu_0$ y compararla con la obtenida en la parte (b).

•• **62** Un alambre largo y cilíndrico de radio a = 2 cm transporta una corriente I = 80 A uniformemente distribuida en el área de su sección transversal. Determinar la energía magnética total por unidad de longitud dentro del alambre.

•• **63** Un toroide de radio medio 25 cm y un radio de la bobina de 2 m está arrollado con un cable superconductor de 1000 m de longitud por el que circula una corriente de 400 A.
(a) ¿Cuál es el número de vueltas de la bobina?
(b) ¿Cuál es el campo magnético en el radio medio?
(c) Suponiendo B constante en toda el área de la bobina, calcular la densidad de energía magnética y la energía total almacenada en el toroide.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Circuitos *RL*

• **64** Una bobina de 8,0 Ω de resistencia y una autoinducción de 4,0 H se conecta repentinamente a una diferencia de potencial constante de 100 V. Supongamos que el instante de la conexión es $t = 0$ y en él la corriente es nula. Hallar la corriente I y su variación respecto al tiempo dI/dt en los instantes

(a) $t = 0$, **(b)** $t = 0,1$ s, **(c)** $t = 0,5$ s y **(d)** $t = 1,0$ s.

• **65** La corriente que circula por una bobina de 1 mH de autoinducción es 2,0 A en el instante $t = 0$, cuando se pone en paralelo a la bobina una resistencia. La resistencia total de la bobina más la resistencia es 10,0 Ω. Hallar la corriente después de

(a) 0,5 ms y **(b)** 10 ms.

•• **66** En el circuito de la figura 30.20 supongamos que $\mathscr{E}_0 = 12,0$ V, $R = 3,0$ Ω y $L = 0,6$ H. El interruptor se cierra en el instante $t = 0$ s. En el instante $t = 0,5$ s, hallar

(a) el ritmo con que la batería suminstra la potencia,
(b) el efecto calorífico de Joule por unidad de tiempo, y
(c) la velocidad con que la energía se está almacenando en la bobina.

•• **67** Repetir el problema 66 para los instantes $t = 1$ s y $t = 100$ s.

•• **68** La corriente en un circuito *RL* es cero en el instante $t = 0$ y aumenta hasta la mitad de su valor final en 4,0 s.

(a) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?
(b) Si la resistencia total es 5 Ω, ¿cuál es la autoinducción?

•• **69** ¿Cuántas constantes de tiempo deben transcurrir antes de que la corriente en un circuito *RL*, que era inicialmente cero, alcance

(a) el 90 por ciento,
(b) el 99 por ciento y
(c) el 99,9 por ciento de su valor final?

•• **70** Una bobina de inductancia 4 mH y resistencia 150 Ω se conecta a través de una batería de fem 12 V y resistencia interna despreciable.

(a) ¿Cuál es el incremento inicial de la corriente por unidad de tiempo?
(b) ¿Cuál es el incremento por unidad de tiempo cuando la corriente alcanza la mitad de su valor final?
(c) ¿Cuál es la corriente final?
(d) ¿Cuánto tiempo tardará la corriente en alcanzar el 99 por ciento de su valor final?

•• **71** Un gran electroimán posee una inductancia de 50 H y una resistencia de 8,0 Ω. Si se conecta a una fuente de potencia de corriente continua de 250 V, determinar el tiempo que tarda la corriente en alcanzar

(a) 10 A y **(b)** 30 A.

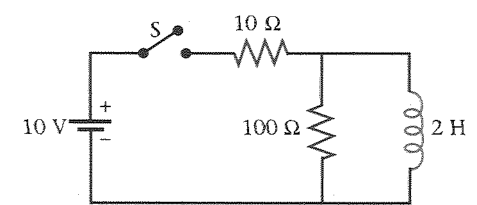


Figura 30.46 Problema 72.

•• **72** Dado el circuito de la figura 30.46, suponer que el interruptor S se ha cerrado durante un largo tiempo, de modo que existen corrientes estacionarias en el circuito y que el inductor L está formado por un alambre superconductor, de modo que su resistencia puede considerarse nula.

(a) Determinar la intensidad de corriente suministrada por la batería, la intensidad que circula por la resistencia de 100 Ω y la intensidad que circula por el inductor.
(b) Determinar el voltaje inicial entre los extremos del inductor cuando se abre el interruptor S.
(c) Determinar la corriente en el inductor en función del tiempo a partir del instante de apertura del interruptor S.

•• **73** Calcular la pendiente inicial dI/dt para $t = 0$ mediante la ecuación 30.21 y demostrar que si la corriente disminuye uniformemente con esta pendiente, su valor sería cero al cabo de una constante de tiempo.

•• **74** Una inductancia L y una resistencia R se conectan en serie con una batería como indica la figura 30.22. Un tiempo largo después de cerrar el interruptor, la intensidad de la corriente es de 2,5 A. Cuando la batería queda fuera del circuito al abrir el interruptor S_1 y cerrar S_2, la corriente cae a 1,5 A en 45 ms.

(a) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?
(b) Si $R = 0,4$ Ω, ¿cuánto vale L?

•• **75** Cuando la corriente que circula por una bobina determinada es 5,0 A y está aumentando a razón de 10,0 A/s, la diferencia de potencial en los extremos de la misma es 140 V. Cuando la corriente vale 5,0 A y está disminuyendo a razón de 10,0 A/s, la diferencia de potencial es 60 V. Hallar la resistencia y la autoinducción de la bobina.

•• **76** Determinar en el circuito de la figura 30.47,

(a) la variación de la intensidad de corriente con el tiempo en cada inductor y en la resistencia en el momento justo después de cerrar el interruptor.
(b) ¿Cuál es la corriente final? (Véase problema 92 y utilizar los resultados del mismo.)

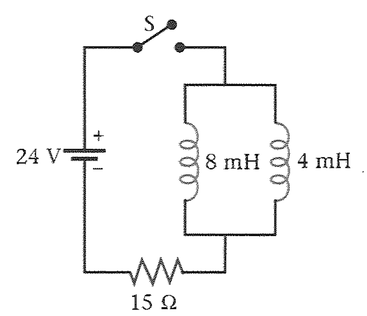


Figura 30.47 Problema 76.

•• **77** Para el circuito del ejemplo 30.11, determinar el tiempo en el cual la disipación de potencia en la resistencia es igual al ritmo con que la energía magnética se almacena en el inductor.

••• **78** En el circuito de la figura 30.21, sea $\mathscr{E}_0 = 12,0$ V, $R = 3,0$ Ω, y $L = 0,6$ H. El interruptor está cerrado en el instante $t = 0$. Desde el instante $t = 0$ a $t = \tau$, hallar

(a) la energía total suministrada por la batería,
(b) la energía total disipada en forma de calor en la resistencia y
(c) la energía almacenada en la bobina. (*Indicación*: Hallar la velocidad de variación en función del tiempo e integrar desde $t = 0$ hasta $t = \tau = L/R$.)

Problemas generales

• **79** Dos imanes en forma de barra, idénticos, se dejan caer desde alturas iguales. El imán A se deja caer sobre tierra pura, mientras que el imán B cae sobre una placa metálica. ¿Cuál imán llega antes al suelo?

(a) Imán A.
(b) Imán B.
(c) Ambos llegan al mismo tiempo.
(d) El que tenga el polo N hacia el suelo.
(e) El que tenga el polo S hacia el suelo.

www.elsolucionario.net

• 80 Verdadero o falso:

(a) La fem inducida en un circuito es proporcional al flujo magnético que atraviesa el circuito.
(b) Puede existir una fem en un instante en el que el flujo a través del circuito es cero.
(c) La ley de Lenz está relacionada con la conservación de la energía.
(d) La inductancia de un solenoide es proporcional a la variación con el tiempo de la corriente que circula por él.
(e) La densidad de energía magnética en un punto del espacio es proporcional al cuadrado del campo magnético en dicho punto.

• 81 Una barra magnética se deja caer dentro de un tubo largo vertical. Si el tubo es metálico, el imán alcanza rápidamente una velocidad límite, pero si el tubo es de cartón, no ocurre así. ¿Por qué?

• 82 Una bobina circular de radio 3,0 cm posee 6 vueltas. Un campo magnético $B = 5000$ G es perpendicular a la bobina.

(a) Determinar el flujo magnético que atraviesa la bobina.
(b) Determinar el flujo magnético a través de la bobina cuando ésta forma un ángulo de 20° con el campo magnético.

• 83 El campo magnético indicado en el problema 5 se reduce uniformemente a cero en 1,2 s. Determinar la fem inducida en la bobina cuando

(a) el campo magnético es perpendicular a la bobina y
(b) el campo magnético forma un ángulo de 20° con la normal a la bobina.

• 84 Una bobina de 100 vueltas tiene un radio de 4,0 cm y una resistencia de 25 Ω. ¿A qué velocidad deberá variar un campo magnético perpendicular a la misma para producir en ella una corriente de 4,0 A?

•• 85 La espira rectangular de un generador de corriente alterna de dimensiones a y b tiene N vueltas. Esta espira se conecta a unos anillos colectores (figura 30.48) y gira con una velocidad angular ω en el interior de un campo magnético uniforme **B**.

(a) Demostrar que la diferencia de potencial entre los dos anillos es $E = NBab\omega \operatorname{sen} \omega t$.
(b) Si $a = 1{,}0$ cm, $b = 2{,}0$ cm, $N = 1000$ y $B = 2$ T, ¿con qué frecuencia angular ω deberá hacerse girar la bobina para generar una fem cuyo máximo valor sea 110 V?

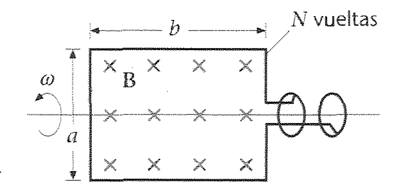


Figura 30.48 Problemas 85 y 86.

•• 86 Antes de 1960, la intensidad del campo magnético se medía con un aparato que disponía de una pequeña bobina de muchas vueltas que giraba alrededor de un eje perpendicular al campo magnético a gran velocidad y conectada a un voltímetro de c.a. por medio de anillos colectores como los que se muestran en la figura 30.48. Supongamos que esta bobina tiene 400 vueltas y un área de 1,4 cm^2. La bobina gira a razón de 180 rpm. Si la intensidad del campo magnético es 0,45 T, determinar la máxima fem inducida en la bobina y la orientación que ésta debe tener respecto al campo para que tenga lugar la fem máxima.

•• 87 Demostrar que en el caso de dos bobinas L_1 y L_2 conectadas en serie, de tal modo que ninguno de los flujos de una de ellas atraviese a la otra, la autoinducción efectiva viene dada por $L_{ef} = L_1 + L_2$.

•• 88 La bobina rectangular de la figura 30.49 posee 80 vueltas y sus dimensiones son 25 cm de anchura y 30 cm de longitud. Está localizada en un campo magnético $B = 1{,}4$ T dirigido hacia fuera de la página como se indica, ocupando sólo la mitad de la bobina en la región del campo magnético. La resistencia de la bobina es de 24 Ω. Determinar la magnitud y sentido de la corriente inducida si la bobina se mueve con una velocidad de 2 m/s

(a) hacia la derecha,
(b) hacia arriba,
(c) hacia la izquierda y
(b) hacia abajo.

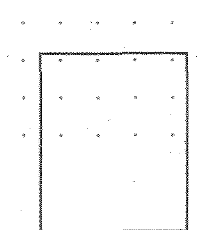


Figura 30.49 Problemas 88-90.

•• 89 Suponer que la bobina del problema 88 gira alrededor de su línea central vertical con una velocidad angular constante de 2 rad/s. Determinar la corriente inducida en función del tiempo.

•• 90 Suponer que la bobina del problema 88 gira alrededor de su línea central horizontal con una velocidad angular constante de 2 rad/s. Determinar la corriente inducida en función del tiempo.

•• 91 Demostrar que si el flujo que atraviesa cada vuelta de una bobina de N vueltas y resistencia R varía desde ϕ_{m1} hasta ϕ_{m2} la carga total que pasa por la bobina viene dada por $Q = N(\phi_{m1} - \phi_{m2})/R$.

•• 92 Demostrar que en el caso de dos bobinas L_1 y L_2 conectadas en paralelo de modo que el flujo de una de ellas no atraviese a la otra, la autoinducción efectiva viene dada por

$$\frac{1}{L_{ef}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

•• 93 Un solenoide largo posee n vueltas por unidad de longitud y transporta una corriente dada $I = I_0 \operatorname{sen} \omega t$. El solenoide tiene una sección transversal circular de radio R. Determinar el campo eléctrico inducido en un radio r medido desde el eje del solenoide para

(a) $r < R$ y
(b) $r > R$.

••• 94 Un alambre hueco de paredes delgadas de radio a tiene su eje a lo largo del eje z y transporta la corriente I en el sentido positivo de z. Un segundo alambre idéntico al anterior con su eje a lo largo de la línea $x = d$, transporta la corriente I en el sentido negativo de z.

(a) Determinar el flujo magnético por unidad de longitud que atraviesa el espacio comprendido entre los alambres en el plano xz.
(b) Si los extremos de los alambres están conectados de modo que los alambres paralelos forman dos lados de una espira, determinar la autoinducción por unidad de longitud de la espira.

••• 95 Un cable coaxial se compone de dos cilindros conductores de paredes muy delgadas cuyos radios son r_1 y r_2 (figura 30.50). La corriente I circula en un sentido por el cilindro interior y en sentido contrario por el exterior.

(a) Utilizar la ley de Ampère para hallar B y demostrar que $B = 0$ excepto en la región comprendida entre los conductores.
(b) Demostrar que la densidad de energía magnética en la región comprendida entre los cilindros es

$$u_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(c) Hallar la energía magnética de un elemento de volumen de la corteza cilíndrica de longitud ℓ y volumen $dV = \ell 2\pi r\, dr$ e integrar el resultado para demostrar que la energía magnética total en el volumen de longitud ℓ comprendido entre los cilindros es

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ell \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(d) Utilizar el resultado de la parte (c) y $U_m = \frac{1}{2}LI^2$ para demostrar que la autoinducción por unidad de longitud es

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

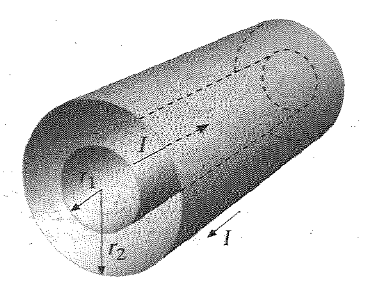


Figura 30.50 Problemas 95 y 96.

••• **96** En la figura 30.50 calcular el flujo que atraviesa un área rectangular de lados ℓ y $r_2 - r_1$ comprendida entre los conductores. Demostrar que la autoinducción por unidad de longitud puede hallarse a partir de $\phi_m = LI$ (véase parte (d) del problema 95).

••• **97** La figura 30.51 muestra una espira rectangular de alambre de 0,10 m de anchura y 1,50 m de longitud, en el plano vertical y perpendicular a un campo magnético uniforme B = 0,40 T dirigido hacia dentro como se indica. La porción de espira que no se encuentra en el campo magnético tiene 0,10 m de longitud. La resistencia de la espira es 2,0 Ω y su masa 0,50 kg. La espira se deja libre desde el reposo en el tiempo t = 0.

(a) ¿Cuál es la magnitud y sentido de la corriente inducida cuando la velocidad de la espira hacia abajo es v?
(b) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre la espira por causa de esta corriente?
(c) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la espira?
(d) Expresar la ecuación del movimiento de la espira.
(e) Deducir una expresión para la velocidad de la espira en función del tiempo.
(f) Integrar la expresión obtenida en la parte (e) para calcular el desplazamiento y en función del tiempo.
(g) Del resultado obtenido en la parte (f) calcular t para y = 1,40 m, es decir, el tiempo en que la espira deja la región del campo magnético.
(h) Determinar la velocidad de la espira en ese instante.
(i) ¿Cuál sería la velocidad de la espira después de una caída de 1,40 m si B = 0?

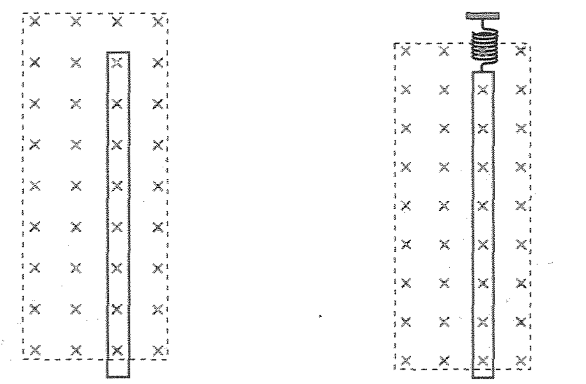


Figura 30.51 Problema 97 y 98. **Figura 30.52** Problema 98 y 99.

••• **98** La espira del problema 97 se sujeta a un muelle de plástico de constante k (figura 30.52)

(a) Cuando B = 0, el período de las oscilaciones verticales de pequeña amplitud del sistema masa-muelle es de 0,8 s. Determinar la constante del muelle k.
(b) Cuando $B \neq 0$, se induce una corriente en la espira como resultado de su movimiento arriba y abajo. Deducir una expresión para la corriente inducida en función del tiempo cuando B = 0,40 T.
(c) Demostrar que la corriente inducida actúa como un mecanismo de amortiguamiento.
(d) Determinar el valor del campo magnético para el cual el valor Q del sistema masa-muelle es 100.

••• **99** Demostrar que la inductancia efectiva de dos inductores L_1 y L_2 conectados en serie y muy próximos es $L_{ef} = L_1 + L_2 \pm 2M$. ¿Cuándo debe utilizarse en esta expresión el signo más o el menos?

www.elsolucionario.net

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
...ISTORICO NACIONAL
TEL... 425541 / 423803
Ing. PEREYRA ... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 31

Circuitos de corriente alterna

La mayor parte de las líneas de transmisión de energía eléctrica a larga distancia utilizan en la actualidad tensiones muy elevadas y corriente alterna, debido a los elevados gastos que suponían la conversión de la ca en cc en el punto de origen (que podría ser una central generadora de energía hidroeléctrica) y luego volver a transformarla en ca en los puntos de consumo. Sin embargo, con los recientes avances técnicos se ha reavivado el interés por el empleo en las líneas de transmisión de alta tensión de corriente continua. En la ilustración puede verse una estación de conversión de cc a ca cercana a Boston (Estados Unidos), estación que se encuentra enlazada por líneas de alta tensión con corriente continua a una unidad de generación hidroeléctrica situada en James, Bay, Quebec (Canadá). Esta estación concreta se utiliza para convertir corriente continua en corriente alterna.

www.elsolucionario.net

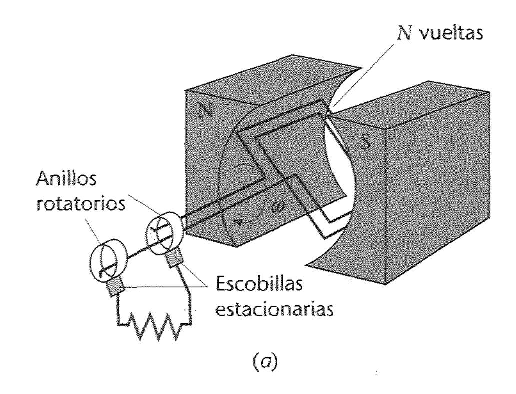
Más del 99 por ciento de la energía eléctrica utilizada hoy en día se produce mediante generadores eléctricos en forma de corriente alterna, lo cual tiene la gran ventaja sobre la corriente continua de que la energía eléctrica puede transportarse a largas distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas para reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Luego puede transformarse, con pérdidas mínimas de energía, en tensiones más bajas y seguras con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario. El funcionamiento de los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente se basa en la inducción magnética. En Norteamérica la potencia eléctrica se suministra mediante una corriente sinusoidal de 60 Hz, mientras que en prácticamente todo el resto del mundo la frecuencia es de 50 Hz. Hay otros aparatos, como las radios, los equipos de televisión y los hornos de microondas que detectan o generan corrientes alternas de frecuencias mucho más altas.

La corriente alterna se genera fácilmente mediante inducción magnética en los generadores de ca, diseñados para producir una fem sinusoidal. Veremos que, cuando es sinusoidal la salida de un generador, es también sinusoidal la corriente en un inductor, un condensador o una resistencia, aunque generalmente no esté en fase con la fem del generador. Cuando tanto la fem como la corriente son sinusoidales, pueden relacionarse fácilmente entre sí sus valores máximos. El estudio de las corrientes sinusoidales es importante porque incluso las corrientes que no lo son pueden analizarse en función de sus componentes sinusoidales utilizando el análisis de Fourier.

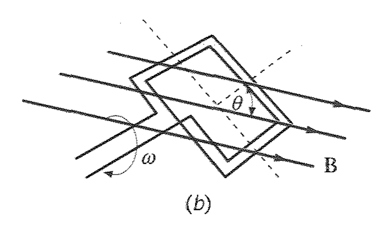
Generadores de corriente alterna ■ 31.1

La figura 31.1 muestra un **generador** simple formado por una espira de área A y N vueltas, en rotación dentro de un campo magnético uniforme. Los extremos de la espira están conectados a unos anillos deslizantes que giran con la espira. El contacto eléctrico con la espira se realiza mediante escobillas estacionarias de grafito en contacto con los anillos. Cuando la línea perpendicular al plano de la espira forma un ángulo θ con un

 www.elsolucionario.net



(a)



(b)

Figura 31.1 (a) Generador de ca. Una bobina que gira con frecuencia angular constante ω en un campo magnético B genera una fem sinusoidal. La energía procedente de un salto de agua o de una turbina de vapor se utiliza para hacer girar la bobina y producir energía eléctrica. La fem se suministra a un circuito externo mediante las escobillas en contacto con los anillos. (b) En este instante la normal al plano de la espira forma un ángulo θ con el campo magnético y el flujo es $BA \cos\theta$.

campo magnético uniforme **B**, como se indica en la figura, el flujo magnético a través de la espira es

$$\phi_m = NBA\cos\theta \qquad \textbf{(31.1)}$$

Cuando la bobina gira mecánicamente, el flujo que le atraviesa varía con el tiempo y se induce una fem. Si ω es la velocidad angular de rotación y δ el ángulo inicial, al cabo de cierto tiempo t el ángulo viene dado por

$$\theta = \omega t + \delta$$

Por tanto,

$$\phi_m = NBA\ \cos(\omega t + \delta) = NBA\ \cos(2\pi f t + \delta)$$

La fem en la bobina será, por tanto

$$\mathscr{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -NBA\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \delta) = +NBA\omega\,\text{sen}(\omega t + \delta) \qquad \textbf{(31.2)}$$

o sea,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{max}\ \text{sen}(\omega t + \delta) \qquad \textbf{(31.3)}$$

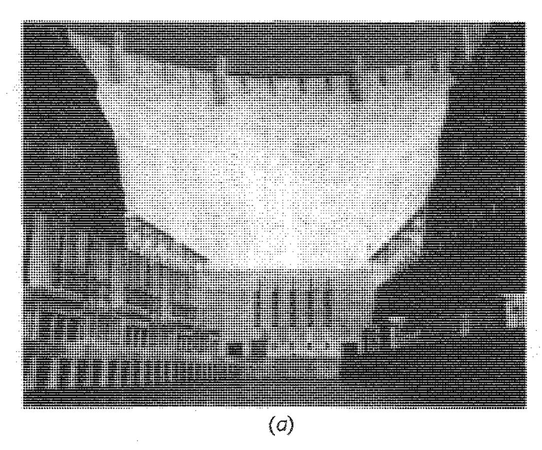
en donde,

$$\mathscr{E}_{max} = NBA\omega \qquad \textbf{(31.4)}$$

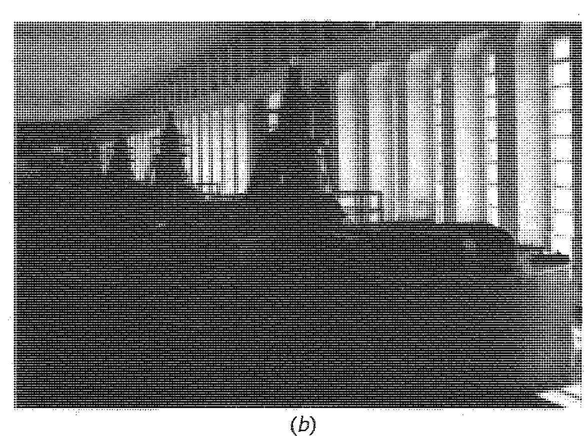
Podemos, por tanto, producir una fem sinusoidal en una bobina haciéndola girar con velocidad angular constante en un campo magnético. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, trabajan según el mismo principio que tiene lugar cuando una fem alterna se produce al girar una espira en un campo magnético y se diseñan de modo que la fem generada es sinusoidal. En los diagramas un generador de ca se representa con el símbolo ⊝.

La misma bobina que se utiliza en un campo magnético para generar una fem alterna, puede también usarse como **motor** de ca. En lugar de girar mecánicamente la bobina para generar una fem, se aplica una corriente alterna a la bobina procedente de otro generador de ca. El momento debido a la fuerza magnética actúa sobre la bobina y la hace girar. Cuando la espira gira en el campo magnético, se genera una fuerza contraelectromotriz que tiende a contrarrestar la fem que suministra la corriente. Cuando el motor se pone en marcha, no hay fuerza contraelectromotriz y la corriente es muy intensa, limitada sólo por la resistencia del circuito. Cuando el motor comienza a girar la fuerza contraelectromotriz se incrementa y la intensidad de corriente disminuye.

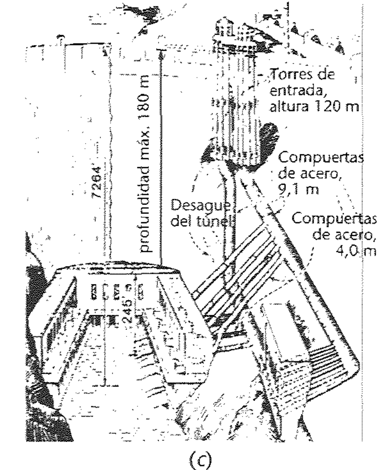
www.elsolucionario.net



(a)



(b)



(c)

(a) Vista a nivel del río de la presa de Hoover, con la vertiente de Nevada de su planta de potencia a la izquierda, y la vertiente de Arizona a la derecha. La energía mecánica del salto de agua activa las turbinas que pueden verse en (b) para la generación de electricidad. (c) Dibujo esquemático de la presa de Hoover mostrando las torres de entrada y los tubos que transportan el agua a los generadores en la parte baja.

Ejercicio Una bobina de 250 vueltas tiene un área de 3 cm^2. Si gira en un campo magnético de 0,4 T con una frecuencia de 60 Hz, ¿cuál es su $\mathcal{E}_{max}$? (*Respuesta*: $\mathcal{E}_{max}$ = 11,3 V.)

Corriente alterna en una resistencia 31.2

La figura 31.2 muestra un circuito simple de ca compuesto por un generador y una resistencia. Los signos más y menos indican respectivamente los extremos de mayor y menor potencial, y los mismos signos en la resistencia indican el sentido supuesto de la corriente. La caída de tensión a través de la resistencia V_R viene dada por

$$V_R = V_+ - V_- = IR \tag{31.5}$$

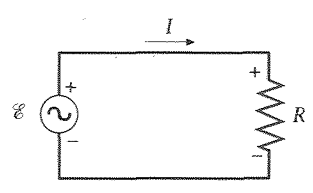


Figura 31.2 Generador de ca en serie con una resistencia *R*.

Si la fem suministrada por el generador es $\mathcal{E}$, la aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito nos da

$$\mathcal{E} - V_R = 0$$

Si el generador produce una fem dada por la ecuación 31.3, tenemos

$$\mathcal{E}_{max}\,\text{sen}(\omega t + \delta) - IR = 0$$

En esta ecuación, la constante de fase δ es arbitraria. Conviene elegir $\delta = \pi/2$, de modo que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}$ sen $(\omega t + \delta) = \mathcal{E}_{max} \cos \omega t$. Por tanto,

$$\mathcal{E}_{max} \cos\omega t - IR = 0 \tag{31.6}$$

La corriente en la resistencia es

$$I = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R}\cos\omega t = I_{max}\cos\omega t \tag{31.7}$$

en donde,

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} \tag{31.8}$$

Obsérvese que la corriente que circula por la resistencia está en fase con la tensión aplicada a la misma.

La potencia disipada en la resistencia varía con el tiempo. Su valor instantáneo es

$$P = I^2R = (I_{max}\cos\omega t)^2R = I_{max}^2R\cos^2\omega t \tag{31.9}$$

Puede verse en la figura 31.3 una representación de la potencia en función del tiempo. Varía, desde cero hasta su valor máximo $I_{max}^2 R$. Normalmente nos interesa la potencia media a lo largo de uno o más ciclos:

$$P_m = (I^2R)_m = I_{max}^2R(\cos^2\omega t)_m$$

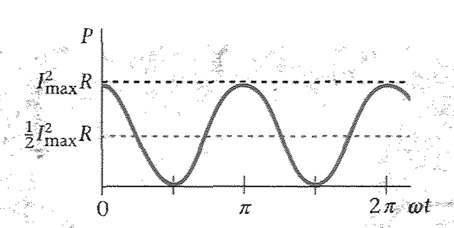


Figura 31.3 Representación gráfica de la potencia disipada en la resistencia de la figura 31.2 en función del tiempo. La potencia varía desde cero a un valor máximo I_{max}^2R. La potencia media es la mitad de la potencia máxima.

El valor medio de $\cos^2\omega t$ en uno o más períodos es $\frac{1}{2}$.[1] La potencia media disipada en la resistencia es, por tanto,

$$P_m = (I^2R)_m = \frac{1}{2}I_{max}^2R \tag{31.10}$$

[1] Esto puede verse fácilmente a partir de la identidad $\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t = 1$. La representación del $\text{sen}^2\omega t$ tiene el mismo aspecto que la del $\cos^2\omega t$, pero está desplazada en 90°. Ambas tienen el mismo valor medio en uno o más períodos y, como su suma es 1, el valor medio de cada una de ellas debe ser $\frac{1}{2}$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Valores eficaces

La mayoría de los amperímetros y voltímetros están diseñados para medir **valores eficaces** de la corriente o de la tensión en lugar de los valores máximos o de pico. Su valor es la raíz cuadrada del valor cuadrático medio respectivo. Así, el valor eficaz de una corriente es

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m} \tag{31.11}$$

Definición—Corriente eficaz

Para una corriente sinusoidal, el valor medio de I^2 es

$$(I^2)_m = [(I_{max}\cos\omega t)^2]_m = \frac{1}{2}I_{max}^2$$

Sustituyendo $\frac{1}{2}I_{max}$ en lugar de $(I^2)_m$ en la ecuación 31.11 se obtiene

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_{max} \tag{31.12}$$

Relación entre los valores máximo y eficaz de la corriente

El valor eficaz de cualquier magnitud que varía sinusoidalmente es igual al valor máximo de dicha magnitud dividida por $\sqrt{2}$.

Sustituyendo I_{ef}^2 en lugar de $\frac{1}{2}I_{max}$ en la ecuación 31.10 se obtiene para la potencia disipada en la resistencia el valor

$$P_m = I_{ef}^2R \tag{31.13}$$

La corriente eficaz es igual a la corriente continua constante que produciría el mismo calentamiento Joule que la corriente alterna disipa en la resistencia:

$$P_m = (\mathscr{E}I)_m = [(\mathscr{E}_{max}\cos\omega t)(I_{max}\cos\omega t)]_m$$
$$= \mathscr{E}_{max}I_{max}(\cos^2\omega t)_m$$

o bien,

$$P_m = \frac{1}{2}\mathscr{E}_{max}I_{max}$$

Utilizando $I_{ef} = I_{max}/\sqrt{2}$ y $\mathscr{E}_f = \mathscr{E}_{max}/\sqrt{2}$, puede escribirse así

$$P_m = \mathscr{E}_{ef}I_{ef} \tag{31.14}$$

Potencia media cedida por un generador

La corriente eficaz está relacionada con la fem eficaz de la misma forma que la corriente máxima está relacionada con la fem máxima. Puede verse esto dividiendo cada miembro de la ecuación 31.8 por $\sqrt{2}$ y utilizando $I_{ef} = I_{max}/\sqrt{2}$ y $\mathscr{E}_{ef} = \mathscr{E}_{max}/\sqrt{2}$:

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{R} \tag{31.15}$$

Las ecuaciones 31.13, 31.14 y 31.15 tienen la misma forma que las ecuaciones correspondientes a los circuitos de corriente continua, sustituyendo en estas últimas I por I_{ef} y $\mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_{ef}$. Así pues, si utilizamos valores eficaces para la corriente y la fem, podemos calcular la potencia y el calor generado empleando las mismas ecuaciones obtenidas en corriente continua.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

En el circuito de la figura 31.2 que contiene sólo un generador y una resistencia, la caída del voltaje a través de la resistencia es igual al voltaje del generador. En circuitos más complicados que contienen diversos elementos, la caída de voltaje a través de una resistencia no es normalmente igual al voltaje del generador. Por tanto, es conveniente escribir la ecuación 31.15 en función de la caída de voltaje a través de la resistencia $V_{R,\,\mathrm{ef}}$:

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{V_{R,\,\mathrm{ef}}}{R} \qquad \textbf{(31.16)}$$

Ejercicio Se conecta una resistencia de 12 Ω a una fem sinusoidal que tiene un valor de pico de 48 V. Hallar (a) la corriente eficaz, (b) la potencia media y (c) la potencia máxima. (*Respuestas*: (a) 2,83 A, (b) 96 W, (c) 192 W.)

La potencia de ca suministrada a las viviendas en los Estados Unidos tiene una frecuencia de 60 Hz y un voltaje de 120 V_{ef}.[1] Si se enchufa un calentador de 1600 W, consumirá una corriente de

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{P_{\mathrm{m}}}{\mathscr{E}_{\mathrm{ef}}} = \frac{1600\ \mathrm{W}}{120\ \mathrm{V}} = 13{,}3\ \mathrm{A}$$

La tensión en todos los enchufes se mantiene a 120 V, con independencia de la corriente que circule. Por tanto, todos los aparatos enchufados en la red están esencialmente en paralelo. De este modo, si se enchufa un tostador de 500 W en otro punto del circuito en el que está conectado el calentador, extraerá una corriente de 500 W/120 V = 4,17 A, de modo que la corriente total a través del circuito será próxima a los 17,5 A. La mayoría de los cableados de las casas están calculados para soportar unas corrientes máximas del orden de 20 A. Una corriente mayor que ésta sobrecalentará el cableado y habrá peligro de incendio. Por consiguiente, cada circuito está equipado con un interruptor automático del circuito (o un fusible en los edificios antiguos). En el caso de un circuito de 20 A, el interruptor se abre (o el fusible "salta") interrumpiéndose el circuito, cuando la corriente excede de 20 A. La carga de potencia máxima que soportará un circuito de 20 A es

$$P_{\mathrm{m}} = \mathscr{E}_{\mathrm{ef}} I_{\mathrm{ef}} = (120\ \mathrm{V})(20\ \mathrm{A}) = 2{,}4\ \mathrm{kW}$$

Puesto que la mayoría de los edificios modernos necesitan potencias considerablemente mayores que 2,4 kW, se instalan varios circuitos separados, cada uno con su interruptor independiente y con los enchufes necesarios.

EJEMPLO 31.1

Determinar (a) la corriente media y (b) la corriente eficaz para la onda en forma de diente de sierra que se muestra en la figura 31.4. En la región $0 < t < T$, la corriente viene dada por $I = (I_0/T)t$.

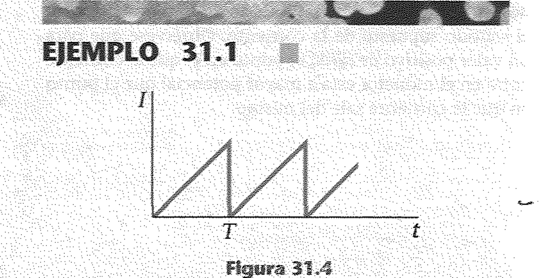


Figura 31.4

Esquema del problema El valor medio de cualquier magnitud en un intervalo de tiempo T es la integral de dicha magnitud en todo ese intervalo dividido por T. Utilizaremos esta definición tanto para la corriente media, I_{m}, como para la media de la corriente al cuadrado, $(I^2)_{\mathrm{m}}$.

(a) Calcular I_{m} integrando I de $t = 0$ a $t = T$ y dividiendo por T:

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_0}{T}\,t\,dt = \frac{I_0}{T^2}\,\frac{T^2}{2} = \frac{1}{2}\,I_0$$

[1] Para algunas aplicaciones de alta potencia, como secadores eléctricos de ropa, o estufas se utilizan líneas independientes de potencia a 240 V. Para un consumo de potencia determinado, se requiere sólo aproximadamente la mitad de corriente a 220 V que a 120 V, pero la tensión de 220 V es mucho más peligrosa que la de 120 V.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(b) 1. Determinar $(I^2)_m$ integrando I^2: $(I^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T I^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{I_0}{T}\right) t^2\, dt = \frac{I_0^2}{T^3}\frac{T^3}{3} = \frac{1}{3}I_0^2$

2. La corriente eficaz es la raíz cuadrada del resultado anterior: $I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m} = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$

31.3 ■ Corriente alterna en inductores y condensadores

El comportamiento de la corriente alterna en inductores y condensadores es muy diferente del que se tiene con corriente continua. Por ejemplo, cuando un condensador está en serie en un circuito de cc, la corriente se interrumpe por completo cuando al condensador está totalmente cargado, es decir, actúa como un circuito abierto. Pero si la corriente es alterna, la carga fluye continuamente entrando y saliendo alternativamente de las placas del condensador. Veremos que si la frecuencia de la corriente alterna es grande, un condensador casi no impide la circulación de la corriente, es decir, se comporta como un cortocircuito. Inversamente, una bobina normalmente tiene una resistencia pequeña y, por tanto, es esencialmente un cortocircuito para la corriente continua. Pero cuando la corriente que circula por la bobina está cambiando continuamente, se genera una fuerza contraelectromotriz que es proporcional al ritmo de variación de la corriente, dI/dt. Para altas frecuencias, la fuerza contraelectromotriz es grande y el inductor actúa como un circuito abierto.

■ Inductores en circuitos de ca

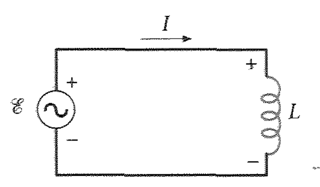


Figura 31.5 Generador de ca en serie con una bobina cuya inductancia es L. Los signos más y menos se han situado en los extremos del inductor para indicar el sentido de la caída de potencial cuando dI/dt es positiva para el sentido supuesto de la corriente. Obsérvese que para un valor positivo de dI/dt, el punto en el que la corriente entra en el inductor está a mayor potencial que el punto en que la corriente sale del mismo.

La figura 31.5 muestra una bobina inductora en serie con un generador de corriente alterna. Cuando la corriente crece en el inductor se crea en éste una fuerza contraelectromotriz de magnitud $L\, dI/dt$ debido a la variación de flujo. Usualmente esta fcem es mucho mayor que la caída IR debida a la resistencia de la bobina y por tanto, podemos despreciar esta resistencia. La caída de voltaje a través del inductor V_L viene dada entonces por

$$V_L = V_+ - V_- = L\frac{dI}{dt} \tag{31.17}$$

Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff a este circuito resulta

$$\mathcal{E} - V_L = 0$$

o sea,

$$V_L = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}\cos\,\omega t$$
$$L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_{max}\cos\,\omega t \tag{31.18}$$

Multiplicando ambos miembros por dt y dividiendo por L, se obtiene

$$dI = \frac{\mathcal{E}_{max}}{L}\cos\omega t\; dt \tag{31.19}$$

El valor de la corriente se obtiene integrando ambos miembros de esta ecuación:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{max}}{L}\int\cos\omega t\; dt = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\omega L}\,\text{sen}\;\omega t + C \tag{31.20}$$

www.elsolucionario.net

en donde la constante de integración C es el componente de cc de la corriente. Escogiendo el componente de cc de la corriente igual a cero, resulta

$$I = \frac{\mathscr{E}_{max}}{\omega L} \text{ sen } \omega t = I_{max} \text{ sen } \omega t \tag{31.21}$$

en donde,

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{\omega L} \tag{31.22}$$

La corriente $I = I_{max}$ sen ωt está desfasada 90° respecto al voltaje a través del inductor, $V_L = \mathscr{E}_{max}$ cos ωt. En la figura 31.6 que muestra I y V_L en función del tiempo, podemos ver que el valor máximo del voltaje ocurre 90° (o sea, un cuarto de período) antes que el correspondiente valor máximo de la corriente. Se dice que la caída de voltaje a través del inductor *adelanta a la corriente en 90°*. Podemos comprender ésto físicamente. Cuando I es cero, pero está creciendo, dI/dt es máximo, de modo que la fcem inducida en la bobina pasa por un valor máximo. Un cuarto de ciclo después, I es máximo. En ese momento, dI/dt es cero, de modo que V_L es cero. Usando la identidad trigonométrica sen ωt = cos $(\omega t - \pi/2)$, la ecuación 31.21 puede expresarse como

$$I = I_{max} \cos(\omega t - \pi/2) \tag{31.23}$$

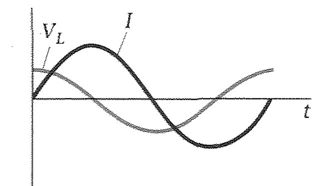


Figura 31.6 La corriente y la tensión a través de la bobina de la figura 31.5 en función del tiempo. La tensión máxima aparece un cuarto de período antes que se presente el máximo de la corriente. Así pues, se dice que la tensión adelanta a la corriente en un cuarto de período o 90°.

La relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en el caso de una bobina, puede escribirse de una forma semejante a la ecuación 31.15 correspondiente a una resistencia. Según la ecuación 31.22, tenemos

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{\omega L} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{X_L} \tag{31.24}$$

en donde,

$$X_L = \omega L \tag{31.25}$$

Definición —Reactancia inductiva

se denomina **reactancia inductiva o inductancia**. Como $I_{ef} = I_{max}/\sqrt{2}$ y $\mathscr{E}_{ef} = \mathscr{E}_{max}/\sqrt{2}$, la corriente eficaz viene dada por

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{\omega L} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{X_L} \tag{31.26}$$

Al igual que la resistencia, la reactancia inductiva tiene unidades de ohmio. Como puede verse en la ecuación 31.26, cuanto mayor sea la reactancia para una fem dada, menor es la corriente. A diferencia de la resistencia, la reactancia inductiva depende de la frecuencia de la corriente —cuanto mayor es la frecuencia, mayor es la reactancia.

La potencia instantánea cedida a la bobina por el generador es

$$P = \mathscr{E}I = (\mathscr{E}_{max} \cos\omega t)(I_{max} \text{ sen } \omega t) = \mathscr{E}_{max}I_{max} \cos\omega t \text{ sen } \omega t$$

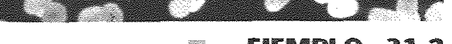
y la potencia media correspondiente es nula. Puede verse utilizando la relación

$$\cos\omega t \text{ sen } \omega t = \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2\omega t$$

El valor de este término oscila dos veces durante cada ciclo y es negativo la mitad del tiempo y positivo la otra mitad. Por tanto, la bobina no disipa ninguna energía. (Esto resulta cierto sólo si puede despreciarse la resistencia de la bobina.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



■ **EJEMPLO 31.2**

Se coloca una bobina de 40 mH conectada a un generador de ca que tiene una fem máxima de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y cuando vale (b) 2000 Hz.

Esquema del problema Calculamos la reactancia inductiva para cada frecuencia y utilizamos la ecuación 31.24 para determinar la corriente máxima.

(a) 1. La corriente máxima es igual a la fem máxima dividida por la reactancia inductiva:

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{X_L}$$

2. Calcular la reactancia inductiva a 60 Hz:

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60\text{ Hz})(40\times 10^{-3}\text{ H}) = 15{,}1\ \Omega$$

3. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente máxima a 60 Hz:

$$I_{1,max} = \frac{120\text{ V}}{15{,}1\ \Omega} = 7{,}95\text{ A}$$

(b) 1. Calcular la reactancia inductiva a 2000 Hz:

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = (2\pi)(2000\text{ Hz})(40\times 10^{-3}\text{ H}) = 503\ \Omega$$

2. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente máxima a 2000 Hz:

$$I_{2,max} = \frac{120\text{ V}}{503\ \Omega} = 0{,}239\text{ A}$$

Condensadores en circuitos de ca

Cuando un condensador se conecta entre los terminales de un generador (figura 31.7), la caída de voltaje a través del condensador es

$$V_C = V_+ - V_- = \frac{Q}{C} \qquad (31.27)$$

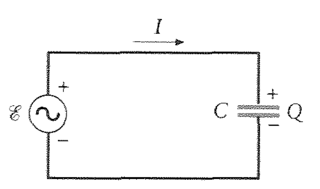


Figura 31.7 Generador de ca en serie con un condensador de capacidad *C*. Los signos más y menos sobre las placas del condensador indican una carga positiva en la placa de entrada de la corriente y una carga negativa en la placa de salida. La corriente y la carga se relacionan por $I = dQ/dt$.

Según la ley de las mallas de Kirchhoff,

$$\mathscr{E} - V_C = 0$$

o también,

$$V_C = \mathscr{E} = \mathscr{E}_{max}\cos\omega t = \frac{Q}{C}$$

Por tanto,

$$Q = \mathscr{E}_{max} C \cos\omega t$$

La corriente

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega\mathscr{E}_{max} C\,\text{sen}\,\omega t = -I_{max}\,\text{sen}\,\omega t$$

en donde

$$I_{max} = \omega\mathscr{E}_{max} C \qquad (31.28)$$

Utilizando la identidad trigonométrica sen $\omega t = -\cos(\omega t + \pi/2)$, se tiene

$$I = -\omega C\mathscr{E}_{max}\,\text{sen}\,\omega t = I_{max}\cos(\omega t + \pi/2) \qquad (31.29)$$

Como sucedía con la bobina, la corriente $I = I_{max}\cos(\omega t + \pi/2)$ no está en fase con la caída de voltaje en el condensador, $V_C = \mathscr{E}_{max}\cos\omega t$. En la figura 31.8 puede verse que el valor máximo del voltaje se presenta 90° o un cuarto de período *después* de aparecer el valor máximo de la corriente. Así pues, *la caída de tensión en un condensador está retrasada respecto a la corriente en 90°*. Es fácil, de nuevo, entender esto físicamente. La máxima

www.elsolucionario.net

variación del crecimiento de la carga $dQ/dt = I$ debe ocurrir cuando la carga Q sea nula y, por tanto, V_C sea cero ($\omega t = 3\pi/2$ en la figura 31.7). Al aumentar la carga sobre la placa del condensador, la corriente disminuye hasta que la carga es máxima (de modo que V_C es máxima) y la corriente es cero ($\omega t = 2\pi$, o sea $\omega t = 0$ en la figura 31.7). Entonces la corriente se hace negativa cuando la carga fluye en sentido opuesto saliendo del condensador.

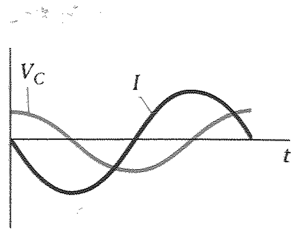


Figura 31.8 La corriente y la tensión en un condensador como el de la figura 31.7 en función del tiempo. La tensión máxima se produce un cuarto de período después de presentarse la corriente máxima. Así, se dice que la tensión retrasa respecto a la corriente en 90°.

De nuevo podemos relacionar la corriente con la fem de un modo semejante a la ecuación 31.8 correspondiente a una resistencia. Según la ecuación 31.28 se tiene

$$I_{\text{max}} = \omega C \mathscr{E}_{\text{max}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{max}}}{1/\omega C} = \frac{\mathscr{E}_{\text{max}}}{X_C}$$

y análogamente,

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ef}}}{X_C} \tag{31.30}$$

en donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{31.31}$$

Definición —Reactancia capacitiva

es la denominada **reactancia capacitiva** o **capacitancia** del circuito. Como la resistencia y la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva viene en unidades de ohmio, y al igual que la reactancia inductiva, depende de la frecuencia de la corriente. En este caso, cuanto mayor es la frecuencia, menor es la reactancia. Como sucede con una bobina, la potencia media que un generador de ca suministra a un condensador es cero. Esto se debe a que la fem es proporcional al cos ωt y la corriente lo es al sen ωt, de forma que $(\cos \omega t \operatorname{sen} \omega t)_m = 0$. Así pues, como las bobinas, los condensadores ideales no disipan energía.

Como la carga no puede pasar a través del espacio que existe entre las placas de un condensador, puede parecer extraño que aparezca una corriente alterna de forma permanente en el circuito de la figura 31.7. Consideremos un condensador inicialmente descargado aplicado a una fuente de fem, con la placa superior unida al terminal positivo. Al principio, se está introduciendo en la placa superior una carga positiva, mientras que sale la misma cantidad de la placa negativa. El efecto es el mismo que si realmente fluyese carga *a través* del espacio situado entre las placas. Si la fuente de fem es un generador de ca la carga sobre una placa y la diferencia de potencial cambia de signo cada semiperíodo. Si duplicamos la frecuencia, se duplica la cantidad de carga que entra y sale de la placa en un determinado tiempo y, por tanto, se duplica la corriente. De aquí que, cuanto mayor sea la frecuencia, menor es el impedimento que el condensador pone al flujo de cargas.

EJEMPLO 31.3

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador que tiene una fem máxima de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es 60 Hz y cuando es 5000 Hz.

Esquema del problema La reactancia capacitiva es $X_C = 1/\omega C$ y el máximo de corriente es $I_{\text{max}} = \mathscr{E}_{\text{max}}/X_C$.

1. Calcular la reactancia capacitiva a 60 Hz y a 5000 Hz:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = \frac{1}{2\pi(60\text{ Hz})(20 \times 10^{-6}\text{ F})} = 133\ \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C} = \frac{1}{2\pi(5000\text{ Hz})(20 \times 10^{-6}\text{ F})} = 1{,}59\ \Omega$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

2. Utilizar estos valores de X_C para determinar las corrientes máximas:

$$I_{1,\,\max} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{X_{C1}} = \frac{100\text{ V}}{133\ \Omega} = 0{,}752\text{ A}$$

$$I_{2,\,\max} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{X_{C2}} = \frac{100\text{ V}}{1{,}59\ \Omega} = 62{,}9\text{ A}$$

Observación La corriente crece con la frecuencia, como era de esperar.

Los circuitos de las figuras 31.5 y 31.7 contienen sólo un generador y una bobina o un condensador. En ellos, la caída de tensión a través de la bobina o del condensador es igual a la tensión del generador. En circuitos más complicados que contienen tres o más elementos, la caída de tensión a través de cada uno de ellos no es igual normalmente a la tensión del generador. Resulta útil, por tanto, escribir las ecuaciones 31.26 y 31.30 en función de la caída de tensión a través de la bobina y del condensador, respectivamente. Si $V_{L,\text{ef}}$ es la caída de tensión eficaz en una bobina, la corriente eficaz que pasa por ella es

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{L,\,\text{ef}}}{\omega L} = \frac{V_{L,\,\text{ef}}}{X_L} \tag{31.32}$$

La caída de tensión en la bobina adelanta a la corriente en 90°. Análogamente, si $V_{C,\text{ef}}$ es la tensión eficaz en las placas del condensador, la corriente eficaz en el condensador viene dada por

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{C,\,\text{ef}}}{1/\omega C} = \frac{V_{C,\,\text{ef}}}{X_C} \tag{31.33}$$

La caída de tensión en el condensador está retrasada respecto a la corriente en 90°. También pueden escribirse las ecuaciones 31.32 y 31.33 en función de las tensiones y corrientes máximas.

OPCIONAL

31.4 ■ Fasores

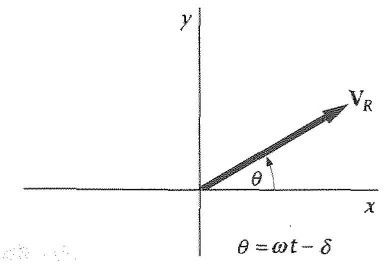


Figura 31.9 La tensión aplicada a una resistencia puede representarse mediante un vector $\mathbf{V}_R$ denominado fasor, que tiene de módulo el valor $I_{\text{máx}}R$ y que forma un ángulo $\theta = \omega t - \delta$ con el eje x. El fasor rota con una frecuencia angular ω. La tensión $V_R = IR$ es el componente x de $\mathbf{V}_R$.

Las relaciones entre la corriente y la caída de voltaje en un condensador o inductor puede representarse mediante vectores bidimensionales llamados **fasores.** En la figura 31.9 el voltaje a través de una resistencia se ha representado por un vector V_R cuyo valor o módulo es $I_{\max}R$ y que forma un ángulo θ con el eje x. Esta tensión está en fase con la corriente. En general, una corriente estacionaria en un circuito de ca varía con el tiempo como

$$I = I_{\max}\cos\theta = I_{\max}\cos(\omega t - \delta) \tag{31.34}$$

siendo ω la frecuencia angular y δ cierta constante de fase. La caída de tensión en una resistencia viene dada entonces por

$$V_R = IR = I_{\max}R\cos(\omega t - \delta) \tag{31.35}$$

El valor instantáneo de la caída de tensión en una resistencia es así igual al componente x del vector fasor $\mathbf{V}_R$, que gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω. La corriente I puede escribirse como el componente x de un fasor $\mathbf{I}$ que tenga la misma orientación que $\mathbf{V}_R$.

Cuando se conectan juntos varios componentes en un circuito en serie, sus tensiones se suman. Cuando se conectan en paralelo, sus corrientes se suman. Sumar senos y cosenos de diferentes amplitudes y fases de forma algebraica, es complicado e incómodo. Es mucho más fácil hacerlo mediante suma de vectores.

www.elsolucionario.net

Los fasores se emplean de la forma siguiente. Se escribe cualquier tensión o corriente como $A\cos(\omega t - \delta)$, que a su vez se considera como componente $x(A_x)$ de un fasor **A** que forma un ángulo $(\omega t - \delta)$ con el eje x. En lugar de sumar dos tensiones o corrientes algebraicamente como $A\cos(\omega t - \delta_1) + B\cos(\omega_t - \delta_2)$, se representan estas magnitudes como fasores **A** y **B** y se halla la suma vectorial de los fasores **C** = **A** + **B** geométricamente. La tensión o corriente resultante es entonces el componente x del fasor resultante, $C_x = A_x + B_x$. La representación geométrica muestra de forma conveniente las amplitudes y fases relativas de los fasores.

Consideremos un circuito que contiene una bobina L, un condensador C y una resistencia R, conectados en serie todos ellos. Por todos pasará la misma corriente, que se representa como el componente x del fasor de corriente **I**. La tensión en la bobina V_L se representa con un fasor $\mathbf{V}_L$ que tiene el valor $I_{max}X_L$ y que adelanta al fasor de corriente **I** en 90°. Análogamente, la tensión en el condensador V_C se representa mediante un fasor $\mathbf{V}_C$ que tiene el valor $I_{max}X_C$ y que se retrasa respecto a la corriente en 90°. En la figura 31.10 pueden verse los tres fasores $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$. Según transcurre el tiempo, los tres fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω, de modo que no varían las posiciones relativas de los vectores. En un instante cualquiera, el valor instantáneo de la caída de tensión en cualquiera de estos elementos es igual al componente x del fasor correspondiente.

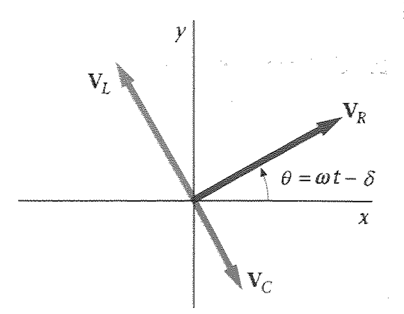


Figura 31.10 Representaciones de los fasores de las tensiones V_R, V_L y V_C. Cada vector gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω. En un instante cualquiera, la tensión aplicada a un elemento es igual al componente x del factor correspondiente y la suma de las tensiones es igual al componente x del vector suma $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$.

Circuitos *LC* y *LCR* sin generador ■ 31.5

La figura 31.11 muestra un circuito simple con inductancia y capacitancia, pero sin resistencia. Le llamaremos **circuito *LC***. Supongamos que en el condensador existe una carga inicial Q_0 y que el interruptor está abierto. Una vez cerrado el interruptor en $t = 0$, la carga empieza a circular por la bobina. En la figura se han escogido los signos de Q en el condensador y el sentido de la corriente I de forma que

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Aplicando las reglas de las mallas de Kirchhoff al circuito con los signos supuestos de Q e I, se tiene

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \textbf{(31.36)}$$

Sustituyendo I por dQ/dt resulta

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \textbf{(31.37)}$$

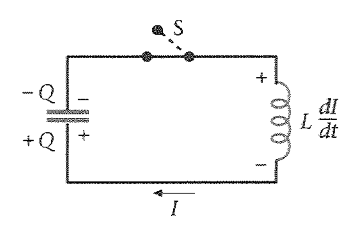


Figura 31.11 Circuito *LC*. Cuando se cierra el interruptor, el condensador inicialmente cargado se descarga a través de la bobina, produciendo una fuerza contraelectromotriz.

Esta ecuación tiene la misma forma que la correspondiente a la aceleración de una masa situada en un muelle:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

El comportamiento de un circuito *LC* es, por tanto, análogo al de una masa unida a un muelle, siendo L análogo a la masa m, Q análogo a la posición x y $1/C$ análogo a la constante del muelle k. Además la corriente I es también análoga a la velocidad v, puesto que $v = dx/dt$ e $I = dQ/dt$. En mecánica, la masa de un objeto describe la inercia del mismo. Cuanto mayor sea la masa, más difícil será cambiar la velocidad del objeto. De forma semejante, la inductancia L puede considerarse como la inercia de un circuito de ca. Cuanto más grande es la inductancia, más difícil resulta variar la corriente I.

Si dividimos por L cada término de la ecuación 31.37 y reordenamos, se tiene

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \qquad \textbf{(31.38)}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

que es análogo a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \tag{31.39}$$

en donde $\omega^2 = k/m$. En el capítulo 12, se vio que podíamos escribir la solución de la ecuación 31.39 correspondiente al movimiento armónico simple en la forma

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular, A es la amplitud y δ es la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales. Puede ponerse la ecuación 31.38 en la misma forma escribiendo ω^2 en lugar de $1/LC$. Entonces,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q \tag{31.40}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31.41}$$

La solución de la ecuación 31.40 es

$$Q = A\cos(\omega t - \delta)$$

Se halla la corriente derivando esta solución:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A \text{ sen } (\omega t - \delta)$$

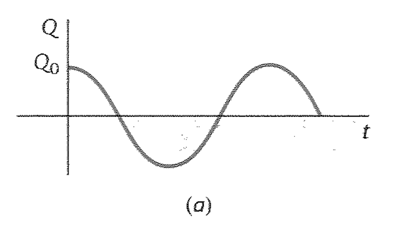
Si se escoge que las condiciones iniciales sean $Q = Q_0$ e $I = 0$ en $t = 0$, la constante de fase δ es nula y $A = Q_0$. Las soluciones son entonces

$$Q = Q_0 \cos \omega t \tag{31.42}$$

e

$$I = -\omega Q_0 \text{ sen } \omega t = -I_{max} \text{ sen } \omega t \tag{31.43}$$

en donde $I_{max} = \omega Q_0$.



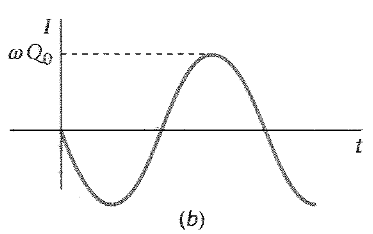


Figura 31.12 Gráficos de (*a*) Q en función de t y (*b*) I en función de t para el circuito LC de la figura 31.11.

En la figura 31.12 se han dibujado los gráficos de Q e I en función del tiempo. La carga oscila entre los valores $+Q_0$ y $-Q_0$ con frecuencia angular $\omega = \sqrt{1/LC}$. La corriente oscila entre $+\omega Q_0$ y $-\omega Q_0$ con la misma frecuencia pero desfasada 90° respecto a la carga. La corriente es máxima cuando la carga es cero, y nula cuando la carga es máxima.

En nuestro estudio de las oscilaciones de una masa unida a un muelle vimos que la energía total es constante pero que oscila entre la energía cinética y la potencial. En nuestro circuito LC, también tenemos dos clases de energía, la eléctrica y la magnética. La energía eléctrica almacenada en el condensador es

$$U_e = \tfrac{1}{2}QV_C = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Sustituyendo Q por $Q_0 \cos \omega t$ tenemos para la energía eléctrica

$$U_e = \tfrac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2 \omega t \tag{31.44}$$

Esta energía eléctrica oscila entre su valor máximo $Q_0^2/2C$ y cero. La energía magnética almacenada en la bobina es

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2 \tag{31.45}$$

www.elsolucionario.net

Sustituyendo $I = -\omega Q_0 \text{sen } \omega t$ (ecuación 31.43) resulta

$$U_m = \tfrac{1}{2} L\omega^2 Q_0^2 \text{ sen}^2 \omega t = \tfrac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \text{ sen}^2 \omega t \qquad \textbf{(31.46)}$$

en donde hemos utilizado $\omega^2 = 1/LC$. La energía magnética también oscila entre su valor máximo de $Q_0^2/2C$ y cero. La suma de las energías eléctrica y magnética es la energía total, que es constante en el tiempo:

$$U_{total} = U_e + U_m = \tfrac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2 \omega t + \tfrac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \text{ sen}^2 \omega t = \tfrac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

que es la energía almacenada inicialmente en el condensador.

OPCIONAL




EJEMPLO 31.4 ■

Se carga a 20 V un condensador de 2 μF y luego se conecta una bobina de 6 μH. (a) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? (b) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

(a) La frecuencia de la oscilación depende únicamente de los valores de la capacidad y de la inductancia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(6\times 10^{-6}\text{ H})(2\times 10^{-6}\text{ F})}} = 4{,}59 \times 10^4 \text{ Hz}$$

(b) 1. El valor máximo de la corriente está relacionado con el valor máximo de la carga:

$$I_{max} = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

2. Determinar la carga inicial sobre el condensador a partir del voltaje inicial:

$$Q_0 = CV_0 = (2\ \mu\text{F})(20\text{ V}) = 40\ \mu\text{C}$$

3. Utilizar el valor de Q_0 para calcular I_{max}:

$$I_{max} = \frac{40\ \mu\text{C}}{\sqrt{(6\ \mu\text{H})(2\ \mu\text{F})}} = 11{,}5 \text{ A}$$

Ejercicio Se carga un condensador de 5 μF y luego se descarga a través de una bobina. ¿Cuál deberá ser la inductancia de la bobina para que la corriente oscile con una frecuencia de 8 kHz? (*Respuesta*: 79,2 μH.)

Si incluimos una resistencia en serie con el condensador y la bobina, como muestra la figura 31.13 tenemos un **circuito *LCR*.** La ley de las mallas de Kirchhoff nos da

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = 0 \qquad \textbf{(31.47a)}$$

o sea,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0 \qquad \textbf{(31.47b)}$$

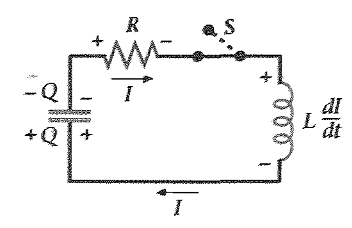


Figura 31.13 Circuito *LCR*.

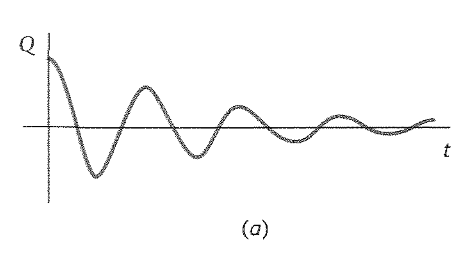
en donde hemos utilizado $I = dQ/dt$ como anteriormente. Las ecuaciones 31.47*a* y *b* son análogas a la ecuación correspondiente al oscilador armónico amortiguado (véase ecuación 14.32):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + b\frac{dx}{dt} = 0$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL



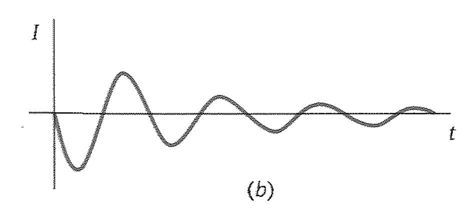


Figura 31.14 Gráficos de (*a*) Q en función de t y (*b*) I en función de t para el circuito LCR de la figura 31.13 cuando R es lo suficientemente pequeña para que las oscilaciones sean subamortiguadas.

El primer término, $L\,dI/dt = L\,d^2Q/dt^2$, es análogo a la masa multiplicada por la aceleración, $m\,dv/dt = m\,d^2x/dt^2$; el segundo, Q/C, es análogo a la fuerza restauradora kx; y el tercero, $IR = R\,dQ/dt$, es análogo al término de amortiguamiento, $bv = b\,dx/dt$. En la oscilación de una masa unida a un muelle, la constante de amortiguamiento b origina una disipación de energía mecánica en forma de calor. En un circuito LCR, la resistencia R es análoga a la constante de amortiguamiento b y produce una disipación de energía eléctrica en calor de Joule.

Si la resistencia es pequeña, la carga y la corriente oscilan con una frecuencia[1] que es muy próxima a $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (frecuencia natural del circuito), pero las oscilaciones se amortiguan; es decir, los valores máximos de la carga y de la corriente disminuyen en cada oscilación. Podemos comprender este hecho cualitativamente a partir de consideraciones energéticas. Si multiplicamos cada término de la ecuación 31.47*a* por la corriente I, se tiene

$$IL\,\frac{dI}{dt} + I\,\frac{Q}{C} + I^2R = 0 \qquad \textbf{(31.48)}$$

El primer término de esta ecuación es el producto de la corriente por la tensión que se aplica a la bobina. Equivale al ritmo con que se introduce o se extrae la energía de la bobina; es decir, es la variación por unidad de tiempo de la energía magnética, $d(\frac{1}{2}LI^2)/dt$, que es positiva o negativa según los signos de I y dI/dt sean iguales o diferentes. Análogamente, el segundo término es la corriente multiplicada por la tensión en el condensador. Este producto resulta ser la variación respecto al tiempo de la energía almacenada en el condensador, variación que puede ser positiva o negativa. El último término, I^2R, es el ritmo con que se disipa energía en la resistencia en forma de calor Joule y es siempre positivo. La suma de las energías eléctrica y magnética no es constante en este circuito porque en la resistencia se está disipando continuamente energía. En la figura 31.14 se ven los gráficos de Q en función de t y de I en función de t cuando la resistencia R es pequeña. Si se aumenta R, las oscilaciones se amortiguan cada vez más hasta que se alcanza un valor crítico de R para el que no existe ninguna oscilación. En la figura 31.15 se ve el gráfico de Q en función de t cuando el valor de R es mayor que el valor correspondiente al amortiguamiento crítico.

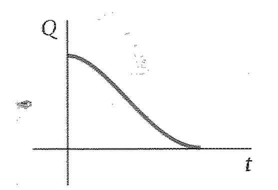


Figura 31.15 Gráfico de Q en función de t para el circuito LCR de la figura 31.14 cuando R es tan grande que las oscilaciones están sobreamortiguadas.

31.6 ■ Circuitos *LCR* con un generador

■ Circuito *LCR* en serie

La figura 31.16 muestra un circuito LCR en serie con un generador. Si la fem del generador varía con el tiempo en la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \cos \omega t$, la ley de las mallas de Kirchhoff nos da

$$\mathcal{E}_{max} \cos \omega \tau - L\,\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

Utilizando $I = dQ/dt$ y ordenando se tiene

$$L\,\frac{d^2Q}{dt^2} + R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{max} \cos\,\omega\tau \qquad \textbf{(31.49)}$$

Figura 31.16 Circuito LCR en serie con un generador de ca.

Esta ecuación es análoga a la ecuación 14.47 correspondiente a la oscilación forzada de una masa en un muelle[2]:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos\,\omega t$$

[1] Como vimos en el capítulo 14 al tratar las oscilaciones mecánicas, usualmente omitimos la palabra angular cuando su ausencia no es causa de confusión.

[2] En la ecuación 14.53 se escribió la constante de la fuerza k en función de la masa m y de la frecuencia angular natural ω_0 utilizando $k = m\omega_0^2$. En la ecuación 31.49 podría escribirse de forma semejante la capacidad en función de L y de la frecuencia natural utilizando $1/C = L\omega_0^2$.

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

Abordaremos la solución de la ecuación 31.49 cualitativamente, del mismo modo que hicimos con la ecuación 14.47 correspondiente a un oscilador forzado. La corriente en el circuito consta de una parte transitoria que depende de las condiciones iniciales (tales como la fase inicial del generador y la carga inicial del condensador) y una corriente estacionaria que es independiente de dichas condiciones. Ignoraremos la corriente transitoria que disminuye exponencialmente con el tiempo y es eventualmente despreciable y nos concentraremos en la corriente estacionaria. Esta se obtiene resolviendo la ecuación 31.49

$$I = I_{max} \cos(\omega t - \delta) \quad (31.50)$$

en donde el ángulo de fase δ viene dado por

$$\text{tg}\ \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (31.51)$$

La corriente máxima es

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{Z} \quad (31.52)$$

Corriente en un circuito serie LCR

en donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (31.53)$$

Impedancia del circuito serie LCR

La magnitud $X_L - X_C$ se denomina **reactancia total**, mientras que Z se denomina **impedancia**. Combinando estos resultados, tendremos

$$I = \frac{\mathcal{E}_{max}}{Z} \cos(\omega t - \delta) \quad (31.54)$$

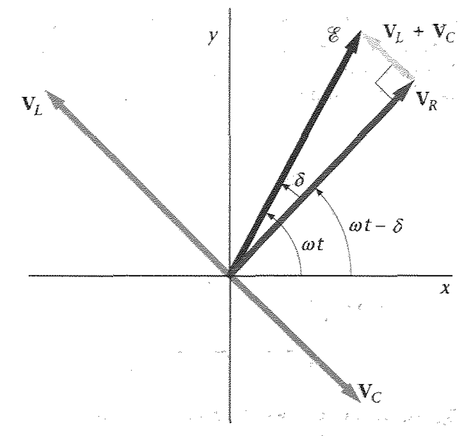


Figura 31.17 Relaciones de fase entre las tensiones de un circuito serie *LCR*. La tensión que se aplica a la resistencia está en fase con la corriente. La tensión que aparece en la bobina V_L adelanta a la corriente en 90°. La tensión en placas del condensador retrasa respecto a la corriente en 90°. La suma de los vectores que representan estas tensiones da un vector que forma un ángulo δ con la corriente y representa la fem aplicada. En el caso indicado en la figura, V_L es mayor que V_C y la corriente está retrasada en δ respecto a la fem.

También puede obtenerse la ecuación 31.54 mediante un sencillo diagrama utilizando las representaciones de los fasores. En la figura 31.17 se indican los fasores que representan las caídas de tensión en la resistencia, la bobina y el condensador. El componente x de cada uno de estos vectores es igual a la caída de tensión instantánea en el correspondiente elemento. Como la suma de los componentes x es igual al componente x de la suma de los vectores, la suma de los componentes x es igual a la suma de las caídas de tensión en todos los elementos, que según la regla de las mallas de Kirchhoff es igual a la fem instantánea.

Si representamos la fem aplicada, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \cos \omega t$, como un fasor $\mathcal{E}$ que tiene el módulo $\mathcal{E}_{max}$, tendremos

$$\mathcal{E} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C \quad (31.55)$$

En función de los módulos

$$\mathcal{E} = |\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C| = \sqrt{V_{R,max}^2 + (V_{L,max} - V_{C,max})^2}$$

Pero $V_R = I_{max}R$, $V_L = I_{max}X_L$ y $V_C = I_{max}X_C$. Así pues,

$$\mathcal{E}_{max} = I_{max}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{max}Z$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

El fasor $\mathscr{E}$ forma un ángulo δ con $\mathbf{V}_R$ como se ve en la figura 31.17. A partir de ella podemos observar que

$$\text{tg}\ \delta = \frac{|\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C|}{|\mathbf{V}_R|} = \frac{I_{max}X_L - I_{max}X_C}{I_{max}R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

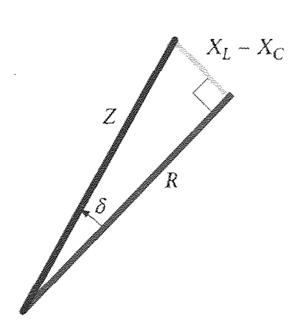


Figura 31.18 Triángulo que relaciona la reactancia capacitiva más la inductiva, la resistencia, la impedancia y el ángulo de fase en un circuito *LCR*.

de acuerdo con la ecuación 31.51. Como $\mathscr{E}$ forma un ángulo ωt con el eje x, $\mathbf{V}_R$ forma un ángulo $\omega t - \delta$ con el eje x. Esta tensión está en fase con la corriente, que por tanto vendrá dada por

$$I = I_{max}\cos(\omega t - \delta) = \frac{\mathscr{E}_{max}}{Z}\cos(\omega t - \delta)$$

Esta expresión es la ecuación 31.54. La relación entre la impedancia Z y la resistencia R y la reactancia total $X_L - X_C$ puede recordarse utilizando el triángulo rectángulo indicado en la figura 31.18.

Resonancia

Cuando son iguales X_L y X_C, la reactancia total es cero, la impedancia Z tiene su valor mínimo igual a R, e I_{max} tiene su valor máximo. Además, el ángulo de fase δ es cero, lo que significa que la corriente está en fase con la fem aplicada. El valor de ω que hace iguales a X_L y a X_C se obtiene a partir de

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

o sea,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Cuando la frecuencia del generador ω es igual a la frecuencia natural ω_0, la impedancia alcanza su valor más pequeño, I_{max} el valor más grande y el circuito se dice que está en **resonancia**. Por tanto, la frecuencia natural ω_0 se llama también **frecuencia de resonancia**. Esta condición de resonancia en un circuito *LCR* forzado es semejante a la de un oscilador armónico simple forzado.

Señalamos anteriormente que ni las bobinas ni los condensadores disipan energía. La potencia media suministrada a un circuito serie *LCR* es, por tanto, igual a la potencia media suministrada a la resistencia. La potencia instantánea que se suministra a la resistencia es

$$P = I^2R = [I_{max}\cos(\omega t - \delta)]^2R$$

Promediando sobre uno o varios ciclos y sabiendo que $(\cos^2\theta)_m = \frac{1}{2}$, obtenemos para la potencia media

$$P_m = \frac{1}{2}I_{max}^2R = I_{ef}^2R \tag{31.56}$$

En el triángulo de la figura 31.18 se tiene $R/Z = \cos\delta$ y como $I = \mathscr{E}/Z$ resulta

$$P_m = \frac{1}{2}\mathscr{E}_{max}I_{max}\cos\delta = \mathscr{E}_{ef}I_{ef}\cos\delta \tag{31.57}$$

La cantidad $\cos\delta$ se denomina **factor de potencia** del circuito *LCR*. En la resonancia, δ es cero y el factor de potencia vale 1.

La potencia también puede expresarse en función de la frecuencia angular ω. Utilizando $I_{ef} = \mathscr{E}_{ef}/Z$, la ecuación 31.56 toma la forma

$$P_m = I_{ef}^2R = \mathscr{E}_{ef}^2\frac{R}{Z^2}$$

www.elsolucionario.net

A partir de la definición de impedancia Z, tenemos

$$Z^2 = (X_L - X_C)^2 + R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2$$
$$= \frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + R^2$$
$$= \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2$$

en donde hemos utilizado $\omega_0^2 = 1/LC$. Utilizando esta expresión de Z^2, obtenemos para la potencia media en función de ω:

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{ef}^2 R\omega^2}{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \qquad \textbf{(31.58)}$$

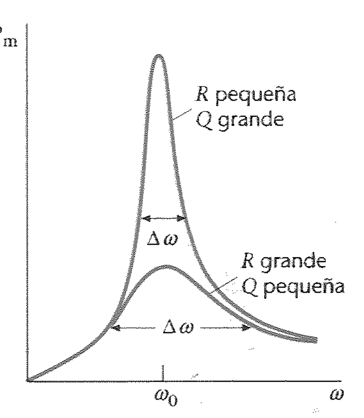


Figura 31.19 Representación gráfica de la potencia media en función de la frecuencia para un circuito *LCR*. La potencia es máxima cuando la frecuencia f del generador es igual a la frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ del circuito. Si la resistencia es pequeña, el factor Q es grande y la resonancia es aguda. Se mide la anchura $\Delta\omega$ de las curvas de resonancia entre aquellos puntos en que la potencia es la mitad de su valor máximo.

En la figura 31.19 se indica una gráfica de la potencia media suministrada por el generador al circuito en función de la frecuencia del generador para dos valores diferentes de la resistencia R. Estas curvas, denominadas **curvas de resonancia**, son las mismas que las curvas de potencia en función de la frecuencia en el caso de un oscilador amortiguado y forzado (ver sección 14.5). La potencia media es máxima cuando la frecuencia del generador es igual a la frecuencia de resonancia. Cuando la resistencia es pequeña, la curva de resonancia es estrecha; cuando es grande, la curva se ensancha. Puede caracterizarse una curva de resonancia por la **anchura de resonancia** $\Delta\omega$. Como se indica en la figura 31.19, la anchura de la resonancia es la diferencia de frecuencias entre los dos puntos de la curva en que la potencia es la mitad de su valor máximo. Cuando la anchura es pequeña en comparación con la frecuencia de resonancia, la resonancia es aguda, es decir la curva correspondiente es estrecha.

En el capítulo 14 se definió el factor Q de un oscilador mecánico por la expresión $Q = \omega_0 m/b$ (ecuación 14.39), en donde m es la masa del oscilador y b la constante de amortiguamiento. Vimos entonces que $Q = 2\pi E/|\Delta E|$ (ecuación 14.41) en donde E es la energía total del sistema y ΔE la energía perdida en un ciclo. El **factor Q** de un circuito *LCR* puede definirse de un modo semejante. Como L es análogo a la masa m y R es análogo a la constante de amortiguamiento b, el factor Q de un circuito *RLC* viene dado por

$$Q = \frac{2\pi E}{|\Delta E|} = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad \textbf{(31.59)}$$

Cuando la resonancia es razonablemente estrecha (es decir, cuando Q es mayor que 2 o 3), el factor Q puede aproximarse por

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \qquad \textbf{(31.60)}$$

Factor Q para un circuito LCR

Los circuitos resonantes se utilizan en los receptores de radio, en donde se varía la frecuencia de resonancia del circuito variando la capacidad. Se produce la resonancia cuando la frecuencia natural del circuito se iguala a una de las frecuencias de las ondas de radio recogidas por la antena. En la resonancia, aparece una corriente relativamente grande en el circuito de la antena. Si el factor Q del circuito es suficientemente alto, las corrientes debidas a las frecuencias de otras estaciones que no están en resonancia serán despreciables en comparación con la correspondiente a la frecuencia de la estación a que se ha sintonizado el circuito.

OPCIONAL

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL



EJEMPLO 31.5

Un circuito serie *LCR* con $L = 2$ H, $C = 2\ \mu$F y $R = 20\ \Omega$ está conectado a un generador de frecuencia variable y con una fem máxima de 100 V. (a) Hallar la frecuencia de resonancia f_0. (b) El valor *Q*, (c) la anchura de la resonancia Δf y (d) la corriente máxima en la resonancia.

Esquema del problema La frecuencia de resonancia se determina a partir de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y el valor *Q* de $Q = \omega_0 L/R$.

(a) La frecuencia de resonancia es $f_0 = \omega_0/2\pi$:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2\text{ H})(2\times 10^{-6}\text{ F})}} = 79{,}6\text{ Hz}$$

(b) Utilizar este resultado para calcular *Q*:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(79{,}6\text{ Hz})(2\text{ H})}{20\ \Omega} = 50$$

(c) Utilizar el valor de *Q* para determinar la anchura de la resonancia Δf:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{79{,}6\text{ Hz}}{50} = 1{,}59\text{ Hz}$$

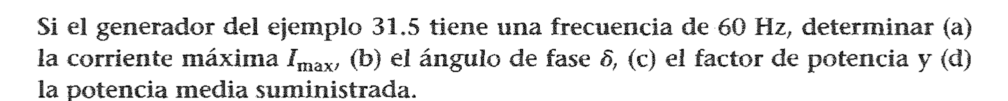
(d) En resonancia, la impedancia es justamente *R* e I_{max} es $\mathscr{E}/R$:

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{R} = \frac{100\text{ V}}{20\ \Omega} = 5\text{ A}$$

Observación La anchura de la resonancia es sólo de 1,59 Hz, valor muy pequeño comparado con la frecuencia de resonancia, 79,6 Hz, es decir, el pico de resonancia es muy agudo.



EJEMPLO 31.6
¡Inténtelo!



Si el generador del ejemplo 31.5 tiene una frecuencia de 60 Hz, determinar (a) la corriente máxima I_{max}, (b) el ángulo de fase δ, (c) el factor de potencia y (d) la potencia media suministrada.

Esquema del problema La corriente máxima es el cociente entre la fem máxima dividida por la impedancia total del circuito. El ángulo de fase δ viene dado por tg $\delta = (X_L - X_C)/R$. Para determinar la potencia media suministrada puede utilizarse la ecuación 31.56 o la 31.57.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	Respuestas
(a) 1. Expresar la corriente máxima en función de la fem máxima y la impedancia.	$I_{max} = \mathscr{E}_{max}/Z$
2. Calcular las reactancias capacitiva e inductiva y la reactancia total.	$X_C = 1326\ \Omega$, $X_L = 754\ \Omega$; $X_L - X_C = -572\ \Omega$
3. Calcular la impedancia total.	$Z \approx 572\ \Omega$
4. Utilizar los resultados de las etapas 2 y 3 para calcular I_{max}.	$I_{max} = 0{,}175$ A
(b) Utilizar los resultados de las etapas 2 y 3 para calcular tg δ. Luego determinar δ.	$\text{tg}\ \delta = \frac{X_L - X_C}{R} = -28{,}6$, $\delta = -88{,}0°$

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

(c) Utilizar el valor de δ para calcular el factor de potencia. $\cos\delta = 0{,}0349$

(d) Calcular la potencia media suministrada por la ecuación 31.56 y comprobar el resultado mediante el factor de potencia deducido en (c).

$$P_m = \frac{1}{2} I_{max}^2 R = 0{,}306 \text{ W}$$

$$P_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{max} I_{max} \cos\delta = 0{,}305 \text{ W}$$

Observaciones La ligera discrepancia en los dos cálculos de la potencia en (d) es debida al error de redondeo en la corriente.

La frecuencia del generador de 60 Hz está muy por debajo de la frecuencia de resonancia de 79,6 Hz. (Recuérdese que la anchura de la resonancia calculada en el ejemplo 31.5 es sólo de 1,59 Hz.) En consecuencia, la reactancia total es mucho mayor en magnitud que la resistencia. Esto ocurre siempre lejos de la resonancia. Igualmente, la corriente máxima de 0,175 A es muy inferior al valor I_{max} en la resonancia, que resultó ser 5 A. Finalmente en la figura 31.17 vimos que un ángulo de fase negativo significa que la corriente adelanta al voltaje del generador.

EJEMPLO 31.7 ¡Inténtelo!

Hallar las tensiones máximas en la resistencia, la bobina y el condensador para la resonancia en el caso del circuito del ejemplo 31.5.

Esquema del problema El voltaje máximo a través de la resistencia es igual al producto de I_{max} por R. De igual modo, el voltaje máximo a través de la bobina y el condensador es I_{max} por la reactancia correspondiente. En el ejemplo 31.5 se determinó que $I_{max} = 5$ A y $f_0 = 79{,}6$ Hz.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular $V_{R,max} = I_{max}R$.	$V_{R,\,max} = I_{max}R = 100$ V
2. Expresar $V_{L,max}$ en función de I_{max} y X_L.	$V_{L,\,max} = I_{max}X_L$
3. Calcular X_L en la resonancia.	$X_L = \omega_0 L = 2\pi f_0 L = 1000\ \Omega$
4. Utilizar el resultado de la etapa 3 para calcular $V_{L,max}$.	$V_{L,\,max} = I_{max}X_L = 5000$ V
5. Expresar $V_{C,max}$ en función de I_{max} y X_C.	$V_{C,\,max} = I_{max}X_C$
6. Calcular X_C en la resonancia.	$X_C = \dfrac{1}{\omega_0 C} = 1000\ \Omega$
7. Utilizar el resultado de la etapa 6 para calcular $V_{C,max}$.	$V_{C,\,max} = I_{max}X_C = 5000$ V

Observaciones Las reactancias capacitiva e inductiva son iguales, como era de esperar, puesto que se hallaba la frecuencia de resonancia al igualarlas. La figura 31.20 muestra el diagrama de fasores para los voltajes a través de la resistencia, el condensador y el inductor. El voltaje máximo aplicado a la resistencia corresponde al valor relativamente seguro de 100 V, igual a la fem máxima del generador. Sin embargo, las tensiones máximas que aparecen aplicadas a la bobina y al condensador tienen el valor peligrosamente elevado de 5000 V. Estas tensiones están desfasadas entre sí en 180°. En la resonancia, la tensión que aparece en la bobina en un instante cualquiera es el negativo de la que aparece en el condensador, de forma que su suma es siempre nula, haciendo que la tensión en la resistencia sea siempre igual a la fem instantánea del circuito.

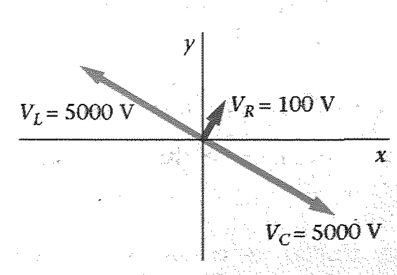


Figura 31.20

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

EJEMPLO 31.8

Figura 31.21

Una resistencia R y un condensador C se encuentran en serie con un generador, que tiene una tensión dada por $V_{ent} = V_0 \cos \omega t$, como se ve en la figura 31.21. Hallar la tensión eficaz de salida, $V_{sal,ef}$ en el condensador en función de la frecuencia ω.

Esquema del problema El voltaje eficaz a través del condensador depende de la corriente eficaz y de la reactancia capacitiva. La corriente eficaz se deduce del voltaje de entrada y de la impedancia.

1. El voltaje a través del condensador es igual al producto de I_{ef} por X_C: $\quad V_{sal,ef} = I_{ef}X_C$

2. La corriente eficaz depende del voltaje de entrada y de la impedancia: $\quad I_{ef} = \dfrac{V_{ent,ef}}{Z}$

3. En este circuito, sólo R y X_C contribuyen a la impedancia total: $\quad Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

4. Sustituir estos valores y $X_C = 1/\omega C$ para determinar el voltaje de salida:

$$V_{sal,ef} = I_{ef}X_C = \frac{V_{ent,ef}X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$= \frac{V_{ent,ef}(1/\omega C)}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{V_{ent,ef}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

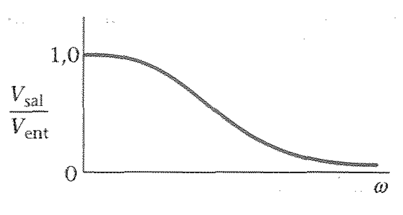


Figura 31.22

Observaciones Este circuito recibe el nombre de *filtro pasabaja RC*, porque se transmiten con mayor amplitud las frecuencias bajas de entrada que las altas. En efecto, el voltaje de salida es igual al de entrada en el límite de $\omega \to 0$, pero se aproxima a cero para $\omega \to \infty$, como muestra el gráfico de la relación voltaje de salida a voltaje de entrada en la figura 31.22.

Ejercicio Hallar el voltaje de salida para este circuito si el condensador se reemplaza por un inductor L. (*Respuesta:* $V_{sal,ef} = V_{ent,ef}\,(\omega L)/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Este circuito es un *filtro pasa-alta*.)



Una radio a bordo de un barco hacia 1920. A la izquierda del operador pueden verse las bobinas y las placas del condensador del circuito de sintonía.

www.elsolucionario.net

009197

OPCIONAL

Circuito *LCR* en paralelo

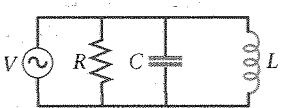
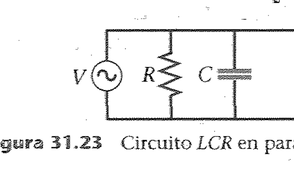
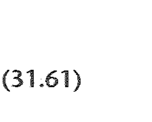



Figura 31.23 Circuito *LCR* en paralelo.

En la figura 31.23 se muestran una resistencia R, un condensador C y una bobina L conectados en paralelo a un generador de ca. La corriente total I procedente del generador se divide en tres corrientes, la I_R que pasa por la resistencia, la I_C por el condensador y la I_L por la bobina. La tensión instantánea V es la misma para los tres elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión y tiene una magnitud V/R. Como la caída de tensión que aparece en un inductor adelanta a la corriente que circula por el inductor en 90°, este último retrasa respecto a la tensión en 90° y tiene un valor de V/X_L. Análogamente, la corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90° y tiene un valor de V/X_C. Estas corrientes se han representado mediante fasores en la figura 31.24. La corriente se ve en la figura. El valor de la corriente total es

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}\right)^2} = \frac{V}{Z} \tag{31.61}$$



estando relacionada la impedancia Z con la resistencia y las reactancias capacitiva e inductiva por

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} \tag{31.62}$$

En la resonancia, la frecuencia del generador ω es igual a la frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y las reactancias inductiva y capacitiva son iguales. A partir de la ecuación 31.62, vemos entonces que $1/Z$ adquiere su valor mínimo $1/R$, de modo que la impedancia Z es máxima y la corriente total mínima. Podemos comprender este hecho observando que, en la resonancia, $X_C = X_L$ y las corrientes en la bobina y en el condensador son iguales pero con un desfase de 180°, de modo que la corriente total es precisamente sólo la corriente que pasa por la resistencia.

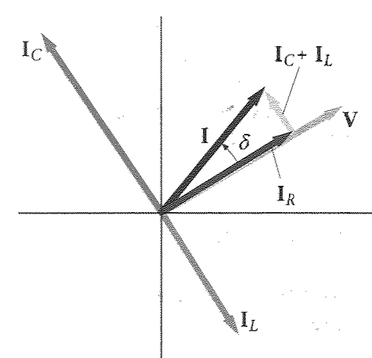


Figura 31.24 Diagrama de fasores correspondiente a la tensión y corrientes del circuito *LCR* paralelo de la figura 31.23. La tensión es la misma para todos los elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión. La corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90° mientras que la de la bobina retrasa en 90°. La diferencia de fase δ entre la corriente total y la tensión depende de los valores relativos de las intensidades o corrientes, que dependen de los valores de la resistencia y de las reactancias capacitiva e inductiva.

Transformador ■ 31.7

Un transformador es un dispositivo utilizado para elevar o disminuir el voltaje en un circuito sin una apreciable pérdida de potencia. La figura 31.25 muestra un transformador simple compuesto por dos bobinas de hilo conductor arrolladas sobre un núcleo de hierro común. La bobina que se conecta a la fuente de entrada se denomina primario y la otra, secundario. Puede utilizarse cualquiera de los dos arrollamientos de un transformador para primario o secundario. Su funcionamiento se basa en el hecho de que una corriente alterna en un circuito inducirá una fem alterna en otro circuito próximo debido a la inductancia mutua entre ambos. La función del núcleo de hierro consiste en aumentar el campo magnético creado por una corriente determinada de forma que prácticamente todo el flujo magnético que atraviese uno de los arrollamientos atraviese el otro. Si no se perdiera potencia alguna, el producto del voltaje y la corriente en el circuito secundario sería igual al producto del voltaje y la corriente en el circuito primario. Así, si el voltaje aumenta, la corriente disminuye y viceversa. Las pérdidas de potencia proceden del calentamiento por efecto Joule en las pequeñas resistencias de ambos arrollamientos o en las espiras de corriente dentro del núcleo[1] y a la histéresis que se presenta en los núcleos de hierro. Despreciaremos estas pérdidas y consideraremos un transformador ideal con un rendimiento del 100 por ciento, en el que toda la potencia suministrada al arrollamiento primario aparece en el secundario. Los transformadores comerciales suelen tener rendimientos comprendidos entre el 90 y el 95 por ciento.

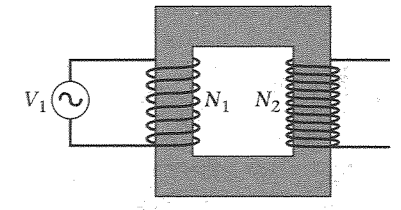


Figura 31.25 Transformador con N_1 vueltas en el primario y N_2 vueltas en el secundario.

[1] Las corrientes inducidas, llamadas corrientes turbillonarias o de Foucault, pueden reducirse grandemente utilizando un núcleo de metal laminado que "rompe" las trayectorias de estas corrientes.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

explorando la naturaleza

El uso de los números complejos para resolver circuitos *LCR*

Los métodos utilizados en el ensayo "Explorando la naturaleza. El uso de los números complejos para resolver las ecuaciones del oscilador" (capítulo 14) para el análisis de osciladores forzados se aplica igualmente bien para resolver circuitos *LCR*. Recordemos la ecuación 31.49:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C} = \mathscr{E}_{\max}\cos\omega t$$

Como estamos interesados en la corriente, escribiremos $I = dQ/dt$ y $Q = \int I\,dt$. Por tanto,

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I\,dt = \mathscr{E}_{\max}\cos\omega t \qquad \textbf{(E31.1)}$$

Obsérvese que el segundo miembro de esta ecuación es la parte real de $\mathscr{E}_{\max}e^{i\omega t}$. Para resolver la ecuación E31.1 debemos determinar la función compleja z que satisface

$$L\frac{dz}{dt}+Rz+\frac{1}{C}\int z\,dt = \mathscr{E}_{\max}e^{i\omega t} \qquad \textbf{(E31.2)}$$

La parte real de nuestra solución será la corriente I. Como se hizo en el capítulo 14, ensayaremos la solución

$$z = I_0e^{i\omega t} \qquad \textbf{(E31.3)}$$

Por tanto, $dZ/dt = i\omega z$ y $\int z\,dt = (1/i\omega)z$. Aplicando estos resultados en la ecuación E31.2 resulta

$$i\omega Lz+Rz+\frac{1}{i\omega C}z = \mathscr{E}_{\max}e^{i\omega t} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{I_0}z \qquad \textbf{(E31.4)}$$

Dividiendo ambos miembros por z y escribiendo $\omega L = X_L$ y $1/\omega C = X_C$, así como $X_C/i = -iX_C$, resulta:

$$i(X_L-X_C)+R = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{I_0} \qquad \textbf{(E31.5)}$$

Despejando I_0

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{i(X_L-X_C)+R} \qquad \textbf{(E31.6)}$$

El denominador de la ecuación 6 puede expresarse en forma polar (figura E31.1):

$$\begin{aligned} i(X_L-X_C)+R &= \sqrt{(X_L-X_C)^2+R^2}\;e^{i\delta} \\ &= Ze^{i\delta} \end{aligned} \qquad \textbf{(E31.7)}$$

en donde $Z = \sqrt{(X_L-X_C)^2+R^2}$ es la impedancia y

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{X_L-X_C}{R} \qquad \textbf{(E31.8)}$$

Por tanto,

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{Ze^{i\delta}} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{Z}e^{-i\delta}$$

y

$$z = I_0e^{i\omega t} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{Z}e^{-i\delta}e^{i\omega t} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{Z}e^{i(\omega t-\delta)}$$

La corriente viene entonces dada por

$$I = \operatorname{Re}(z) = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{Z}\cos(\omega t-\delta)$$

que coincide con la ecuación 31.54.

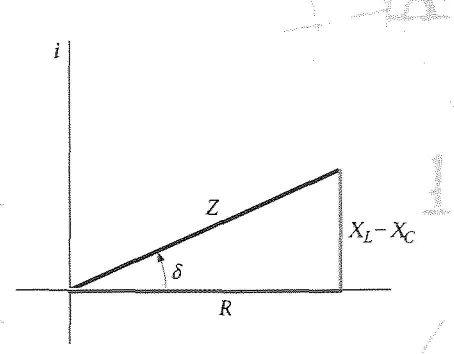


Figura E31.1 Representación polar de $i(X_L-X_C)+R$. La magnitud es $Z = \sqrt{(X_L-X_C)^2+R^2}$ y el ángulo de fase es δ.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(a) (b)

Figura E31.2 (*a*) Circuito *LCR* en serie. (*b*) Circuito análogo en cc.

Impedancias complejas

La técnica de números complejos descrita anteriormente puede extenderse a una forma generalizada de la ley de Ohm que permite tratar los problemas de ca como si se tratara de problemas de cc. Consideremos el simple circuito de cc situado junto a nuestro circuito *LCR* serie en la figura 2. En el circuito de cc, el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas de voltaje:

$$V = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

Si multiplicamos los dos miembros de la ecuación 4 por I_0/z, se obtiene

$$\mathscr{E}_{max} = I_0\left(R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right) \quad \textbf{(E31.9)}$$

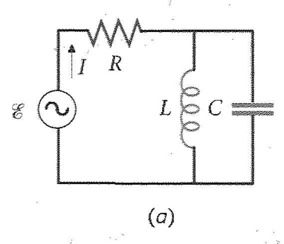
Las magnitudes R, $1/i\omega C$ e $i\omega L$ son las impedancias complejas de estos elementos del circuito. Del mismo modo que la resistencia del elemento R es el cociente entre el voltaje y la corriente, la impedancia compleja es el cociente del voltaje complejo y la corriente compleja para un elemento del circuito. Ilustraremos el uso de la impedancia compleja considerando un circuito con una bobina y un condensador en paralelo, y esta asociación conectada en serie con una resistencia como indica la figura E31.3*a*. El circuito análogo en cc se muestra en la figura E31.3*b*.

Para determinar la corriente en el circuito cc, debemos en primer lugar hallar la resistencia total, sumando R_1 a la resistencia de la asociación en paralelo de R_2 y R_3. El resultado es

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$

La impedancia total del circuito ca se determina del mismo modo:

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3} = R + \frac{(i\omega L)(1/i\omega C)}{i\omega L + 1/i\omega C}$$
$$= R + i\,\frac{L/C}{(1/\omega C) - \omega L} = R + i\,\frac{L/C}{X_C - X_L} \quad \textbf{(E31.10)}$$



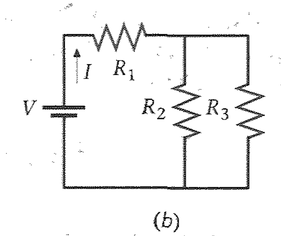


Figura E31.3 (*a*) Circuito de ca con una inductancia y una capacitancia en paralelo y esta asociación conectada en serie con una resistencia (*b*) Circuito análogo en cc.

En forma polar, la impedancia equivalente compleja es

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L/C}{X_C - X_L}\right)^2}\; e^{i\delta} \quad \textbf{(E31.11)}$$

en donde,

$$\text{tg}\ \delta = \frac{L/C}{R(X_C - X_L)} \quad \textbf{(E31.12)}$$

Si la fem viene dada por $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{max}\cos\omega t = \text{Re}\,(\mathscr{E}_{max}e^{i\omega t})$, la corriente resulta ser

$$I = \text{Re}\left(\frac{\mathscr{E}_{max}e^{i\omega t}}{Z_{eq}}\right) = I_{max}\cos(\omega t - \delta) \quad \textbf{(E31.13)}$$

en donde,

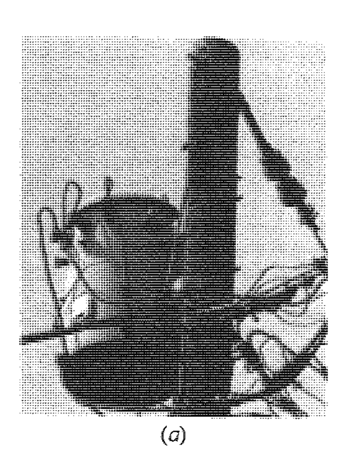
$$I_{máx} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{|Z_{eq}|} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L/C}{X_C - X_L}\right)^2}} \quad \textbf{(E31.14)}$$

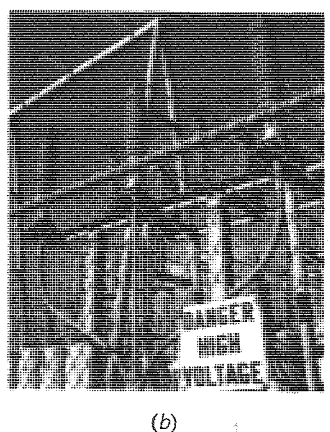
y el ángulo de fase se expresa por la ecuación E31.12. Obsérvese que la corriente se anula cuando $X_C = X_L$, es decir, a la frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$, para la cual $\omega L = 1/\omega C$. Para esta frecuencia, la combinación en paralelo es equivalente a un circuito *abierto* y no un *corto*-circuito como en la combinación en serie.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL


(*a*)



(*b*)

(*a*) Transformador cerrado que reduce la tensión hasta el valor adecuado para su distribución en las casas. (*b*) Subestación de potencia suburbana en donde los transformadores reducen la tensión procedente de las líneas de transmisión de alta tensión a valores más bajos.

Consideremos un transformador con una fem V_1 en el primario de N_1 vueltas; el arrollamiento secundario de N_2 vueltas es un circuito abierto. Debido al núcleo de hierro, existe un flujo magnético grande que atraviesa ambos arrollamientos aunque la corriente magnetizante I_m en el circuito primario sea muy pequeña. Podemos despreciar las resistencias de los arrollamientos en comparación con sus reactancias inductivas. El primario es entonces un circuito simple formado por un generador de fem alterna y una inductancia pura como el estudiado en la sección 31.2. La corriente (de magnetización) y la tensión en el primario están desfasadas entre sí en 90° y la potencia media disipada en el arrollamiento primario es cero. Si ϕ_{vuelta} es el flujo magnético que atraviesa una espira o vuelta del primario, la caída de tensión en él es $V_{L1} = N_1 d\phi_{\text{vuelta}}/dt$. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff al circuito del primario se tiene entonces

$$V_1 - N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} = 0$$

o sea

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} \qquad \textbf{(31.63)}$$

Si se considera que no existe ninguna pérdida de flujo en el núcleo de hierro, el flujo que atraviesa cada espira es el mismo en ambos arrollamientos. Así pues, el flujo total que atraviesa el arrollamiento secundario es $N_2\phi_{\text{vuelta}}$, y la tensión que aparece en dicho secundario es

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} \qquad \textbf{(31.64)}$$

Comparando estas ecuaciones, podemos ver que

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \qquad \textbf{(31.65)}$$

Si N_2 es mayor que N_1, la tensión en el secundario es mayor que la aplicada al primario y el transformador se designa como **transformador elevador** o de alta. Si N_2 es menor que N_1, la tensión en el secundario es menor que en el primario y el transformador recibe el nombre de **transformador reductor** o de baja.

Consideremos a continuación lo que ocurre cuando colocamos una resistencia R denominada **resistencia de carga** conectada al secundario. Entonces aparecerá una corriente I_2 en el circuito del secundario que estará en fase con la tensión V_2 aplicada a la resistencia. Esta corriente originará un flujo adicional ϕ'_{vuelta} a través de cada espira que es proporcional a N_2I_2. Este flujo se opone al flujo original creado por la corriente magnetizante original I_m del primario. Sin embargo, la tensión que aparece en el arrollamiento primario está determinada por la fem del generador, que no se ve afectada por el circuito secundario. De acuerdo con la ecuación 31.64, el flujo total en el núcleo de hierro debe variar al ritmo original; es decir, el flujo total en el núcleo de hierro debe ser el mismo que cuando no existía la carga en el secundario. El arrollamiento primario extrae así una corriente adicional I_1 para mantener el flujo original ϕ_{vuelta}. El flujo que atraviesa cada espira producido por esta corriente adicional es proporcional a N_1I_1. Como este flujo es igual a $-\phi_{\text{vuelta}}$, la corriente adicional I_1 en el primario está relacionada con la corriente I_2 en el secundario por

$$N_1I_1 = -N_2I_2 \qquad \textbf{(31.66)}$$

Estas corrientes están desfasadas en 180° y producen flujos que se contrarrestan. Como I_2 está en fase con V_2, la corriente adicional I_1 está en fase con la fem aplicada. La potencia procedente del generador es $V_{1,\text{ef}}\ I_{1,\text{ef}}$ y la potencia que se extrae del secundario es $V_{2,\text{ef}}I_{2,\text{ef}}$. (La corriente magnetizante no contribuye a la potencia de entrada porque está desfasada en 90° con la tensión del generador.) Si no existiesen pérdidas,

$$V_{1,\text{ef}}I_{1,\text{ef}} = V_{2,\text{ef}}I_{2,\text{ef}} \qquad \textbf{(31.67)}$$

www.elsolucionario.net

En la mayoría de los casos la corriente adicional en el primario I_1 es mucho mayor que la corriente magnetizante original I_m que se obtiene del generador cuando no hay carga. Esto puede demostrarse colocando una lámpara en serie con el primario. La lámpara brilla mucho más cuando existe una carga aplicada al secundario que cuando éste se encuentra abierto. Si puede despreciarse I_m, la ecuación 31.67 relaciona las corrientes totales que recorren los circuitos primario y secundario.



EJEMPLO 31.9

Un timbre funciona a 6 V con 0,4 A. Se conecta a un transformador cuyo primario contiene 2000 vueltas y está conectado a una ca de 120 V. (a) ¿Cuántas vueltas deberá tener el secundario? (b) ¿Cuál es la corriente en el primario?

Esquema del problema El número de vueltas del secundario se determina a partir de la relación de vueltas, igual a la relación de voltajes. La corriente del primario se deduce igualando las potencias de salida y entrada.

(a) 1. La relación de vueltas se deduce de la ecuación 31.65: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{6\text{ V}}{120\text{ V}} = \frac{1}{20}$

2. Deducir el número de vueltas en el secundario, N_2: $N_2 = \frac{1}{20}(2000\text{ vueltas}) = 100\text{ vueltas}$

(b) 1. Como suponemos que la transmisión de potencia tiene una eficacia del 100%, las corrientes de entrada y salida están relacionadas por la ecuación 31.67: $V_2 I_2 = V_1 I_1$

2. Deducir la corriente del primario, I_1: $I_1 = \frac{V_2}{V_1} I_2 = \frac{6\text{ V}}{120\text{ V}}(0{,}4\text{ A}) = 0{,}02\text{ A}$

Uno de los usos más importantes de los transformadores es el del transporte de energía eléctrica. Para reducir hasta el mínimo posible las pérdidas que en forma de calor Joule I^2R tienen lugar en las líneas de transmisión de energía, resulta más económico emplear alto voltaje y baja corriente. Por otro lado, la seguridad en su empleo y otras consideraciones, como el aislamiento, hacen necesario distribuir la energía a los consumidores a voltajes más bajos con corrientes más altas. Supóngase, por ejemplo, que cada persona de una ciudad con una población de 50 000 habitantes consume 1,2 kW de potencia eléctrica. (El consumo per capita de potencia en los Estados Unidos es realmente algo más elevado que esta cifra.) A 120 V, la corriente requerida por cada individuo sería

$$I = \frac{1200\text{ W}}{120\text{ V}} = 10\text{ A}$$

La corriente total para 50 000 personas sería entonces 500 000 A. El transporte de dicha corriente desde los generadores de una central eléctrica hasta una ciudad a muchos kilómetros de distancia requeriría conductores de tamaño enorme (en realidad, gruesos cilindros de cobre más que hilos), y la pérdida de potencia dada por I^2R sería sustancial. Así pues, en lugar de transportar la potencia a 120 V, se utilizan transformadores de alta en la central para elevar el voltaje a unos valores muy elevados, tales como 600 000 V. Así se reduce la corriente necesaria a

$$I = \frac{120\text{ V}}{600\,000\text{ V}}(500\,000\text{ A}) = 100\text{ A}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

explorando la naturaleza

Motores eléctricos

John Dentler
Academia Naval de los Estados Unidos

La gran diversidad de aplicaciones que utilizan motores eléctricos requiere que existan muchos diseños diferentes. Los motores de los relojes eléctricos deben funcionar a una velocidad precisa. Los motores de arranque de los automóviles deben proporcionar un par de arranque muy grande. Un secador de pelo portátil debe tener poco peso y funcionar con diversas velocidades. Los técnicos proyectan los motores necesarios para las diversas aplicaciones utilizando modelos que se han deducido a partir de los principios físicos estudiados en el texto. Estos modelos son ecuaciones que predicen el comportamiento de un motor para un conjunto de especificaciones o cargas prefijadas.

El motor rotatorio (figura E31.1) tiene unos conductores por los que circula corriente que reacciona con un campo externo. El campo, denominado *campo del estator*, está creado y controlado por la bobina de conductor que se ve en la parte inferior de la figura E31.1. El flujo procedente de la bobina pasa a través del núcleo, creando un polo norte a la izquierda del elemento rotatorio y un polo sur a su derecha. El conjunto rotor, llamado *armadura* está compuesto por un cilindro de hierro y ocho ranuras que contienen conductores. Si se hace circular la corriente a través de estos conductores en el sentido indicado (de adelante hacia atrás cerca del polo sur y en sentido contrario junto al polo norte), entonces se desarrollará un par de fuerzas neto en sentido horario que hará girar la armadura.

La construcción de un sistema que mantenga la dirección apropiada de la corriente en cada conductor de los que forman las espiras del rotor o armadura, es una tarea complicada. Estos dispositivos se denominan *montaje conmutador de escobillas.* Este montaje que se muestra en la figura E31.2 se compone de cuatro segmentos que sobresalen a lo largo del eje del motor y de dos escobillas que conducen la corriente desde una fuente de alimentación a los segmentos. Cada segmento está conectado a dos conductores que se encuentran alojados dentro de las ranuras del rotor. Los conductores están conectados entre sí mediante alambres situados en la parte de atrás del rotor y a través de los segmentos del conmutador en la parte delantera del rotor. Este método de conexión da como resultado que hayan dos trayectos eléctricos en paralelo entre las escobillas; de este modo se están utilizando todos los conductores durante la totalidad del tiempo.

En el conmutador indicado en la figura E31.2 la corriente entra por la escobilla de la derecha. Luego sigue uno de los trayectos en paralelo a través de la armadura. Los conductores situados en las ranuras 2 y 5 llevan la corriente desde la parte delantera hacia la trasera de la armadura. Los conductores 2 y 5 están conectados a los conductores 7 y 8 y éstos con las ranuras 3 y 4 mediante la

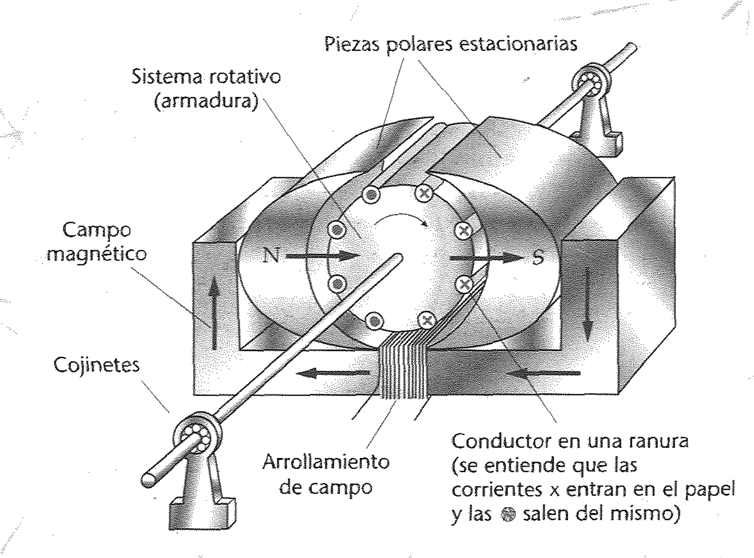


Figura E31.1 Motor eléctrico rotativo simple.

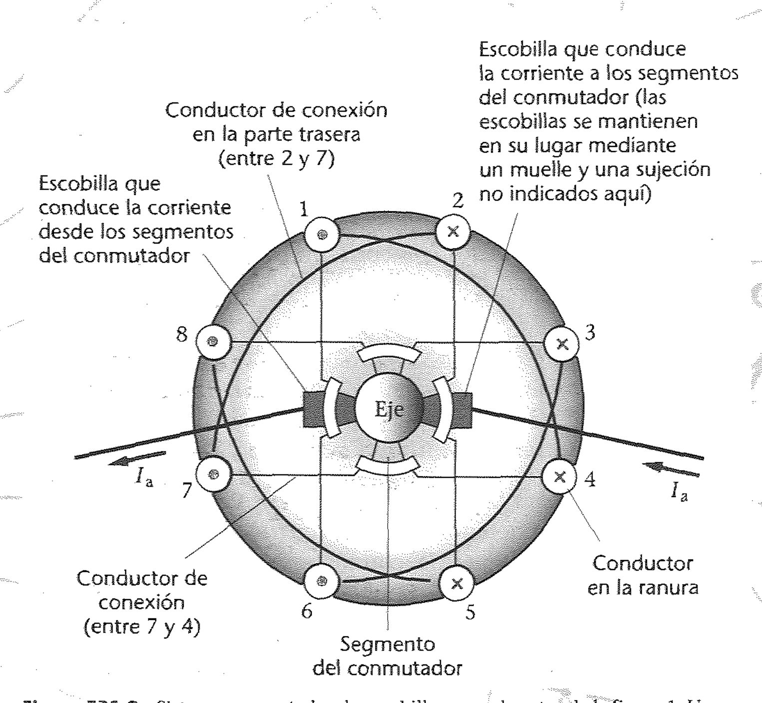


Figura E31.2 Sistema conmutador de escobillas para el motor de la figura 1. Un conmutador, en su significado más general, es un sistema de conexión y desconexión. El dispositivo indicado distribuye la corriente en la armadura para mantener el sentido del giro horario.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

conexión común que representan los segmentos del conmutador. La corriente vuelve de nuevo hacia la parte trasera a lo largo de las ranuras 3 y 4, volviendo una vez más adelante por las ranuras 1 y 6, de donde se extraen por las correspondientes escobillas situadas a la izquierda. El conjunto del conmutador gira con la armadura y se mueve bajo las escobillas. Estas son estacionarias y contactarán con diferentes segmentos del conmutador cuando la armadura haya girado 90 grados. Como la armadura posee unos arrollamientos simétricos, las ranuras situadas cada vez a la derecha harán circular siempre la corriente desde la parte delantera a la trasera del rotor, mientras que las situadas en la izquierda transportarán la corriente en sentido contrario, manteniendo así permanentemente el par en sentido horario.

El par total que hace girar el motor es la suma de los pares ejercidos por los conductores que hay en cada ranura. En cualquier posición existen cuatro conductores en la armadura que actúan en la parte derecha y otros cuatro en la izquierda; por consiguiente, el par es aproximadamente constante. Análogamente, la fem total desarrollada entre las escobillas es la suma de las fem engendradas en cada conductor. En todas las posiciones existen dos trayectos paralelos, compuesto cada uno de ellos por cuatro conductores. Según la sección 30.4 la fem desarrollada a lo largo de un solo elemento de conductor puede demostrarse que es

$$\mathcal{E} = B\ell r\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \qquad \textbf{(E31.1)}$$

en donde ℓ es la longitud de la armadura (desde la parte delantera hasta la trasera) y r es el radio del rotor. La fem total en la armadura será el promedio de la desarrollada a través de los dos trayectos paralelos descritos anteriormente. Las ranuras están separadas entre sí sólo 45 grados, de forma que la variación de la fem total en la armadura cuando ésta gira será relativamente pequeña. Por consiguiente, puede descartarse de la ecuación E31.1 el término variable con el tiempo, sen $(\omega t + \delta)$, y la fem total puede expresarse como

$$\mathcal{E}_{\text{total}} = BK\omega \qquad \textbf{(E31.2)}$$

Siendo K la denominada constante del motor, en donde se incluyen los valores de ℓ y de r y los resultados de sumar y promediar la fem total a través de la armadura. La validez de la ecuación E31.2 mejora si se añaden más ranuras y segmentos de conmutación a la armadura.

La potencia cedida a la armadura es el producto de la fem por la corriente en la armadura I_a. En el caso de un motor rotativo, la carga es un par τ aplicado al eje y que se opone al sentido de la rotación. La potencia mecánica proporcionada a la carga es el producto del par por la velocidad angular. En el equilibrio, el par motor de este dispositivo es igual al par de la carga. Así pues,

$$P = \mathcal{E}I_a = \tau\omega \qquad \textbf{(E31.3)}$$

Sustituyendo ahora la fem por su valor $BK\omega$ tomado de la ecuación E31.2 se tiene

$$P = BKI_a\omega = \tau\omega \qquad \textbf{(E31.4)}$$

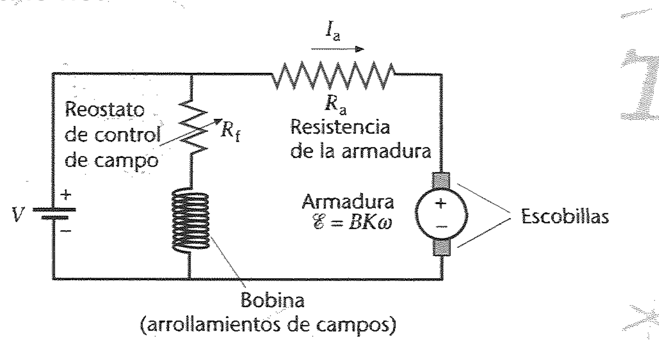


Figura E31.3 Circuito correspondiente a un motor shunt de cc típico.

La armadura puede representarse por una simple fuente de tensión o voltaje con una resistencia exterior R_a. Las conexiones del arrollamiento de campo de la bobina indicada en la parte inferior de la figura E31.1 pueden conectarse en serie o en paralelo (shunt) con la armadura. Estos dos métodos de conexión dan origen a motores con características muy diferentes.

Conexión en paralelo o shunt

En la figura E31.3 se indica el circuito correspondiente a la conexión de campo en paralelo o shunt. Se incluye una resistencia variable, denominada reostato, para controlar el campo y, por consiguiente, controlar la velocidad del motor. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito se tiene

$$V - I_a R_a - BK\omega = 0 \qquad \textbf{(E31.5)}$$

que puede reordenarse para expresar la velocidad de rotación ω en función de la corriente en la armadura I_a:

$$\omega = -\frac{R_a}{BK} I_a + \frac{V}{BK} \qquad \textbf{(E31.6)}$$

Si sustituimos la corriente por τ/BK según la ecuación E31.4, la velocidad de rotación resulta ser

$$\omega = -\frac{R_a}{(BK)^2}\tau + \frac{V}{BK} \qquad \textbf{(E31.7)}$$

La ecuación E31.7 es una ecuación lineal que relaciona la velocidad de rotación con la carga. Es análoga a la característica de funcionamiento del motor lineal. Puede controlarse la velocidad variando la tensión V, o, lo que es más frecuente, variando la corriente en la bobina con el reostato.

Cuando la corriente en la armadura es elevada, su núcleo se satura, la caída de tensión debida a la inductancia de la armadura empieza a ser significativa y la relación entre el par y la velocidad deja de ser lineal. Sin embargo, cuando las cargas son normales, la ecuación E31.7 describe exactamente el funcionamiento del motor. La figura E31.4 muestra cómo afecta la saturación de la armadura a la *característica de funcionamiento*.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

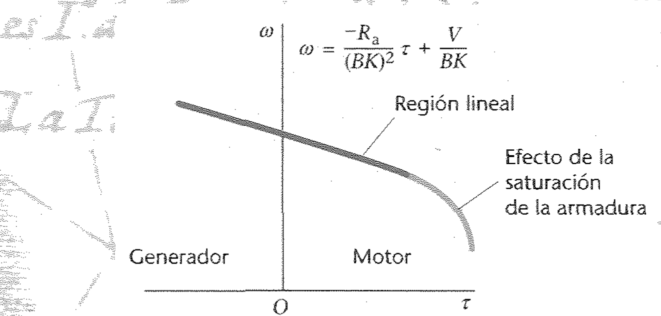


Figura E31.4 Representación gráfica del par en función de la velocidad de rotación en donde se ve la influencia de la saturación de la armadura sobre la característica de funcionamiento del motor shunt de cc típico.

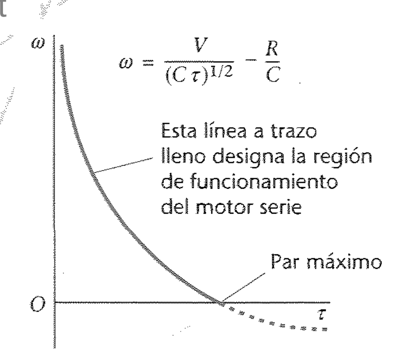


Figura E31.6 Representación gráfica del par en función de la velocidad de rotación en donde se ve la característica de funcionamiento del motor serie de cc típico.

Conexión en serie

En el circuito del motor de la figura E31.5, la bobina se conecta en serie con la armadura, de forma que la intensidad del campo es función de la corriente de la armadura.

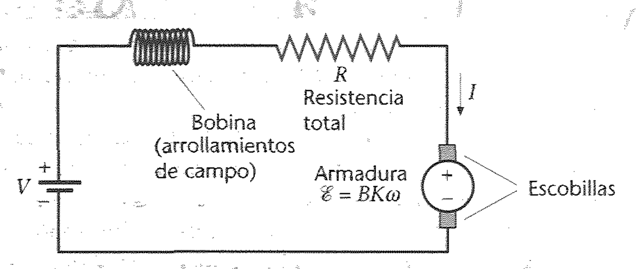


Figura E31.5 Circuito correspondiente a un motor serie de cc típico.

Si la corriente de la armadura es pequeña y el campo no se satura, puede expresarse el producto de la intensidad del campo por la constante del motor K como una función lineal de la corriente de la armadura:

$$BK = CI$$

en donde C es una cierta constante. Aplicando este valor de BK en las expresiones correspondientes a la fem de la armadura, a la potencia y al par, nos dan

$$\mathcal{E} = CI\omega P = CI^2\omega \qquad \text{y} \qquad \tau = CI^2$$

La regla de las mallas de Kirchhoff da entonces

$$V - IR - CI\omega = 0$$

en donde R representa la resistencia total de la bobina y la armadura e I representa la única corriente que circula por el circuito. Así se tiene la siguiente ecuación de la velocidad en función de la corriente:

$$\omega = \frac{V}{CI} - \frac{R}{C}$$

Sustituyendo I por $\sqrt{\tau/C}$, obtenemos la ecuación que nos da la velocidad en función del par, que es la característica de funcionamiento del motor serie:

$$\omega = \frac{V}{(C\tau)^{1/2}} - \frac{R}{C}$$

En la figura E31.6 puede verse la característica de funcionamiento del motor serie. Comparándolo con el del motor shunt se revelan notables diferencias. A pares pequeños, el motor serie gira muy de prisa, casi sin límite (la única carga es el rozamiento de los cojinetes y del aire que rodea al rotor) mientras que el motor shunt se regula para girar a una velocidad próxima a V/BK. Con pares elevados, la velocidad del motor shunt va disminuyendo hasta que el motor se detiene, mientras que el motor serie proporciona su mayor par cuando está parado. Por consiguiente, si se necesita poner en marcha un motor de automóvil, la mejor elección es el motor serie, que proporciona el alto par requerido para el arranque cuando $\omega = 0$. Por otra parte, para hacer funcionar una carga que deba ser muy sensible a la velocidad debe escogerse un motor shunt, como los que accionan las cintas magnetofónicas.

Con solo modificaciones de menor importancia, los principios de construcción y funcionamiento de los motores de cc se aplican también a los motores de ca. El par de un motor serie es proporcional a I^2 y, por ello, es independiente del sentido de la corriente. Esto se debe a que es la misma corriente la que circula para crear el campo estacionario y por la armadura rotatoria. Con esta simple consideración, podría llegarse a la conclusión de que cualquier motor serie puede funcionar con corriente alterna. Sin embargo, una de las hipótesis que hicimos para simplificar el análisis del motor de cc es que podía despreciarse la inductancia, pero esto no es así cuando se acciona un motor con una fuente de ca. La inductancia produce dos efectos: (1) actúa como un estrangulamiento limitando la cantidad de corriente de ca para una tensión de entrada determinada y (2) varía las relaciones de fase entre la tensión y la corriente.

Un motor shunt de cc normalmente tiene unos arrollamientos de campo con una resistencia elevada y una armadura con una inductancia alta. Al aplicar una corriente alterna a este tipo de motor se crearía una diferencia de fase entre las corrientes del campo y de la armadura que daría origen a un funcionamiento totalmente insatisfactorio.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Un motor serie posee un circuito magnético muy compacto con tolerancias muy pequeñas con objeto de poder desarrollar un par muy elevado con pequeñas dimensiones. Este sistema tiene una inductancia muy alta, lo que limita la corriente de ca que utiliza el motor. Un motor serie diseñado para funcionar con corriente alterna debe tener una inductancia relativamente pequeña, que se consigue limitando la cantidad de hierro utilizado en las piezas polares de la armadura. Este tipo de motor se denomina *motor universal*. Por su propia naturaleza resulta de poco peso y su empleo se ve limitado a sistemas que deban accionar cargas ligeras como las aspiradoras de polvo, las batidoras de alimentos, los secadores de cabellos y las máquinas de coser. Sus características de funcionamiento son semejantes a las del motor de cc serie indicado en la figura E31.6.

El motor de ca más común es el *motor de inducción*. Este motor tiene un sistema rotatorio como el indicado en la figura E31.1 pero a diferencia del motor de cc, el conmutador y los hilos de interconexión se sustituyen por dos placas conductoras, que conectan todos los conductores contenidos en la ranura, una de ellas montada en la parte delantera y la otra en la trasera. Este tipo de montaje simplifica mucho la construcción del rotor. El problema aparece al pretender conseguir que gire un motor en cortocircuito. La solución consiste en hacer que el campo creado por el estator aparezca en rotación. Si el campo gira, existirá una velocidad relativa entre el rotor y el campo del estator. Así se desarrolla una fem a través del rotor cortocircuitado, obligando a circular corriente por los conductores de las ranuras. El campo rotativo del estator produce un par sobre la corriente inducida en el rotor. Este se mueve de forma que reduzca todo lo posible el movimiento relativo entre él mismo y el campo. Así pues, el rotor gira casi a la misma velocidad que la de rotación del campo del estator.

Existen muchos esquemas para crear la rotación aparente de un campo. La que se indica en la figura E31.7 se conoce como el *polo conformado*. El motor es idéntico al de la figura E31.1 con la excepción de que el rotor está cortocircuitado en sus dos extremos mientras que las piezas polares del estator poseen unos cortes, enrollándose una banda conductora alrededor de las partes más pequeñas que aparecen en los polos así cortados. Esta construcción permite que se establezca rápidamente el campo magnético entre las caras de las grandes piezas polares mientras que se retrasa entre las caras pequeñas debido a las inductancias de las bandas conductoras. El retraso de fase entre el campo que aparece entre las grandes caras polares y el campo existente entre las caras polares pequeñas, crea las características de un campo rotatorio.

En la figura E31.8 se muestra la característica de funcionamiento de un motor de inducción típico. El funcionamiento normal corresponde a una velocidad próxima a la velocidad de rotación del campo. Si el motor de la figura E31.7 estuviese conectado a un fuente de 60 Hz, la velocidad de rotación sería ligeramente inferior a las 60 rev/s. El par máximo indicado sobre la curva de característica de funcionamiento se presenta allí donde la diferencia entre la velocidad del rotor y la velocidad de rotación del campo sea lo suficientemente grande como para que los efectos de la inductancia del rotor hagan retrasar de modo significativo las corrientes del rotor. Las corrientes retrasadas del rotor no pueden interaccionar con el campo del estator y así el motor deja de girar si se aumenta la carga.

Se utilizan los motores con polos conformados en aparatos con cargas ligeras como los ventiladores de refrigeración que se montan en los equipos eléctricos. Existen sistemas más complejos para crear la rotación del campo que se emplean en los motores de inducción para congeladores y acondicionadores de aire. Los grandes motores de inducción emplean electricidad trifásica para hacer girar el campo.

Pieza polar pequeña
Placa que cortocircuita los conductores en las ranuras
Conductores en las ranuras
Pieza polar grande
Campo inicial entre las piezas polares grandes
Banda que "conforma" una pieza polar pequeña
Dirección de rotación aparente del campo
Campo magnético alterno
fuente de calor
Campo retrasado que combina el de las piezas polares grandes y pequeñas

Figura E31.7 Motor de inducción con polos conformados.

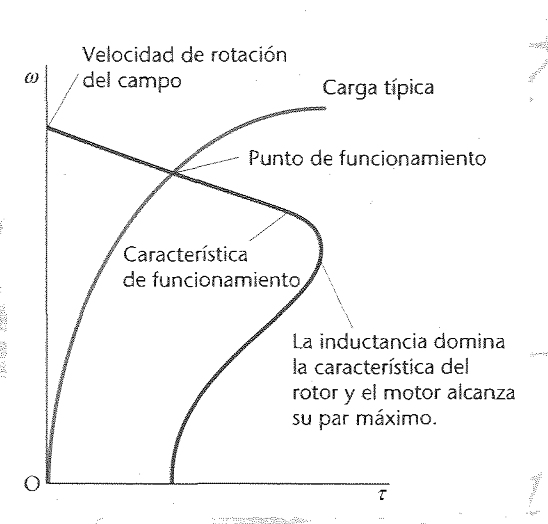


Figura E31.8 Representación gráfica del par en función de la velocidad donde se muestra la característica de funcionamiento de un motor de inducción típico. La línea de carga indicada es típica de una bomba centrífuga.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

Para reducir luego el voltaje a unos niveles más seguros durante su transporte dentro de la ciudad, se sitúan estaciones transformadoras a la entrada de la misma para bajar su valor hasta 10 000 V, por ejemplo. Luego en las proximidades de las casas se instalan nuevos transformadores que reduzcan otra vez el voltaje hasta 120 V (o 240 V) para su distribución en el interior de las mismas. Debido a esta facilidad para aumentar o disminuir el voltaje de la corriente alterna mediante transformadores, se utiliza ordinariamente este tipo de corriente y no la corriente continua.

EJEMPLO 31.10 **Una línea de transmisión de energía eléctrica tiene una resistencia de 0,02 Ω/km. Calcular la pérdida de potencia I^2R si se ha de transmitir una potencia de 200 kW desde una central generadora a una ciudad distante 10 km de aquélla a (a) 240 V y (b) 4,4 kV.**

Esquema del problema En primer lugar, consideremos que la resistencia total de 10 km de alambre es $R = (0{,}02\ \Omega/\text{km})(10\ \text{km}) = 0{,}2\ \Omega$. La corriente necesaria para transmitir 200 kW se calcula a partir de $P = IV$ y la pérdida de potencia mediante I^2R.

(a) 1. Determinar la corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 240 V: $I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{240\ \text{V}} = 833\ \text{A}$

2. Calcular la pérdida de potencia: $I^2R = (833\ \text{A})^2(0{,}2\ \Omega) = 139\,000\ \text{W}$

(b) 1. Determinar la corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 4,4 kV: $I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{4{,}4\ \text{kV}} = 45{,}5\ \text{A}$

2. Calcular la pérdida de potencia: $I^2R = (45{,}5\ \text{A})^2(0{,}2\ \Omega) = 414\ \text{W}$

Observación Con un voltaje de transmisión de 240 V casi un 70% de la potencia se disipa en pérdidas de calor, mientras que con una transmisión de 4,4 kV sólo se pierde el 0,2%. Esto ilustra la ventaja de la transmisión de potencia de alto voltaje.

www.elsolucionario.net

Resumen

1. La reactancia es una propiedad de los condensadores e inductores que depende de la frecuencia y es análoga a la resistencia eléctrica.
2. La impedancia es una propiedad dependiente de la frecuencia de un circuito de ca que es análoga a la resistencia de un circuito de cc.
3. Los fasores son vectores bidimensionales que nos permiten representar las relaciones de fase en un circuito.
4. La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia del generador es igual a la frecuencia natural del circuito oscilante.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Generador de ca	Un generador de ca es un aparato que transforma la energía mecánica en energía eléctrica. Para ello, la energía mecánica se utiliza para hacer girar una bobina conductora en un campo magnético.	
fem generada	$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}\ \text{sen}\ (\omega t + \delta) = NBA\omega\ \text{sen}\ (\omega t + \delta)$	(31.3, 31.4)

www.elsolucionario.net

2. Corriente

Corriente eficaz

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m} \qquad \textbf{(31.11)}$$

Corriente eficaz y corriente máxima

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{(31.12)}$$

En una resistencia

$$I_{ef} = \frac{V_{R,\,ef}}{R}, \text{ voltaje y corriente en fase} \qquad \textbf{(31.16)}$$

En un inductor

$$I_{ef} = \frac{V_{L,\,ef}}{\omega L} = \frac{V_{L,\,ef}}{X_L}, \text{ el voltaje adelanta a la corriente en } 90° \qquad \textbf{(31.32)}$$

En un condensador

$$I_{ef} = \frac{V_{C,\,ef}}{1/\omega C} = \frac{V_{C,\,ef}}{X_C}, \text{ el voltaje se retrasa respecto a la corriente en } 90° \qquad \textbf{(31.33)}$$

3. Reactancia

Reactancia inductiva

$$X_L = \omega L \qquad \textbf{(31.25)}$$

Reactancia capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \textbf{(31.31)}$$

4. Disipación de potencia media

En una resistencia

$$P_m = \tfrac{1}{2}\,\mathscr{E}_{max} I_{max} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} = I_{ef}^2 R \qquad \textbf{(31.13, 31.14, 31.56)}$$

En un inductor

$$P_m = 0$$

En un condensador

$$P_m = 0$$

5. Fasores

Los fasores son vectores de dos dimensiones que representan la corriente I y el voltaje a través de una resistencia $\mathbf{V}_R$, a través de un condensador $\mathbf{V}_C$ y a través de un inductor $\mathbf{V}_L$ en un circuito de ca. Estos fasores giran en sentido horario con una frecuencia angular ω que es igual a la frecuencia angular de la corriente. $\mathbf{V}_R$ está en fase con la corriente, $\mathbf{V}_L$ está adelantado respecto a la corriente en 90° y $\mathbf{V}_C$ está retrasado 90° respecto a la corriente. El componente x de cada fasor es igual a la magnitud de la corriente o a la caída correspondiente de voltaje en cualquier instante.

6. Circuitos en serie *LC* y *LCR*

Si se descarga un condensador a través de una bobina, la carga y la tensión del condensador oscilan con frecuencia angular

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \textbf{(31.41)}$$

La corriente en la bobina oscila con la misma frecuencia, pero está desfasada en 90° respecto a la carga. La energía oscila entre la energía eléctrica del condensador y la energía magnética de la bobina. Si el circuito tiene también resistencia, las oscilaciones son amortiguadas debido a que se disipa energía en la resistencia.

7. Circuitos *LCR* con un generador de frecuencia *ω*

Corriente

$$I = \frac{\mathscr{E}_{max}}{Z}\cos(\omega t - \delta) \qquad \textbf{(31.54)}$$

Impedancia Z

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \textbf{(31.53)}$$

Ángulo de fase δ

$$\text{tg}\,\delta = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \textbf{(31.51)}$$

Potencia media

$$P_m = \tfrac{1}{2} I_{max}^2 R = I_{ef}^2 R = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cos\delta$$

$$= \frac{\mathscr{E}_{max}^2 R\,\omega^2}{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \qquad \textbf{(31.56, 31.57, 31.58)}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Factor de potencia — La magnitud cos δ (ecuación 31.57) se denomina factor de potencia del circuito *LCR*. En la resonancia, δ es cero y el factor de potencia es 1. Por tanto,

$$(P_m)_{max} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef}$$

Resonancia — Cuando la corriente es máxima, se dice que el circuito está en resonancia. Las condiciones de resonancia son

$$X_L = X_C, \qquad Z = R$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\delta = 0$$

8. Factor *Q* — La agudeza de la curva de resonancia se describe mediante el factor *Q*, que se define como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \tag{31.59}$$

Cuando la curva de resonancia es razonablemente estrecha, el factor *Q* puede aproximarse por

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \tag{31.60}$$

9. Transformadores — Un transformador es un aparato utilizado para variar las tensiones y corrientes alternas sin pérdida apreciable de energía. Si un transformador tiene N_1 vueltas en el primario y N_2 en el secundario, la tensión que aparece en el arrollamiento secundario está relacionada con la fem del generador aplicado al primario por

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \tag{31.65}$$

Si no hay pérdidas,

$$V_{1,ef} I_{1,ef} = V_{2,ef} I_{2,ef} \tag{31.67}$$

Guía de resolución de problemas

1. Dibujar un esquema claro del circuito apropiado, en el que se muestren todos los elementos del circuito —condensadores, resistencias, inductores y generadores. Indicar un sentido de la corriente y especificar los extremos de mayor y menor voltaje de los elementos.
2. Si se utiliza el análisis de fasores, dibujar los vectores $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$ recordando que $\mathbf{V}_C$ está a 90° en sentido horario de $\mathbf{V}_R$, y $\mathbf{V}_L$ a 90° en sentido antihorario respecto a $\mathbf{V}_R$.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO — **PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES**

1. Corriente eficaz

Determinar la corriente media y eficaz para un intervalo de tiempo determinado. — La corriente media es

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^T I\, dt$$

La corriente eficaz es

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m}$$

en donde

$$(I^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T I^2\, dt$$

Ejemplo 31.1

www.elsolucionario.net

2. Reactancia		
Determinar la reactancia de inductores y condensadores	Utilizar $X_L = \omega L$ y $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$	**Ejemplos 31.2, 31.3**
3. Circuitos *LC* y *LCR*		
Determinar la frecuencia y la corriente máxima en un circuito *LC*.	La frecuencia de oscilación es $\omega = 1/\sqrt{LC}$ y la corriente máxima es $I_{max} = \omega Q_0$, en donde Q_0 es la carga inicial sobre el condensador.	**Ejemplo 31.4**
Analizar un circuito *LCR* con un generador	Utilizar $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $I_{max} = \mathcal{E}_{max}/Z$, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, tg $\delta = (X_L - X_C)/R$ y $Q = \omega_0 L/R$.	**Ejemplos 31.5, 31.6, 31.7, 31.8, 31.9**
4. Transformadores		
Relacionar las corrientes de los arrollamientos primario y secundario de un transformador	Las corrientes están relacionadas por $N_1 I_1 = -N_2 I_2$ en donde los subíndices 1 y 2 se refieren respectivamente a los circuitos primario y secundario.	**Ejemplo 31.10**



En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Generadores

• **1** Una bobina de 200 vueltas posee un área de 4 cm^2 y gira en un campo magnético de 0,5 T.
(a) ¿Qué frecuencia debe poseer para generar una fem máxima de 10 V?
(b) Si la bobina gira a 60 Hz, ¿cuál será su máxima fem?

• **2** ¿En qué campo magnético debe girar la bobina del problema 1 para que genere una fem de 10 V a 60 Hz?

• **3** Un arrollamiento rectangular de 2 cm por 1,5 cm posee 300 vueltas y gira en un campo magnético de 4000 G.
(a) ¿Cuál es la fem máxima generada cuando la bobina gira con una frecuencia de 60 Hz?
(b) ¿Cuál debe ser su frecuencia para generar una fem máxima de 110 V?

• **4** La bobina del problema 3 gira a 60 Hz en un campo magnético B. ¿Qué valor de B engendraría una fem máxima de 24 V?

Corriente alterna en una resistencia

• **5** Cuando la frecuencia del circuito simple de ca de la figura 31.26 crece, la corriente eficaz que circula por la resistencia
(a) crece
(b) no cambia
(c) puede aumentar o disminuir según la magnitud de la frecuencia original.
(d) puede aumentar o disminuir según la magnitud de la resistencia.
(e) disminuye.

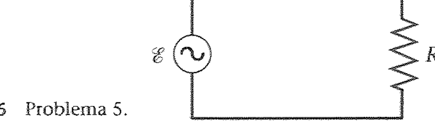


Figura 31.26 Problema 5.

• **6** Si el voltaje eficaz de un circuito de ca se duplica, el voltaje máximo
(a) se duplica
(b) se reduce a la mitad
(c) crece en un factor $\sqrt{2}$
(d) disminuye en un factor $\sqrt{2}$
(e) no cambia

• **7** Una bombilla de 100 W se conecta a un enchufe de 120 V eficaces. Calcular
(a) I_{ef} **(b)** I_{max}, y **(c)** la potencia máxima.

• **8** Una resistencia de 3 Ω se coloca en serie con un generador de 12,0 V (máximo) de 60 Hz de frecuencia.
(a) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de la corriente?
(b) Hallar I_{max} e I_{ef}.
Determinar
(c) la potencia máxima debida a la resistencia,
(d) la potencia mínima y
(e) la potencia media?

• **9** Un interruptor de un circuito debe saltar a 15 A eficaces con una tensión de 120 V eficaces.
(a) ¿Cuál es el mayor valor de I_{max} que podrá soportar el interruptor?
(b) ¿Qué potencia media podrá suministrar el circuito en cuestión?

Corriente alterna en inductores y condensadores

• **10** Si la frecuencia de la corriente alterna del circuito de la figura 31.27 se duplica, la inductancia de la bobina
(a) se multiplica por 2.
(b) no cambia.
(c) se divide por 2.
(d) se multiplica por 4.
(e) se divide por 4.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

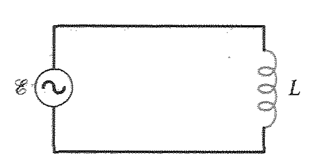


Figura 31.27 Problemas 10 y 11.

• **11** Si la frecuencia de la corriente alterna del circuito de la figura 31.27 se duplica, la reactancia inductiva de la bobina

(a) se multiplica por 2.
(b) no cambia
(c) se divide por 2.
(d) se multiplica por 4
(e) se divide por 4.

• **12** Si la frecuencia de la corriente alterna del circuito de la figura 31.28 se duplica, la reactancia capacitiva del circuito

(a) se multiplica por 2.
(b) no cambia
(c) se divide por 2
(d) se multiplica por 4
(e) se divide por 4.

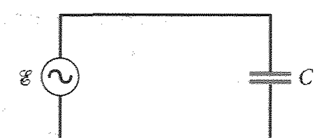


Figura 31.28 Problema 12.

• **13** En un circuito constituido por un generador y una bobina, ¿existe algún momento en que la bobina absorbe energía del generador? ¿Existe algún momento en que la bobina suministra energía al generador?

• **14** En un circuito formado por un generador y un condensador, ¿existe algún momento en que el condensador absorbe energía del generador? ¿Existe algún momento en que el condensador suministra energía al generador?

• **15** ¿Cuál es la reactancia de una bobina de 1,0 mH a
(a) 60 Hz, (b) 600 Hz y (c) 6 kHz?

• **16** Una bobina tiene una reactancia de 100 Ω a 80 Hz.
(a) ¿Cuál es su inductancia?
(b) ¿Cuál es su reactancia a 160 Hz?

• **17** ¿A qué frecuencia será la reactancia de un condensador de 10,0 μF igual a la de una bobina de 1,0 mH?

• **18** ¿Cuál es la reactancia de un condensador de 1,0 nF a
(a) 60 Hz, (b) 6 kHz, y (c) 6 MHz?

• **19** Una fem de 10,0 V de valor máximo y una frecuencia de 20 Hz se aplica a un condensador de 20 μF. Calcular
(a) I_{max} y (b) I_{ef}.

• **20** ¿A qué frecuencia es la reactancia de un condensador de 10 μF
(a) 1 Ω, (b) 100 Ω y (c) 0,01 Ω?

Fasores (opcional)

• **21** Dibujar el diagrama de fasores resultante para un circuito *LCR* serie cuando $V_L < V_C$. Demostrar con dicho diagrama que la fem retrasará respecto a la corriente en un ángulo de fase δ dado por

$$\text{tg}\ \delta = \frac{V_C - V_L}{V_R}$$

•• **22** Dos fuentes de tensión de ca se conectan en serie con una resistencia $R = 25\ \Omega$. Una fuente viene dada por $V_1 = (5{,}0\ \text{V})\cos(\omega t - \alpha)$ y la otra por $V_2 = (5{,}0\ \text{V})\cos(\omega t + \alpha)$, siendo $\alpha = \pi/6$.
(a) Hallar la corriente que pasa por *R* utilizando la identidad trigonométrica correspondiente a la suma de dos cosenos.
(b) Utilizar diagramas de fasores para hallar la corriente en *R*.
(c) Hallar la corriente en *R* si $\alpha = \pi/4$ y la amplitud de V_2 se aumenta de 5,0 V a 7,0 V.

Circuitos *LC* y *LCR* sin generador (opcional)

• **23** Las unidades del producto inductancia por capacitancia son
(a) segundos al cuadrado
(b) hertz
(c) voltios
(d) amperios
(e) ohmios

•• **24** Preparar circuitos *LC* con frecuencia de oscilación de millares de hertz es fácil, pero preparar circuitos *LC* de frecuencias pequeñas es difícil. ¿Por qué?

• **25** Demostrar partiendo de las definiciones del henrio y del faradio que $1/\sqrt{LC}$ tiene unidades de s^{-1}.

• **26**
(a) ¿Cuál es el período de oscilación de un circuito *LC* compuesto por una bobina de 2 mH y un condensador de 20 μF?
(b) ¿Qué inductancia se necesita junto a un condensador de 80 μF para construir un circuito *LC* que oscile con una frecuencia de 60 Hz?

•• **27** Un circuito *LC* tiene una capacidad C_1 y una bobina de inductancia L_1. Un segundo circuito tiene $C_2 = \frac{1}{2}C_1$ y $L_2 = 2L_1$, y un tercer circuito tiene $C_3 = 2C_1$ y $L_3 = \frac{1}{2}L_1$.
(a) Demostrar que los tres circuitos oscilan con la misma frecuencia.
(b) ¿En qué circuito será más elevada la corriente máxima si la capacidad correspondiente se carga siempre al mismo potencial *V*?

•• **28** Se carga a 30 V un condensador de 5 μF y luego se conecta a una bobina de 10 mH.
(a) ¿Cuánta energía se almacena en el circuito?
(b) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del circuito?
(c) ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito?

Circuitos *LR* con un generador (opcional)

• **29** Una bobina puede considerarse como una resistencia y una inductancia en serie. Suponer que $R = 100\ \Omega$ y $L = 0{,}4$ H. La bobina se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. Hallar
(a) el factor de potencia,
(b) la corriente eficaz y
(c) la potencia media suministrada.

•• **30** Se conectan en serie a una tensión de ca de 60 Hz una resistencia *R* y una bobina de 1,4 H. La tensión en la resistencia es 30 V y en la bobina 40 V.
(a) ¿Cuanto vale la resistencia *R*?
(b) ¿Cuál es la tensión de entrada de la ca?

•• **31** Una bobina tiene una resistencia en cc de 80 Ω y una impedancia de 200 Ω a una frecuencia de 1 kHz. Se puede despreciar la capacidad del arrollamiento de la bobina a esta frecuencia. ¿Cuál es la inductancia de la bobina?

•• **32** Una línea de transmisión simple transporta dos señales de tensión dadas por $V_1 = (10\ \text{V})\cos 100t$ y $V_2 = (10\ \text{V})\cos 10\,000t$, en donde

www.elsolucionario.net

t se expresa en segundos. Se incluyen en la línea una bobina en serie de 1 H y una resistencia en paralelo de 1 kΩ, como se indica en la figura 31.29.

(a) ¿Cuál es la señal de tensión observada en el terminal de salida de la línea de transmisión?
(b) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud de baja frecuencia y la amplitud de alta frecuencia?

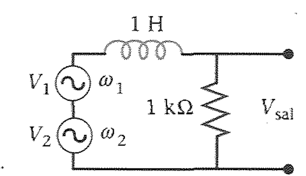


Figura 31.29 Problema 32.

•• **33** Una bobina con resistencia e inductancia se conectan a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces. La potencia media suministrada a la bobina es 60 W y la corriente eficaz es 1,5 A. Hallar

(a) el factor de potencia,
(b) la resistencia de la bobina y
(c) la inductancia de la bobina.
(d) ¿Adelanta o retrasa la corriente a la tensión? ¿Cuál es el ángulo de fase δ?

•• **34** Un inductor de 36 mH y cuya resistencia es de 40 Ω se conecta a una fuente de voltaje $\mathcal{E} = (345\ \text{V}) \cos (150\ \pi t)$, donde t está en segundos. Determinar la corriente máxima del circuito, el voltaje máximo y el voltaje eficaz a través del inductor, la disipación de potencia media y las energías máxima y media almacenadas en el campo magnético del inductor.

•• **35** Una bobina de resistencia R, inductancia L y capacidad despreciable tiene un factor de potencia de 0,866 a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es el factor de potencia para una frecuencia de 240 Hz?

•• **36** Una resistencia y una bobina están en paralelo aplicadas a una fem $E = E_{max} \cos \omega t$, como muestra la figura 31.30. Demostrar que

(a) $I_R = (\mathcal{E}_{max}/R) \cos \omega t$,
(b) $I_L = (\mathcal{E}_{max}/X_L) \cos (\omega t - 90°)$ y
(c) $I = I_R + I_L = I_{max} \cos (\omega t - \delta)$, siendo tg $\delta = R/X_L$ e $I_{max} = \mathcal{E}_{max}/Z$ con $Z^{-2} = R^{-2} + X_L^{-2}$.

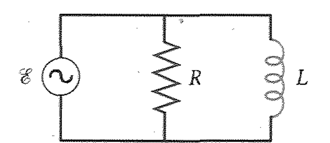


Figura 31.30 Problema 36.

•• **37** La figura 31.31 muestra una resistencia de carga $R_L = 20\ \Omega$ conectada a un filtro de pasa-alta formado por un inductor $L = 3{,}2$ mH y una resistencia $R = 4\ \Omega$. El voltaje de entrada es $\mathcal{E} = (100\ \text{V}) \cos (2\pi ft)$. Determinar las intensidades de corriente eficaces en R, L y R_L si

(a) $f = 500$ Hz y
(b) $f = 2000$ Hz.
(c) ¿Qué fracción de la potencia suministrada por la fuente de voltaje se disipa en la resistencia de carga si la frecuencia es de 500 Hz y si la frecuencia es de 2000 Hz?

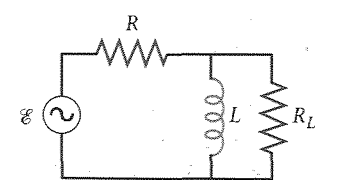


Figura 31.31 Problemas 37 y 96.

•• **38** Una fuente de ca $\mathcal{E}_1 = (20\ \text{V}) \cos (2\pi ft)$ en serie con una batería $\mathcal{E}_2 = 16$ V está conectada a un circuito formado por las resistencias $R_1 = 10\ \Omega$ y $R_2 = 8\ \Omega$ y un inductor $L = 6$ mH (figura 31.32). Determinar la potencia disipada en R_1 y R_2 si

(a) $f = 100$ Hz, (b) $f = 200$ Hz y (c) $f = 800$ Hz.

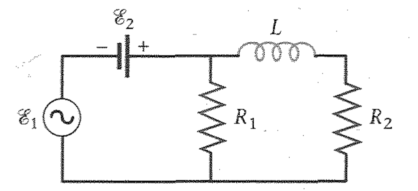


Figura 31.32 Problema 38.

Circuitos *RC* y *RL* con un generador (opcional)

•• **39** Se aplica una tensión de 100 V eficaces a un circuito RC serie. La tensión en placas del condensador es 80 V, ¿cuál es la tensión eficaz aplicada a la resistencia?

•• **40** El circuito indicado en la figura 31.33 se denomina filtro pasa alta RC porque las frecuencias de entrada elevadas se transmiten con una amplitud mayor que las frecuencias bajas.

(a) Si la tensión de entrada es $V_{ent} = V_0 \cos \omega t$, demostrar que la tensión de salida vale

$$V_{sal} = \frac{V_0}{\sqrt{(1/\omega RC)^2 + 1}}$$

(b) ¿A qué frecuencia angular la tensión de salida es la mitad que la de entrada?
(c) Dibujar un gráfico de V_{sal}/V_0 en función de ω.

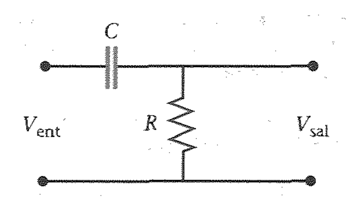


Figura 31.33 Problema 40.

•• **41** Por una bobina circulan 15 A cuando se conecta a una línea de 220 V de ca y 60 Hz. Cuando se pone en serie con una resistencia de 4 Ω y se conecta la combinación a una batería de 100 V, se observa que la corriente que proporciona la batería al cabo de un tiempo largo es de 10 A.

(a) ¿Cuál es la resistencia de la bobina?
(b) ¿Cuál es la inductancia de la misma?

•• **42** La figura 31.34 muestra una resistencia de carga $R_L = 20\ \Omega$ conectada a un filtro de pasa-baja formado por un condensador de capacidad $C = 8\ \mu$F y una resistencia $R = 4\ \Omega$. El voltaje de entrada es $\mathcal{E} = (100\ \text{V}) \cos (2\pi ft)$. Determinar las corrientes eficaces en R, C y R_L si

(a) $f = 500$ Hz y
(b) $f = 2000$ Hz.
(c) ¿Qué fracción de la potencia total suministrada por la fuente de voltaje se disipa en la resistencia de carga si la frecuencia es 500 Hz y si la frecuencia es 2000 Hz?

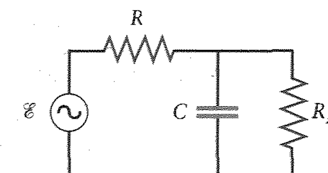


Figura 31.34 Problemas 42 y 97.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Circuitos *LC* con un generador (opcional)

•• **43** La tensión del generador de la figura 31.35 viene dada por $\mathcal{E} = (100\text{ V})\cos(2\pi ft)$.

(a) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase respecto a la tensión aplicada?
(b) ¿Cuál es la frecuencia angular ω a la que se anula corriente del condensador?
(c) A esta resonancia, ¿cuál es la corriente en la bobina? ¿Cuál es la corriente en el condensador?
(d) Dibujar un diagrama de fasores que muestre las relaciones generales entre la tensión aplicada, la corriente del generador, la corriente del condensador y la corriente en la bobina para el caso en que la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitiva.

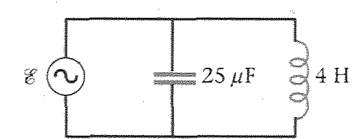


Figura 31.35 Problema 43.

•• **44** La carga sobre el condensador de un circuito serie *LC* viene dada por $Q = (15\ \mu\text{C})\cos(1250t + \pi/4)$, donde t se expresa en segundos.

(a) Hallar la corriente en función del tiempo.
(b) Hallar C si $L = 28$ mH.
(c) Escribir las expresiones correspondientes a la energía eléctrica U_e, la energía magnética U_m y la energía total U.

••• **45** En un método de medida de la compresibilidad de un material dieléctrico se usa un circuito *LC* con un condensador de placas paralelas. El dieléctrico se inserta entre las placas y se determina el cambio experimentado por la frecuencia de resonancia cuando las placas del condensador se someten a una compresión. En este dispositivo la frecuencia de resonancia es 120 MHz cuando entre las placas del condensador se introduce un dieléctrico de espesor 0,1 cm y constante dieléctrica $\kappa = 6{,}8$. Bajo una presión de 800 atm la frecuencia de resonancia disminuye a 116 MHz. Determinar el módulo de Young del material dieléctrico.

••• **46** La figura 31.36 muestra una bobina L y un condensador de placas paralelas de anchura $\omega = 20$ cm y espesor 0,2 cm. Un dieléctrico de constante dieléctrica $\kappa = 4{,}8$ que lleva completamente el espacio entre las placas, puede deslizarse entre éstas. La bobina posee una inductancia $L = 2$ mH. Cuando la mitad del dieléctrico se encuentra entre las placas del condensador, es decir, cuando $x = \frac{1}{2}\omega$, la frecuencia de resonancia de esta combinación *LC* es 90 MHz.

(a) ¿Cuál es la capacidad del condensador sin dieléctrico?
(b) Determinar la frecuencia de resonancia en función de x.

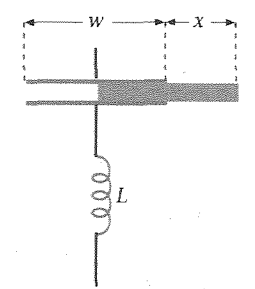


Figura 31.36 Problema 46.

Circuitos *LCR* con un generador (opcional)

• **47** Verdadero o falso:

(a) Un circuito *LCR* con un factor Q elevado tiene una curva de resonancia estrecha.
(b) En la resonancia, la impedancia de un circuito *LCR* es igual a la resistencia R.
(c) En la resonancia, la corriente y la tensión del generador están en fase.

• **48** ¿Depende el factor de potencia de la frecuencia?

• **49** ¿Tiene alguna desventaja el hecho de que el circuito de sintonía de una radio posea un factor Q excesivamente grande?

• **50** ¿Cuál es el factor de potencia de un circuito que posee inductancia y capacitancia, pero no resistencia?

• **51** Un circuito *LCR* serie de un receptor de radio se sintoniza mediante un condensador variable de modo que pueda resonar a frecuencias comprendidas entre 500 y 1600 kHz. Si $L = 1{,}0\ \mu$H, hallar el intervalo de valores necesarios de la capacidad para cubrir el márgen de frecuencias señalado.

• **52**

(a) Hallar el factor de potencia del circuito de ejemplo 31.5 cuando $\omega = 400$ rad/s.
(b) ¿A qué frecuencia angular vale dicho factor 0,5?

• **53** Un generador de ca con una fem máxima de 20 V se conecta en serie con un condensador de 20 μF y una resistencia de 80 Ω. No hay ninguna inductancia en el circuito. Hallar

(a) el factor de potencia,
(b) la corriente eficaz y
(c) la potencia media si la frecuencia angular del generador es 400 rad/s.

•• **54** Demostrar que la fórmula $P_m = \mathcal{E}_{ef}^2 R/Z^2$ da el resultado correcto para un circuito que contenga un generador y sólo

(a) una resistencia,
(b) un condensador y
(c) una bobina.

•• **55** Un circuito serie *LCR* con $L = 10$ mH, $C = 2\ \mu$F y $R = 5\ \Omega$ está conectado a un generador de 100 V de fem máxima y con una frecuencia angular variable ω. Hallar

(a) la frecuencia de resonancia ω_0 y
(b) el valor de I_{ef} en la resonancia.

Cuando $\omega = 8000$ rad/s, hallar

(c) X_C y X_L,
(d) Z e I_{ef} y
(e) el ángulo de fase δ.

•• **56** En el circuito del problema 55 supongamos que la frecuencia del generador es $f = \omega/2\pi = 1$ kHz. Hallar

(a) la frecuencia de resonancia $f_0 = \omega_0/2\pi$,
(b) X_C y X_L,
(c) la impedancia total Z e I_{ef} y
(d) el ángulo de fase δ.

•• **57** Encontrar el factor de potencia y el ángulo de fase δ para el circuito del problema 55 cuando la frecuencia del generador es

(a) 900 Hz, **(b)** 1,1 kHz, y **(c)** 1,3 kHz.

•• **58** Hallar

(a) el factor Q y
(b) la anchura de resonancia correspondiente al circuito del problema 55.
(c) ¿Cuál es el factor de potencia cuando $\omega = 8000$ rad/s?

•• **59** Las estaciones de radio de FM tienen frecuencias de ondas portadoras que se encuentran separadas por 0,20 MHz. Cuando la radio se sintoniza a una estación, tal como 100,1 MHz, la anchura de resonancia del circuito receptor deberá ser mucho menor que 0,2 MHz de forma que no se reciban las estaciones adyacentes. Si $f_0 = 100{,}1$ MHz y $\Delta f = 0{,}05$ MHz, ¿cuál es el factor Q de este circuito?

www.elsolucionario.net

•• **60** Una bobina está conectada a un generador de ca de 100 V y 60 Hz. A esta frecuencia, la bobina tiene una impedancia de 10 Ω y una resistencia de 8 Ω.

(a) ¿Cuál es la corriente que circula por la bobina?
(b) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado?
(c) ¿Qué capacitancia en serie se requiere para que la corriente y el voltaje estén en fase? ¿Cuál es entonces el voltaje medido entre las placas del condensador?

•• **61** Se conecta en serie con un generador de ca de 60 Hz una bobina de 0,25 H y un condensador *C*. Se utiliza un voltímetro de ca para medir la tensión eficaz que aparece por separado en la bobina y en el condensador. La tensión eficaz que aparece en el condensador es 75 V y en la bobina 50 V.

(a) Hallar la capacidad *C* y la corriente eficaz en el circuito.
(b) ¿Cuál será la medida de la tensión eficaz en el conjunto condensador-bobina?

•• **62**

(a) Demostrar que la ecuación 31.51 puede escribirse en la forma

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{L(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega R}$$

Determinar δ aproximadamente a

(b) frecuencias muy bajas y
(c) frecuencias muy altas.

•• **63**

(a) Demostrar que en un circuito *RC* serie sin inductancia, el factor de potencia viene dado por

$$\cos \delta = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

(b) Hacer un gráfico que muestre el factor de potencia en función de ω.

•• **64** En el circuito de la figura 31.37 el generador de ca produce una tensión eficaz de 115 V cuando funciona a 60 Hz. ¿Cuál es la tensión eficaz entre los puntos

(a) *AB*, (b) *BC*, (c) *CD*,
(d) *AC* y (e) *BD*?

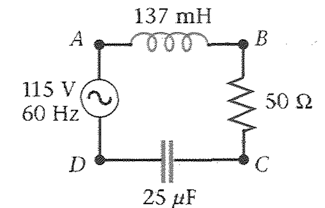


Figura 31.37 Problema 64

•• **65** Un generador de ca y frecuencia variable se conecta a un circuito *LCR* serie con *R* = 1 kΩ, *L* = 50 mH y *C* = 2,5 μF.

(a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito?
(b) ¿Cuál es el valor *Q*?
(c) ¿A qué frecuencias el valor de la potencia media suministrada por el generador es la mitad de su valor máximo?

•• **66** Un físico experimental desea diseñar un circuito *LCR* serie con un valor *Q* de 10 y una frecuencia de resonancia de 33 kHz. Posee una bobina de 45 mH y resistencia despreciable. ¿Qué valores podrá utilizar para la resistencia *R* y la capacidad *C*?

•• **67** Cuando se conecta un circuito serie *LCR* a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces, la corriente es I_{ef} = 11,0 A y la corriente adelanta a la tensión en 45°.

(a) Hallar la potencia suministrada al circuito.
(b) ¿Cuál es la resistencia?
(c) Si la inductancia es *L* = 0,05 H, hallar la capacidad *C*.
(d) ¿Qué capacidad o inductancia habría que añadir para conseguir que el factor de potencia fuera 1?

•• **68** Un circuito *LCR* serie se conecta a una fuente de 500 Hz. El ángulo de fase entre la tensión aplicada y la corriente se determina que vale $\delta = 75°$ mediante medida hecha con un osciloscopio. Si se sabe que la resistencia total es 35 Ω y la inductancia vale 0,15 H, ¿cuál es la capacidad del circuito?

•• **69** Un circuito *LCR* serie con *R* = 400 Ω, *L* = 0,35 H y *C* = 5 μF se conecta a un generador de frecuencia *f* variable.

(a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia f_0?

Hallar *f* y f/f_0 cuando el ángulo de fase δ es

(b) 60° y
(c) –60°.

•• **70** Representar gráficamente la impedancia *Z* en función de ω para

(a) un circuito serie *RL*,
(b) un circuito serie *RC* y
(c) un circuito serie *LCR*.

•• **71** Dado el circuito de la figura 31.38,

(a) hallar la pérdida de potencia en la bobina.
(b) Hallar la resistencia *r* de la bobina.
(c) Hallar la inductancia *L*.

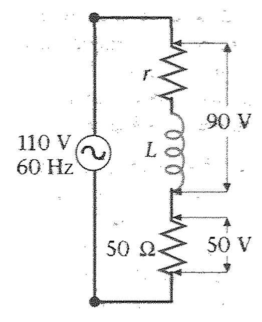


Figura 31.38 Problema 71.

•• **72** Demostrar que la ecuación 31.52 puede escribirse en la forma

$$I_{max} = \frac{\omega \mathscr{E}_{max}}{\sqrt{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2}}$$

•• **73** En un circuito *LCR* serie X_C = 16 Ω y X_L = 4 Ω a la misma frecuencia. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^4$ rad/s.

(a) Hallar *L* y *C*.

Si *R* = 5 Ω y $\mathscr{E}_{max}$ = 26 V, hallar

(b) el factor *Q* y
(c) la corriente máxima.

•• **74** En un circuito *LCR* serie conectado a un generador de ca cuya fuerza electromotriz máxima es 200 V, la resistencia es 60 Ω y la capacidad 8,0 μF. La autoinducción puede variarse desde 8,0 hasta 40,0 mH mediante la inserción de un núcleo de hierro dentro del solenoide. La frecuencia angular es 2500 rad/s. Si la tensión del condensador no ha de superar los 150 V, hallar

(a) la corriente máxima y
(b) el margen de *L* que puede utilizarse con seguridad.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **75** Un determinado dispositivo eléctrico consume 10 A eficaces y tiene una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz.

(a) ¿Cuál es la impedancia del aparato?
(b) ¿A qué combinación en serie de resistencia y reactancia es equivalente este aparato?
(c) Si la corriente adelanta a la fem, ¿es inductiva o capacitiva la reactancia?

•• **76** Un método para medir autoinducciones consiste en conectar la bobina en serie con una capacidad conocida, una resistencia conocida, un amperímetro de ca y un generador de señales de frecuencia variable. La frecuencia del generador de señales se varía y la fem se mantiene constante hasta que la corriente es máxima.

(a) Si $C = 10\ \mu$F, $\mathcal{E}_{max} = 10$ V, $R = 100\ \Omega$ e I es máxima para $\omega = 5000$ rad/s, ¿cuánto vale L?
(b) ¿Cuál es el valor de I_{max}?

•• **77** Una resistencia y un condensador están conectados en paralelo sobre una fem sinusoidal $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}\cos\omega t$, como se ve en la figura 31.39.

(a) Demostrar que la corriente en la resistencia es $I_R = (\mathcal{E}_{max}/R)\cos\omega t$.
(b) Demostrar que la corriente en la rama del condensador es $I_C = (\mathcal{E}_{max}/X_C)\cos(\omega t + 90°)$.
(c) Demostrar que la corriente total viene dada por la ecuación $I = I_R + I_C = I_{max}\cos(\omega t + \delta)$, en donde tg $\delta = R/X_C$ e $I_{max} = \mathcal{E}_{max}/Z$ con $Z^{-2} = R^{-2} + X_C^{-2}$.

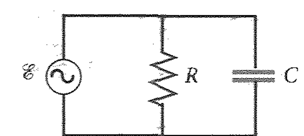


Figura 31.39 Problema 77.

•• **78** Las impedancias de los motores, transformadores y electroimanes poseen una reactancia inductiva. Supongamos que el ángulo de fase de la impedancia total de una gran planta industrial es 25° cuando está en pleno funcionamiento y consume una potencia de 2,3 MW. La energía es suministrada a la factoría por una subestación situada a 4,5 km de la planta. El voltaje eficaz de la línea en la planta es de 40 000 V y la frecuencia de 60 Hz. La resistencia de la línea de transmisión de la subestación a la planta es de 5,2 Ω. El coste por kilovatio-hora es 0,07 dólares. La planta paga sólo la energía real utilizada.

(a) ¿Cuáles son la resistencia y reactancia inductiva de la carga total de la planta.
(b) ¿Cuál es la corriente en las líneas de potencia y cuál debe ser el voltaje eficaz de la subestación para mantener el voltaje de la planta a 40 000 V?
(c) ¿Cuánta potencia se pierde en la transmisión?
(d) Suponer que el ángulo de fase de la impedancia de la planta se reduce a 18° añadiendo una batería de condensadores en serie con la carga. ¿Cuánto dinero se ahorraría con esta modificación durante un mes de trabajo, suponiendo que la planta opera a plena capacidad durante 16 h diarias?
(e) ¿Cuál debe ser la capacitancia de esta batería de condensadores?

•• **79** En el circuito que se muestra en la figura 31.40, $R = 10\ \Omega$, $R_L = 30\ \Omega$ $L = 150$ mH y $C = 8\ \mu$F; la frecuencia de la fuente de ca es 10 Hz.

(a) Utilizando diagramas de fasores, determinar la impedancia del circuito cuando está cerrado el interruptor S.
(b) Determinar la impedancia del circuito cuando el interruptor S está abierto.
(c) ¿Cuáles son los voltajes a través de la resistencia de carga R_L cuando el interruptor S está abierto y cuando está cerrado?
(d) Repetir las partes (a), (b) y (c) con la frecuencia de la fuente a 1000 Hz.
(e) ¿Qué disposición constituye un mejor filtro pasa-baja: S abierto o S cerrado?

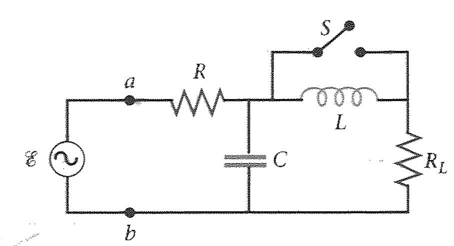


Figura 31.40 Problema 79.

•• **80** En el circuito de la figura 31.41, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $L = 12$ mH, $C = 30\ \mu$F y $\mathcal{E} = (40\text{V})\cos(\omega t)$.

(a) Determinar la frecuencia de resonancia.
(b) Para la frecuencia de resonancia, ¿cuáles son las corrientes eficaces de cada resistencia y la corriente eficaz suministrada por la fem de la fuente?

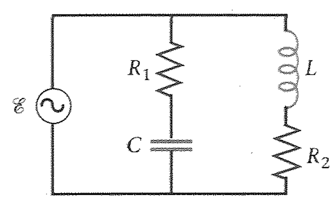


Figura 31.41 Problemas 80, 98 y 99.

•• **81** Deducir una expresión para el valor Q del circuito representado en la figura 31.23, suponiendo que la resonancia es aguda.

•• **82** En el circuito de la figura 31.23, $L = 4$ mH.

(a) ¿Cuál será la capacitancia C si la frecuencia de resonancia es de 4 kHz?
(b) Cuando C tiene el valor determinado en (a), ¿cuánto debe valer la resistencia R para que el valor Q del circuito sea 8?

•• **83** Si la capacitancia C del problema 82 se reduce a la mitad del valor determinado en dicho problema, ¿cuáles son entonces la frecuencia de resonancia y el valor Q del circuito? ¿Qué valor debe tener la resistencia R para que $Q = 8$?

•• **84** Un circuito serie consta de un condensador de 4,0 nF, un inductor de 36 mH y una resistencia de 100 Ω. El circuito está conectado a una fuente de ca de 20 V cuya frecuencia puede modificarse en un amplio intervalo.

(a) Determinar la frecuencia de resonancia f_0 del circuito.
(b) En la resonancia, ¿cuál es la corriente eficaz del circuito y cuáles son los voltajes eficaces a través del inductor y el condensador?
(c) ¿Cuál es la corriente eficaz y cuáles los voltajes eficaces en el inductor y condensador si $f = f_0 + \frac{1}{2}\Delta f$, en donde Δf es la anchura de la resonancia?

•• **85** Repetir el problema 84 cuando la resistencia de 100 Ω se reemplaza por otra de 40 Ω.

••• **86** Consideremos el circuito en paralelo indicado en la figura 31.42.

(a) ¿Cuál es la impedancia de cada rama?
(b) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase relativa a la tensión aplicada?
(c) Dar el diagrama de fasores de corriente y utilizarlo para hallar la corriente total y su fase relativa a la tensión aplicada.

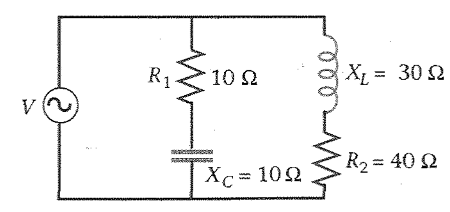


Figura 31.42 Problema 86.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

••• 87

(a) Demostrar que la ecuación 31.51 puede escribirse

$$\text{tg } \delta = \frac{Q(\omega^2 - \omega^2 0)}{\omega\omega_0}$$

(b) Demostrar que cerca de la resonancia

$$\text{tg } \delta \approx \frac{2Q(\omega - \omega_0)}{\omega}$$

(c) Hacer un esquema de δ en función de x siendo $x = \omega/\omega_0$, para un circuito con un Q elevado y para otro con un Q bajo.

••• 88 Demostrar por sustitución directa que la corriente dada por la ecuación 31.50 con δ e I_{max} dados por las ecuaciones 31.51 y 31.52 satisface a la ecuación 31.49. (*Indicación*: Utilizar identidades trigonométricas para el seno y coseno de la suma de los ángulos y escribir la ecuación de la siguiente forma

$$A \text{ sen } \omega t + B \cos \omega t = 0$$

Puesto que esta ecuación debe ser válida en todo instante, $A = 0$ y $B = 0$.)

••• 89 Se conecta en serie un generador de ca con un condensador y una bobina en un circuito con resistencia despreciable.

(a) Demostrar que la carga en el condensador obedece la ecuación

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = \mathscr{E}_{max} \cos \omega t$$

(b) Demostrar por sustitución directa que esta ecuación se satisface por $Q = Q_{max} \cos \omega t$ si

$$Q_{max} = -\frac{\mathscr{E}_{max}}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

(c) Demostrar que la corriente puede escribirse como $I = I_{max} \cos(\omega t - \delta)$, en donde

$$I_{max} = \frac{\omega\mathscr{E}_{max}}{L|\omega^2 - \omega_0^2|} = \frac{\mathscr{E}_{max}}{|X_L - X_C|}$$

y $\delta = -90°$ para $\omega < \omega_0$ y $\delta = 90°$ para $\omega > \omega_0$.

••• 90 En la figura 31.19 se muestra una representación de la potencia media P_m en función de la frecuencia ω del generador para un circuito LCR con un generador. La potencia media P_m viene dada por la ecuación 31.58. La "anchura a la mitad de su valor máximo" $\Delta\omega$ es la anchura de la curva de resonancia entre los dos puntos en que P_m tiene un valor que es la mitad de su valor máximo. Demostrar que en el caso de una resonancia muy aguda $\Delta\omega \approx R/L$ y, por tanto, $Q \approx \omega_0/\Delta\omega$ en este caso (ecuación 31.60). (*Indicación*: En la resonancia, el denominador del segundo miembro de la ecuación 31.58 es ω^2R^2. Los puntos a mitad de potencia se presentarán cuando el denominador sea aproximadamente el doble que el que posee cerca de la resonancia, esto es, cuando $L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \omega^2R^2 \approx \omega_0^2 R^2$. Sean ω_1 y ω_2 las soluciones de esta ecuación. En el caso de una resonancia aguda, $\omega_1 \approx \omega_0$ y $\omega_2 \approx \omega_0$. Entonces, aprovechando el hecho de que $\omega + \omega_0 \approx 2\,\omega_0$, se tiene que $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx R/L$.)

••• 91 Demostrar por sustitución directa que se satisface la ecuación 31.47b por $Q = Q_0e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t)$ en donde $\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$ y Q_0 es la carga sobre el condensador cuando $t = 0$.

••• 92

(a) Calcular la corriente $I = dQ/dt$ a partir de la solución de la ecuación 31.47b dada en el problema 91 y demostrar que

$$I = -I_0\left(\text{sen } \omega' t + \frac{R}{2L\omega'} \cos \omega' t\right)e^{-Rt/2L}$$

en donde $I_0 = \omega' Q_0$.

(b) Demostrar que esta expresión puede escribirse como

$$I = -\frac{I_0}{\cos \delta}(\cos \delta \text{ sen } \omega' t + \text{sen } \delta \cos \omega' t)e^{-Rt/2L}$$
$$= -\frac{I_0}{\cos \delta} \text{sen}(\omega' t + \delta)e^{-Rt/2L}$$

en donde $\text{tg } \delta = R/2L\omega'$. Cuando $R/2L\omega'$ es pequeña, $\cos \delta \approx 1$ e

$$I = I_0 \text{ sen } (\omega' t + \delta)e^{-Rt/2L}$$

••• 93 Un método de medida de la susceptibilidad magnética de una muestra utiliza un circuito LC formado por un solenoide de núcleo de aire y un condensador. En primer lugar se determina la frecuencia de resonancia del circuito sin muestra y a continuación se repite la medida con la muestra insertada en el solenoide. Supongamos que el solenoide tiene una longitud de 4,0 cm y un diámetro de 0,3 cm y posee 400 vueltas de alambre fino. Suponer que la muestra que se inserta en el solenoide es también de 4,0 cm de longitud y llena el espacio de aire. Despreciar los efectos en los extremos del solenoide. (En la práctica el instrumento se calibra con una muestra de ensayo de susceptibilidad conocida, de igual forma que la incógnita.)

(a) ¿Cuál es la inductancia del solenoide vacío?
(b) ¿Cuál debería ser la capacitancia del condensador para que la frecuencia del circuito sin muestra fuese de 6,000 MHz?
(c) Cuando una muestra se inserta en el solenoide, la frecuencia de resonancia disminuye a 5,9989 MHz. Determinar la susceptibilidad de la muestra.

••• 94 Un cable concéntrico de sección transversal cilíndrica posee un conductor interior de 0,4 cm de diámetro y un conductor externo de 2,0 cm de diámetro. El espacio entre los conductores está lleno de aire.

(a) Determinar la frecuencia de resonancia de este conductor si su longitud es de 1 m.
(b) ¿Qué longitud tendría este conductor si su frecuencia de resonancia fuera de 18 GHz?

••• 95 Repetir el problema 94 considerando que los conductores interno y externo del cable están separados por un dieléctrico de constante dieléctrica $\kappa = 5{,}8$.

••• 96 ¿Para qué frecuencia la caída de tensión en la resistencia de carga del problema 37 sería la mitad de la fem de la fuente?

••• 97 ¿Para qué frecuencia la caída de tensión en la resistencia de carga del problema 42 sería la mitad de la fem de la fuente?

••• 98

(a) Determinar la frecuencia angular ω del circuito del problema 80 para que la magnitud de la reactancia de las dos ramas paralelas sean iguales.
(b) A esta frecuencia, ¿cuál es la disipación de potencia en cada una de las dos resistencias?

••• 99

(a) Determinar en el circuito del problema 80 la frecuencia angular ω para que la disipación de potencia en las dos resistencias sea la misma.
(b) Para esta frecuencia angular ¿cuál es la resistencia de cada una de las dos ramas en paralelo?
(c) Dibujar un diagrama de fasores mostrando la corriente a través de cada una de las dos ramas en paralelo.
(d) ¿Cuál es la impedancia del circuito?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Transformadores (opcional)

• **100** El transformador se utiliza para cambiar
(a) la capacitancia
(b) la frecuencia
(c) el voltaje
(d) la potencia
(e) ninguna de estas magnitudes

• **101** Verdadero o falso: Si un transformador aumenta la corriente, debe disminuir el voltaje.

•• **102** Un transformador ideal posee N_1 vueltas en el primario y N_2 en el secundario. La potencia disipada en una resistencia de carga R conectada a través del secundario es P_2 cuando el voltaje primario es V_1. La corriente en el arrollamiento primario es, por tanto,
(a) P_2/V_1 (b) $(N_1/N_2)(P_2/V_1)$
(c) $(N_2/N_1)(P_2/V_1)$ (d) $(N_2/N_1)^2(P_2/V_1)$

• **103** Se requiere un voltaje de 24 V para un dispositivo cuya impedancia es de 12 Ω.
(a) ¿Cuál debe ser la relación de vueltas en un transformador para que el dispositivo pueda operar con una línea de 120 V.
(b) Supongamos que el transformador se conecta accidentalmente al revés, es decir, con el arrollamiento del secundario en la línea de 120 V y la resistencia de 24 Ω en el primario. ¿Qué corriente fluirá por el arrollamiento primario?

• **104** Un transformador tiene 400 vueltas en el primario y 8 en el secundario.
(a) ¿Es un transformador elevador o reductor?
(b) Si se conecta el primario a una tensión de 120 V eficaces, ¿cuál es la tensión en circuito abierto que aparece en el secundario?
(c) Si la corriente el primario es 0,1 A, ¿cuál es la corriente del secundario admitiendo que existe una corriente imantadora despreciable y que no hay ninguna pérdida de potencia?

• **105** El primario de un transformador reductor tiene 250 vueltas y está conectado a 120 V eficaces. El secundario suministra 20 A a 9 V. Calcular
(a) la corriente en el primario y
(b) el número de vueltas que posee el secundario, suponiendo un rendimiento del 100 por ciento.

• **106** Un transformador tiene un primario de 500 vueltas, que está conectado a 120 V eficaces. Su bobina secundaria posee tres conexiones diferentes para dar tres salidas de 2,5; 7,5 y 9 V. ¿Cuántas vueltas son necesarias para cada una de las partes de la bobina secundaria?

• **107** El circuito de distribución de una línea de potencia para una urbanización residencial funciona a 2000 V eficaces. Esta tensión debe reducirse a 240 V para su empleo en las viviendas. Si el arrollamiento secundario del transformador tiene 400 vueltas, ¿cuántas vueltas poseerá el primario?

•• **108** Un oscilador de audio (fuente de ca) con una resistencia interna de 2000 Ω y un voltaje eficaz de salida de 12 V en circuito abierto ha de utilizarse para accionar un altavoz de resistencia 8 Ω. ¿Cuál debe ser la relación de vueltas primario-secundario de un transformador para transferir la máxima potencia al altavoz? Supongamos que un segundo altavoz idéntico está conectado en paralelo con el anterior. ¿Qué potencia debe suministrarse a la asociación de los dos altavoces?

•• **109** Uno de los empleos de un transformador es el de ajuste de impedancias. Por ejemplo, la impedancia de salida de un amplificador estéreo se ajusta a la impedancia de un altavoz mediante un transformador. En la ecuación 31.67 pueden relacionarse las corrientes I_1 e I_2 con la impedancia del secundario ya que $I_2 = V_2/Z$. Utilizando las ecuaciones 31.65 y 31.66, demostrar que

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{(N_1/N_2)^2 Z}$$

y, por consiguiente, $Z_{ef} = (N_1/N_2)^2 Z$.

Problemas generales

• **110** Verdadero o falso:
(a) La corriente alterna en una resistencia no disipa potencia alguna, porque la corriente es alternativamente positiva y negativa.
(b) A frecuencia muy elevadas, un condensador actúa como un corto-circuito.

• **111** Un secador eléctrico de una lavandería de 5,0 kW eficaces se conecta a 240 V eficaces. Calcular
(a) I_{ef} y
(b) I_{max}.
(c) Calcular las mismas magnitudes para una secadora de la misma potencia que funcionara a 120 V eficaces.

• **112** Hallar la reactancia de un condensador de 10,0 μF a
(a) 60 Hz, (b) 6 kHz, y (c) 6 MHz.

• **113** Hacer un gráfico que muestre X_L en función de f para L = 3 mH.

• **114** Hacer un esquema gráfico de X_C en función de la frecuencia f para C = 100 μF.

•• **115** Por una resistencia R circula una corriente I = (5,0 A) sen 120 πt + (7,0 A) sen 240 πt.
(a) ¿Cuál es la corriente eficaz?
(b) Si la resistencia R es de 12 Ω, ¿qué potencia se disipa en la resistencia?
(c) ¿Cuál es la tensión eficaz que aparece en la resistencia?

•• **116** En la figura 31.43 se indica la tensión V en función del tiempo t correspondiente a una "onda cuadrada". Si V_0 = 12 V,
(a) ¿cuál es la tensión eficaz de esta onda?
(b) Si se rectifica esta onda alternativa de modo que sólo permanezcan las tensiones positivas, eliminando las tensiones negativas, ¿cuál será ahora la tensión eficaz de la onda rectificada?

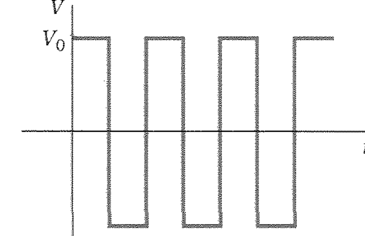


Figura 31.43 Problema 116.

•• **117** Una corriente pulsante tiene un valor constante de 15 A durante los primeros 0,1 s de cada segundo y luego 0 durante los 0,9 s de cada segundo.
(a) ¿Cuál es el valor eficaz de esta onda?
(b) Cada pulso de corriente se genera mediante un pulso de 100 V. ¿Cuál es la potencia media que proporciona el generador de pulsos?

•• **118** Un circuito se compone de dos condensadores, una batería de 24 V y una tensión de ca conectados como se indica en la figura 31.44. La tensión de ca viene dada por (20 V) cos 120 πt (t en segundos).

www.elsolucionario.net

(a) Hallar la carga en cada condensador en función del tiempo. Suponer que ha transcurrido un tiempo suficiente como para que los efectos transitorios hayan desaparecido prácticamente.
(b) ¿Cuál es la corriente estacionaria?
(c) ¿Cuál es la máxima energía almacenada en los condensadores?
(d) ¿Cuál es la energía mínima almacenada en los condensadores?

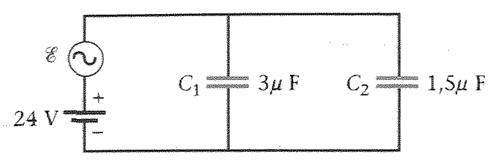


Figura 31.44 Problema 118.

•• **119** ¿Cuáles son los valores medio y eficaz de la corriente en las dos ondas específicas de la figura 31.45?

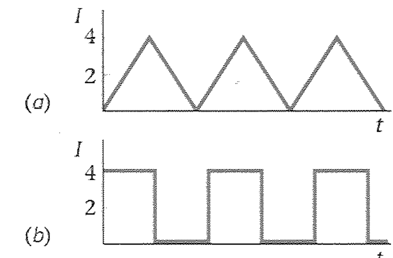


Figura 31.45 Problema 119.

•• **120** En el circuito de la figura 31.46, $\mathcal{E}_1 = (20\text{ V})\cos(2\pi ft)$, $f = 180$ Hz, $\mathcal{E}_2 = 18$ V y $R = 36\ \Omega$. Determinar los valores máximo, mínimo, medio y eficaz de la corriente que circula por la resistencia

•• **121** Repetir el problema 120 si la resistencia R se reemplaza por un condensador de 2 μF.

•• **122** Repetir el problema 120 si la resistencia R se reemplaza por un inductor de 12 mH.

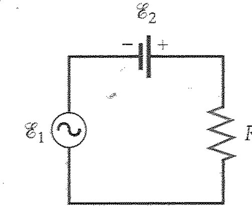


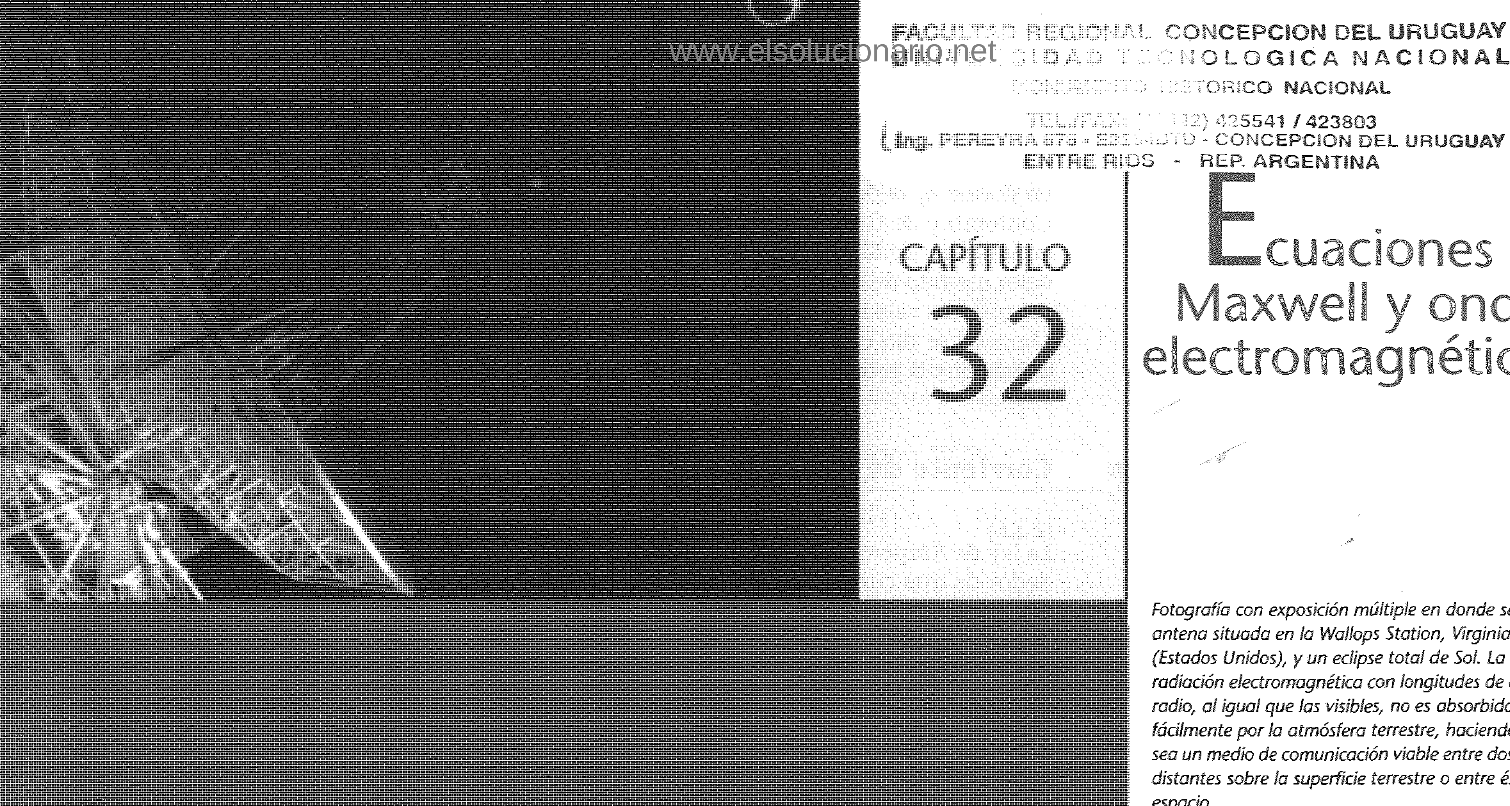
Figura 31.46 Problemas 120-122.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
www.elsolucionario.net

CONCEPCION DEL URUGUAY
NOLOGICA NACIONAL
NACIONAL
425541 / 423803
CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 32

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

Fotografía con exposición múltiple en donde se ve la antena situada en la Wallops Station, Virginia (Estados Unidos), y un eclipse total de Sol. La radiación electromagnética con longitudes de onda de radio, al igual que las visibles, no es absorbida fácilmente por la atmósfera terrestre, haciendo que sea un medio de comunicación viable entre dos puntos distantes sobre la superficie terrestre o entre ésta y el espacio.

www.elsolucionario.net

Las ecuaciones de Maxwell, propuestas por vez primera por el gran físico escocés James Clerk Maxwell, relacionan los vectores de campo eléctrico y magnético **E** y **B** con sus fuentes, que son las cargas eléctricas, las corrientes y los campos variables. Estas ecuaciones resumen las leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo: las leyes de Coulomb, Gauss, Biot y Savart, Ampère y Faraday. Estas leyes experimentales se cumplen de un modo general excepto la ley de Ampère, que no puede aplicarse a las corrientes discontinuas como las que tienen lugar en la carga o descarga de un condensador. Maxwell fue capaz de generalizar la ley de Ampère introduciendo el concepto de corriente de desplazamiento (sección 32.1). Con ello pudo demostrar que las leyes generalizadas de electricidad y magnetismo implican la existencia de ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de Maxwell desempeñan en el electromagnetismo clásico un papel análogo al de las leyes de Newton en la mecánica clásica. En principio, pueden resolverse todos los problemas de la electricidad y el magnetismo clásicos mediante el empleo de las ecuaciones de Maxwell, de la misma forma que pueden resolverse todos los problemas de la mecánica clásica utilizando las leyes de Newton. Sin embargo, las leyes de Maxwell son considerablemente más complicadas que las de Newton y su aplicación a la mayoría de los problemas exige unos conocimientos matemáticos superiores que escapan de este libro. A pesar de todo, las ecuaciones de Maxwell son de gran importancia teórica. Por ejemplo, Maxwell demostró que estas ecuaciones podían combinarse para originar una ecuación de onda que debían satisfacer los vectores de campo eléctrico y magnético, **E** y **B**. Estas **ondas electromagnéticas** están originadas por cargas eléctricas aceleradas como, por ejemplo, las cargas eléctricas alternantes presentes en una antena. Estas ondas fueron producidas por primera vez en el laboratorio por Heinrich Hertz en 1887. Maxwell mostró que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el espacio vacío debía ser

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \qquad \textbf{(32.1)}$$

 www.elsolucionario.net

en donde ϵ_0, la permitividad del espacio libre, es la constante que aparece en las leyes de Coulomb y de Gauss, mientras que μ_0, la permeabilidad del espacio libre, es la incluida en las leyes de Biot y Savart y de Ampère. Cuando se introducen en la ecuación 32.1 el valor medido de ϵ_0 y el valor definido de μ_0, resulta que la velocidad de las ondas electromagnéticas vale aproximadamente 3×10^8 m/s, igual que la velocidad medida de la luz. Maxwell se dio cuenta de esta "coincidencia" con gran entusiasmo y supuso correctamente que la propia luz es una onda electromagnética.

32.1 ■ Corriente de desplazamiento de Maxwell

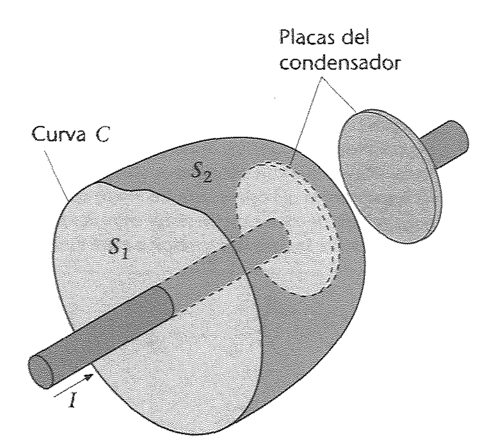


Figura 32.1 Dos superficies S_1 y S_2 limitadas por la misma curva C. La corriente I atraviesa la superficie S_1, pero no la S_2. La ley de Ampère, que relaciona la circulación del campo magnético **B** a lo largo de la curva C con la corriente total que pasa a través de una superficie cualquiera limitada por C, no es válida cuando la corriente no es continua, como sucede al interrumpirse en la placa del condensador indicada aquí.

La ley de Ampère (ecuación 29.15) relaciona la integral lineal del campo magnético alrededor de una curva cerrada C con la corriente que atraviesa cualquier área limitada por dicha curva:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I, \quad \text{para cualquier curva cerrada } C \qquad \textbf{(32.2)}$$

Maxwell reconoció un fallo en la ley de Ampère. La figura 32.1 muestra dos superficies diferentes limitadas por la misma curva C, la cual rodea a un alambre que transporta una corriente a la placa de un condensador. La corriente a través de la superficie S_1 es I, pero no existe corriente a través de la superficie S_2 porque la carga se detiene en la placa del condensador. Existe, por tanto, una ambigüedad en la frase "la corriente que atraviesa cualquier área limitada por dicha curva". Este problema surge siempre que la corriente es discontinua.

Maxwell demostró que esta ley puede generalizarse incluyendo todas las situaciones si se sustituye la corriente I en la ecuación por la suma de la corriente de conducción I más otro término I_d, denominado **corriente de desplazamiento de Maxwell**, definida como

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \qquad \textbf{(32.3)}$$

Definición —Corriente de desplazamiento

en donde ϕ_e es el flujo del campo eléctrico a través de la misma superficie limitada por la curva C. Entonces la forma generalizada de la ley de Ampère es

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \qquad \textbf{(32.4)}$$

Forma generalizada de la ley de Ampère

Podemos comprender esta generalización considerando de nuevo la figura 32.1. Denominemos corriente generalizada a la suma $I + I_d$. De acuerdo con el argumento que acabamos de dar, la misma corriente generalizada debe cruzar cualquier superficie limitada por la curva C. Por consiguiente, *no* puede existir ninguna corriente generalizada neta que entre o salga del volumen cerrado de la figura. Si existe una corriente verdadera neta I que entre en el volumen, deberá existir una corriente de desplazamiento neto I_d igual que salga del mismo volumen. En dicho volumen, existe una corriente de conducción neta I que entra aumentando la cara en su interior:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El flujo del campo eléctrico que sale del volumen está relacionado con la carga mediante la ley de Gauss

$$\phi_{e,\ \text{neto}} = \oint_S E_n\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

www.elsolucionario.net

El aumento de carga por unidad de tiempo es así proporcional a la velocidad de aumento del flujo neto que sale del volumen:

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_{\text{e, neto}}}{dt} = I_{\text{d}}$$

Por tanto, la corriente de conducción neta que entra en el volumen es igual a la corriente de desplazamiento neta que sale del volumen. La corriente de desplazamiento es siempre continua.

Es interesante comparar la ecuación 32.4 con la ley de Faraday (ecuación 30.5)

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\phi_{\text{m}}}{dt} \qquad \textbf{(32.5)}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, un flujo magnético variable produce un campo eléctrico cuya integral de línea o circulación a lo largo de una curva, es proporcional a la velocidad o ritmo de variación del flujo magnético a través de la curva. La modificación de Maxwell de la ley de Ampère demuestra que un flujo eléctrico variable produce un campo magnético cuya circulación a lo largo de una curva es proporcional a la variación del flujo eléctrico por unidad de tiempo. Así pues, tenemos el interesante resultado recíproco de que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (ley de Faraday) y que un campo eléctrico variable produce un campo magnético (forma generalizada de la ley de Ampère). Obsérvese que no existe ningún análogo magnético de una corriente de conducción I. Esto es debido a que el monopolo magnético, el análogo magnético de una carga eléctrica, no existe.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 32.1

Un condensador de placas paralelas está formado por placas circulares muy cercanas de radio R. En la placa positiva está entrando carga, mientras que está saliendo de la placa negativa a un ritmo $I = dQ/dt = 2{,}5$ A. Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas.

Esquema del problema La corriente de desplazamiento es $I_{\text{d}} = \epsilon_0\, d\phi_{\text{e}}/dt$, en donde ϕ_{e} es el flujo eléctrico entre las placas. Como las placas paralelas están muy próximas, podemos considerar que el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a las placas dentro del condensador y es nulo fuera del mismo. Así, el flujo eléctrico es simplemente $\phi_{\text{e}} = EA$, en donde E es el campo eléctrico entre las placas y A el área de las mismas.

1. La corriente de desplazamiento puede determinarse a partir de la derivada respecto al tiempo del flujo eléctrico: $I = \epsilon_0 \dfrac{d\phi_{\text{e}}}{dt}$

2. El flujo es igual al producto del campo eléctrico por el área: $\phi_{\text{e}} = EA$

3. El campo eléctrico es proporcional a la densidad de carga sobre las placas, las cuales se consideran como láminas infinitas: $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} = \dfrac{Q/A}{\epsilon_0}$

4. Sustituir estos resultados para el cálculo de I_{d}: $I_{\text{d}} = \epsilon_0 \dfrac{d(EA)}{dt} = \epsilon_0 A \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Q}{A\epsilon_0}\right) = \dfrac{dQ}{dt} = 2{,}5 \text{ A}$

Observación La corriente de desplazamiento a través del espacio entre las placas es igual a la corriente de conducción en los alambres que entran y salen del condensador.

 www.elsolucionario.net

EJEMPLO 32.2 **Las placas circulares del ejemplo 32.1 tienen un radio de $R = 3{,}0$ cm. Hallar el campo magnético en un punto entre las placas a una distancia $r = 2{,}0$ cm del eje de las mismas cuando la corriente que está entrando en la placa positiva vale 2,5 A.**

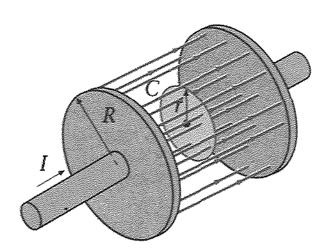


Figura 32.2

Esquema del problema Calculemos B a partir de la forma generalizada de la ley de Ampère (ecuación 32.4). En la figura 32.4 hemos escogido un trayecto circular de radio $r = 2{,}0$ cm alrededor de la línea que une los centros de las placas para el cálculo de $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$. Por simetría, B es tangente a esta circunferencia y tiene el mismo valor en todos los puntos de la misma.

1. Determinamos B a partir de la forma generalizada de la ley de Ampère: $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{d\phi_e}{dt}$

2. Por simetría, la integral lineal es simplemente el producto de B por la longitud de la circunferencia: $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = B(2\pi r)$

3. Como no hay corriente de conducción entre las placas del condensador, la corriente generalizada es justamente la corriente de desplazamiento: $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = B(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{d\phi_e}{dt}$

4. El flujo eléctrico es igual al producto del campo constante E y el área limitada por la curva: $\phi_e = \pi r^2 E = \pi r^2 \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} = \pi r^2 \dfrac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} = \dfrac{r^2 Q}{\epsilon_0 R^2}$

5. Sustituir estos resultados en la etapa 1 y despejar B:

$$B(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2 Q}{\epsilon_0 R^2}\right) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}\frac{dQ}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r^2}{R^2}\frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2} I$$

$$= (2\times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\left(\frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{(0{,}03\ \mathrm{m})^2}\right)(2{,}5\ \mathrm{A}) = 1{,}11\times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

www.elsolucionario.net

32.2 Ecuaciones de Maxwell

Las **ecuaciones de Maxwell** son

$$\oint_S E_n\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}} \qquad \textbf{(32.6a)}$$

$$\oint_S B_n\, dA = 0 \qquad \textbf{(32.6b)}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt}\oint_S B_n\, dA \qquad \textbf{(32.6c)}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\oint_S E_n\, dA \qquad \textbf{(32.6d)}$$

Ecuaciones de Maxwell

La ecuación 32.6a es la ley de Gauss; establece que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ veces la carga neta encerrada dentro de la misma. Como vimos en el capítulo 23, la ley de Gauss implica que el campo eléctrico

www.elsolucionario.net

debido a una carga puntual varía en razón inversa al cuadrado de la distancia de la carga. Esta ley describe cómo divergen las líneas de campo eléctrico de una carga positiva y convergen sobre una carga negativa. Su base experimental la constituye la ley de Coulomb.

La ecuación 32.6b, a veces denominada ley de Gauss del magnetismo, establece que el flujo del vector de campo magnético **B** es cero a través de cualquier superficie cerrada. Esta ecuación describe la observación experimental de que las líneas de campo magnético no divergen de ningún punto del espacio ni convergen sobre ningún otro punto; es decir, esto implica que no existen polos magnéticos aislados.

La ecuación 32.6c es la ley de Faraday; afirma que la integral del campo eléctrico a lo largo de cualquier curva cerrad C (la circulación), que es la fem, es igual a la variación por unidad de tiempo (con signo negativo) del flujo magnético que atraviesa cualquier superficie S limitada por la curva. (Esta superficie no es cerrada, de manera que el flujo magnético a través de S no tiene que ser necesariamente cero.) La ley de Faraday describe cómo rodean las líneas de campo eléctrico cualquier superficie a través de la cual existe un flujo magnético variable y relaciona el vector de campo eléctrico **E** a la variación respecto al tiempo del vector de campo magnético **B**.

La ecuación 32.6d, que es la ley de Ampère con la modificación de Maxwell de la corriente de desplazamiento, establece que la integral de línea o circulación del campo magnético **B** a lo largo de cualquier curva cerrada C es igual a μ_0 multiplicado por la corriente que atraviesa cualquier superficie limitada por la citada curva más el producto de $\mu_0\epsilon_0$ por la variación respecto al tiempo de flujo eléctrico que atraviesa la superficie. Esta ley describe cómo rodean las líneas de campo magnético a una superficie a través de la cual está pasando una corriente o bien existe un flujo eléctrico variable.

En la sección 32.4 demostraremos cómo el campo eléctrico **E** y el campo magnético **B** pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell.

Ondas electromagnéticas ■ 32.3

La figura 32.3 muestra los vectores de campo de una onda electromagnética. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Las ondas electromagnéticas son, por tanto, ondas transversales. Las magnitudes de **E** y **B** están en fase y relacionadas por la expresión

$$E = cB \tag{32.7}$$

en donde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ es la velocidad de la onda. En general, la dirección de propagación de una onda electromagnética es la dirección del producto vectorial **E** × **B**.

El espectro electromagnético ■

Los diversos tipos de ondas electromagnéticas —luz, ondas de la radio, rayos X, rayos gamma, microondas, etc. —difieren sólo en su longitud de onda y frecuencia, que están relacionadas con la velocidad c en la forma usual, $f = c/\lambda$. En la tabla 32.1 se expone el **espectro electromagnético** y los nombres normalmente asociados con los diversos intervalos de frecuencia y longitud de onda. Estos intervalos no están a veces bien definidos y frecuentemente se solapan. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas con longitudes de onda del orden de 0,1 nm suelen denominarse rayos X, pero si se originan a partir de la radiactividad nuclear se llaman rayos gamma.

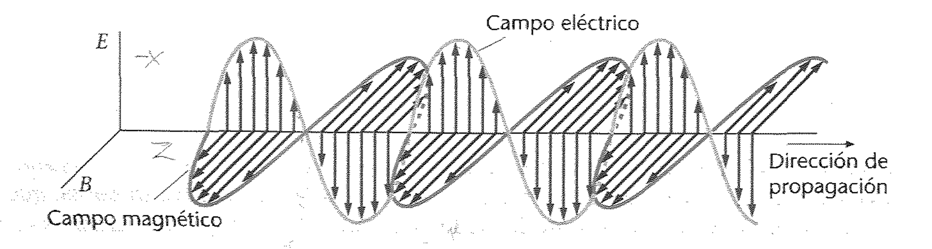
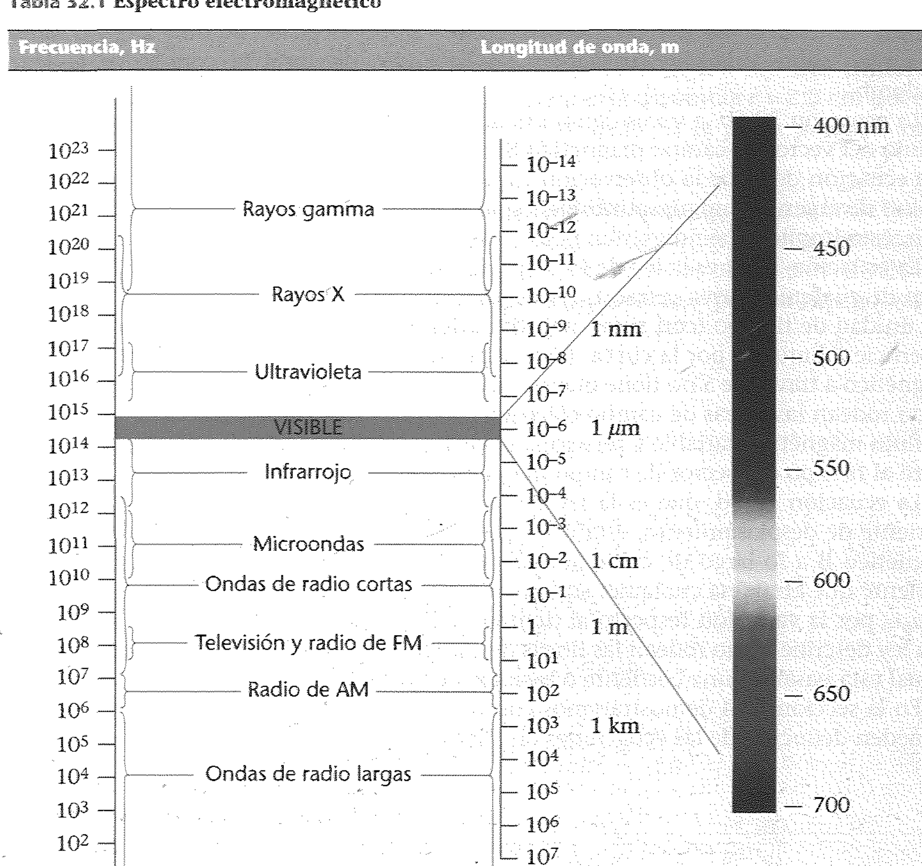


Figura 32.3 Los vectores de los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética. Los campos están en fase perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Tabla 32.1 Espectro electromagnético



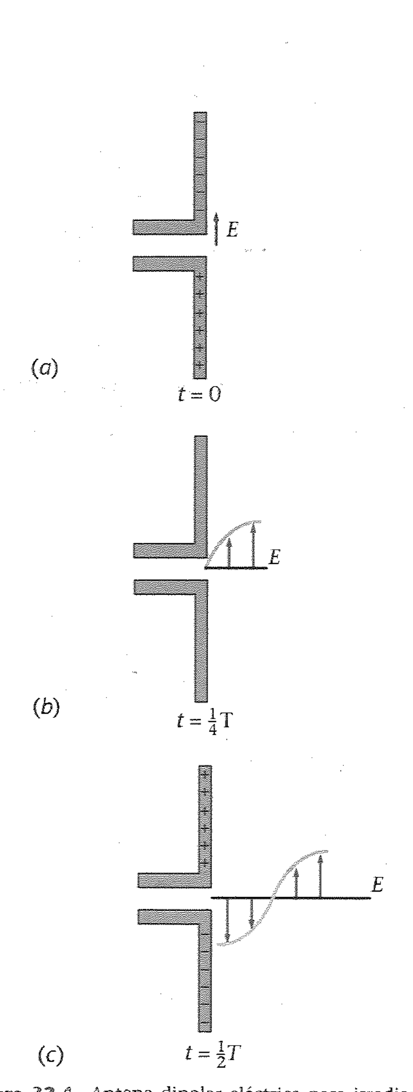


Figura 32.4 Antena dipolar eléctrica para irradiar ondas electromagnéticas. Se le suministra corriente alterna a la antena mediante un generador (que no se muestra). El campo eléctrico debido a las cargas en la antena se propaga hacia el exterior con la velocidad de la luz. También existe un campo magnético (no indicado) propagándose perpendicularmente al papel debido a la corriente que circula por la antena.

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética con longitudes de onda comprendidas entre 400 y 700 nm aproximadamente, margen que se denomina **luz visible**. Las longitudes de onda más cortas del espectro visible corresponden a la luz violeta y las más largas a la luz roja, y entre estos extremos se encuentran todos los colores del arco iris. Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda ligeramente inferiores a las de la luz visible se denominan **rayos ultravioletas** y las que poseen longitudes de onda superiores, se conocen como **ondas infrarrojas**. La radiación térmica emitida por los cuerpos a temperaturas ordinarias se encuentra en la región infrarroja del espectro electromagnético. No existen límites en las longitudes de onda de la radiación electromagnética; es decir, todas las longitudes de onda (o frecuencias) son teóricamente posibles.

Las diferencias que poseen las longitudes de onda de las diversas clases de onda electromagnéticas tienen una gran importancia. Como sabemos, el comportamiento de las ondas depende fuertemente de los valores relativos de las longitudes de onda en comparación con los tamaños de los objetos físicos o aberturas que las ondas encuentren. Como las longitudes de onda de la luz caen en el intervalo más bien estrecho de 400 a 700 nm, son mucho más pequeñas que la mayoría de los objetos, de modo que suele ser válida la aproximación de los rayos (introducida en la sección 15.4). También son importantes la longitud de onda y la frecuencia a la hora de determinar las clases de interacción que se producen entre las ondas y la materia. Los rayos X, por ejemplo, que tienen longitudes de onda muy cortas y frecuencias elevadas, penetran fácilmente muchos materiales que son opacos a ondas luminosas de menor frecuencia, que son absorbidas por dichos materiales. Las microondas tiene longitudes de onda del orden de algunos centímetros y frecuencias que son cercanas a las frecuencias de resonancia natural de la moléculas de agua que hay en los sólidos y líquidos. Por tanto, las microondas son fácilmente absorbidas por las moléculas de agua que contienen los alimentos, que es el mecanismo mediante el cual calientan los hornos de microondas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

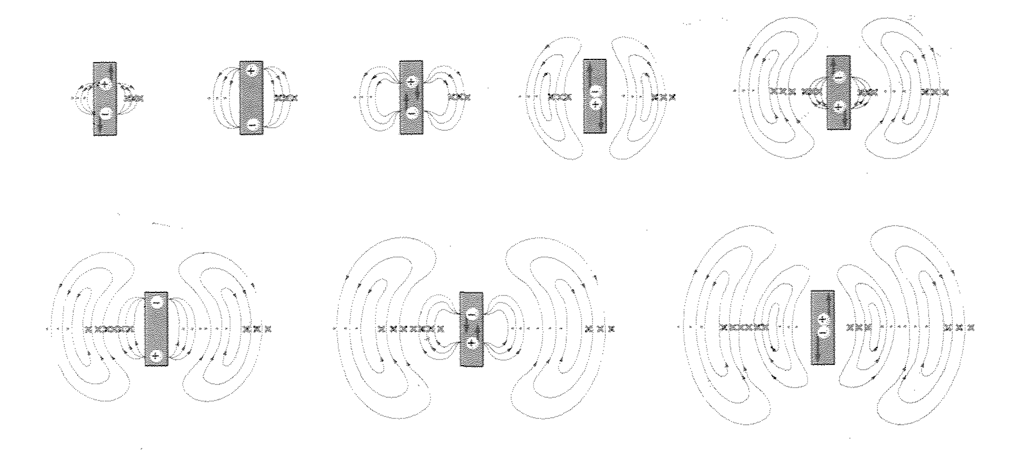


Figura 32.5 Líneas de los campos eléctrico y magnético producidas por un dipolo eléctrico oscilante.

Producción de ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas se producen cuando se aceleran las cargas eléctricas o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas verifican transiciones a estados de menor energía. Las ondas de radio, que tienen frecuencias desde 550 a 1600 kHz aproximadamente para los ondas de AM y desde 88 a 108 MHz para las ondas de FM, están producidas por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en las antenas de radio. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas.

Cuando los electrones deceleran como consecuencia de un choque contra un blanco metálico se produce un espectro continuo de rayos X llamado radiación de enfrenamiento o **bremsstrahlung** (más conocido por esta palabra alemana). Acompañando al amplio espectro continuo del bremsstrahlung existe además un espectro discontinuo de líneas de rayos X producidas por las transiciones de los electrones más internos en los átomos del material blanco.

Otro tipo de radiación es la llamada sincrotrónica que aparece en el movimiento orbital circular de las partículas cargadas (usualmente electrones o positrones) en los aceleradores nucleares llamados sincrotrones. Considerada originalmente por los científicos como una molestia fastidiosa, hoy estos rayos X sincrotrónicos se producen y se utilizan como una herramienta de diagnosis médica por la facilidad con que se manipulan los haces correspondientes mediante ópticas de reflexión y difracción. La radiación sincrotrónica se emite también por partículas cargadas atrapadas en campos magnéticos asociados con estrellas y galaxias. Actualmente se cree que la mayor parte de las ondas de radio de baja frecuencia que llegan a la tierra del espacio exterior se originan en forma de radiación sincrotrónica.

El calor se irradia por las cargas moleculares excitadas térmicamente. El espectro de la radiación térmica es el espectro de la radiación del cuerpo negro tratado en la sección 21.4.

Las ondas luminosas, con frecuencias del orden de 10^{14} Hz, se producen generalmente por transiciones de cargas ligadas a los átomos. En el capítulo 33 estudiaremos las fuentes de las ondas luminosas.

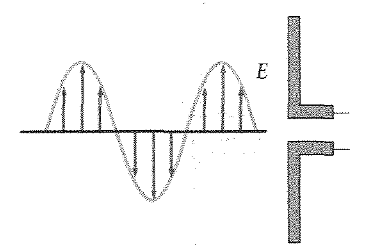


Figura 32.6 Antena dipolar eléctrica para la detección de la radiación electromagnética. El campo eléctrico alterno de la radiación produce una corriente alterna en la antena.

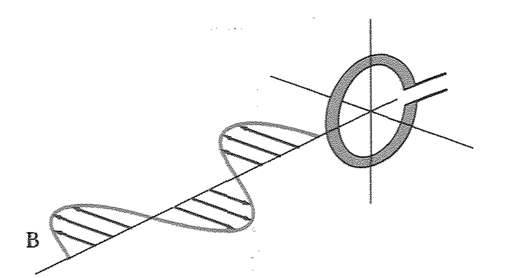


Figura 32.7 Antena en forma de espira para detectar la radiación electomagnética. El flujo magnético alterno que atraviesa la espira debido al campo magnético de la radiación, induce una corriente alterna en la misma.

Radiación del dipolo eléctrico

La figura 32.4 es un dibujo esquemático de una **antena dipolar eléctrica**, que consta de dos varillas conductoras dobladas que se alimentan mediante un generador de corriente alterna. En el instante $t = 0$, indicado en la figura 32.4*a*, los extremos de las varillas se encuentran cargados y existe un campo eléctrico cerca de las varillas paralelo a ellas. También existe un campo magnético (no indicado) que rodea las varillas y que se debe a la corriente que circula por ellas. Estos campos se mueven alejándose de las varillas con la velocidad de la luz. Al cabo de un cuarto de período, a $t = T/4$ (figura 32.4*b*), las varillas se encuentran descargadas y en sus proximidades el campo eléctrico es nulo. Para $t = T/2$ (figura 32.4*c*), las varillas se encuentran cargadas de nuevo, pero las cargas son opuestas a las que había en $t = 0$. Los campos eléctrico y magnético a grandes distancias de esta

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

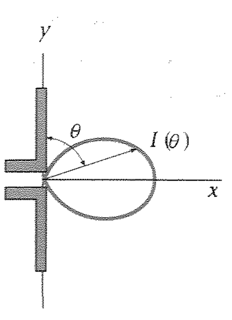


Figura 32.8 Representación polar de la intensidad de una radiación electromagnética producida por una antena dipolar eléctrica en función del ángulo. La intensidad $I(\theta)$ es proporcional a la longitud de la flecha. La intensidad es máxima perpendicularmente a la antena a $\theta = 90°$ y mínima a lo largo de la misma a $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$.

antena transmisora son muy diferentes de los que existen cerca de la misma. Lejos de la antena, los campos eléctrico y magnético oscilan en fase con un movimiento armónico simple, perpendicular el uno del otro y a la dirección de propagación de la onda. La figura 32.5 muestra los campos eléctrico y magnético lejos de una antena dipolar eléctrica.

Las ondas electromagnéticas de frecuencias correspondientes a la radio o a la televisión pueden detectarse mediante una antena dipolar receptora orientada de forma paralela al campo eléctrico, de modo que se induzca una corriente alterna en la antena (figura 32.6). También pueden detectarse con una antena en forma de lazo o espira orientada perpendicularmente al campo magnético, de forma que el flujo magnético variable que atraviese la espira induzca una corriente en la misma (figura 32.7). Las ondas electromagnéticas de frecuencias en el margen de luz visible pueden detectarse por el ojo o mediante película fotográfica, siendo ambos sistemas sensibles al campo eléctrico.

La radiación procedente de una antena de dipolo como la de la figura 32.4 se denomina **radiación dipolar eléctrica**. Muchas ondas electromagnéticas presentan las características de la radiación dipolar eléctrica. Una característica importante de este tipo de radiación es que la intensidad de la onda electromagnética radiada por una antena dipolar es cero a lo largo del eje de la antena y máxima en las direcciones perpendiculares al eje de la misma. Si el dipolo está en la dirección y con su centro en el origen, como se muestra en la figura 32.8, la intensidad es nula a lo largo del eje y y máxima en el plano xz. En la dirección de una línea que forme un ángulo θ con el eje y, la intensidad es proporcional a sen$^2\,\theta$.

EJEMPLO 32.3

Para detectar ondas electromagnéticas en las que E_{ef} = 0,15 V/m, se utiliza una antena constituida por una sola espira de alambre conductor de 10 cm de radio. Hallar la fem eficaz inducida en la espira si la frecuencia de la onda es (a) 600 kHz y (b) 600 MHz.

Esquema del problema La fem inducida en la espira está relacionada con la variación del flujo magnético por unidad de tiempo según la ley de Faraday.

(a) 1. La ley de Faraday relaciona la magnitud de la fem con la variación del flujo magnético por unidad de tiempo:

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\phi_m}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{ef} = \pi r^2 \left(\frac{dB}{dt}\right)_{ef}$$

2. Calcular dB_{ef}/dt a partir de un campo B sinusoidal:

$$B = B_0 \text{ sen } (kx - \omega t)$$

$$\frac{dB}{dt} = -\omega B_0 \cos (kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{ef} = \omega B_{ef}$$

3. Relacionar B_{ef} con E_{ef}:

$$B_{ef} = \frac{E_{ef}}{c}$$

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{ef} = \frac{\omega E_{ef}}{c} = \frac{2\pi f}{c} E_{ef}$$

4. Calcular $\mathcal{E}_{ef}$ para f = 600 Hz:

$$\mathcal{E}_{ef} = \pi r^2 \left(\frac{dB}{dt}\right)_{ef} = \pi r^2 \frac{2\pi f}{c} E_{ef}$$

$$= \pi(0{,}1 \text{ m})^2\ 2\pi(6\times 10^5 \text{ Hz})(0{,}15 \text{ V/m})/(3\times 10^8 \text{ m/s})$$

$$= 5{,}92\times 10^{-5} \text{ V}$$

(b) La fem inducida es proporcional a la frecuencia y por tanto, a 600 MHz será 100 veces superior que a 600 kHz:

$$\mathcal{E}_{ef} = (10^3)(5{,}92\times 10^{-5} \text{ V}) = 0{,}0592 \text{ V}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Energía y cantidad de movimiento en una onda electromagnética

Como todo tipo de onda, las ondas electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento. La energía transportada viene descrita por la intensidad, es decir, por la potencia media por unidad de área incidente sobre una superficie perpendicular a la dirección de propagación. La cantidad de movimiento por unidad de tiempo y por unidad de área transportada por una onda electromagnética se denomina **presión de radiación**.

Intensidad La intensidad de una onda es igual al producto de la velocidad de la onda por la densidad energética media, η_m (sección 15.3):

$$I = \eta_m c$$

La densidad energética total de la onda u es la suma de las densidades energéticas eléctrica y magnética. La densidad energética eléctrica u_e (ecuación 25.13) y la correspondiente magnética, u_m (ecuación 30.17) vienen dadas por

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{y} \qquad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En una onda electromagnética en el espacio libre, E es igual a cB, de tal modo que podemos expresar la densidad de energía magnética en función del campo eléctrico:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/C)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

en donde hemos utilizado $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. Por tanto, las densidades energéticas eléctrica y magnética son iguales. Considerando que $E = cB$, podemos expresar la densidad energética total en diversas formas útiles:

$$u = u_e + u_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} \qquad \textbf{(32.8)}$$

Densidad energética de una onda electromagnética

Para calcular la densidad energética *media*, reemplazamos los campos instantáneos E y B por sus valores eficaces $E_{ef} = E_0/\sqrt{2}$ y $B_{ef} = B_0/\sqrt{2}$, en donde E_0 y B_0 son los valores máximos de los campos. La intensidad es, por tanto

$$I = \eta_m c = \frac{E_{ef}B_{ef}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = |\mathbf{S}|_{ef} \qquad \textbf{(32.9)}$$

Intensidad de una onda electromagnética

en donde el vector

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} \qquad \textbf{(32.10)}$$

Definición —Vector de Poynting

se denomina **vector de Poynting**, en honor a su descubridor, Sir John Poynting. La magnitud media o eficaz de **S** es la intensidad de la onda y la dirección de **S** es la dirección de propagación de la onda.

Presión de radiación A continuación mostraremos mediante un ejemplo sencillo que una onda electromagnética transporta cantidad de movimiento. Consideremos una onda que se mueve a lo largo del eje x e incide sobre una carga estacionaria como indica

www.elsolucionario.net

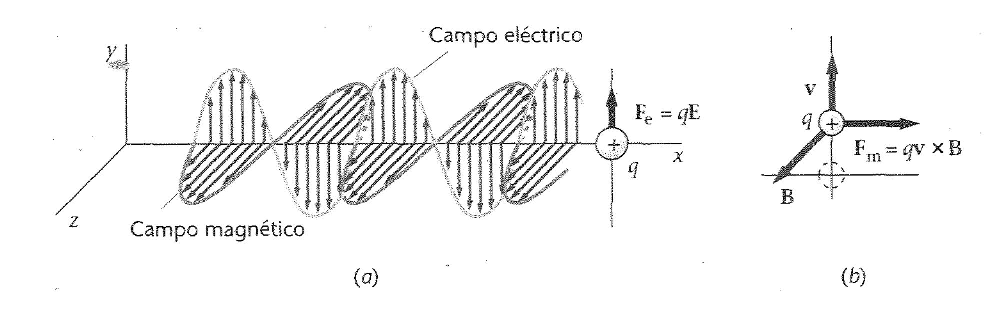


Figura 32.9 Onda electromagnética incidente sobre una carga puntual que está inicialmente en reposo sobre el eje x. (a) La fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ acelera la carga en dirección hacia arriba. (b) Cuando la carga ha adquirido una velocidad $\mathbf{v}$ hacia arriba, la fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ acelera la carga en la dirección de la onda.

la figura 32.9. Por sencillez supondremos que $\mathbf{E}$ se encuentra en la dirección y y $\mathbf{B}$ en la dirección z y despreciamos la dependencia con el tiempo de los campos. La partícula experimenta una fuerza $q\mathbf{E}$ en la dirección y y, por tanto, es acelerada por el campo eléctrico. En cualquier instante t, la velocidad en la dirección y es:

$$v_y = at = \frac{qE}{m}\,t$$

Al cabo de un corto tiempo t_1, la carga ha adquirido una energía cinética igual a

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mq^2E^2t_1^2}{m^2} = \frac{1}{2}\,\frac{q^2E^2}{m}\,t_1^2 \qquad \textbf{(32.11)}$$

Al moverse en la dirección y, la carga experimenta una fuerza magnética

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qv_y\mathbf{j} \times B\mathbf{k} = qv_yB\mathbf{i} = \frac{q^2EB}{m}\,t\mathbf{i}$$

Obsérverse que esta fuerza se encuentra en la dirección de propagación de la onda. A partir de $F_x = dp_x/dt$, podemos determinar la cantidad de movimiento p_x transferido por la onda a la partícula en el tiempo t_1:

$$p_x = \int_0^{t_1} F_x\,dt = \int_0^{t_1} \frac{q^2EB}{m}\,t\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{q^2EB}{m}\,t_1^2$$

Teniendo en cuenta que $B = E/c$, resulta:

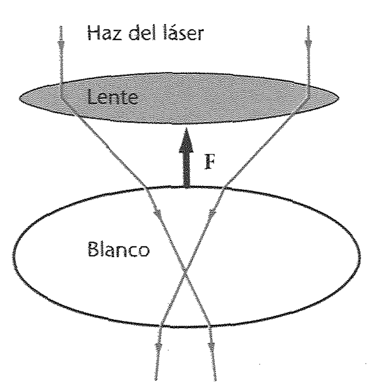
$$p_x = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\,\frac{q^2E^2}{m}\,t_1^2\right) \qquad \textbf{(32.12)}$$

Comparando las ecuaciones 32.11 y 32.12, vemos que la cantidad de movimiento adquirida por la carga en la dirección de la onda es $1/c$ multiplicada por la energía. Aunque nuestro sencillo cálculo no ha sido riguroso, los resultados son correctos. La magnitud de la cantidad de movimiento transportada por una onda electromagnética es $1/c$ multiplicado por la energía que transporta la onda:

$$p = \frac{U}{c} \qquad \textbf{(32.13)}$$

Cantidad de movimiento y energía de una onda electromagnética

Como la intensidad de una onda es la energía por unidad de tiempo y por unidad de área, la intensidad dividida por c es la cantidad de movimiento transportada por la onda por unidad de tiempo y unidad de área. La cantidad de movimiento transportada por unidad de tiempo es una fuerza. La intensidad de onda dividida por c es, pues, una



"Las pinzas de láser" utilizan la cantidad de movimiento transportada por las ondas electromagnéticas para manipular blancos a escala molecular. Los dos rayos láser indicados se refractan cuando pasan a través de un blanco transparente, tal como una célula biológica, o incluso a escala menor sobre una pequeña cuenta transparente asociada a una gran molécula dentro de una célula. En cada refracción, los rayos se doblan hacia abajo, lo cual incrementa el componente en este sentido de la cantidad de movimiento de los rayos. El blanco ejerce así una fuerza hacia abajo sobre los haces de láser y estos ejercen una fuerza hacia arriba sobre el blanco, con lo cual éste es impulsado hacia la fuente de láser. La fuerza es típicamente del orden de piconewtons. Las pinzas de láser se han utilizado para realizar efectos tan sorprendentes como el estiramiento de un arrollamiento de DNA.

www.elsolucionario.net

009197

fuerza por unidad de área, que resulta ser una presión. Esta presión se denomina **presión de radiación** P_r:

$$P_r = \frac{I}{c} \qquad (32.14)$$

Presión de radiación e intensidad

Podemos relacionar la presión de radiación con los campos eléctrico y magnético con el empleo de la ecuación 32.9 para relacionar I con E y B, y la ecuación 32.7 para eliminar E o B:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0 c} = \frac{E_{ef} B_{ef}}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \qquad (32.15)$$

Presión de radiación en función de E y B.

Consideremos una onda electromagnética que incide normalmente sobre una cierta superficie. Si la superficie absorbe la energía U de la onda electromagnética, también absorbe la cantidad de movimiento p dada por la ecuación 32.14, y la presión ejercida sobre la misma es igual a la presión de radiación. Si la onda se refleja, la cantidad de movimiento transferida sobre la superficie es $2p$ porque la onda transporta ahora cantidad de movimiento en sentido opuesto. La presión ejercida sobre la superficie por la onda es entonces el doble de la presión de radiación.

EJEMPLO 32.4

Una bombilla eléctrica emite ondas electromagnéticas uniformemente en todas direcciones. Calcular (a) la intensidad, (b) la presión de radiación y (c) los campos eléctrico y magnético a una distancia de 3 m de la bombilla, suponiendo que se convierten 50 W en radiación electromagnética.

Esquema del problema A una distancia r de la bombilla, la energía se distribuye uniformemente a lo largo de un área de $4\pi r^2$. La intensidad es la potencia dividida por el área. La presión de radiación se determina a partir de la expresión $P_r = I/c$.

(a) 1. Dividir la potencia emitida por el área para determinar la intensidad:

$$I = \frac{50\text{ W}}{4\pi r^2}$$

2. Sustituir $r = 3$ m:

$$I = \frac{50\text{ W}}{4\pi(3\text{ m})^2} = 0{,}442\text{ W/m}^2$$

(b) La presión de radiación es la intensidad dividida por la velocidad de la luz:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{0{,}442\text{ W/m}^2}{3\times10^8\text{ m/s}} = 1{,}47\times10^{-9}\text{ Pa}$$

(c) 1. B_0 está relacionado con P_r por la ecuación 32.15:

$$B_0 = (2\mu_0 P_r)^{1/2} = [2(4\pi\times10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})(1{,}47\times10^{-9}\text{ Pa})]^{1/2} = 6{,}08\times10^{-8}\text{ T}$$

2. El valor máximo del campo eléctrico E_0 es igual al producto de c por B_0:

$$E_0 = cB_0 = (3\times10^8\text{ m/s})(6{,}08\times10^{-8}\text{ T}) = 18{,}2\text{ V/m}$$

3. Los campos eléctrico y magnético en el punto considerado son de la forma:

$E = E_0$ sen ωt y $B = B_0$ sen ωt

con $E_0 = 18{,}2$ V/m y $B_0 = 6{,}08\times10^{-8}$ T.

Observaciones Nótese que la presión calculada en (b) es muy pequeña comparada con la presión atmosférica, la cual es del orden de 10^5 Pa.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 32.5 **Un astronauta, portador de un aparato de rayos láser de 1 kW, se ha separado 20 m de su vehículo espacial. Si su masa total, incluido el aparato láser y el traje espacial es de 95 kg, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar el vehículo si apunta con el láser la dirección contraria?**

Esquema del problema El láser emite luz que transporta cantidad de movimiento. Por el principio de conservación de esta magnitud, el astronauta recibe una cantidad de movimiento igual y opuesta hacia la nave espacial. La cantidad de movimiento transportada por la luz es $p = U/c$, en donde U es la energía de la luz. Si la potencia del láser es $P = dU/dt$, la variación de cantidad de movimiento producida por el láser es $dp/dt = (dU/dt)/c = P/c$. Esta es la fuerza constante ejercida sobre el astronauta.

1. El tiempo empleado está relacionado con la distancia y la aceleración: $x = \frac{1}{2}at^2; \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$

2. La aceleración es la fuerza dividida por la masa: $a = \frac{F}{m} = \frac{P/c}{m} = \frac{1000\ \text{W}}{(95\ \text{kg})(3 \times 10^8\ \text{m/s})} = 3{,}51 \times 10^{-8}\ \text{m/s}^2$

3. Utilizar esta aceleración para calcular el tiempo t: $t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(20\ \text{m})}{3{,}51 \times 10^{-8}\ \text{m/s}^2}} = 3{,}38 \times 10^4\ \text{s} = 9{,}38\ \text{h}$

Observaciones Nótese que la aceleración obtenida aquí es extraordinariamente pequeña —del orden de una mil millonésima de la aceleración de la gravedad—. En el instante de llegar al vehículo espacial, la velocidad del astronauta sería $v = at = 1{,}19$ mm/s, lo cual es prácticamente imperceptible.

OPCIONAL

32.4 ■ La ecuación de onda para las ondas electromagnéticas

En la sección 15.1 vimos que las ondas en una cuerda obedecen a una ecuación en derivadas parciales llamada **ecuación de onda**:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad (32.16)$$

en donde $y(x,t)$ es la función de onda, que en el caso de las ondas en una cuerda corresponde al desplazamiento de la cuerda.[1] La velocidad de la onda es $\sqrt{F/\mu}$, siendo F la tensión y m la densidad másica lineal. Las soluciones de esta ecuación son funciones de onda armónicas de la forma

$$y(x,t) = y_0 \text{ sen } (kx - \omega t)$$

en donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular.

Las ecuaciones de Maxwell implican que tanto **E** como **B** obedecen a ecuaciones de onda semejantes a la ecuación 32.16. Consideramos sólo el espacio libre, en el cual no hay cargas o corrientes y suponemos que **E** y **B** son funciones del tiempo y de una sola coordenada espacial que tomaremos como coordenada x. Una onda de este tipo se llama **onda plana**, porque las magnitudes de los campos son constantes a través de cualquier plano perpendicular al eje x. Para una onda electromagnética plana que se propaga paralelamente al eje x, los componentes x de los campos son nulos, de modo que los vectores

[1] Las derivadas son parciales porque la función de onda depende de x y de t.

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

E y B son perpendiculares al eje x y obedecen respectivamente a las siguientes ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(32.17a)}$$

Ecuación de onda para **E**

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(32.17b)}$$

Ecuación de onda para **B**

donde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ es la velocidad de las ondas.

Deducción de la ecuación de onda ■

Relacionemos en primer lugar la derivada respecto al tiempo de uno de los vectores campo con la derivada respecto al espacio del otro. Hacemos esto aplicando las dos ecuaciones de Maxwell 32.6c y 32.6d a curvas del espacio adecuadamente elegidas. Primero relacionaremos la derivada espacial de E_y con la derivada respecto al tiempo de B_z aplicando la ecuación 32.6c (que es la ley de Faraday) a la línea rectangular de lados Δx y Δy que se encuentra contenida en el plano xy, como se muestra en la figura 32.10. Suponiendo que Δx y Δy son muy pequeños, la integral curvilínea de E a lo largo de esta línea vale aproximadamente

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = E_y(x_2)\,\Delta y - E_y(x_1)\,\Delta y$$

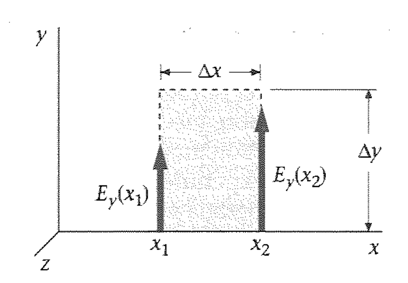


Figura 32.10 Línea rectangular cerrada dibujada en el plano xy para la deducción de la ecuación.

en donde $E_y(x_1)$ y $E_y(x_2)$ son los valores de E_y en los puntos x_1 y x_2, respectivamente. Las contribuciones del tipo $E_x\,\Delta x$ de los lados superior e inferior se anulan entre sí, ya que $E_x = 0$. Como Δx es muy pequeño, podemos sustituir la diferencia de E_y en los puntos x_1 y x_2 aproximadamente por

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E \approx \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\Delta x$$

Entonces

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y$$

El flujo del campo magnético que atraviesa el área limitada por esta curva vale aproximadamente

$$\int_s B_{\rm n}\, dA = B_z\,\Delta x\,\Delta y$$

La ley de Faraday nos da entonces

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\,\Delta x\,\Delta y$$

o sea,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \textbf{(32.18)}$$

La ecuación 32.18 implica que si existe un componente de campo eléctrico E_y que depende de x, debe existir un componente de inducción magnética B_z que depende del tiempo o, inversamente, si existe un campo de inducción magnética B_z que depende del tiempo, debe existir un campo eléctrico E_y que depende de x. Podemos obtener una ecuación semejante relacionando E_y con B_z aplicando la ecuación 32.6d al rectángulo de lados Δx y Δz contenido en el plano xz, como se ve en la figura 32.11.

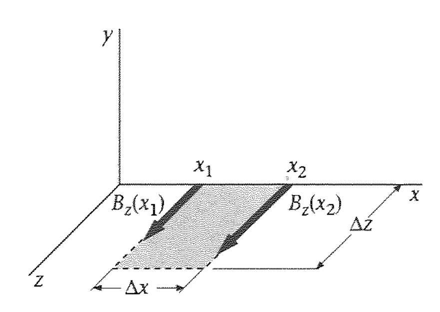


Figura 32.11 Línea rectangular cerrada dibujada en el plano xz par la deducción de la ecuación 32.19.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Explorando la naturaleza

James Clerk Maxwell (1831–1879)

C. W. F. Everitt
Stanford University

Un día de 1877 un joven estudiante escocés llamado Donald MacAlister escribía a su familia desde la Universidad de Cambridge contando que acababa de comer con un profesor que era "uno de los más brillantes y un tradicional lord escocés, tanto en sus maneras como en su lenguaje". James Clerk Maxwell era un hombre rico, un experto nadador y jinete, propietario de una hacienda de 2000 acres en Escocia —y un científico cuya obra permanece asombrosamente en vigor hasta hoy. Era el físico matemático más grande desde Newton; había creado la teoría electromagnética de la luz y predicho la existencia de las ondas de radio; había escrito el primer artículo importante sobre la teoría de control; así como sobre mecánica estadística, una ciencia que creó junto con Ludwig Boltzmann. Realizó junto con su esposa una serie de brillantes experimentos sobre la visión en color y consiguió la primera fotografía en color. En los dos últimos años antes de su muerte debida a un cáncer en 1879, a la edad de 48 años, sentó las bases de una nueva materia que iba a alcanzar gran auge en el siglo XX, la dinámica de los gases enrarecidos.

La teoría electromagnética de la luz de Maxwell arranca del trabajo de dos hombres, Michael Faraday y William Thomson. La invención de Faraday del motor eléctrico y sus investigaciones sobre inducción electromagnética, electroquímica, acción dieléctrica y dimagnética, y rotación magnético-óptica le convirtieron según palabras de Maxwell, en "el núcleo de cualquier cosa eléctrica desde 1830". Sus contribuciones teóricas se basaron en sus ideas avanzadas respecto a las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas, en particular en las relaciones geométricas que gobiernan los fenómenos electromagnéticos y en el concepto de fuerzas magnéticas que no podía ser explicado a partir de atracciones y repulsiones entre elementos de corriente sino atribuyendo a las líneas de fuerza la propiedad de acortarse y repelerse entre sí lateralmente (figura E32.1). Thompson quería relacionar las líneas de fuerza con las teorías ya existentes de electrostática y magnetoestática, inventar técnicas analíticas ingeniosas que resolvieran los problemas eléctricos, y dar la importancia que les correspondía a los principios energéticos en el electromagnetismo. Maxwell introdujo una serie de conceptos nuevos: la *función electrotónica* (vector potencial), la densidad energética del campo, la corriente de desplazamiento; organizó esta materia en una estructura coherente y en 1861 descubrió la trascendental equivalencia entre luz y ondas electromagnéticas.

La primera parte de la publicación de Maxwell "Las líneas de fuerza de Faraday" (1855-1856) desarrollaba una analogía, debida principalmente a Thomson, entre las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas y las líneas de corriente desplazándose en un fluido incompresible. Maxwell utilizó esta analogía para interpretar muchas de las observaciones de Faraday, e hizo uso del prólogo de

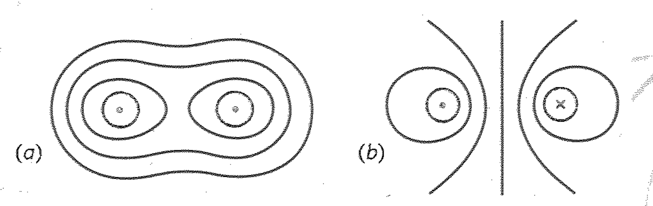


Figura E32.1 Explicación de Faraday de las fuerzas entre alambres conductores de corriente. Los dos diagramas muestran las líneas de fuerza que se observan cuando las corrientes fluyen por alambres paralelos. Faraday supuso que las líneas de fuerza tendían a acortarse y repelerse entre sí lateralmente. (*a*) Para alambres en los que las corrientes fluyeran en la misma dirección, las líneas de fuerza tendían a aproximarse. (*b*) En los alambres en los que la corriente fluye en sentidos opuestos, las líneas de fuerza tienden a alejarse.

esta publicación para iniciar una discusión sobre el significado de las analogías en física. Posteriormente, y siguiendo las bases sentadas por Faraday y Thomson, Maxwell extendió su estudio al electromagnetismo. Formuló un grupo de ecuaciones que resumen las relaciones de los campos eléctrico y magnético con las cargas y corrientes que los producen (el inicio de lo que hoy en día se conoce como ecuaciones de Maxwell). Estas ecuaciones describen los fenómenos con gran precisión y elegancia desde un punto de vista completamente diferente a las entonces populares teorías de acción a distancia de André-Marie Ampère y Wilhelm Weber.

Después de este brillante comienzo cabría haber esperado un buen número de publicaciones que expusieran estas nuevas ideas. Pero los físicos las ignoraron, y Maxwell tenía el hábito de investigar sobre varios temas a la vez, dejando transcurrir a menudo largos intervalos de tiempo entre publicaciones sucesivas sobre el mismo campo. Seis años después apareció su siguiente publicación, "Las líneas de fuerza en física", publicado en cuatro parte en 1861-1862. Durante este intervalo de tiempo Maxwell llevó a cabo brillantes contribuciones en tres campos diferentes antes de volver a centrar sus esfuerzos en el electromagnetismo: visión en color, la teoría de los anillos de Saturno y la teoría cinética de los gases.

En su publicación "Las líneas de fuerza física" Maxwell desarrolló su modelo de vórtices-moleculares del campo electromagnético. Para explicar el diagrama de tensiones asociado con las líneas de fuerza de Faraday, Maxwell investigó las propiedades de un medio que ocupara todo el espacio en el cual pequeños vórtices moleculares giran con sus ejes paralelos a las líneas de fuerza. Cuanto más próximas están las líneas, más rápida es la rotación de los vórtices. En un medio de este tipo las líneas de fuerza tienden a acortarse y a repelerse entre sí lateralmente, lo que explica correctamente las fuerzas entre corrientes e imanes; la pregunta es ¿qué es lo que hace girar a los vórtices? A este respecto Maxwell concibió una idea tan ingeniosa como fantástica. Maxwell postuló que una corriente eléctrica consiste en el movimiento de diminutas partículas que se engranan como rodamientos con los vórtices, y que el medio está lleno de partículas similares entre los vórtices. En la figura E32.2 se muestra el esquema. Maxwell afirmaba:

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

No he introducido [esta hipótesis] como un modo de conexión que exista en la naturaleza... [pero] creo que cualquier persona que comprenda [su] carácter provisional y temporal... encontrará en ella ayuda para llegar a comprender la verdadera interpretación de los fenómenos [electromagnéticos].

La pregunta importante es cómo encajar los fenómenos electrostáticos en el modelo. Maxwell consideró que el medio era elástico. De este modo las fuerzas magnéticas se explican por rotaciones en el medio, y las fuerzas eléctricas por distorsión elástica. Cualquier medio elástico es capaz de transmitir ondas. En el medio de Maxwell la velocidad de las ondas resultó estar relacionada con el cociente entre fuerzas eléctricas y magnéticas. Cuantificando los resultados experimentales realizados por G. Kohlrausch y W. Weber en 1856, Maxwell encontró para su asombro que la velocidad de propagación era igual a la de la luz. Con excitación manifestaba *"no es posible rehuir la deducción de que la luz está constituida por ondulación transversal del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos"*.

Una vez hecho el gran descubrimiento, Maxwell desechó rápidamente aquello que podía estorbar en su modelo. En lugar de intentar una explicación mecánica más refinada de los fenómenos, formuló un sistema de ecuaciones electromagnéticas de las que dedujo que las ondas de fuerza eléctricas y magnéticas se propagaban a través del espacio con la velocidad de la luz. Por esto, la teoría se denomina teoría *electromagnética* de la luz, en contraste con las teorías del éter mecánico que le precedieron. La teoría se hizo pública en dos artículos de 1865 y 1868, y en su forma más general en el *Tratado de Electricidad y Magnetismo* publicado en 1873, un trabajo de tal magnitud que Robert Andrews Millikan, autor del famoso experimento de la gota líquida para medir la carga de electrón, lo comparó con los *Principia* de Newton considerando a ambos como los libros de máxima influencia en la historia de la física: "uno de ellos ha creado el mundo mecánico moderno y el otro el mundo eléctrico".

Igualmente profundas fueron las contribuciones de Maxwell a la física estadística y molecular. Se iniciaron con una publicación en 1859 sobre la teoría cinética de los gases, en la que Maxwell introdujo la función de distribución de velocidades y enunció el *teorema de la equipartición* (sección 18.5), que en su forma original enunciaba que las energías translacionales y rotacionales medias de un gran número de moléculas que se encontrasen colisionando, ya fuesen de la misma o de diferentes especies eran iguales. Uno de los resultados fue la estimación por Maxwell del recorrido libre medio de una molécula gaseosa, que en 1865 Loschmidt aplicó para realizar las primeras estimaciones serias de los diámetros de las moléculas. Posteriormente, Maxwell desarrolló la teórica general de los fenómenos de transporte, de las que se derivan las ecuaciones de Boltzmann; creó la dinámica de gases enrarecidos; y concibió ese "ser muy pequeño PERO vivo" que se denomina diablillo de Maxwell.

El diablillo, así denominado por Kelvin, es uno de los primeros ejemplos en física de un "experimento mental". Maxwell imaginó dos cámaras de gas, A y B, separadas por una pared en donde había una puerta en forma de trampilla y que estaba guardada por un ser diminuto con una vista tan aguda que podía discernir el movimiento de las moléculas individuales. Abriendo la trampilla cuando se acercaba una molécula rápida procedente de la cámara A o una molécula lenta procedente de la cámara B, el diablillo podía redistribuir las velocidades haciendo que B fuese más caliente que A sin hacer ningún otro trabajo y, por tanto, violando el segundo principio de la termodinámica. El punto esencial que Maxwell quería demostrar era que dicho segundo principio es inherentemente una ley estadística y no dinámica.

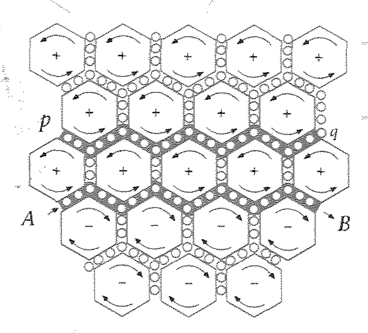
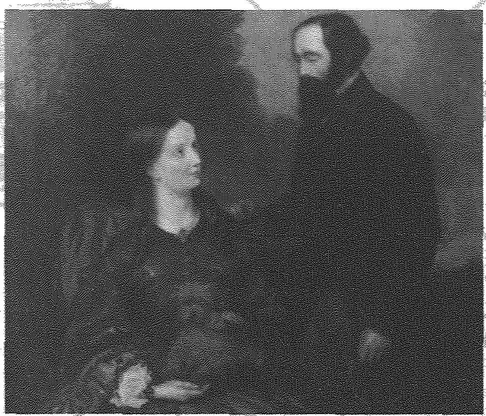


Figura E32.2 Modelo de vórtices de Maxwell del campo magnético. Los vórtices en rotación representan líneas de fuerza magnética. Se semejan a pequeñas partículas que actúan como engranajes. En el espacio libre estas partículas carecen de libertad de movimiento excepto para una reacción elástica pequeña (la corriente de desplazamiento), pero son libres de moverse en un alambre conductor. Su movimiento constituye una corriente eléctrica, que a su vez pone a los vórtices en rotación, creando el campo magnético alrededor del alambre. *A* y *B* representan la corriente que atraviesa un alambre, y *p* y *q* una corriente inducida en un alambre adyacente. (Tomado de *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Vol. I, fig. 2 después de pág. 448.)

El trabajo realizado por Maxwell y Boltzmann sobre mecánica estadística tuvo profundas implicaciones en la física moderna. Si sus éxitos en mecánica clásica estadística fueron brillantes, sus "fracasos" fueron de algún modo más llamativos, como el propio Maxwell observó. El teorema de la equipartición dio la respuesta a la razón por la cual el cociente de los calores específicos de los gases estaba en desacuerdo con los resultados experimentales, mientras que algunos de los teoremas de Boltzmann "explicaban demasiado" ya que se podían aplicar tanto a las propiedades de los sólidos y líquidos como a los gases. Estos temas permanecieron rodeados de misterio y sin resolverse hasta que en 1900 surgió la hipótesis cuántica de Planck. Escribiendo respecto a ellos en 1877, Maxwell confesaba su desconcierto y decía al respecto que "la ignorancia consciente es el preludio de cada uno de los avances reales en el conocimiento".

Maxwell era un hombre sensible, de fuertes creencias religiosas y con un fascinante y asombroso sentido del humor. Muchas de sus cartas revelan una deliciosa ironía. También poseía un discreto talento como poeta, normalmente alegre, pero ocasionalmente profundo. La última estrofa de un poema dedicado a su mujer, escrito en 1867, era

Todos los poderes de la mente, toda la fuerza de la voluntad
Pueden quedarse en polvo al morir,
Pero el amor es nuestro, y así seguirá siendo
Cuando huyan la tierra y el mar.



James Clerk Maxwell (1831-1878) con su mujer, Katherine Mary.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

En el caso en que no existan corrientes de conducción, la ecuación 32.6d se reduce a

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s E_n \, dA$$

Omitimos los detalles de este cálculo, que son análogos a los realizados para obtener la ecuación 32.18; el resultado es

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{32.19}$$

Podemos eliminar B_z o E_y de las ecuaciones 32.18 y 32.19 derivando cualquiera de ellas respecto a x o t. Si derivamos ambos miembros de la ecuación 32.18 respecto a x, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

o

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

en donde hemos intercambiado el orden de las derivadas respecto al tiempo y al espacio en el segundo miembro. Ahora sustituimos $\partial B_z/\partial x$ mediante la ecuación 32.19:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right)$$

que nos da la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{32.20}$$

Comparando esta ecuación con la 32.16, vemos que E_y obedece a una ecuación de onda para ondas con velocidad $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ que es la ecuación 32.1.

Por el contrario, si hubiésemos escogido eliminar E_y entre las ecuaciones 32.18 y 32.19 (derivando, por ejemplo, la ecuación 32.18 respecto a t) habríamos obtenido una ecuación idéntica a la 32.20 sustituyendo E_y por B_z. Así pues hemos demostrado que tanto el campo eléctrico E_y como el magnético B_z obedecen a una ecuación de onda para las ondas que se mueven con velocidad $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, que es la velocidad de la luz.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que hemos utilizado hasta ahora, y aplicando la ecuación 32.6c (ley de Faraday) a la línea del plano xz (figura 32.11) obtendríamos

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{32.21}$$

Análogamente, la aplicación de la ecuación 32.6d a la línea del plano xy de la figura 32.10 da

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{32.22}$$

Podemos utilizar estos resultados para demostrar que, en el caso de una onda que se propaga en la dirección x, los componentes E_z y B_y también obedecen la ecuación de ondas.

Consideremos para ello la función de onda armónica de la forma

$$E_y = E_{y0} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{32.23}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Si sustituimos esta solución en la ecuación 32.18, vemos que el campo magnético B_z está en fase con el campo eléctrico E_y. Así resulta

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial t} = -kE_{y0}\cos(kx-\omega t)$$

Resolviendo esta ecuación resulta para B_z:

$$B_z = \frac{k}{\omega}E_{y0}\,\text{sen}\,(kx-\omega t) = B_{z0}\,\text{sen}\,(kx-\omega t) \qquad \textbf{(32.24)}$$

en donde

$$B_{z0} = \frac{k}{\omega}E_{y0} = \frac{E_{y0}}{c}$$

y $c = \omega/k$ es la velocidad de la onda. (Hemos omitido la constante arbitraria de integración porque no desempeña ningún papel en la onda estudiada.) Como los campos eléctrico y magnético oscilan en fase con la misma frecuencia, tenemos el resultado general de que el valor del campo eléctrico es c veces el valor del campo magnético en el caso de una onda electromagnética:

$$E = cB$$

que es la ecuación 32.7.

Vemos que las ecuaciones de Maxwell implican las ecuaciones de onda 32.17a y 32.17b para los campos eléctrico y magnético; y que si E_y varía armónicamente, como en la ecuación 32.23, el campo magnético B_z está en fase con E_y y su amplitud está relacionada con la amplitud de E_y por $B_z = E_y/c$. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda, como se ve en la figura 32.3.



EJEMPLO 32.6

El vector de campo eléctrico de una onda electromagnética viene dado por $\mathbf{E}(x, t) = E_0\,\text{sen}\,(kx-\omega t)\mathbf{j} + E_0\cos(kx-\omega t)\mathbf{k}$. (a) Hallar el campo magnético correspondiente. (b) Calcular $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$.

Esquema del problema Podemos determinar B_y utilizando la ecuación 32.21 o la 32.22, y B_z mediante la ecuación 32.18 o la 32.19. Los productos $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ se determinan mediante operaciones vectoriales estándar.

(a) 1. Utilizar la ecuación 32.21 para obtener una relación para B_y:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[E_0\cos(kx-\omega t)] = -kE_0\,\text{sen}\,(kx-\omega t)$$

2. Integrar el resultado anterior (despreciando la constante de integración) para determinar B_y. Tomar $B_0 = kE_0/\omega = E_0/c$:

$$B_y = [kE_0\cos(kx-\omega t)]\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -B_0\cos(kx-\omega t)$$

3. La ecuación 32.18 nos da una relación para B_z:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[E_0\,\text{sen}\,(kx-\omega t)] = -kE_0\cos(kx-\omega t)$$

4. Integrar y usar $B_0 = kE_0/\omega = E_0/c$ para determinar B_z:

$$B_z = [-kE_0\,\text{sen}\,(kx-\omega t)]\left(\frac{-1}{\omega}\right) = B_0\,\text{sen}\,(kx-\omega t)$$

(b) 1. Hacer $\theta = kx - \omega t$ para simplificar la notación y calcular $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} &= [E_0\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j} + E_0\cos\theta\,\mathbf{k}]\cdot[-B_0\cos\theta\,\mathbf{j} + B_0\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}]\\ &= -E_0B_0\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + E_0B_0\,\text{sen}^2\,\theta\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\ &\quad -E_0B_0\cos^2\theta\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + E_0B_0\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\ &= -E_0B_0\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 0 - 0 + E_0B_0\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 0\end{aligned}$$

OPCIONAL

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

2. Calcular $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\times \mathbf{B} &= [E_0 \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} + E_0 \cos \theta \, \mathbf{k}] \times [-B_0 \cos \theta \, \mathbf{j} + B_0 \text{ sen } \theta \, \mathbf{k}] \\ &= E_0 B_0 \text{ sen}^2 \theta \, \mathbf{j} \times \mathbf{k} + (-E_0 B_0 \cos^2 \theta \, \mathbf{k} \times \mathbf{j}) \\ &= E_0 B_0 \text{ sen}^2 \theta \, \mathbf{i} + E_0 B_0 \cos^2 \theta \, \mathbf{i} = E_0 B_0 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Observaciones Vemos que **E** y **B** son perpendiculares entre sí y que $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ posee la dirección de propagación de la onda. Este tipo de onda electromagnética se dice que está *polarizada circularmente*. En un punto fijo x, ambos vectores giran barriendo un círculo en el plano perpendicular a x con frecuencia angular ω. Ambos campos, **E** y **B**, tienen módulos constantes, como puede verse al calcular $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ o $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.

Ejercicio Calcular $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ (*Respuestas*: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E_y^2 + E_z^2 = E_0^2 \text{ sen}^2 (kx - \omega t) + E_0^2 \cos^2 (kx - \omega t) = E_0^2$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B_y^2 + B_z^2 = B_0^2 \cos^2 (kx - \omega t) + B_0^2 \text{ sen}^2 (kx - \omega t)$.)

Resumen

1. Las ecuaciones de Maxwell resumen las leyes fundamentales de la física que gobiernan la electricidad y el magnetismo.
2. Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, las ondas de la radio y televisión, los rayos X, los rayos gamma, las microondas, etc.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Corriente de desplazamiento de Maxwell	La ley de Ampère puede generalizarse para aplicarse a corrientes discontinuas si se sustituye la corriente de conducción I por $I + I_d$, en donde I_d se denomina corriente de desplazamiento de Maxwell: $$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (32.3)$$
Forma generalizada de la ley de Ampère	$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (32.4)$$
2. Ecuaciones de Maxwell	Las leyes de electricidad y magnetismo se resumen mediante las ecuaciones de Maxwell.
Ley de Gauss	$$\oint_S E_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}} \quad (32.6a)$$
Ley de Gauss para el magnetismo (los polos magnéticos aislados no existen)	$$\oint_S B_n \, dA = 0 \quad (32.6b)$$
Ley de Faraday	$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n \, dA \quad (32.6c)$$
Ley de Ampère modificada	$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S E_n \, dA \quad (32.6d)$$
3. Ondas electromagnéticas	En una onda electromagnética, los vectores de campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Sus módulos están relacionados por $$E = cB \quad (32.7)$$
Velocidad de la onda	$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (32.1)$$
Espectro electromagnético	Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, las ondas de radio, los rayos X, los rayos gamma, las microondas y otras. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren únicamente en la longitud de onda y en la frecuencia. El ojo humano es sensible al intervalo de 400 a 700 nm aproximadamente.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Se producen ondas electromagnéticas cuando se aceleran cargas eléctricas. Las cargas oscilantes en una antena de dipolo eléctrico radian ondas electromagnéticas con una intensidad que es máxima en direcciones perpendiculares a la antena y cero a lo largo de su eje. Perpendicularmente a la antena y muy lejos de ella, el campo eléctrico de la onda electromagnética es paralelo a la antena.

Radiación del dipolo eléctrico

$$u = u_e + u_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad (32.8)$$

Densidad de energía de una onda electromagnética

$$I = \eta_m c = \frac{E_{ef} B_{ef}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = |\mathbf{S}|_{ef} \quad (32.9)$$

Intensidad de una onda electromagnética

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (32.10)$$

Vector de Poynting

$$p = \frac{U}{c} \quad (32.13)$$

Cantidad de movimiento de una onda electromagnética

$$P_r = \frac{I}{c} \quad (32.14)$$

Presión de radiación

4. **Ecuaciones de onda** (opcional)

Las ecuaciones de Maxwell implican que los vectores de campo eléctrico y magnético en el espacio libre obedecen una ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (32.17a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (32.17b)$$

Guía para la resolución de problemas

Dibujar ante todo un diagrama claro que incluya las características importantes del problema. En aquellos casos que incluyen la corriente de desplazamiento de Maxwell es útil dibujar la superficie a través de la cual ha de calcularse el flujo eléctrico y la curva límite C.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Corriente de desplazamiento	
Determinar la corriente de desplazamiento debida a un campo eléctrico que depende del tiempo.	La corriente de desplazamiento I_d viene dada por la ecuación 32.3, $I_d = \epsilon_0\, d\phi_e/dt$, donde ϕ_e es el flujo eléctrico. **Ejemplo 32.1**
Determinar el campo magnético debido a una corriente de desplazamiento.	El campo magnético puede calcularse a partir de la forma generalizada de la ley de Ampère, $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0(I + I_d)$ en donde I es la corriente de conducción e I_d la corriente de desplazamiento. **Ejemplo 32.2**
2. Ondas electromagnéticas	
Calcular la fem inducida eficaz en una antena circular debido a las ondas electromagnéticas de frecuencia *f*.	Utilizar $\mathcal{E}_{ef} = \pi r^2 (dB/dt)_{ef}$ y $B = E/c$. **Ejemplo 32.3**
Determinar la intensidad, la cantidad de movimiento y la presión de radiación asociada con una onda electromagnética.	Utilizar $I = E_0B_0/2\mu_0$, $p = U/c$ y $P_r = I/c$ **Ejemplos 32.4, 32.5**

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

Corriente de desplazamiento de Maxwell

• **1** Un condensador de placas paralelas horizontales en el aire tiene las placas circulares de radio 2,3 cm separadas entre sí 1,1 mm. En la placa superior está entrando corriente al mismo tiempo que sale de la placa inferior a un ritmo de 5 A.

(a) Hallar la variación por unidad de tiempo del campo eléctrico entre las placas.

(b) Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas y demostrar que es igual a 5 A.

• **2** En una región del espacio, el campo eléctrico varía de acuerdo con $E = (0{,}05 \text{ N/C}) \text{ sen } 2000t$, en donde t está en segundos. Hallar la corriente máxima de desplazamiento a través de un área de 1 m^2 perpendicular a **E**.

•• **3** En el caso del problema 1, demostrar que a una distancia r del eje de las placas el campo magnético entre ellas viene dado por $B = (1{,}89 \times 10^{-3} \text{ T/m})r$ si r es menor que el radio de las placas.

•• **4**

(a) Demostrar que en el caso de un condensador de placas paralelas, la corriente de desplazamiento viene dada por $I_d = C\, dV/dt$, siendo C la capacidad y V la tensión aplicada al condensador.

(b) Un condensador de placas paralelas con $C = 5$ nF se conecta a una fem $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$, siendo $\mathscr{E}_0 = 3$ V y $\omega = 500\pi$. Hallar la corriente de desplazamiento entre las placas en función del tiempo. Despreciar las resistencias del circuito.

•• **5** En un condensador cuyas placas tienen un área de 0,5 m^2, fluye una corriente de 10 A.

(a) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento entre las placas?

(b) ¿Cuál es dE/dt entre las placas para esta corriente?

(c) ¿Cuál es la circulación de $\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ a lo largo de una circunferencia de 10 cm de radio que es paralela a las placas y está situada entre ellas?

•• **6** Un condensador con placas circulares paralelas recibe una carga Q_0. Entre las placas existe un dieléctrico no perfecto con una constante dieléctrica κ y una resistividad ρ.

(a) Hallar la corriente de conducción entre las placas en función del tiempo.

(b) Hallar la corriente de desplazamiento entre las placas en función del tiempo. ¿Cuál es la corriente total (conducción más desplazamiento)?

(c) Hallar el campo magnético entre las placas producido por la corriente de descarga en función del tiempo.

(d) Hallar el campo magnético entre las placas producido por la corriente de desplazamiento en función del tiempo.

(e) ¿Cuál es el campo magnético total entre las placas durante la descarga del condensador?

•• **7** El condensador con pérdidas del problema 6 se carga de forma que la tensión entre placas viene dada por $V(t) = (0{,}01 \text{ V/s})t$.

(a) Hallar la corriente de conducción en función de t.

(b) Hallar la corriente de desplazamiento.

(c) Hallar el tiempo necesario para que la corriente de desplazamiento sea igual a la de conducción.

•• **8** Se rellena el espacio entre las placas de un condensador con un material de una resistividad $\rho = 10^4\ \Omega \cdot \text{m}$ y constante dieléctrica $\kappa = 2{,}5$. Las placas son circulares y paralelas con un radio de 20 cm y 1 mm de separación. La tensión entre las placas viene dada por $V_0 \cos \omega t$, con $V_0 = 40$ V y $\omega = 120\pi$ rad/s.

(a) ¿Cuál es la densidad de la corriente de desplazamiento?

(b) ¿Cuál es la corriente de conducción entre las placas?

(c) ¿A qué frecuencia angular está desfasada 45° la corriente total respecto a la tensión aplicada?

••• **9** En este problema se ha de demostrar que la forma generalizada de la ley Ampère (ecuación 32.4) y la ley de Biot y Savart dan el mismo resultado en los casos en que puedan utilizarse ambas. La figura 32.12 muestra dos cargas $+Q$ y $-Q$ sobre el eje x en $x = -a$ y $x = +a$, y con una corriente $I = -dQ/dt$ circulando a lo largo de la línea entre ambas. El punto P está sobre el eje y para $y = R$

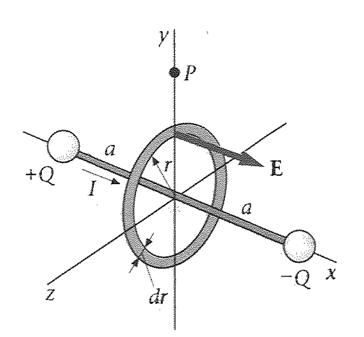


Figura 32.12 Problema 9.

(a) Utilizar la ley de Biot y Savart, para demostrar que el módulo de B en el punto P es

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

(b) Consideremos un anillo circular de radio r y anchura dr en el plano yz con su centro en el origen. Demostrar que el flujo del campo eléctrico que atraviesa este anillo es

$$E_x\, dA = (Q/\epsilon_0)a(r^2 + a^2)^{-3/2}\, r\, dr$$

(c) Utilizar el resultado de (b) para hallar el flujo total ϕ_e que atraviesa un área circular de radio R. Demostrar que

$$\epsilon_0 \phi_e = Q(1 - a/\sqrt{a^2 + R^2})$$

(d) Hallar la corriente de desplazamiento I_d y demostrar que

$$I + I_d = I \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

(e) Entonces demostrar que la ecuación 32.4 da el mismo resultado para B que el encontrado en la parte (a).

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Ecuaciones de Maxwell

•• **10** Los físicos teóricos han especulado sobre la posible existencia de monopolos magnéticos y se han realizado, infructuosamente, diversas investigaciones experimentales sobre tales monopolos. Supongamos que se encuentran monopolos magnéticos y que el campo magnético a una distancia r de un monopolo de intensidad q_m viene dado por $B = (\mu_0/4\pi)q_m/r^2$. ¿Cómo deberían modificarse las ecuaciones de Maxwell para que fuesen compatibles con este descubrimiento?

•• **11** Demostrar que el componente normal del campo magnético B es continuo a través de una superficie. Para ello, aplicar la ley de Gauss referida a B ($\oint B_n\, dA = 0$) a una superficie gaussiana en forma de una cajita de píldoras que tiene una cara en cada lado de la superficie.

Espectro electromagnético

• **12** ¿Qué ondas tienen mayores frecuencias, las ondas de luz o los rayos X?

• **13** Las frecuencias de la radiación ultravioletas, ¿son mayores o menores que la de la radiación infrarroja?

• **14** ¿Qué tipo de ondas tienen longitudes de onda del orden de unos pocos metros?

• **15** Hallar la longitud de onda correspondiente a

(a) una onda de radio de AM típica con una frecuencia de 1000 kHz y
(b) una onda de radio de FM típica con 100 MHz.

• **16** ¿Cuál es la frecuencia de una microonda de 3 cm?

• **17** ¿Cuál es la frecuencia de unos rayos X con una longitud de onda de 0,1 nm?

Radiación del dipolo eléctrico

• **18** Un transmisor utiliza una antena circular con la espira en el plano horizontal. La antena dipolar selecciona el campo [*eléctrico*] [*magnético*] de la onda, y la antena circular detecta el campo [*eléctrico*] [*magnético*] de la onda.

• **19** Un transmisor utiliza una antena circular con la espira en el plano horizontal. ¿Cuál debería ser la orientación de una antena dipolar en el receptor para la recepción óptima de una señal?

•• **20** La intensidad de radiación de un dipolo eléctrico es proporcional a $(\text{sen}^2\,\theta)/r^2$, en donde θ es el ángulo formado por el momento dipolar eléctrico y el vector de posición r. Un dipolo eléctrico radiante coincide con el eje z (su momento dipolar tiene la dirección z). Sea I_1 la intensidad de la radiación a una distancia $r = 10$ m y a un ángulo $\theta = 90°$. Hallar la intensidad (en función de I_1) cuando

(a) $r = 30$ m, $\theta = 90°$ **(b)** $r = 10$ m, $\theta = 45°$ **(c)** $r = 20$ m, $\theta = 30°$

•• **21**

(a) Para el caso descrito en el problema 20, ¿a qué ángulo es igual a I_1 la intensidad cuando $r = 5$ m?
(b) ¿A qué distancia es igual a I_1 la intensidad cuando $\theta = 45°$?

•• **22** La antena transmisora de una estación de radio es un dipolo situado en lo alto de una montaña a 2000 m por encima del nivel del mar. La intensidad de la señal en una montaña próxima a 4 km de distancia y también a 2000 m de altura es 4×10^{-12} W/m^2. ¿Cuál es la intensidad de la señal al nivel del mar y a 1,5 km de distancia del transmisor? (Véase problema 20).

••• **23** Una estación de radio que utiliza una antena dipolar vertical emite a una frecuencia de 1,20 MHz con una potencia total de salida de 500 kW. El diagrama de radiación es del tipo que muestra la figura 32.8, es decir, la intensidad de la señal varía con el $\text{sen}^2\,\theta$, en donde θ es el ángulo comprendido entre la dirección de propagación y la vertical y es independiente del ángulo acimutal. Calcular la intensidad de la señal a una distancia horizontal de 120 km de la estación. ¿Cuál es la intensidad en este punto medida en fotones por centímetro cuadrado y por segundo?

••• **24** A una distancia de 30 km de una estación emisora de radio cuya frecuencia es 0,8 MHz, la intensidad de la onda electromagnética es de 2×10^{-13} W/m^2. La antena transmisora es un dipolo vertical. ¿Cuál es la potencia total irradiada por la estación?

••• **25** Un pequeño avión privado que se aproxima a un aeropuerto vuela a una altura de 2500 m sobre el suelo. El sistema de control de vuelos del aeropuerto transmite señales de 100 W a 24 MHz, utilizando una antena dipolar vertical. ¿Cuál es la intensidad de la señal en la antena receptora del avión cuando éste se encuentra a 4 km del aeropuerto?

Energía y cantidad de movimiento de una onda electromagnética

• **26** Una onda electromagnética posee una intensidad igual a 100 W/m^2. Calcular

(a) la presión de radiación P_r, **(b)** E_{ef}, y **(c)** B_{ef}.

• **27** La amplitud de una onda electromagnética es $E_0 = 400$ V/m. Calcular

(a) E_{ef}, **(b)** B_{ef}, **(c)** la intensidad, I, **(d)** la presión de radiación P_r

• **28** El valor eficaz del campo eléctrico de una onda electromagnética es $E_{ef} = 400$ V/m.

(a) Hallar B_{ef}, **(b)** la densidad de energía media y **(c)** la intensidad.

• **29** Demostrar que las unidades de $E = cB$ son coherentes; es decir, comprobar que cuando B está en teslas y c en metros por segundo, las unidades de cB son voltios por metro o newtons por culombio.

• **30** El valor eficaz del módulo del campo magnético de una onda electromagnética es $B_{ef} = 0{,}245$ mT. Hallar

(a) E_{ef}, **(b)** la densidad de energía media y **(c)** la intensidad.

•• **31**

(a) Una onda electromagnética de 200 W/m^2 incide normalmente sobre una cartulina negra de 20×30 cm de lado que absorbe toda la radiación. Calcular la fuerza ejercida sobre la cartulina por la radiación.
(b) Calcular la fuerza ejercida por la misma onda si la cartulina refleja la radiación que incide sobre ella.

•• **32** Calcular la fuerza ejercida por la onda electromagnética de la cartulina reflectante del apartado (b) del problema 31 si la radiación incide con un ángulo de 30° respecto a la normal.

•• **33** Una estación típica de AM radia una onda sinusoidal isótropa con una potencia media de 50 kW. ¿Cuáles son las amplitudes de E_{max} y B_{max} a una distancia de

(a) 500 m, **(b)** 5 km, y **(c)** 50 km?

•• **34** La intensidad de la luz solar que incide sobre la parte superior de la atmósfera terrestre llamada (constante solar) vale 1,35 kW/m^2.

(a) Hallar E_{ef} y B_{ef} debido al Sol en dicha zona.
(b) Hallar la potencia media emitida por el Sol.
(c) Hallar la intensidad y la presión de radiación en la superficie del Sol.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **35** Un láser para demostraciones tiene una potencia media de salida de 0,9 mW y un diámetro de haz de 1,2 mm. Determinar la fuerza ejercida por el haz del láser sobre
(a) una superficie negra 100 por ciento absorbente y
(b) una superficie 100 por ciento reflectante.

•• **36** Un haz láser tiene un diámetro de 1,0 mm y una potencia media de 1,5 mW. Hallar
(a) la intensidad del haz, (b) E_{ef},
(c) B_{ef}, (d) la presión de radiación.

•• **37** En lugar de enviar energía eléctrica mediante una línea de transmisión de 750 kV, 1000 A, se desea utilizar un haz de onda electromagnética adecuada. El haz tiene una intensidad uniforme dentro de un área de su sección recta de 50 m^2. ¿Cuáles son los valores eficaces de sus campos eléctrico y magnético?

•• **38** Un pulso de láser tiene una energía de 20 J y un radio de haz de 2 mm. La duración del pulso es de 10 ns y la densidad de energía es constante dentro del pulso.
(a) ¿Cuál es la longitud espacial del pulso?
(b) ¿Cuál es la densidad de energía dentro del mismo?
(c) Hallar las amplitudes eléctrica y magnética del pulso de onda.

•• **39** El campo eléctrico de una onda electromagnética oscila en la dirección y y el vector de Poynting viene dado por

$$S(x,t) = (100\ W/m^2) \cos^2 [10x - (3 \times 10^9)t]\mathbf{i}$$

en donde x está en metros y t en segundos.
(a) ¿Cuál es la dirección de propagación de la misma?
(b) Hallar la longitud de la onda y la frecuencia.
(c) Hallar los campos eléctrico y magnético.

•• **40** Un láser dispara un pulso de 1000 MW y 200 ns de duración sobre un objeto pequeño de 10 mg de masa suspendido mediante una fibra muy fina de 4 cm de longitud. Si la radiación se absorbe por completo sin otros efectos, ¿cuál es el máximo ángulo de desviación de este péndulo?

•• **41** Una cartulina de 10 por 15 cm tiene una masa de 2 g y es perfectamente reflectante. Cuelga en un plano vertical y está libre para girar alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus bordes. La cartulina se ilumina uniformemente mediante una luz intensa que hace que forme un ángulo de 1° con la vertical. Hallar la intensidad de la luz.

•• **42** Un diamante de gran valor de masa 0,08 kg y un astronauta de 105 kg, están separados 95 m y ambos están inicialmente en reposo. El astronauta tiene un láser de 1,5 kW que puede utilizarse como un cohete de fotones para propulsarlo hacia el diamante. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los 95 m utilizando la propulsión que le suministra el cohete láser?

•• **43** Se ha sugerido que la presión de radiación del Sol podría utilizarse para propulsar una nave espacial. ¿Cuál debe ser la densidad superficial (kg/m^2) de una lámina perfectamente reflectora para que a la distancia de una unidad astronómica la fuerza debida a la presión de radiación sea doble que la atracción gravitatoria ejercida por el Sol sobre dicha lámina. (*Nota*: una unidad astronómica es el radio de la órbita terrestre.) ¿Cómo se modificará la relación entre la fuerza de radiación y la fuerza gravitatoria cuando la lámina reflectora acelera alejándose del Sol?

•• **44** Supongamos que una masa de 50 kg se sujeta a una lámina perfectamente reflectora cuya densidad superficial es la obtenida en el problema 43. ¿Cuál debe ser el área superficial de la lámina para que a una distancia de una unidad astronómica la aceleración del sistema al alejarse del Sol sea de 0,4 mm/s^2. ¿Cómo varía la aceleración con la distancia al Sol?

Radiación del cuerpo negro

Un cuerpo negro es un objeto absorbente perfecto; es decir, que absorbe toda la radiación que incide sobre él. También es un radiador perfecto. La potencia radiada por un cuerpo negro de área A a la temperatura T viene dado por la ley de Stefan-Boltzmann (ecuación 21.17 con e = 1),

$$P_r = \sigma A T^4$$

en donde $\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}\ W/m^2 \cdot K^4$.

•• **45** Un hilo muy largo de 4 mm de radio se calienta a 1000 K. Su superficie es un radiador negro ideal.
(a) ¿Cuál es la potencia total radiada por unidad de longitud? Hallar
(b) el vector de Poynting S, (c) E_{ef} y
(d) B_{ef} a una distancia de 25 cm del hilo.

•• **46** Un cuerpo negro esférico de radio R está a una distancia de 2×10^{11} m del Sol. El área efectiva del cuerpo para la absorción de energía del Sol es πR^2, pero el área para la radiación de la esfera es $4\pi R^2$. La potencia que emite el Sol es $3{,}83 \times 10^{26}$ W. ¿Cuál es la temperatura de la esfera?

•• **47**
(a) Si la Tierra fuese un cuerpo negro ideal con conductividad térmica infinita y careciera de atmósfera, ¿cuál sería su temperatura?
(b) Si se reflejase el 40 por ciento de la energía incidente del Sol, ¿cuál sería entonces la temperatura de la Tierra? (Ver problema 46.)

Ecuación de onda de las ondas electromagnéticas (opcional)

• **48** Demostrar por sustitución directa que la función de onda

$$E_y = E_0 \operatorname{sen} (kx - \omega t) = E_0 \operatorname{sen} k(x - ct)$$

donde $c = \omega/k$, satisface la ecuación 32.17a.

• **49** Utilizar los valores conocidos de μ_0 y ϵ_0 en unidades SI para calcular $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ y demostrar que es aproximadamente 3×10^8 m/s.

••• **50**
(a) Utilizando razonamientos semejantes a los que se dan en el texto, demostrar que en el caso de una onda plana, en la que E y B son independientes de y y z,

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

(b) Demostrar que E_z y B_y también satisfacen la ecuación de ondas.

Problemas generales

• **51** Verdadero o falso:
(a) Las ecuaciones de Maxwell se aplican sólo a campos que son constantes en el tiempo.
(b) La ecuación de ondas puede deducirse a partir de las ecuaciones de Maxwell.
(c) Las ondas electromagnéticas son ondas transversales.
(d) En una onda electromagnética, los campos eléctrico y magnético están en fase.
(e) En una onda electromagnética, los vectores de campo eléctrico y magnético **E** y **B** tienen el mismo valor.
(f) En una onda electromagnética, las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

• 52

(a) Demostrar que si E viene dado en voltios por metro y B en teslas, las unidades del vector de Poynting $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0$ son vatios por metro cuadrado.

(b) Demostrar que si la intensidad I viene dada en vatios por metro cuadrado, las unidades de la presión por radiación $P_r = I/c$ son newtons por metro cuadrado.

•• 53 Una antena circular que puede girar alrededor de un eje vertical se utiliza para localizar a un transmisor de radio de un aficionado sin licencia. Si la potencia del receptor es proporcional a la intensidad de la señal recibida, ¿cómo varía la potencia del receptor con la orientación de la antena circular?

•• 54 Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por

$$\mathbf{B}(z,t) = (10^{-8}\ \mathrm{T}) \cos (kz - \omega t)\mathbf{i}$$

(a) Hallar la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda.
(b) Hallar el vector de campo eléctrico $\mathbf{E}(z,t)$.
(c) Determinar el vector de Poynting, y hallar la intensidad de esta onda.

•• 55 Para detectar ondas electromagnéticas puede utilizarse una espira circular de hilo conductor. Supóngase que una estación de FM de 100 MHz radia 50 kW uniformemente en todas direcciones. ¿Cuál es la máxima tensión eficaz inducida en una espira de 30 cm a una distancia de 10^5 m de la estación?

•• 56 El campo eléctrico a una cierta distancia de un transmisor de radio viene dado por $E = (10^{-4}\ \mathrm{N/C}) \cos 10^6 t$, en donde t está en segundos.

(a) ¿Qué tensión se recibe en un alambre de 50 cm orientado a lo largo de la dirección del campo eléctrico?
(b) ¿Qué tensión puede inducirse en una espira de 20 cm de radio?

•• 57 Un condensador circular de radio a tiene una pequeña resistencia R que conecta los centros de sus placas. Se aplica entre ellas una tensión V_0 sen ωt.

(a) ¿Cuál es la corriente que circula por este condensador?
(b) Dar el campo magnético en función de la distancia radial r de la línea central entre placas y en el interior del condensador.
(c) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y la tensión aplicada?

•• 58 Un haz radiante de 20 kW incide normalmente sobre una superficie que refleja la mitad de la radiación. ¿Qué fuerza actúa sobre esta superficie?

•• 59 Demostrar que la relación entre la cantidad de movimiento transportada por una onda electromagnética y la energía (ecuación 32.13) puede también deducirse utilizando la relación de Einstein-Planck, $E = hf$; la ecuación de De Broglie, $p = h/\lambda$; y $c = f\lambda$.

•• 60 Dos ondas armónicas de frecuencias angulares ω_1 y ω_2 tienen campos eléctricos dados por las ecuaciones $\mathbf{E}_1 = E_{1,0} \cos (k_1 x - \omega_1 t)\mathbf{j}$ y $\mathbf{E}_2 = E_{2,0} \cos (k_2 x - \omega_2 t + \delta)\mathbf{j}$. Hallar

(a) el vector de Poynting instantáneo para el movimiento ondulatorio resultante y
(b) la media temporal del vector de Poynting.

Si $\mathbf{E}_2 = E_{2,0} \cos (k_2 x + \omega_2 t + \delta)\mathbf{j}$ hallar

(c) el vector instantáneo de Poynting del movimiento ondulatorio resultante y
(d) la media temporal del vector de Poynting.

•• 61 En la superficie de la Tierra, existe un flujo solar medio aproximado de 0,75 kW/m^2. Una familia desea construir un sistema de conversión de la energía solar en potencia para su casa. Si el sistema de conversión tiene un rendimiento del 30 por ciento y la familia necesita un mínimo de 25 kW, ¿qué área efectiva deberá tener la superficie de los colectores suponiendo que son absorbentes perfectos?

•• 62 Supóngase que tenemos una radio excelente, capaz de detectar señales tan débiles como 10^{-14} W/m^2. Esta radio tiene una antena formada por una bobina de 2000 vueltas arrollada sobre un núcleo de hierro que incrementa el campo magnético en un factor 200. La frecuencia que se sintoniza es de 140 kHz.

(a) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético de esta onda?
(b) ¿Cuál es la fem inducida en la antena?
(c) ¿Cuál sería la fem inducida en un hilo de 2 m orientado en la dirección del campo eléctrico?

•• 63 Un láser de 654 nm cuyo diámetro del haz es 0,4 mm apunta hacia arriba. La presión de radiación de este haz de láser es capaz de soportar en contra de la gravedad una pequeña partícula esférica perfectamente reflectora de diámetro 10 μm y densidad 0,2 g/cm^3. Determinar la potencia de salida de este láser.

Los dos problemas siguientes no tratan directamente de ondas pero ilustran el empleo del vector de Poynting para describir el flujo de energía electromagnética.

••• 64 Por un conductor cilíndrico largo de longitud L, radio a y resistividad ρ, circula una corriente estacionaria I que está distribuida uniformemente en toda su sección recta.

(a) Utilizar la ley de Ohm para relacionar el campo eléctrico E en el conductor con I, ρ y a.
(b) Hallar el campo magnético B en el exterior pero junto al conductor.
(c) Utilizar los resultados de las partes (a) y (b) para calcular el vector de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ en $r = a$ (superficie del conductor). ¿En qué dirección está $\mathbf{S}$?
(d) Hallar el flujo $\oint S_n\, dA$ que atraviesa la superficie del conductor desde su interior y demostrar que el flujo de energía por unidad de tiempo dentro del conductor es igual a $I^2 R$, siendo R su resistencia. (Aquí S_n es el componente *hacia dentro* de $\mathbf{S}$ perpendicular a la superficie del conductor.)

••• 65 Un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud transporta una corriente que aumenta lentamente con el tiempo. El solenoide tiene un radio R y la corriente en el arrollamiento tiene la forma $I(t) = at$.

(a) Hallar el campo eléctrico inducido a una distancia $r < R$ del eje del solenoide.
(b) Hallar el módulo y la dirección del vector de Poynting $\mathbf{S}$ en la superficie cilíndrica $r = R$ justo en el interior del arrollamiento.
(c) Calcular el flujo $\oint S_n\, dA$ dentro del solenoide y demostrar que es igual al crecimiento de la energía magnética por unidad de tiempo dentro del solenoide. (Aquí S_n es el componente *hacia dentro* de $\mathbf{S}$ perpendicular a la superficie del conductor.)

••• 66 Partículas suficientemente pequeñas pueden verse alejadas del sistema solar por la presión de radiación del Sol. Suponer que las partículas son esféricas con radio r y densidad de 1 g/cm^3 y que absorben toda la radiación con un área eficaz de πr^2. Están a una distancia R del Sol, que tiene una potencia de emisión de $3{,}83 \times 10^{26}$ W. ¿Cuál es el radio r para el cual la fuerza repulsiva de la radiación equilibre exactamente la fuerza gravitatoria de atracción del Sol?

••• 67 Algunos escritores de ciencia ficción han utilizado velas solares para propulsar naves interestelares. Imaginemos una vela gigante montada sobre una nave y sometida a la presión de la radiación solar.

(a) Demostrar que la aceleración de la nave viene dada por

$$a = \frac{P_s A}{4\pi r^2\ cm}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

en donde P_s es la potencia emitida por el Sol y que es igual a $3{,}8 \times 10^{26}$ W, A es el área de la superficie de la vela, m la masa total de la nave, r la distancia al Sol y c la velocidad de la luz.

(b) Demostrar que la velocidad de la nave a una distancia r del Sol se calcula mediante

$$v^2 = v_0^2 + \left(\frac{P_s A}{2\pi mc}\right)\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

en donde v_0 es la velocidad inicial en r_0.

(c) Comparar las aceleraciones relativas debidas a la presión de radiación y a la fuerza gravitatoria. Utilizar valores razonables para A y m. ¿Funcionará un sistema así?

••• **68** En las tiendas de artículos de novedad se vende un aparatito denominado radiómetro, indicado en la figura 32.13, en cuyo interior una especie de hélice bien equilibrada gira rápidamente. En cada brazo de la hélice se encuentra sujeta una laminilla, una de cuyas caras es blanca y la otra negra. Supongamos que la masa de cada laminilla es de 2 g, que el área colectora de luz de la misma vale 1 cm^2 y que cada brazo de la hélice tiene una longitud de 2 cm.

(a) Si una bombilla de 100 W produce 50 W de energía electromagnética y la bombilla está a 50 cm del radiómetro, hallar la máxima aceleración angular de la hélice. (Estimar el momento de inercia de la hélice suponiendo que toda la masa de cada laminilla está situada en el extremo de los brazos).

(b) ¿Cuánto tardará la hélice en acelerar a 10 rev/min si parte del reposo y se encuentra sometida a la aceleración angular máxima en todo instante?

(c) ¿Puede justificar la presión de radiación el rápido movimiento del radiómetro?[1]

••• **69** Cuando una onda electromagnética se refleja con incidencia normal sobre una superficie perfectamente conductora, el vector campo eléctrico de la onda reflejada en la superficie reflectante es el negativo del correspondiente a la onda incidente.

(a) Explicar por qué debe ser así.

(b) Demostrar que la superposición de las ondas incidente y reflejada da lugar a una onda estacionaria.

(c) ¿Qué relación existe entre el vector campo magnético de las ondas incidente y reflejada en la superficie reflectante?

••• **70** Una fuente puntual intensa de luz radia 1 MW isotrópicamente. La fuente está localizada 1,0 m por encima de un plano infinito perfectamente reflector. Determinar la fuerza que actúa sobre el plano.

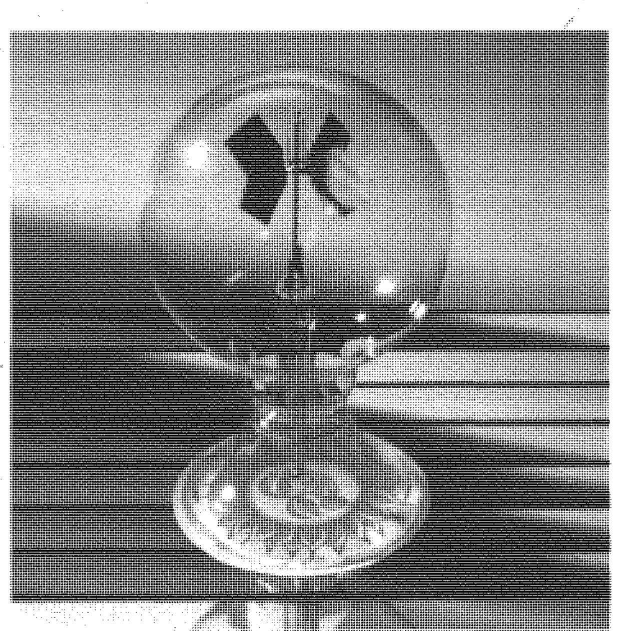


Figura 32.13 Problema 68.

[1] El radiómetro realmente gira en sentido opuesto al que sería de esperar si la fuerza se debiese a la presión de radiación. La razón consiste en que el aire cercano a la cara negra está más caliente que el próximo a la cara blanca, de modo que las moléculas de aire que chocan contra la cara negra tienen más energía que las que inciden sobre la cara blanca.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PARTE 5

luz



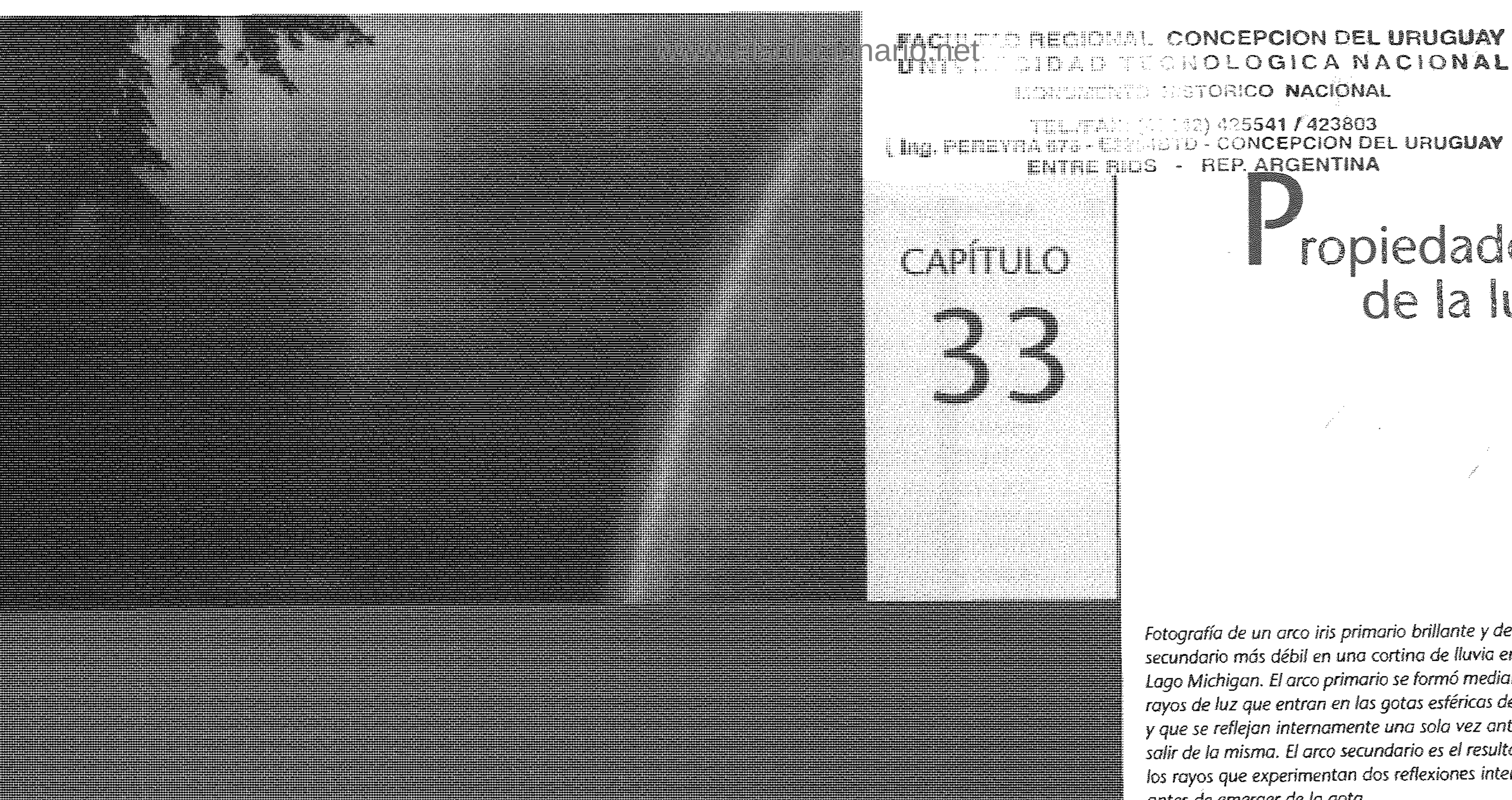
Mediante luz polarizada se revelan los esquemas o diagramas de tensiones que aparecen alrededor de una grieta en una lámina de plástico transparente. La tensión es perpendicular a la grieta. Desde el extremo inferior de la grieta grande se han propagado otras dos más pequeñas, originando así otros esquemas adicionales de tensiones. Se aprecian unos defectos circulares más pequeños que circundan el extremo superior de la grieta mayor.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX: 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO 33

Propiedades de la luz

Fotografía de un arco iris primario brillante y del secundario más débil en una cortina de lluvia en el Lago Michigan. El arco primario se formó mediante los rayos de luz que entran en las gotas esféricas de agua y que se reflejan internamente una sola vez antes de salir de la misma. El arco secundario es el resultado de los rayos que experimentan dos reflexiones internas antes de emerger de la gota.

www.elsolucionario.net

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética que posee longitudes de onda comprendidas entre 400 y 700 nm. Las longitudes de onda más cortas del espectro visible corresponden a la luz violeta y las más largas a la luz roja. Los colores percibidos de la luz son el resultado de la respuesta fisiológica y psicológica del sistema sensitivo ojo-cerebro a las distintas frecuencias de la luz visible. Aunque la correspondencia entre color percibido y frecuencia es muy exacta, existen desviaciones interesantes. Por ejemplo, una mezcla de luz roja y luz verde es percibida por el sistema ojo-cerebro como amarillo, incluso en ausencia de luz en la región amarilla del espectro. En este capítulo estudiaremos cómo se produce la luz, cómo se mide su velocidad y cómo se dispersa, se refleja, se refracta y se polariza.

Dualidad onda-partícula ■ 33.1

La naturaleza corpuscular de la luz fue demostrada por vez primera por Thomas Young, al observar el diagrama de interferencia de dos fuentes luminosas coherentes producidas al iluminar un par de rendijas paralelas y estrechas con una sola fuente.[1] La teoría ondulatoria de la luz culminó en 1860 con las predicciones de Maxwell sobre las ondas electromagnéticas. La naturaleza corpuscular de la luz fue definitivamente propuesta por Albert Einstein en 1905 en su explicación del efecto fotoeléctrico. Un corpúsculo luminoso o **fotón** posee una energía E relacionada con la frecuencia f y la longitud de onda λ de la onda luminosa por la ecuación de Einstein

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad \textbf{(33.1)}$$

Ecuación de Einstein para la energía del fotón

[1] La dualidad onda-corpúsculo de la luz y los electrones se trata con detalle en el capítulo 17. Las propiedades generales de las ondas, como la propagación, reflexión, refracción, interferencia y coherencia se vieron en los capítulos 15 y 16.

 www.elsolucionario.net

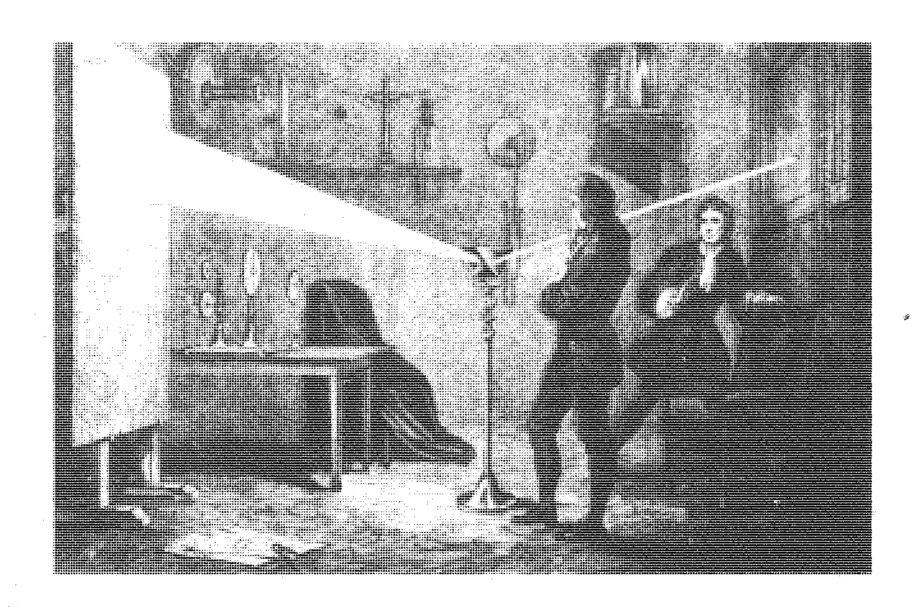


Figura 33.1 Newton demostrando el espectro de la luz solar mediante un prisma de vidrio.

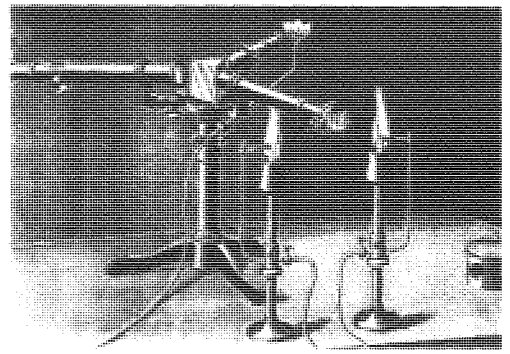


Figura 33.2 Espectroscopio de finales del siglos XIX que perteneció a Gustave Kirchhoff. Los modernos espectroscopios para estudiantes suelen tener básicamente el mismo diseño.

en donde c es la velocidad de la luz y h la constante de Planck:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} = 4{,}136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$$

Frecuentemente, las energías se expresan en electrón-voltios y las longitudes de onda en nanómetros. Por ello, es conveniente expresar el producto hc en eV · nm. Así tenemos

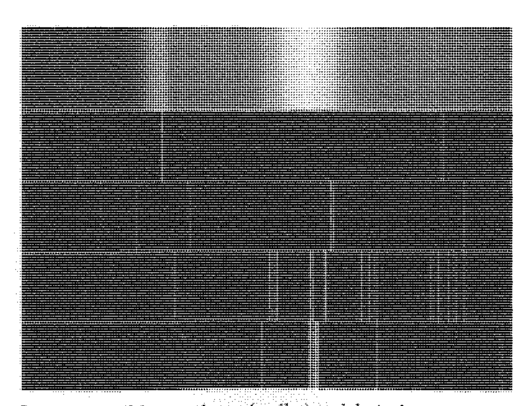
$$hc = (4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s}) = 1{,}24 \times 10^{-6}\ \text{eV}\cdot\text{m}$$

o también

$$hc = 1240\ \text{eV}\cdot\text{nm} \tag{33.2}$$

La propagación de la luz viene gobernada por sus propiedades ondulatorias, mientras que el intercambio de energía entre luz y materia viene determinado por sus propiedades corpusculares. Esta dualidad onda-corpúsculo es una propiedad general de la naturaleza. Así, los electrones (y otras "partículas") también se propagan como ondas e intercambian energía como partículas.

33.2 ■ Espectros luminosos



Espectro visible continuo (arriba) y debajo los espectros de rayas del hidrógeno, helio, bario y mercurio.

Newton fue el primero en reconocer que la luz blanca es una mezcla de luz de todos los colores aproximadamente de igual intensidad. Para ello, hizo pasar un rayo de luz solar a través de un prisma de vidrio y observó el espectro de la luz refractada (figura 33.1). Como el ángulo de refracción de un prisma de vidrio depende ligeramente de la longitud de onda, el haz refractado se difunde en el espacio separándose sus colores o longitudes de onda, como en el arco iris. En la figura 33.2 se muestra un espectroscopio, que es un aparato para analizar los espectros de una fuente luminosa. La luz de la fuente pasa a través de una estrecha ranura, atraviesa una lente para que el haz sea paralelo, e incide sobre un prisma de vidrio. El haz refractado se observa con un telescopio, el cual se monta sobre una plataforma rotatoria, de modo que el ángulo del haz refractado, dependiente de su longitud de onda, pueda medirse. Así, el espectro de la fuente luminosa puede analizarse en función de sus longitudes de onda componentes. Como el espectro de la luz solar contiene una gama continua de longitudes de onda se dice que es un **espectro continuo**. La luz emitida por los átomos de los gases a baja presión contiene sólo una serie discontinua de longitudes de onda. Cada longitud de onda emitida por la fuente produce una imagen separada de la rendija de colimación del espectroscopio. Tal espectro se llama **espectro de rayas** (o de líneas). En la fotografía que se adjunta se muestran el espectro visible continuo y los espectros de rayas de varios elementos.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Fuentes luminosas 33.3

Espectros de rayas Las fuentes más comunes de luz visible son las transiciones de los electrones externos que tienen lugar en los átomos. Normalmente un átomo se encuentra en el estado fundamental con sus electrones en sus niveles energéticos permitidos más bajos, compatibles con el principio de exclusión. (Este principio, enunciado por vez primera por Wolfgang Pauli en 1925 para explicar la estructura electrónica de los átomos, establece que dos electrones en un átomo no pueden encontrarse en el mismo estado cuántico.) Los electrones de más baja energía están más próximos al núcleo y altamente ligados, formando un núcleo más interno estable. El electrón o los dos electrones de los estados energéticos más altos se encuentran mucho más lejos del núcleo y relativamente son más fácilmente excitados para ocupar los estados energéticos vacantes más elevados. Estos electrones más externos son los responsables de los cambios energéticos en el átomo que se producen en la emisión o absorción de luz visible.

Cuando un átomo choca con otro átomo o con un electrón libre, o cuando absorbe energía electromagnética, los electrones externos pueden excitarse a estados energéticos más elevados. Después de unos 10^{-8} s, estos electrones externos espontáneamente verifican transiciones a estados energéticos más bajos con la emisión de un fotón. Este proceso, llamado **emisión espontánea**, es aleatorio; los fotones emitidos por dos átomos diferentes no tienen entre sí ninguna correlación. Por tanto, la luz emitida no es coherente. De acuerdo con el principio de conservación energética, la energía del fotón emitido es la diferencia ΔE entre las energías de los estados inicial y final. La frecuencia de la onda luminosa está relacionada con la energía por la ecuación de Einstein, $\Delta E = hf$. La longitud de onda de la luz emitida es, por tanto,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{\Delta E} \qquad \textbf{(33.3)}$$

Las energías de los fotones correspondientes a las longitudes de onda más corta (400 nm) y más larga (700 nm) del espectro visible son

$$E_{400\text{nm}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{400 \text{ nm}} = 3{,}1 \text{ eV} \qquad \textbf{(33.4a)}$$

y

$$E_{700\text{nm}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{700 \text{ nm}} = 1{,}77 \text{ eV} \qquad \textbf{(33.4b)}$$

Como los niveles energéticos de los átomos forman una serie discreta, los espectros luminosos de los átomos aislados o átomos en gases a baja presión constan de una serie de líneas discretas y definidas que son características del elemento. Estas líneas están algo ensanchadas por los desplazamientos Doppler debidos al movimiento relativo del átomo respecto al observador y por las colisiones con otros átomos, pero, en general, si la densidad es suficientemente baja, las líneas espectrales son estrechas y bien separadas unas de otras. El estudio de los espectros de rayas del hidrógeno y otros átomos condujeron a la primera comprensión de los niveles energéticos de los átomos.

Espectros continuos Cuando los átomos están próximos entre sí e interaccionan fuertemente, como ocurre en los líquidos y sólidos, los niveles energéticos de los átomos individuales se dispersan en bandas energéticas dando lugar a bandas esencialmente continuas de niveles energéticos. Cuando las bandas se solapan, lo cual es muy frecuente, el resultado es un espectro continuo de energías posibles y un espectro de emisión continua. En un material incandescente, tal como un filamento metálico al rojo, los electrones se aceleran aleatoriamente por colisiones frecuentes y el resultado es un espectro amplio de radiación térmica. La potencia radiante en este caso es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.[1] La radiación emitida por un cuerpo a temperaturas inferiores a 600 °C está concentrada en la zona del infrarrojo y, por tanto,

[1] Esta propiedad se conoce como ley de Stefan-Boltzmann. Esta y otras propiedades de la radiación térmica, como la ley del desplazamiento de Wien fueron tratadas más ampliamente en la sección 21.4.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

no es visible. A medida que un objeto se calienta, la energía radiada tiene longitudes de onda cada vez más cortas. Entre unos 600 y 700 °C, una parte importante de la energía radiada corresponde al espectro visible y el cuerpo resplandece con un color rojo oscuro. Si la temperatura sigue aumentando, el cuerpo toma un aspecto rojo brillante y por último luz blanca. La longitud de onda para la cual la potencia es un máximo varía en razón inversa con la temperatura, resultado que se conoce como ley del desplazamiento de Wien. La superficie del Sol a T = 6000 K emite un espectro continuo de intensidad aproximadamente constante en el intervalo de longitudes visibles al ojo humano.

Absorción, dispersión y emisión estimulada

La radiación se emite al verificarse la transición de un átomo desde un estado excitado a otro de menor energía; la radiación se absorbe cuando la transición se verifica del estado inferior al superior. Cuando los átomos se irradian con un espectro de radiación continuo, el espectro transmitido muestra rayas oscuras correspondientes a la absorción de la luz de determinadas longitudes de onda. Los espectros atómicos de absorción fueron los primeros espectros de rayas observados. Como los átomos y moléculas a temperaturas normales se encuentran en sus estados fundamentales o en estados excitados de bajo nivel, los espectros de absorción son usualmente más simples que los espectros de emisión.

La figura 33.3 ilustra diversos fenómenos interesantes que pueden ocurrir cuando un fotón incide sobre un átomo. En la figura 33.3*a*, la energía del fotón incidente es demasiado pequeña para que el átomo pase a un estado excitado; el átomo permanece en su estado fundamental y se dice que el fotón se ha dispersado. Como los fotones incidentes y los fotones salientes (dispersados) tienen la misma energía, se dice que la **dispersión es elástica**. Si la longitud de onda de la luz incidente es grande comparada con el tamaño del átomo, la dispersión puede describirse en función de la teoría electromagnética clásica y se llama **dispersión Rayleigh**, en honor a Lord Rayleigh, quien desarrolló en 1871 los aspectos teóricos de este fenómeno. La probabilidad de que se verifique la dispersión Rayleigh varía segun $1/\lambda^4$. Esto significa que la luz azul se dispersa mucho más fácilmente que la luz roja, a lo cual se debe el color azulado del cielo. La separación de la luz azul por dispersión Rayleigh explica también el color rojizo de la luz transmitida en las puestas de sol.

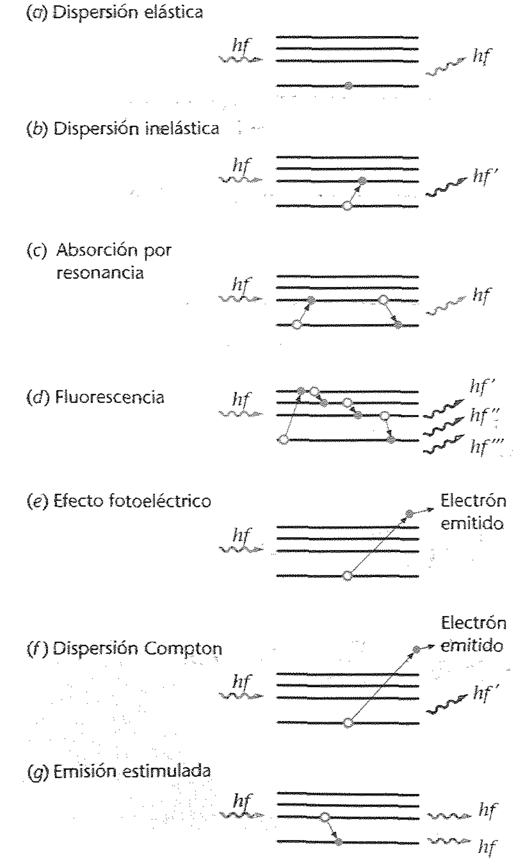


Figura 33.3 Interacciones fotón-átomo.

La figura 33.3*b* muestra una **dispersión inelástica** que tiene lugar cuando el fotón incidente tiene energía suficiente para que el átomo verifique una transición a un estado excitado. La energía del fotón dispersado hf' es menor que la del fotón incidente hf en ΔE o diferencia entre la energía del estado fundamental y la del estado excitado. La dispersión inelástica de la luz por las moléculas fue observada por vez primera por el físico indio C.V. Raman y suele conocerse como **dispersión Raman**.

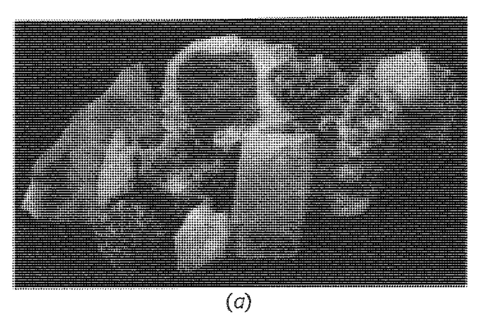
En la figura 33.3*c*, la energía del fotón incidente es justamente igual a la diferencia de energía entre el estado fundamental y el primer estado excitado del átomo. El átomo experimenta una transición a su primer estado excitado y al cabo de un corto tiempo vuelve por emisión espontánea al estado fundamental con la emisión de un fotón cuya energía es igual a la del fotón incidente. Este proceso de múltiples etapas se llama **absorción por resonancia**.

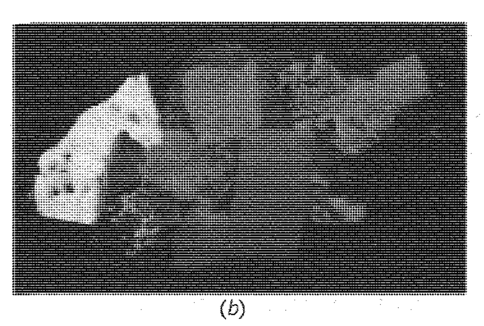
En la figura 33.3*d* la energía del fotón incidente es suficientemente grande para excitar el átomo a uno de sus estados energéticos más elevados. El átomo pierde entonces su energía por emisión espontánea mientras realiza una o más transiciones a estados de menor energía. Así ocurre, por ejemplo, cuando el átomo se excita por luz ultravioleta y emite luz visible cuando vuelve a su estado fundamental. Este proceso se denomina **fluorescencia**. Como el tiempo de vida del estado energético de un átomo excitado es del orden de 10^{-8} s, este proceso parece que ocurre instantáneamente. Sin embargo algunos estados excitados tienen tiempos de vida mucho más largos —del orden de milisegundos y ocasionalmente segundos e incluso minutos. Este estado se denomina **estado metastable**. Los **materiales fosforescentes** son aquellos que tienen estados metastables de vida muy larga, es decir, emiten luz mucho después de la excitación original.

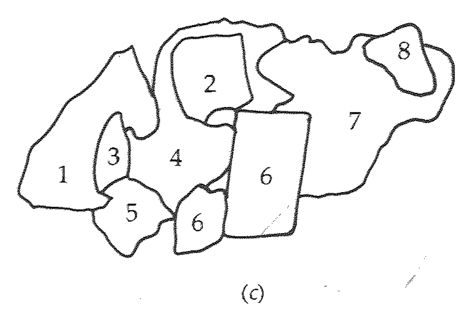
La figura 33.3*e* ilustra el **efecto fotoeléctrico**, en el cual la absorción del fotón ioniza el átomo causando la emisión de un electrón. La figura 33.3*f* ilustra la **dispersión Compton**, que tiene lugar cuando la energía del fotón incidente es mucho mayor que la energía de ionización. Obsérvese que en la dispersión Compton se emite un fotón, mientras que en el efecto fotoeléctrico, el fotón se absorbe y ningún otro fotón se emite.

La figura 33.3*g* se ilustra la **emisión estimulada**. Este proceso tiene lugar cuando el átomo o molécula está inicialmente en un estado excitado de energía E_2 y la energía del

www.elsolucionario.net


(*a*)


(*b*)



(*c*)

Colección de minerales en (*a*) a la luz del día y (*b*) a la luz ultravioleta (a veces llamada "luz negra"). En (*c*) se identifican los minerales mediante un número: 1, powellita; 2, willemita; 3, scheelita; 4, calcita; 5, calcita y willemita; 6, calcita óptica; 7, willemita; y 8, ópalo. El cambio de color es debido a la fluorescencia de los minerales bajo la luz ultravioleta. En la calcita óptica se presentan tanto la fluorescencia como la fosforescencia.

fotón incidente es igual a $E_2 - E_1$, siendo E_1 la energía de un estado inferior o del estado fundamental. En este caso, el campo electromagnético oscilante asociado al fotón incidente estimula al átomo o molécula excitado, el cual emite un fotón en la misma dirección que el fotón incidente y en fase con él. En la emisión estimulada, la fase de la luz emitida por un átomo está relacionada con la emitida por cualquier átomo, de modo que la luz resultante es coherente. En consecuencia, puede observarse la interferencia de la luz procedente de diferentes átomos.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 33.1

El primer estado excitado del potasio es E_2 = 1,62 eV por encima del estado fundamental E_1, el cual consideramos de valor cero. El potasio posee también los niveles energéticos E_3 = 2,61 eV y E_4 = 3,07 eV. (a) ¿Cuál es la máxima longitud de onda de radiación que puede ser absorbida por el potasio en su estado fundamental? Calcular la longitud de onda de la radiación emitida en la transición desde (b) E_4 al estado fundamental y (c) desde E_4 a E_3.

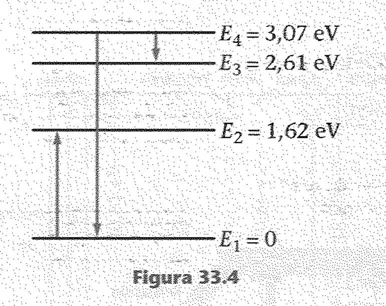


Figura 33.4

Esquema del problema En la figura 33.4 se muestran el estado fundamental E_1 y los tres primeros niveles energéticos excitados. (a) Como la longitud de onda está relacionada con la energía de un fotón por $\lambda = hc/\Delta E$, las longitudes de onda mayores corresponden a las menores diferencias energéticas. La diferencia de energía más pequeña para una transición con origen en el estado fundamental es el paso al primer estado excitado. (b) Las longitudes de onda de los fotones emitidos al pasar de un estado excitado a otro de menor energía dependen de las diferencias correspondientes de energía según $\lambda = hc/\Delta E$.

(a) Calcular la longitud de onda de la radiación absorbida en una transición del estado fundamental al primer estado excitado:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1{,}62 \text{ eV} - 0} = 765 \text{ nm}$$

(b) Para la transición de E_4 al estado fundamental la energía del fotón es $E_4 - E_1 = E_4$. Calcular la longitud de onda de la radiación emitida en esta transición:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_4 - E_1} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3{,}07 \text{ eV} - 0} = 404 \text{ nm}$$

(c) Para la transición de E_4 a E_3, la energía del fotón es $E_4 - E_3$. Calcular la longitud de onda de la radiación emitida en esta transición:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_4 - E_3} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3,07 \text{ eV} - 2{,}61 \text{ eV}} = 2700 \text{ nm}$$

Observaciones La longitud de onda de la radiación emitida en la transición de E_2 al estado fundamental E_1 es 765 nm, la misma que para la radiación absorbida en la transición del estado fundamental a E_2. Esta transición y la correspondiente de E_4 al estado fundamental dan lugar a fotones que pertenecen al espectro visible.

 www.elsolucionario.net

Láseres

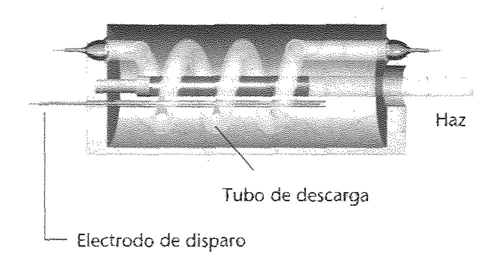


Figura 33.5 Diagrama esquemático del primer láser de rubí.

El láser (sigla de *l*ight *a*mplification by *s*timulated *e*mission of *r*adiation) es un dispositivo que produce un haz intenso de fotones coherentes por emisión estimulada. Consideremos un sistema formado por átomos que poseen un estado fundamental de energía E_1 y un estado metastable de energía E_2. Si estos átomos se irradian con fotones de energía $E_2 - E_1$, los que se encuentren en el estado fundamental pueden absorber un fotón y pasar al estado E_2 y los átomos que ya se encuentran en el estado excitado pueden ser estimulados y pasar al estado fundamental. Las probabilidades relativas de absorción y emisión estimulada fueron estudiadas por Einstein, quien demostró por vez primera que eran iguales. Normalmente, casi todos los átomos del espectro a temperaturas ordinarias se encuentran inicialmente en el estado fundamental, de modo que el efecto principal será la absorción. Para conseguir un número mayor de transiciones por emisión estimulada que transiciones por absorción, es necesario tener más átomos en el estado excitado que en el estado fundamental. Esta condición llamada "inversión de la población" se consigue mediante el "bombeo óptico", de tal modo que los átomos son "bombeados" hasta niveles de mayor energía que E_2 por absorción de una radiación auxiliar intensa. Estos átomos pasan entonces al estado E_2 por emisión espontánea o por transiciones no radiactivas, tales como las debidas a colisiones.

La figura 33.5 muestra un diagrama esquemático del primer láser, un láser de rubí construido por Theodore Maiman en 1960. Consta de una barra de rubí de unos pocos centímetros de longitud rodeada por un tubo helicoidal de descarga gaseosa que emite un amplio espectro de luz. Los extremos de la barra de rubí son planos y perpendiculares al eje de la barra. El rubí es un cristal transparente de Al_2O_3 con una pequeña cantidad (aproximadamente 0,05%) de cromo. Aparece rojo porque los iones de cromo (Cr^{3+}) poseen intensas bandas de absorción en las regiones azul y verde del espectro, como se muestra en la figura 33.6. Los niveles energéticos del cromo que son importantes para el funcionamiento del láser de rubí se muestran en la figura 33.7. Cuando se dispara el tubo de descarga se produce un destello intenso de luz que dura unos pocos milisegundos. La absorción excita muchos de los iones de cromo a las bandas de los niveles energéticos que se indican con colores sombreados en la figura 33.7. Los iones de cromo entonces se relajan cediendo su energía al cristal en transiciones no radiactivas a medida que pasan a un par de estados metastables, E_2 en la figura. Estos estados metastables corresponden a 1,79 eV por encima del estado fundamental. Si el destello es suficientemente intenso, el número de átomos que realizan la transición a los estados E_2 es superior a los que permanecen en el estado fundamental. Por tanto las poblaciones atómicas del estado fundamental y de los estados metastables se invierte. Cuando una parte de los átomos en los estados E_2 pasan al estado fundamental por emisión espontánea, emiten fotones de energía 1,79 eV y longitudes de onda 694,3 nm. A su vez, algunos de estos fotones estimulan a otros átomos ya excitados que emiten fotones de la misma energía y longitud de onda.

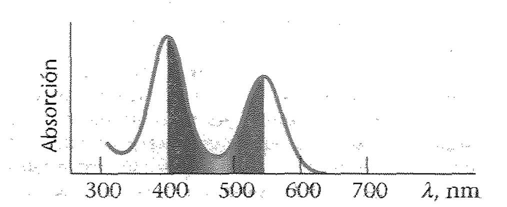


Figura 33.6 Absorción de luz en función de la longitud de onda par el Cr^{3+} en el rubí. Este aparece rojo debido a la fuerte absorción del verde y el azul por los iones de cromo.

En el láser de rubí, ambos extremos del cristal están plateados, de modo que un extremo es casi totalmente reflector y el otro sólo parcialmente reflector (aproximadamente 99%). Cuando los fotones se propagan paralelamente al eje del cristal chocan contra los extremos plateados; todos ellos se reflejan en la cara trasera y la mayor parte se reflejan en la cara frontal, escapando unos pocos a través de esta última, parcialmente plateada. En cada recorrido a través del cristal los fotones estimulan cada vez más átomos, de modo que el haz emitido crece hasta ser muy intenso (figura 33.8). Los láseres modernos de rubí generan haces intensos de luz con energía se 50 a 100 J en pulsos que duran unos pocos milisegundos. El haz puede tener un diámetro tan pequeño como 1 mm y una divergencia angular aproximadamente dentro de un intervalo de 0,25 a 7 milirradianes.

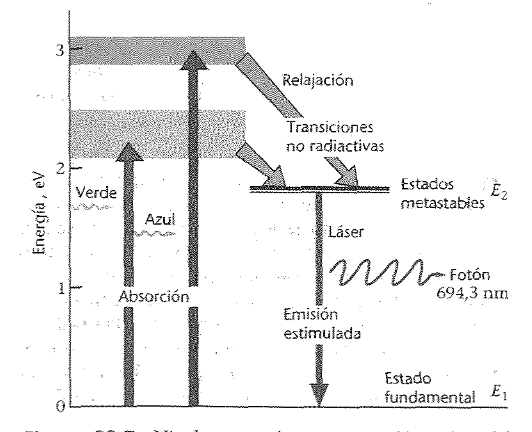


Figura 33.7 Niveles energéticos en un láser de rubí. Para conseguir que la población de los estados metastables sea superior a la del estado fundamental, el cristal de rubí se somete a una intensa radiación que contiene energía en las longitudes de onda verde y azul. Esto excita a los átomos del estado fundamental a las bandas de los niveles energéticos sombreados, a partir de los cuales pasan a los estados metastables por transiciones no radiactivas.

La inversión de población se alcanza de un modo distinto en el láser helio-neón. Los niveles energéticos del helio y el neón de importancia en la operación del láser se muestran en la figura 33.9. El helio posee un estado energético excitado, $E_{2,He}$ de 20,61 eV sobre el estado fundamental. Los átomos de helio se excitan al estado $E_{2,He}$ por medio de una descarga eléctrica. El neón posee un estado excitado, $E_{3,Ne}$ de 20,66 eV por encima de su estado fundamental. Este valor se encuentra sólo a 0,05 eV por encima del primer estado excitado del helio. Los átomos de neón se excitan al estado $E_{3,Ne}$ por colisiones con los átomos excitados de helio. La energía cinética de los átomos de helio suministra los 0,05 eV extra de la energía necesaria para excitar los átomos de neón. Además existe

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

otro estado excitado del neón que posee una energía de 18,70 eV por encima de su estado fundamental y 1,96 eV por debajo del estado $E_{3,\text{Ne}}$. Como el estado $E_{2,\text{Ne}}$ está normalmente desocupado, la inversión entre los estados $E_{3,\text{Ne}}$ y $E_{2,\text{Ne}}$ se obtiene inmediatamente. La emisión estimulada que tiene lugar entre estos estados da lugar a fotones de energía 1,96 eV y longitud de onda 632,8 nm, que producen una luz brillante roja. Después de la emisión estimulada, los átomos del estado $E_{2,\text{Ne}}$ se desintegran al estado fundamental por emisión espontánea.

Obsérvese que en el láser helio-neón están implicados cuatro niveles energéticos, mientras que en el láser de rubí sólo se implicaban tres. En el láser de tres niveles, la inversión de población es difícil de alcanzar, pues deben excitarse más de la mitad de los átomos del estado fundamental. En un láser de cuatro niveles, la inversión de población se alcanza *fácilmente*, pues el estado después de la emisión estimulada *no* es el fundamental, sino un estado excitado normalmente desocupado.

En la figura 33.10 se muestra un diagrama esquemático de un láser helio-neón utilizado corrientemente en demostraciones de física. Consta de un tubo de gas que contiene un 15% de gas helio y un 85% de gas neón. En un extremo del tubo de gas hay montado un espejo plano totalmente reflector y en el otro extremos se sitúa un espejo cóncavo parcialmente reflector. El espejo cóncavo enfoca la luz paralela en el espejo plano y actúa también como una lente que transmite parte de la luz, de modo que emerge como un haz paralelo.

El haz láser es coherente, muy estrecho e intenso. Su coherencia hace que el haz láser sea útil en la producción de hologramas, que será tratada en el capítulo 35. Por su precisa dirección y pequeña dispersión angular del haz, es muy útil como herramienta quirúrgica en la destrucción de células cancerosas o en la fijación de una retina desprendida. Los láseres son utilizados también por los topógrafos para el alineamiento preciso en grandes distancias. Las distancias pueden medirse exactamente por reflexión de un pulso láser en un espejo y midiendo el tiempo que el pulso tarda en llegar al espejo y regresar al punto de partida. La distancia a la luna se midió con un error de unos pocos centímetros utilizando un espejo que fue situado por los astronautas en su superficie con este propósito. Los haces láser se han utilizado también en las investigaciones de fusión nuclear. Un pulso intenso de láser se enfoca sobre pequeñas esferas de deuterio-tritio en una cámara de combustión. El haz calienta las esferitas a temperaturas del orden de 10^8 K en un tiempo muy corto, haciendo que el deuterio y el tritio se fusionen y liberen la energía de fusión.

La tecnología láser avanza tan rápidamente que sólo es posible mencionar algunos de sus desarrollos más recientes. Además del láser rubí, existen muchos otros láseres de estado sólido con haces de longitudes de onda comprendidas entre 170 y 3900 nm aproximadamente. Se han construido láseres que generan una potencia continua superior a 1 kW. Los láseres de pulsos pueden ahora suministrar una potencia superior a 10^{14} W en pulsos de nanosegundos. Existen láseres de gas capaces de producir haces con longitudes de onda variables desde el infrarrojo lejano al ultravioleta. Los láseres de semiconductores (también llamados láseres diodos o láseres de unión) se han reducido en unos 10 años desde el tamaño de una cabeza de alfiler a unas mil millonésimas de metro. Los láseres líquidos que utilizan pigmentos químicos pueden sintonizarse en cierto intervalo de longitudes de onda (aproximadamente 70 nm en los láseres continuos y más de 170 nm en láseres de pulsos). Un láser relativamente nuevo, el láser de electrones libres, extrae energía luminosa de un haz de electrones libres que se mueven a través de un campo magnético especialmente variable. Este láser posee una enorme potencia y un alto rendimiento y puede sintonizarse dentro de un amplio intervalo de longitudes de onda. Aparentemente no hay límite en la variedad y usos de los láseres modernos.

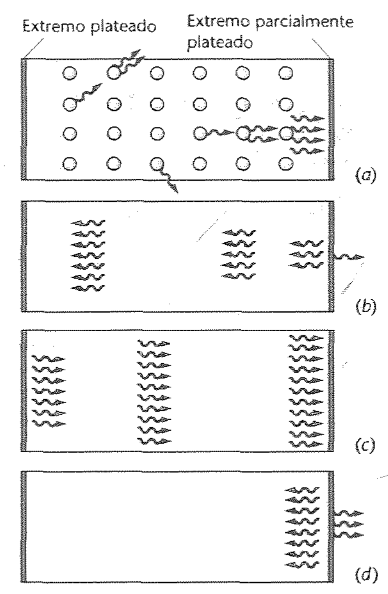


Figura 33.8 Formación de un haz de fotones en un láser. (*a*) Al irradiarse, algunos átomos emiten fotones espontáneamente y una fracción de ellos se propagan hacia la derecha y estimulan a otros átomos que emiten fotones paralelos al eje del cristal. (*b*) De los cuatro fotones que chocan contra la cara derecha, uno se transmite y tres se reflejan. Los fotones reflejados atraviesan de nuevo el cristal láser y estimulan a otros átomos que emiten fotones y el haz va creciendo. En (*c*) son ya muchos los fotones que llegan a la cara derecha del cristal. En (*d*) una parte de estos fotones se transmite y el resto se refleja.

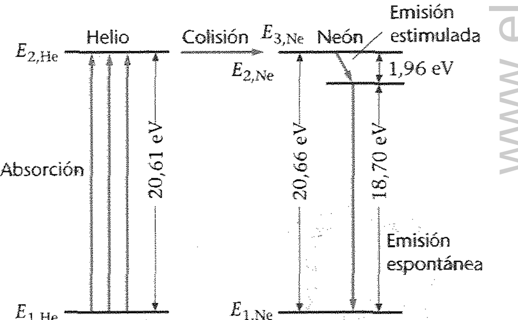


Figura 33.9 Niveles energéticos del helio y neón que son importantes en el láser helio-neón. Los átomos de helio se excitan por descarga eléctrica alcanzando un estado energético de 20,61 eV por encima de su estado fundamental. Al chocar con los átomos de neón excitan a algunos de éstos hasta un estado energético de 20,66 eV. Así se alcanza la inversión de población entre este nivel y el situado 1,96 eV por debajo. La emisión espontánea de fotones de energía 1,96 eV estimula a otros átomos del estado superior que emiten fotones de energía 1,96 eV.

La velocidad de la luz 33.4

El primer esfuerzo para medir la velocidad de propagación de la luz fue hecho por Galileo. Se situó en la cima de una colina mientras que otro observador se colocaba en la cima de otra, distante aproximadamente 3 km, teniendo los dos una linterna y un obtu-

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

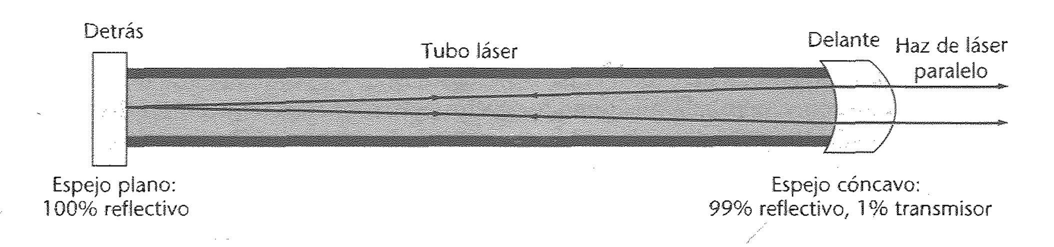


Figura 33.10 Dibujo esquemático de un láser helio-neón. El uso de un espejo cóncavo en lugar de un segundo espejo plano, hace menos crítico el alineamiento de los espejos como ocurre en el láser de rubí. El espejo cóncavo también se utiliza como lente que enfoca la luz emitida en un haz paralelo.

rador para ocultar la luz. Galileo propuso medir el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia de ida y vuelta entre los experimentadores. *A* debería descubrir que su linterna y cuando *B* viese la luz debería descubrir la suya. El tiempo transcurrido a partir del momento en que *A* destapase su linterna y el momento en que éste veía la luz procedente de *B* debería ser el tiempo que la luz tardaba en recorrer ida y vuelta el espacio entre los experimentadores. Aunque este método es correcto en principio, la velocidad de la luz es tan grande que el intervalo de tiempo a medir es mucho menor que las fluctuaciones de la respuesta humana y Galileo fue incapaz de obtener un valor razonable de la velocidad de la luz.

La primera indicación del verdadero valor de la velocidad de la luz procedió de observaciones astronómicas basadas en la medida del período de Io, una de las lunas de Júpiter. Este período se determina midiendo el tiempo entre dos eclipses de la misma (es decir, cuando la luna Io desaparece detrás de Júpiter). El período de eclipses es aproximadamente 42,5 h, pero cuando se hacen medidas en el momento en que la Tierra se está alejando de Júpiter, como ocurre en el trayecto *ABC* de la figura 33.11, se tienen unas medidas de tiempo mayores para este período que cuando las medidas se hacen en las posiciones en que la Tierra se está moviendo hacia Júpiter, a lo largo del trayecto *CDA* de la figura. Como estas medidas difieren aproximadamente en 15 s del valor medio, estas discrepancias eran a su vez difíciles de medir con exactitud. En 1675 el astrónomo Ole Römer atribuyó estas discrepancias al hecho de que la velocidad de la luz no es infinita. Durante las 42,5 h que transcurren entre dos eclipses de la luna de Júpiter, varía la distancia entre la Tierra y Júpiter, haciendo que el trayecto que ha de seguir la luz sea más largo o más corto. Römer ideó el siguiente método para medir el efecto acumulativo de estas discrepancias. Como Júpiter se mueve mucho más lentamente que la Tierra, su movimiento puede despreciarse. El período del eclipse de Io se mide a partir de los comienzos de eclipses sucesivos. Basándose en esta medida se calcula el número de eclipses que se producen en 6 meses y se predice el tiempo en que un eclipse comenzará a producirse medio año más tarde cuando la Tierra esté en *C*. Cuando la Tierra llega realmente a C, el comienzo observado del eclipse es 16,6 minutos más tarde que el previsto. Este es precisamente el tiempo que la luz tarda en recorrer una distancia igual al diámetro de la órbita terrestre.

Tierra
B
Sol
C
A
D
Júpiter
Io

Figura 33.11 Método de Römer para medir la velocidad de la luz. El tiempo que transcurre entre dos eclipses sucesivos de la luna Io de Júpiter parece mayor cuando la Tierra se está moviendo según la trayectoria *ABC*, que si sigue la trayectoria *CDA*. La diferencia se debe al tiempo que emplea la luz en recorrer la distancia en que se ha trasladado la Tierra a lo largo de la línea de visión directa durante un período de Io. (La distancia recorrida por Júpiter en un año terrestre es despreciable.)

www.elsolucionario.net

■ EJEMPLO 33.2

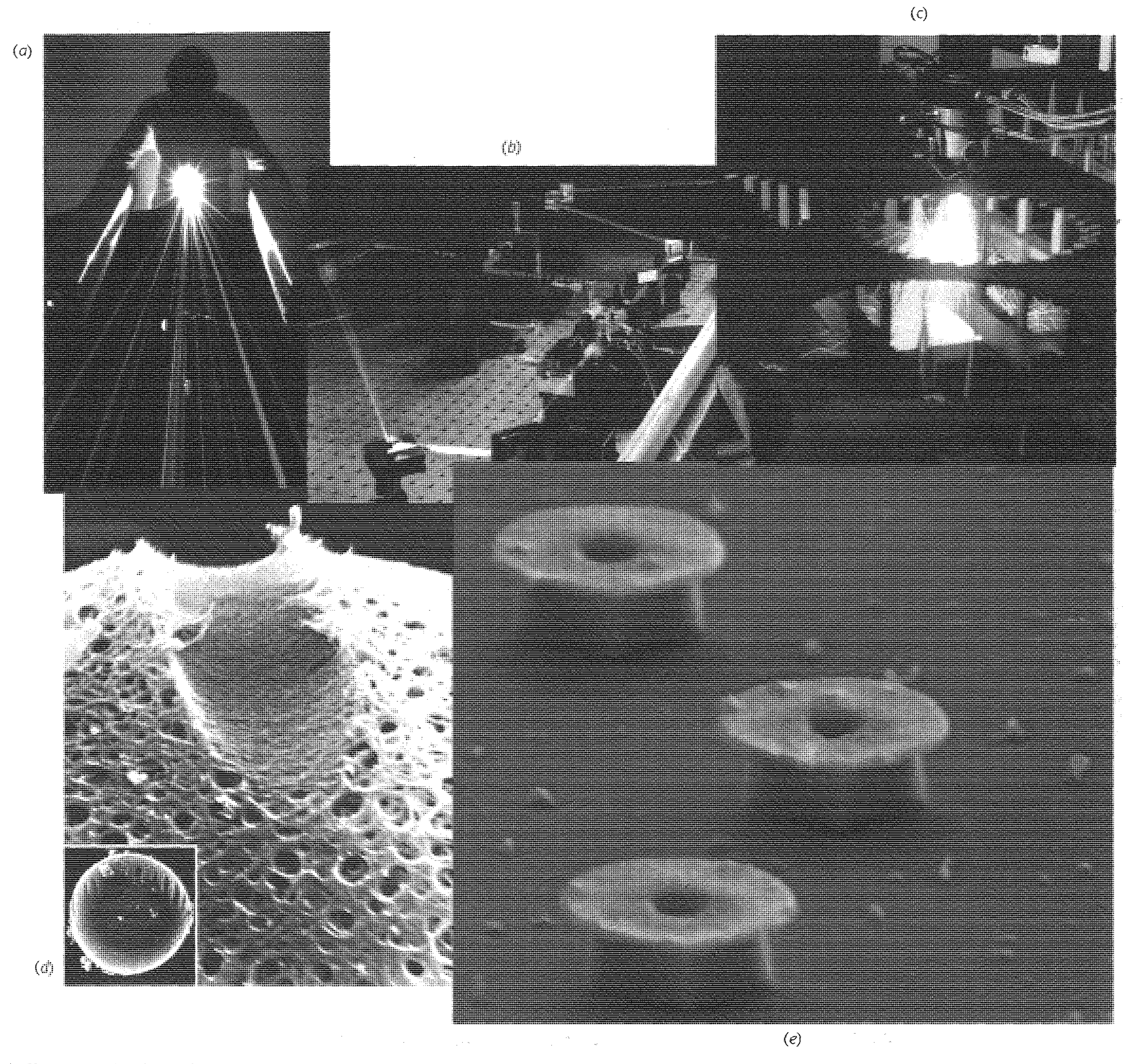
El diámetro de la órbita terrestre es $3{,}00 \times 10^{11}$ m. Si la luz tarda 16,6 min en recorrer esta distancia, ¿cuál es la velocidad de la luz?

Esquema del problema Dividimos la distancia recorrida por el tiempo y convertimos el tiempo en minutos y segundos.

1. La velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo:
$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3{,}00 \times 10^{11}\ \text{m}}{16{,}6\ \text{min}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 3{,}01 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

Observaciones Römer obtuvo un valor considerablemente más pequeño porque utilizó 22 min para Δt.

www.elsolucionario.net



(*a*) Haces de un láser de criptón y otro de argón, descompuestos en sus longitudes de onda componentes. En estos láseres de gas, los átomos de criptón y argón han sido privados de múltiples electrones formando iones positivos. Las transiciones energéticas con emisión de luz tienen lugar cuando los electrones excitados en los iones pasan de un nivel superior a otro. En este caso tienen lugar simultáneamente varias transiciones de energía, correspondientes cada una a una luz de diferente longitud de onda. (*b*) Un láser de pulsos de femtosegundos (10^{-15} s). Mediante una técnica llamada de "bloqueo", dentro de una cavidad del láser interfieren diferentes modos excitados y se crean una serie de pulsos ultracortos, del orden de picosegundos, que corresponden al tiempo que tarda la luz en saltar adelante y atrás dentro de la cavidad. Los pulsos ultracortos se han utilizado como sondas para estudiar el comportamiento de las moléculas durante las reacciones químicas. (*c*) Un láser de dióxido de carbono tarda justamente dos minutos en recortar una hoja de sierra de acero. (*d*) *Surco trazado en la zona transparente (cubierta exterior protectora) del óvulo de un ratón mediante una "tijera láser" para facilitar la implantación.* Esta técnica se ha aplicado ya en terapias de fertilidad humana. Diversos efectos contribuyen a la capacidad del láser de un enfoque preciso para cortar a escala tan delicada: la absorción de fotones puede calentar el blanco, romper enlaces moleculares, o impulsar reacciones químicas. (*e*) Los llamados nanoláseres aquí mostrados son discos semiconductores de un diámetro de pocas micras y de una anchura del orden de una fracción de media micra. Estos diminutos láseres, como sus "colegas" macroscópicos, generan y atrapan fotones hasta que la emisión estimulada crea la intensidad suficiente para que éstos escapen desde los perímetros de los discos. Aprovechando los efectos cuánticos que prevalecen a esta escala microscópica, los nanoláseres prometen un futuro de gran rendimiento y están siendo ensayados como dispositivos de conmutación, ultrarrápidos y de gran energía.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

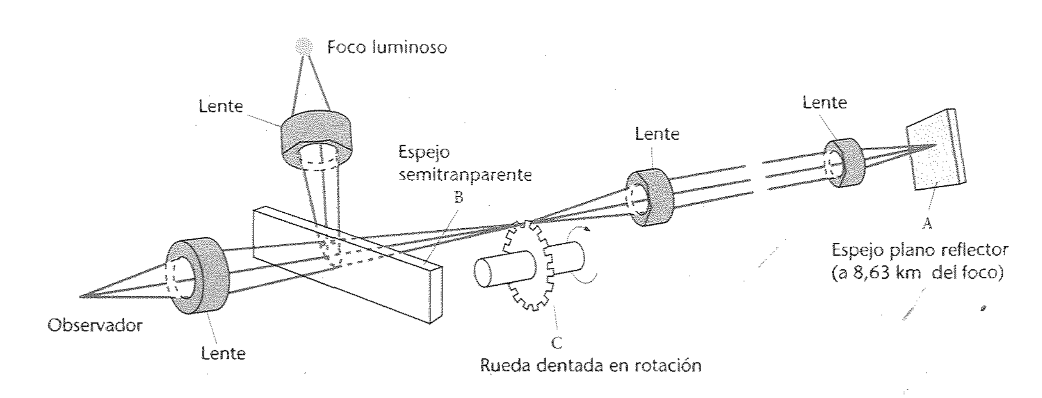


Figura 33.12 Método de Fizeau para medir la velocidad de la luz. La luz procedente de un foco se refleja en el espejo *B* y se transmite por el hueco que existe entre los dientes de la rueda dentada hasta el espejo *A*. La velocidad de la luz se determina midiendo la velocidad angular de la rueda que permite que la luz reflejada pase a través del siguiente hueco de la rueda de modo que pueda observarse la imagen del foco

La primera medición no astronómica de la velocidad de la luz la llevó a cabo el físico francés Fizeau en 1849. Sobre una colina cerca de París, Fizeau sitúo una fuente luminosa y un sistema de lentes dispuesto de tal forma que la luz reflejada en un espejo semitransparente se enfocaba sobre uno de los huecos existentes en una rueda dentada, como se ve en la figura 33.12. Sobre otra colina distante (aproximadamente a 8,63 km) situó un espejo que reflejase la luz hacia atrás, de modo que pudiera ser vista por un observador del modo que se indica en la figura. La rueda dentada podía girar, siendo variable su velocidad de rotación. A bajas velocidades de rotación, la luz no era visible porque la luz que pasaba a través de un hueco de la rueda dentada quedaba obstruida por el diente siguiente después de reflejada en el espejo. Entonces se aumentaba la velocidad de rotación hasta que la luz pasaba a través del hueco de la rueda. El tiempo necesario para que la rueda girase a través del ángulo comprendido entre dos huecos sucesivos era igual al tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia de la rueda al espejo y volver a la rueda.

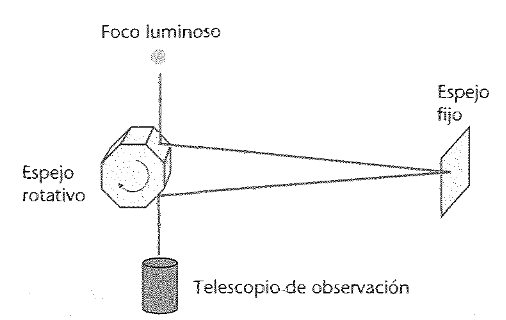


Figura 33.13 Esquema simplificado del método de Foucault para medir la velocidad de la luz. Esencialmente, se ha sustituido la rueda dentada giratoria de Fizeau por un espejo octogonal en rotación. Cuando el espejo da un octavo de vuelta durante el tiempo que la luz emplea para ir y volver al espejo fijo, la siguiente cara del espejo está en la posición adecuada para reflejar la luz hacia el telescopio de observación.

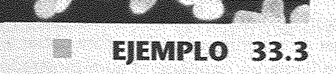
El método Fizeau fue mejorado por Foucault, quien reemplazó la rueda dentada por un espejo rotativo de ocho caras, como se indica en la figura 33.13. La luz incide sobre una cara del espejo y, luego de reflejarse en un espejo fijo alejado, cae sobre otra cara en donde se refleja entonces hacia un telescopio de observación. Cuando el espejo gira un octavo de vuelta (o $n/8$ vueltas, siendo n un número entero) otra de las caras del espejo se encontrará en posición correcta para que la luz reflejada entre en el telescopio. Alrededor de 1850, Foucault midió la velocidad de la luz en aire y en agua y demostró que es inferior en el caso del agua. Utilizando esencialmente el mismo método, el físico americano A. A. Michelson realizó mediciones precisas de la velocidad de la luz desde 1880 hasta 1930.

En otro método de determinación de la velocidad de la luz interviene la medida de las constantes ε_0 y μ_0 para determinar c según la expresión $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Los diversos métodos que hemos considerado para la medida de la velocidad de la luz concuerdan todos satisfactoriamente. Se define en la actualidad que la velocidad de la luz es exactamente

$$c = 299\,792\,457 \text{ m/s} \tag{33.5}$$

y entonces se define en función de esta velocidad la unidad estándar de longitud, el metro. Una medición de la velocidad de la luz equivale ahora, por tanto, a una medición del tamaño del metro, que es la distancia que recorre la luz en (1/299 792 457) s. El valor de 3×10^8 m/s para la velocidad de la luz es suficientemente exacto para la mayor parte de las aplicaciones. La velocidad de las ondas de radio y de todas las demás ondas electromagnéticas (en el vacío) es la misma que la velocidad de la luz.




EJEMPLO 33.3

En el experimento de Fizeau, la rueda tenía 720 dientes y se observaba la luz cuando la rueda giraba a 25,2 revoluciones por segundo. Si la distancia entre la rueda y el espejo distante era de 8,63 km, ¿cuál fue el valor que obtuvo Fizeau para la velocidad de la luz?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Esquema del problema El tiempo que la luz tarda en ir de la rueda al espejo y volver es igual al tiempo durante el cual la rueda gira el ángulo comprendido entre dos dientes sucesivos, es decir, el tiempo necesario para que la rueda verifique $\frac{1}{720}$ de revolución.

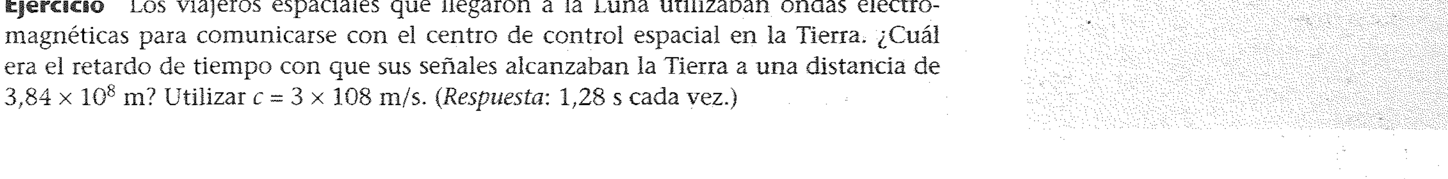
1. La velocidad es la distancia recorrida dividida por el tiempo: $c = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

2. La distancia es dos veces la que existe entre la rueda y el espejo: $\Delta x = 2 \times 8{,}63 \text{ km} = 17{,}3 \text{ km}$

3. Calcular el tiempo necesario para realizar $\frac{1}{720}$ de revolución: $\Delta t = \dfrac{1 \text{ s}}{25{,}2 \text{ rev}}\left(\frac{1}{720} \text{ rev}\right) = 5{,}51 \times 10^{-5} \text{ s}$

4. Sustituir estos valores para calcular c: $c = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{17{,}3 \times 10^3 \text{ m}}{5{,}51 \times 10^{-5} \text{ s}} = 3{,}14 \times 10^8 \text{ m/s}$

Observación Este resultado es aproximadamente un 5% demasiado alto.



Ejercicio Los viajeros espaciales que llegaron a la Luna utilizaban ondas electromagnéticas para comunicarse con el centro de control espacial en la Tierra. ¿Cuál era el retardo de tiempo con que sus señales alcanzaban la Tierra a una distancia de $3{,}84 \times 10^8$ m? Utilizar $c = 3 \times 108$ m/s. (*Respuesta*: 1,28 s cada vez.)

Las distancias grandes se dan frecuentemente en función de la distancia recorrida por la luz en un tiempo determinado. Por ejemplo, la distancia al Sol es 8,33 minutos-luz (8,33 min-l). Un año luz es la distancia que la luz recorre en un año. Fácilmente podemos encontrar un factor de conversión entre años-luz y metros. El número de segundos en un año es

$$1 \text{ a} = 1 \text{ a} \times \frac{365{,}24 \text{ d}}{1 \text{ a}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3{,}156 \times 10^7 \text{ s}$$

El número de metros en un año-luz es, por tanto,

$$1 \text{ a-l} = (2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})(3{,}156 \times 10^7 \text{ s}) = 9{,}46 \times 10^{15} \text{ m} \quad \textbf{(33.6)}$$

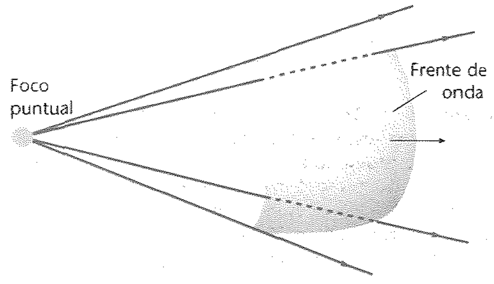


Figura 33.14 Frente de onda esférico procedente de un foco puntual.

www.elsolucionario.net

Propagación de la luz ■ 33.5

La propagación de la luz viene gobernada por la ecuación de onda que estudiaremos en el capítulo 32. Sin embargo, mucho antes de que Maxwell desarrollara su teoría de las ondas electromagnéticas, la propagación de la luz y otras ondas fue descrita empíricamente por dos interesantes y muy distintos principios atribuidos al físico holandés Christian Huygens (1629-1695) y al matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665).

Principio de Huygens ■

En la figura 33.14 puede verse una porción de un frente de onda esférico que procede de un foco puntual. El frente de onda es el lugar geométrico de los puntos con fase constante. Si en el instante t el radio del frente de onda es r, su radio en el instante $t + \Delta t$ es $r + c\,\Delta t$, siendo c la velocidad de la onda. Sin embargo, si una parte de la onda se ve bloqueada por un cierto obstáculo, o si la onda pasa a través de distintos medios, como en la figura 33.15, es mucho más difícil la determinación del nuevo frente de onda en el instante $t + \Delta t$. La propagación de una onda cualquiera a través del espacio puede describirse utilizando un método geométrico descubierto por Christian Huygens en 1678 y que ahora se conoce como **principio de Huygens** o **construcción de Huygens**:

 www.elsolucionario.net

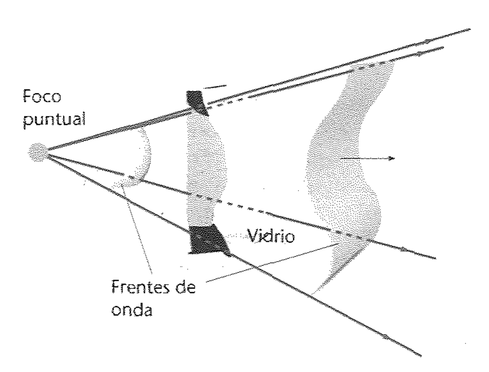


Figura 33.15 Frente de onda procedente de un foco puntual antes y después de atravesar una pieza de vidrio de forma irregular.

Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.

Principio de Huygens

La figura 33.16 muestra la aplicación del principio de Huygens a la propagación de una onda plana y de una onda esférica. Como es natural, si todos los puntos de un frente de onda fuesen realmente un foco puntual, habrían también ondas moviéndose hacia atrás. Huygens no tuvo en cuenta estas ondas en retroceso.

El principio de Huygens fue posteriormente modificado por Fresnel, de modo que se calculaba el nuevo frente de onda a partir del frente de onda primitivo mediante la superposición de las ondas elementales considerando sus amplitudes y fases relativas. Aún más tarde Kirchhoff demostró que el principio de Huygens-Fresnel era una consecuencia de la ecuación de ondas, situándolo así sobre una base matemática firme. Kirchhoff demostró que la intensidad de las ondas elementales depende del ángulo y que es nula en sentido hacia atrás.

En este capítulo (sección 33.8) utilizaremos el principio de Huygens para deducir las leyes de la reflexión y refracción. En el capítulo 35 aplicaremos el principio de Huygens con la modificación de Fresnel para calcular el esquema de difracción de una sola rendija. Como la longitud de onda de la luz es tan pequeña, con frecuencia utilizaremos la aproximación del rayo para describir su propagación.

Principio de Fermat

La propagación de la luz puede también describirse por el principio de Fermat:

La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto a otro es aquella para la cual, el tiempo de recorrido es un mínimo.[1]

Principio de Fermat

En la sección 33.8 utilizaremos el principio de Fermat para deducir las leyes de reflexión y refracción.

33.6 Reflexión y refracción

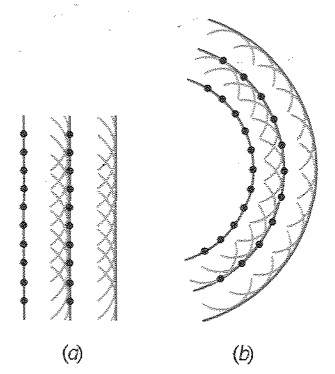


Figura 33.16 Construcción de Huygens para la propagación hacia la derecha de (*a*) una onda plana y (*b*) una onda esférica o circular de partida.

La velocidad de la luz en un medio transparente tal como el aire, el agua o el vidrio es menor que la velocidad $c = 3 \times 10^8$ m/s en el vacío. Un medio transparente se caracteriza por el **índice de refracción**, n que se define por el cociente entre la velocidad en el vacío, c, y la velocidad en el medio, v:

$$n = \frac{c}{v} \tag{33.7}$$

Definición —Indice de refracción

Para el agua, $n = 1{,}33$, mientras que para el vidrio n varía de 1,5 a 1,66 según el tipo de vidrio. El diamante posee un índice de refracción muy elevado, aproximadamente 2,4. El índice de refracción del aire es aproximadamente 1,0003, de modo que para la mayor parte de los casos a estudiar, podemos suponer que la velocidad de la luz en el aire es la misma que en el vacío.

[1] Un enunciado más completo y general indica que el tiempo recorrido es estacionario respecto a las variaciones de la trayectoria; es decir, si t se expresa en función de cierto parámetro x, la trayectoria seguida cumplirá la condición $dt/dx = 0$. La característica importante de una trayectoria estacionaria es que el tiempo transcurrido a lo largo de trayectorias próximas será aproximadamente el mismo que a lo largo del recorrido real.

www.elsolucionario.net

Cuando un haz de luz incide sobre una superficie límite de separación entre dos medios, tal como una superficie aire-vidrio, parte de la energía luminosa se refleja y parte entra en el segundo medio. Si la luz incidente no es perpendicular a la superficie, entonces la luz transmitida no es paralela a la incidente. El cambio en dirección del rayo transmitido se denomina **refracción**. La figura 33.17 muestra un rayo de luz que incide sobre una superficie lisa aire-vidrio. El ángulo θ_1 entre el rayo incidente y la normal (la recta perpendicular a la superficie) se denomina **ángulo de incidencia** y el plano definido por ambas líneas recibe el nombre de **plano de incidencia**. El rayo reflejado yace en el plano de incidencia y forma un ángulo θ_1' con la normal que es igual al ángulo de incidencia como se ve en la figura:

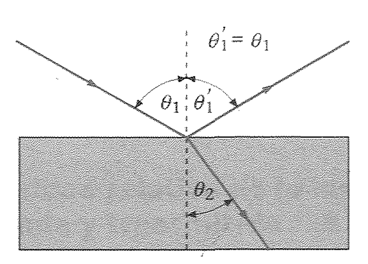


Figura 33.17 El ángulo de reflexión θ_1' es igual al ángulo de incidencia θ_1. El ángulo de refracción θ_2 es menor que el ángulo de incidencia si la velocidad de la luz en el segundo medio es menor que la que posee en el medio incidente.

$$\theta_1' = \theta_1 \tag{33.8}$$

Ley de reflexión

Este resultado se conoce como **ley de la reflexión** y es válida para cualquier tipo de onda. La figura 33.18 ilustra la ley de la reflexión en el caso de rayos de luz y de frentes de ondas de ultrasonidos.

El rayo que entra en el vidrio en la figura 33.17 se denomina rayo refractado y el ángulo θ_2 es el ángulo de refracción. Cuando una onda cruza un límite en el cual se reduce su velocidad, como en el caso de la luz que penetra en el vidrio desde el aire, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia θ_1, es decir, el rayo refractado se aproxima a la normal. En cambio, si el haz luminoso se origina en el vidrio y se refracta en el aire, entonces el rayo refractado se aproxima a la normal.

El ángulo de refracción θ_2 depende del ángulo de incidencia y de la velocidad relativa de las ondas luminosas en los dos medios. Si v_1 es la velocidad de la onda en el medio incidente y v_2 la velocidad de la onda en el medio transmisor, los ángulos de incidencia y refracción vienen relacionados por

$$\frac{1}{v_1}\,\text{sen}\,\theta_1 = \frac{1}{v_2}\,\text{sen}\,\theta_2 \tag{33.9a}$$

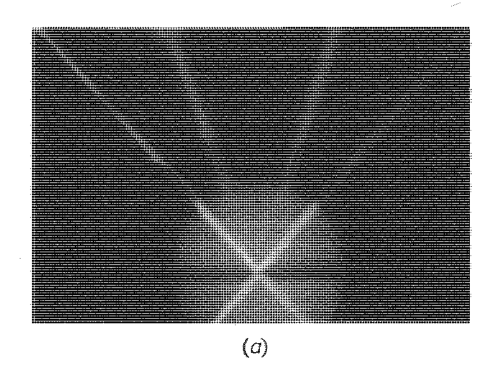
La ecuación 33.9a es válida para la refracción de cualquier tipo de onda incidente en una interface límite que separe dos medios distintos.

En función de los índices de refracción de los dos medios n_1 y n_2, la ecuación 33.9a toma la forma

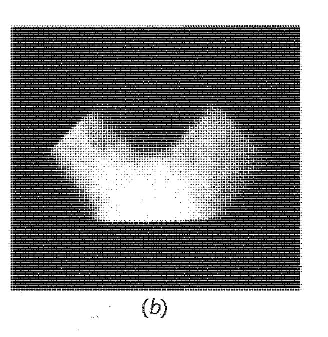
$$n_1\,\text{sen}\,\theta_1 = n_2\,\text{sen}\,\theta_2 \tag{33.9b}$$

Ley de Snell de la refracción

Este resultado fue descubierto experimentalmente en 1621 por Willebrod Snell, un científico holandés, y se conoce como **ley de Snell** o **ley de la refracción**. Algunos años después fue descubierta independientemente por René Descartes.

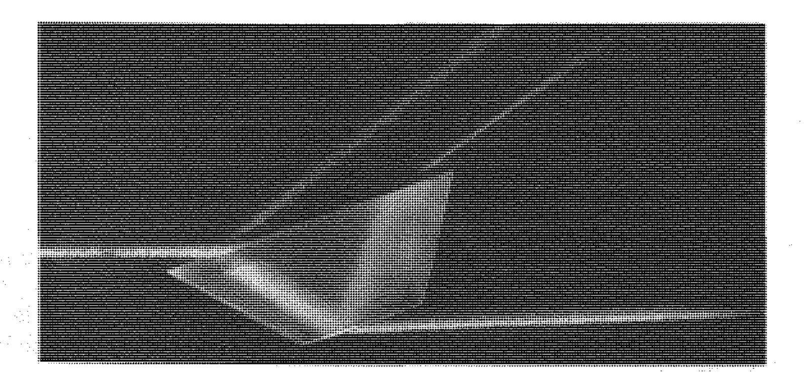


(a)



(b)

Figura 33.18 (a) Rayos luminosos reflejados en una interface aire-vidrio mostrando ángulos iguales de incidencia y reflexión. (b) Ondas planas ultrasónicas en el agua reflejadas en una placa de acero.



Reflexión y refracción de un haz de luz incidente sobre un bloque de vidrio.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

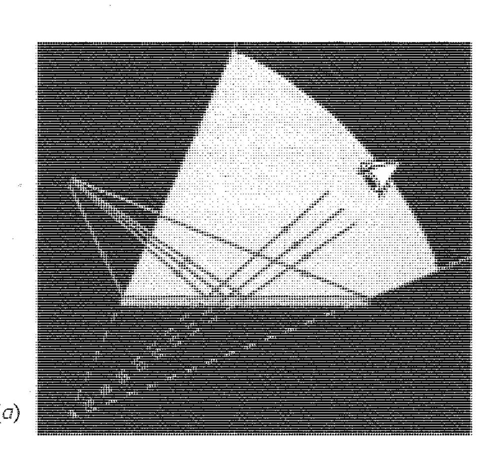




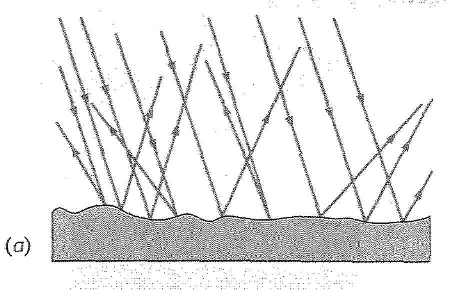
Figura 33.19 (*a*) Reflexión especular en una superficie pulida. (*b*) Reflexión especular de los árboles en el agua.

Mecanismos físicos de la reflexión y la refracción

El mecanismo físico de la reflexión de la luz puede comprenderse en función de la absorción e irradiación posterior de la luz por los átomos del medio reflector o refractor. Cuando la luz que se transmite por el aire incide sobre una superficie de vidrio, los átomos de éste absorben la luz y la irradian inmediatamente con la misma frecuencia en todas las direcciones. Las ondas radiadas hacia atrás por los átomos de vidrio interfieren constructivamente en un ángulo igual al de incidencia produciendo así la onda reflejada.

La onda transmitida es el resultado de la interferencia entre la onda incidente y la onda producida por la absorción e irradiación de la energía de la luz por los átomos del medio. En el caso de que la luz entre en el vidrio procedente del aire, existe un retraso de fase entre la onda irradiada y la onda incidente. Por tanto, existe también un retraso de fase entre la onda resultante y la onda incidente. Este retraso de fase significa que la posición de una cresta de onda de la onda transmitida está retardada respecto a la posición de las crestas de onda de la onda incidente en el medio. Por consiguiente, en un tiempo determinado, no llega tan lejos dentro del medio como la onda incidente original; es decir, la velocidad de la onda transmitida es menor que la de la onda incidente. El índice de refracción, es por tanto, mayor que 1. Como la frecuencia de la luz en el segundo medio es la misma que la de la luz incidente —los átomos absorben y reirradian la luz con la misma frecuencia—, pero la velocidad de la luz es diferente, la longitud de onda de la luz transmitida es distinta de la que posee la luz incidente. Si la longitud de onda en el vacío es λ, la longitud de onda λ' en un medio de índice de refracción n es

$$\lambda' = \frac{v}{f} = \frac{c/n}{f} = \frac{\lambda}{n} \tag{33.10}$$



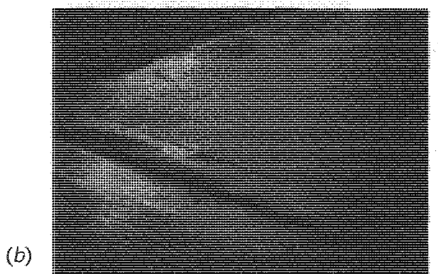


Figura 33.20 (*a*) Reflexión difusa en una superficie rugosa. (*b*) Reflexión difusa de luces coloreadas en una acera.

Reflexión especular y difusa

La figura 33.19*a* muestra un haz de rayos luminosos procedentes de una fuente puntual P que se reflejan en una superficie plana. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' detrás de la superficie. El punto P' se denomina **imagen** del punto P. Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que divergirían de una fuente en P' como si no hubiese ninguna superficie presente. (Estudiaremos la formación de imágenes mediante superficies reflectoras y refractoras en el capítulo siguiente.)

La reflexión en una superficie suave y lisa se denomina **reflexión especular**. Difiere de la **reflexión difusa**, que se ilustra en la figura 33.20. En este último caso, puesto que la superficie es rugosa, los rayos entran en el ojo procedentes de muchos puntos de reflexión en la superficie, de modo que no existe una imagen. La reflexión de la luz en la página de este libro es una reflexión difusa. A veces se utilizan vidrios ligeramente esme-

www.elsolucionario.net

rilados para cubrir cuadros, de forma que se obtenga una reflexión difusa y se elimine, por tanto, los reflejos y brillos de la luz utilizada para iluminarlos. La reflexión difusa de la carretera es la que nos permite verla cuando se conduce de noche, porque parte de la luz de los faros se refleja difusamente en la superficie de la carretera y vuelve hacia nosotros.

Intensidad relativa de la luz reflejada y transmitida

La fracción de energía luminosa reflejada en una superficie límite, tal como una interface aire-vidrio, depende en una forma complicada del ángulo de incidencia, la orientación del vector campo eléctrico asociado a la onda y de los índices de refracción de los dos medios. Para el caso especial de incidencia normal ($\theta_1 = \theta_1' = 0$), la intensidad reflejada resulta ser

$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0 \tag{33.11}$$

en donde I_0 es la intensidad incidente y n_1 y n_2 son los índices de refracción de los dos medios. Para un caso típico de reflexión en una interface aire-vidrio para la cual $n_1 = 1$ y $n_2 = 1{,}5$, la ecuación 33.11 nos da $I = I_0/25$. Sólo el 4% de la energía se refleja; el resto se transmite.

EJEMPLO 33.4

Un rayo de luz que se propaga en el aire entra en el agua con un ángulo de incidencia de 45°. Si el índice de refracción del agua es 1,33, ¿cuál es el ángulo de refracción?

Esquema del problema El ángulo de refracción se determina utilizando la ley de Snell. Llamemos 1 y 2 a los subíndices correspondientes al aire y al agua, respectivamente. Por tanto, $n_1 = 1$, $\theta_1 = 45°$, $n_2 = 1{,}33$ y θ_2 el ángulo de refracción (figura 33.21).

Figura 33.21

1. Utilizar la ley de Snell para deducir sen θ_2, es decir, el seno del ángulo de refracción:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \operatorname{sen} \theta_1 = \left(\frac{1}{1{,}33}\right) \operatorname{sen} 45° = \frac{0{,}707}{1{,}33} = 0{,}532$$

2. Determinar el ángulo cuyo seno es 0,532:

$$\theta_2 = \operatorname{arcsen} 0{,}532 = 32{,}1°$$

Observación La luz se refracta y se acerca más a la normal en el medio que tiene mayor índice de refracción.

Reflexión interna total

En la figura 33.22 se ve una fuente puntual en el vidrio con rayos que inciden sobre la superficie vidrio-aire a diferentes ángulos. Todos los rayos no perpendiculares a la interface se desvían alejándose de la normal. Al ir aumentando el ángulo de incidencia θ_c, el ángulo de refracción crece hasta que se alcanza un ángulo de incidencia crítico θ_c para el cual el ángulo de refracción es 90°. En el caso de ángulos de incidencia mayores que este ángulo crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. Este fenómeno se denomina **reflexión interna total**. Puede hallarse el ángulo crítico en función de los índices de refracción de los dos medios despejando en la ecuación 33.9b el sen θ_1 y haciendo θ_2 igual a 90°:

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_1}{n_2} \operatorname{sen} 90° = \frac{n_2}{n_1} \tag{33.12}$$

Ángulo crítico para la reflexión interna total

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

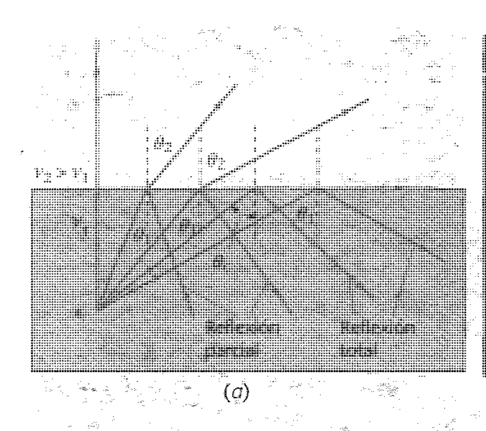
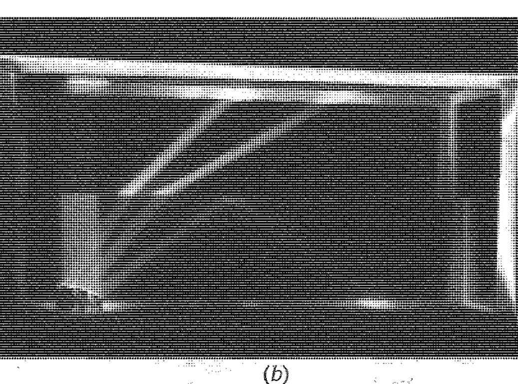



Figura 33.22 (*a*) Reflexión interna total. Cuando aumenta el ángulo de incidencia, crece el ángulo de refracción hasta que, para un cierto ángulo crítico de incidencia θ_c, el ángulo de refracción es 90°. Con ángulos de incidencia mayores que el crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. (*b*) Fotografía de la refracción y de la reflexión interna total en una superficie agua-aire.

Obsérvese que sólo se presenta la reflexión interna total cuando la luz se encuentra originalmente en el medio con mayor índice de refracción. Matemáticamente, si n_2 es mayor que n_1, no puede verificarse la ley de Snell porque no existe ningún ángulo real cuyo seno sea mayor que 1.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 33.5
¡Inténtelo!

Un vidrio determinado posee un índice de refracción n = 1,50. ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total de la luz que sale de este vidrio y entra en el aire, para el cual n = 1,00?

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular el seno del ángulo crítico según la ecuación 33.12.	sen $\theta_c = 0{,}667$
2. Utilizar este resultado para determinar el ángulo.	$\theta_c = 41{,}8°$

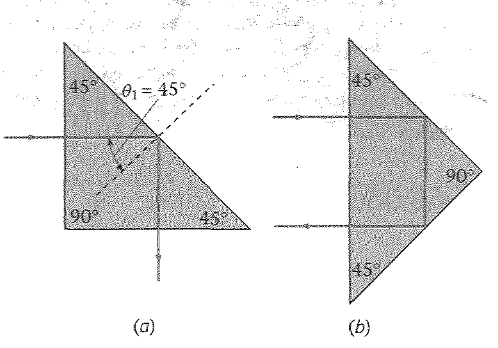


Figura 33.23 (*a*) La luz que entra por uno de los catetos de un prisma de vidrio de 45°-45°-90° se refleja totalmente. (*b*) La luz que entra por la hipotenusa del prisma se refleja totalmente dos veces.

La figura 33.23*a* muestra luz que incide normalmente sobre uno de los catetos de un prisma de vidrio de 45°-45°-90°. Si el índice de refracción del prisma vale 1,5, el ángulo crítico correspondiente a la reflexión total interna es 41,8°, como hemos visto en el ejemplo 33.5. Como el ángulo de incidencia del rayo sobre la superficie vidrio-aire es 45°, la luz se reflejará totalmente y saldrá perpendicularmente a la otra cara del prisma, como está indicado. En la figura 33.23*b*, la luz incide perpendicularmente a la hipotenusa del mismo tipo de prisma y se refleja totalmente dos veces, de modo que emerge a 180° respecto a su dirección inicial. Los prismas se utilizan para variar la dirección de los rayos luminosos. En los llamados prismáticos se utilizan cuatro prismas para enderezar la imagen que las lentes del sistema óptico dan invertidas. El diamante tiene un índice de refracción muy alto ($n \approx 2{,}4$), de modo que casi toda la luz que entra en un diamante se ve reflejada finalmente hacia fuera, dando origen a sus característicos destellos.

Fibras ópticas Una aplicación interesante de la reflexión interna total es la transmisión de un haz de luz a lo largo de una fibra de vidrio transparente, delgada y larga (figura 33.24*a*). Si el haz empieza aproximadamente paralelo al eje de la fibra, chocará contra las paredes de la misma con ángulos mayores que el ángulo crítico (si las partes curvas de la fibra no son demasiado agudas) y no se perderá energía luminosa a través de las paredes de la fibra. Para obtener imágenes puede utilizarse un manojo o haz de este tipo de fibras, como se muestra en la figura 33.24*b*. Las fibras ópticas tienen muchas

www.elsolucionario.net

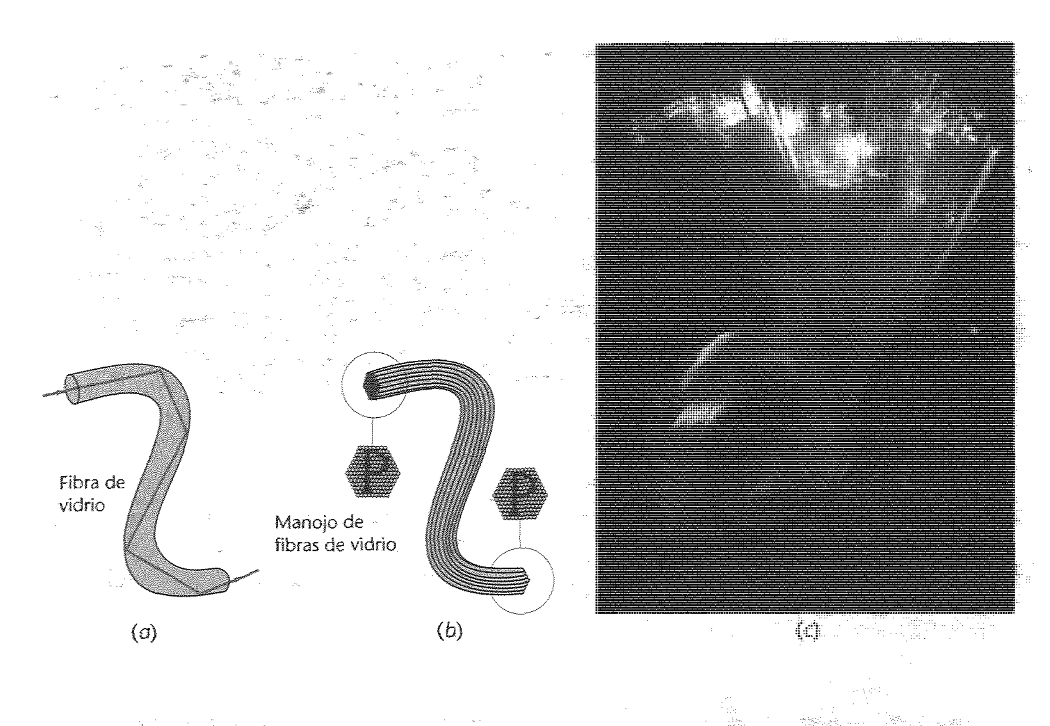
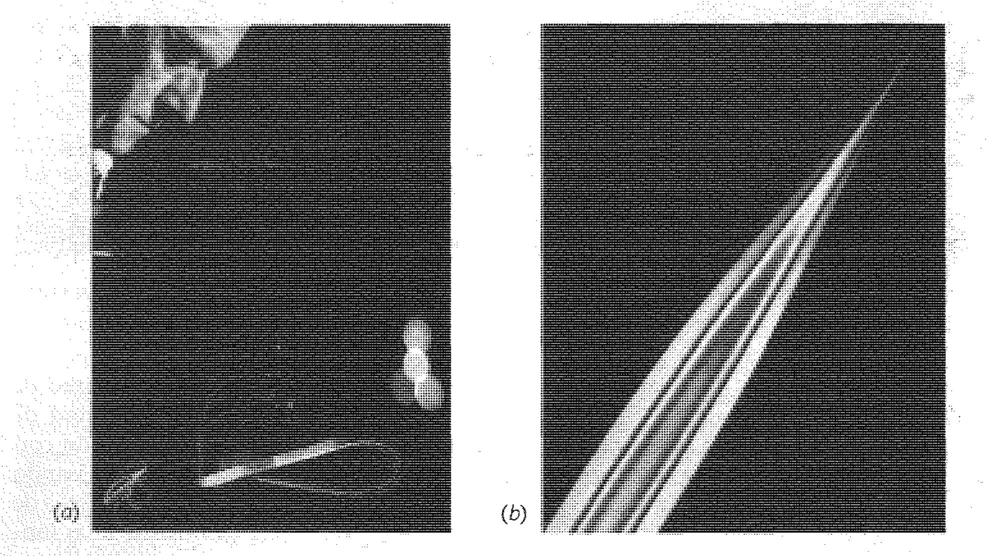


Figura 33.24 (*a*) Tubo de luz. La luz dentro del tubo incide siempre en sus paredes internas con un ángulo mayor que el crítico de modo que no puede escapar del tubo por refracción. (*b*) La luz procedente de un objeto se transporta por un manojo de fibras de vidrio para formar una imagen del objeto en el otro extremo de las fibras. (*c*) Luz emergente de un manojo de fibras de vidrio.



(*a*) En esta demostración realizada en el Laboratorio de Investigación Naval de los Estados Unidos, una combinación de focos láser generan diversos colores que excitan elementos sensores en fibras adyacentes, lo que lleva a una separación de la información como se indica por la separación de los colores. (*b*) La punta de un elemento previo de una guía de luz se reblandece mediante el calor y se estira hasta formar una fibra muy fina y larga. Los colores en el elemento previo indican una estructura en capas de diferentes composiciones, que queda retenida en la fibra.

aplicaciones en medicina y en comunicaciones. En medicina, se utilizan haces muy finos de fibras como sondas para examinar diversos órganos internos sin necesidad de intervención quirúrgica. En comunicaciones, el ritmo o velocidad con que puede transmitirse información está relacionado con la frecuencia de la señal. Un sistema de transmisión que utilice luz de frecuencias del orden de 10^{14} Hz puede transmitir información a un ritmo mucho mayor que si se utilizase ondas de radio, que tienen frecuencias del orden de 10^6 Hz. En sistemas de telecomunicación, una sola fibra de vidrio del tamaño de un cabello humano puede ahora transmitir información audio o vídeo equivalente a 25 000 voces hablando simultáneamente.

Espejismo

Cuando el índice de refracción de un medio cambia gradualmente, la refracción es continua, de forma que la luz se va curvando gradualmente. Un ejemplo interesante de este caso es la formación de un espejismo. En un día muy caluroso, es frecuente que se tenga cerca del suelo una capa de aire más caliente y, por tanto, menos denso que el aire que

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

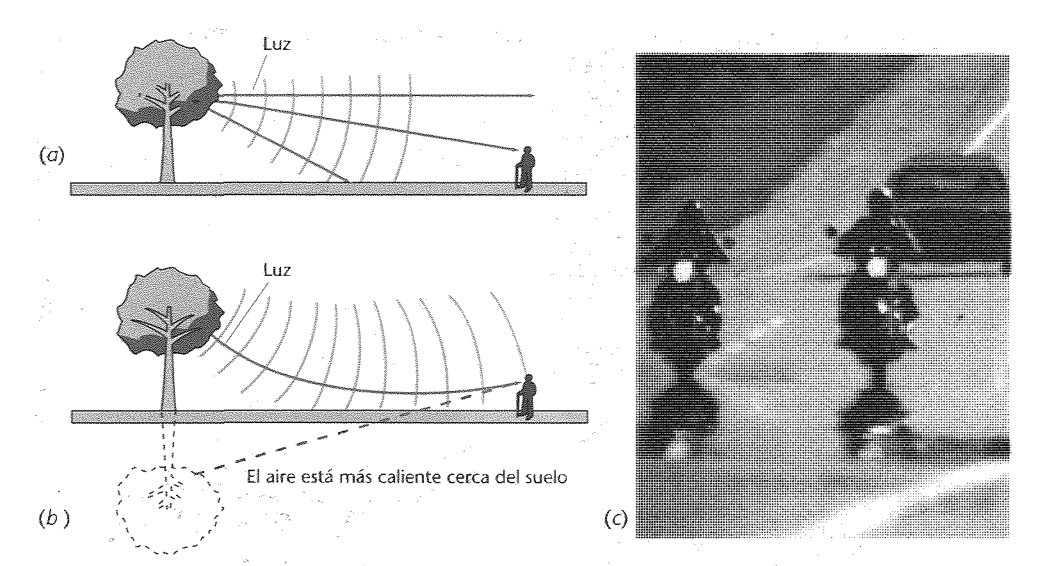


Figura 33.25 Espejismo. (*a*) Cuando el aire está a temperatura uniforme, los frentes de onda de la luz procedente del árbol son esféricos. (*b*) Cuando el aire cerca del suelo está más caliente, los frentes de onda dejan de ser esféricos y la luz proveniente del árbol se refracta de forma continua dando un trayecto curvo. (*c*) Fotografía de reflexiones aparentes de motocicletas sobre una carretera muy caliente.

tiene encima. La velocidad de la luz es ligeramente mayor en esta capa menos densa, de manera que el haz de luz que pasa de la capa más fría a la más caliente se curva. La figura 33.25*a* muestra la luz procedente de un árbol cuando todo el aire está a la misma temperatura. Los frentes de onda son esféricos y los rayos son rectos. En la figura 33.25*b*, el aire próximo al suelo está más caliente y en él la velocidad del aire es mayor. Las partes del frente de onda cercanas al suelo se mueven con mayor rapidez y adelantan a las partes que están más altas, originándose así un frente de onda no esférico que causa la curvatura de los rayos. Así, el rayo que inicialmente se dibujaba incidiendo sobre el suelo se curva hacia arriba. Como resultado, el observador ve una imagen del árbol y piensa que la luz se ha reflejado en el suelo. A veces se atribuye esta reflexión a la existencia de una capa de agua cerca del árbol. Cuando se conduce en un día muy caluroso, es posible observar aparentes zonas mojadas en la carretera que desaparecen cuando se les da alcance. Estas se deben a la refracción de la luz en una capa de aire muy caliente cerca del pavimento.

Dispersión

El índice de refracción de un material tiene una ligera dependencia con la longitud de onda. Para muchos materiales n disminuye ligeramente cuando crece la longitud de onda, como se muestra en la figura 33.26. Esta dependencia del índice de refracción con la longitud de onda (y, por tanto, con la frecuencia) se denomina **dispersión**. Cuando un haz de luz blanca incide formando un cierto ángulo con la superficie de un prisma de vidrio, el ángulo de refracción (medido respecto a la normal) correspondiente a las longitudes de onda más cortas (hacia el extremo violeta del espectro) es ligeramente mayor que el correspondiente a longitudes de onda más largas (hacia el extremo rojo del espectro). Por consiguiente, la luz de longitud de onda más corta se desvía más que la luz de longitudes de onda más largas. Así pues, el haz de luz blanca se esparce o dispersa en sus colores o longitudes de onda componentes (figura 33.27).

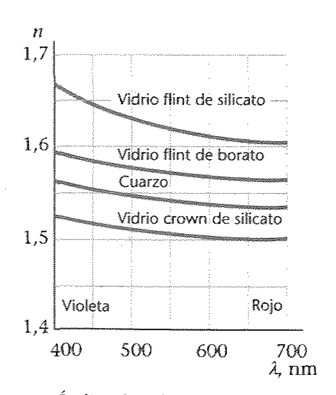


Figura 33.26 Índice de refracción de diversos materiales en función de la longitud de onda.

Arco iris La formación de un arco iris es un ejemplo familiar de la dispersión de la luz solar por refracción en gotas de agua. La figura 33.28 es un diagrama dibujado originalmente por Descartes en el que se muestran rayos solares paralelos que entran en una gota de agua esférica. En primer lugar, los rayos se refractan cuando entran en la gota. Luego se reflejan en la superficie posterior agua-aire y finalmente se refractan de nuevo cuando salen de la gota.

Como muestra la figura 33.28, el ángulo formado por los rayos emergentes y el diámetro (rayo 1) alcanza un máximo alrededor del rayo 7 y después decrece. En el diagrama puede verse un grupo de rayos concentrados que emergen con ángulos próximos al máximo. Esta concentración de rayos cerca del ángulo máximo da origen al arco

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

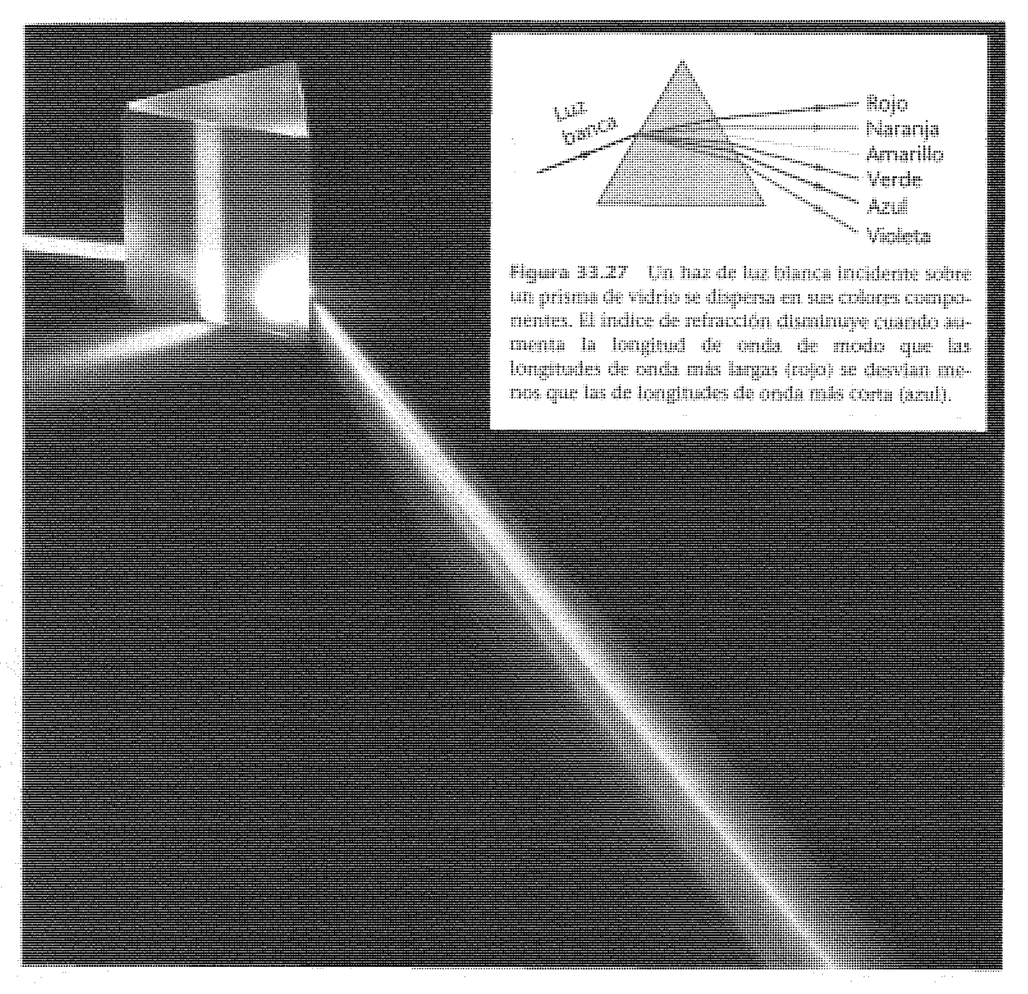


Figura 33.27 Un haz de luz blanca incidente sobre un prisma de vidrio se dispersa en sus colores componentes. El índice de refracción disminuye cuando aumenta la longitud de onda de modo que las longitudes de onda más largas (rojo) se desvían menos que las de longitudes de onda más corta (azul).

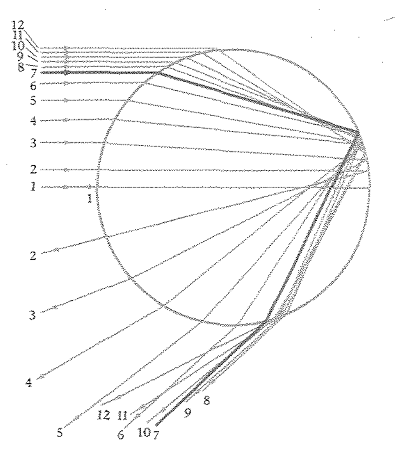


Figura 33.28 Construcción de Descartes de los rayos paralelos de luz que entran en una gota de agua esférica. El rayo 1 entra en la gota a lo largo de un diámetro y se refleja hacia atrás a lo largo de la trayectoria incidente. El rayo 2 entra ligeramente por encima del diámetro y emerge por debajo del diámetro formando con éste un pequeño ángulo. El ángulo formado entre el rayo emergente y el diámetro aumenta cuando consideramos rayos cada vez más alejados del diámetro hasta el rayo número 7, que emerge formando el ángulo máximo. Los rayos que entran por encima del rayo 7, emergen formando con el diámetro ángulos cada vez más pequeños.

iris. Mediante construcción geométrica (utilizando la ley de la refracción), Descartes demostró que el ángulo máximo vale aproximadamente 42°. Por consiguiente, para observar un arco iris debemos mirar las gotas de agua con un ángulo de 42° respecto a la línea que las une con el Sol, como se ve en la figura 33.29. Por tanto, el radio angular del arco iris es de 42°.

La separación de los colores en el arco iris es el resultado de que el índice de refracción del agua depende ligeramente de la longitud de onda de la luz. El ángulo de desviación mínima y el radio angular del arco dependerán, pues, ligeramente de la longitud de onda de la luz. El arco iris observado está constituido por los rayos de luz procedentes de muchas gotitas diferentes de agua, como se ve en la figura 33.30. El color que se ve para cada radio angular concreto corresponde a la longitud de onda de la luz que tenga un ángulo de mínima desviación que permita a la luz alcanzar el ojo viniendo desde las gotitas con este radio angular. Como n_{agua} es menor para la luz roja que para la azul la parte roja del arco iris está situada con un radio angular ligeramente mayor que la parte azul del mismo.

Cuando un rayo de luz incide sobre una superficie que separa el agua y el aire, parte de la luz se refleja y parte se refracta. Se obtiene un arco iris secundario a partir de los rayos de luz que se reflejan dos veces dentro de una gotita (figura 33.31). El arco secundario tiene un radio angular de 51° y su secuencia de colores es la inversa de la que tiene el arco primario; es decir, el violeta está en la parte exterior en el arco secundario. Puesto que la fracción de luz reflejada en la superficie agua-aire es pequeña, el arco secundario es considerablemente más débil que el primario.

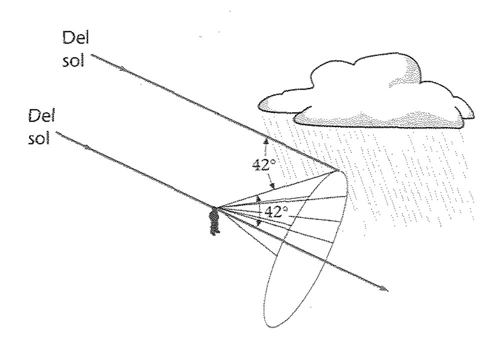


Figura 33.29 Un arco iris se observa formando un ángulo de 42° con la línea que procede del Sol, según predice la construcción de Descartes de la figura 33.28.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Explorando la naturaleza

Más allá del arco iris (visible)[1]

Robert Greenler
University of Wisconsin, Milwaukee (Estados Unidos)

Un día en que estaba sentado en mi despacho totalmente distraído en lugar de realizar la tarea que tenía prevista, se me ocurrió pensar en la siguiente cuestión: ¿existe un arco iris infrarrojo en el cielo? ¿Cómo intentar resolver esta cuestión? Este es el proceso que seguí. Para que exista un arco iris infrarrojo deben cumplirse ciertas condiciones. *En primer lugar*, la fuente luminosa debe emitir radiación infrarroja (el Sol emite luz en todo el espectro de radiación electromagnético, desde los rayos X a las ondas de radio). *En segundo lugar*, la radiación infrarroja debe pasar a través de la atmósfera terrestre (el vapor de agua y el dióxido de carbono de la atmósfera absorben algunas de las longitudes de onda en la zona infrarroja, pero otras pasan sin dificultad). El arco iris está originado por los rayos de luz que entran en una gotita de agua y se reflejan internamente antes de emerger de la misma. Para que exista un arco iris infrarrojo, *el tercer requisito* es que los rayos infrarrojos deberán tener que pasar a través de la gota de agua. Esto constituye una seria consideración. Sólo porque una gotita de agua resulta transparente a la luz visible no podemos suponer que lo sea a la "luz infrarroja; realmente, el agua líquida absorbe un amplio margen de longitudes de onda infrarrojas. Sin embargo, la transmitancia medida del agua muestra que las gotas de agua deberán ser bastante transparentes desde la región visible hasta una longitud de onda en el infrarrojo de 1300 nm, aproximadamente. *Finalmente*, después de salir de una gota de lluvia, los rayos infrarrojos que han sobrevivido a todas estas pérdidas deben pasar de nuevo a través del aire hasta el ojo (para el que pasa inadvertido) del posible observador.

La búsqueda

Esta línea de razonamiento produjo un inicio de respuesta a la cuestión que señalaba la especulación. Sí, debe existir un arco iris infrarrojo en el cielo y debe encontrarse en una banda justamente en el exterior del arco iris visible.

Decidí intentar hacer una fotografía de este arco invisible utilizando una película que fuese sensible a una parte del espectro infrarrojo. En la figura E33.1 se da la curva de sensibilidad de la misma. En la figura se ha señalado también la curva de sensibilidad del ojo humano como un modo de definir los límites de la región espectral visible (que se extiende desde unos 400 nm en el extremo del violeta a 700 nm en el extremo del rojo). Obsérvese que la película infrarroja tiene una sensibilidad que se extiende más allá, hasta unos 930 nm. Como la película no es sólo sensible al infrarrojo, sino que lo es en toda la región visible (de hecho es *muy* sensible a la luz azul), utilizamos un filtro opaco a la luz visible y que transmite únicamente longitudes de onda superiores a unos 800 nm. Como puede verse en la figura E33.1, esta combinación de película y filtro permite el registro de aquellas longitudes de onda comprendidas únicamente en una banda de 800 a 930 nm, suficientemente alejada de la región espectral visible.

La captura

Todo aquel que ha intentado fotografiar un arco iris sabe que normalmente aparecen cuando no se tiene a mano la cámara y desaparecen cuando se ha encontrado ya. Entonces decidí localizar primeramente un sujeto menos escurridizo: el de un arco iris pro-

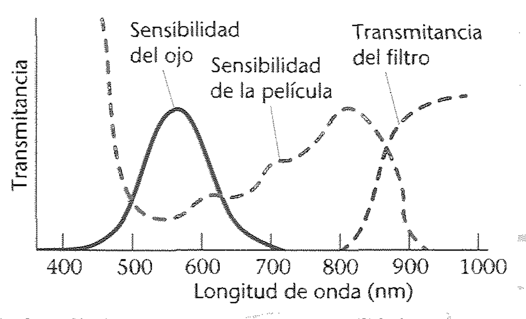


Figura E33.1 La película infrarroja tiene una sensibilidad que se extiende a través del espectro visible y se introduce en la región del espectro infrarrojo próximo. El filtro es opaco a la luz visible pero transmite en el infrarrojo para longitudes de onda mayores de 800 nm. La combinación de película y filtro registra imágenes con longitudes de onda comprendidas entre 800 nm y 930 nm, margen bastante alejado del espectro visible.

[1] Este ensayo está adaptado de un artículo que apareció en *Optic News*, publicado por la "Optical Society of America", en noviembre de 1988. Robert Greenler ha sido profesor de Física en la Universidad de Wisconsin-Wilwaukee (Estados Unidos) desde 1962, en donde ha intervenido en el desarrollo del Laboratorio para Estudio de Superficies de Milwaukke. Su interés por la investigación incluye el estudio de la estructura de las moléculas absorbidas en superficies sólidas, efectos ópticos en el firmamento y la comprensión de los colores iridiscentes que se ven en muchos organismos vivos.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Figura E33.2 Arco iris infrarrojo fotografiado en una lluvia de agua producida con una manguera de jardín perforada. En el exterior (a la izquierda de) del arco primario se ve un arco secundario más débil. Las franjas que se ven dentro del arco primario están producidas por efectos de interferencias.

ducido por un aspersor de agua que se podía hacer funcionar a voluntad en mi jardín. En la figura E33.2 se muestra uno de los primeros resultados fotográficos. Agité hacia un lado y otro una manguera ordinaria con muchos agujeros que actuaba de aspersor delante de un tablero apoyado en la parte superior de una escalera. ¡Y en la lluvia así conseguida estaba el arco iris! También puede verse el arco iris secundario más débil fuera del arco primario más brillante. Este arco secundario corresponde al que se ve ordinariamente con luz visible y se obtiene como resultado de los rayos que entran en una gota de agua y sufren dos reflexiones internas antes de salir de la gota (véase figura 33.31).

Existe otra característica interesante en esta fotografía infrarroja: inmediatamente *dentro* (en la parte derecha) del arco primario brillante existe otra banda brillante (o quizás dos bandas). Estas franjas, que a veces se ven dentro de una arco visible, se denominan arcos supernumerarios y son el resultado de la interferencia de las ondas luminosas (véase capítulo 35).

Una inspección detallada del negativo de la figura E33.2 revela otra característica que es difícil de reproducir en una figura impresa: existe una franja muy débil, precisamente en el *exterior* del arco secundario. En teoría, un proceso semejante al que produce los arcos supernumerarios debería producir un conjunto análogo de franjas fuera del secundario. Nunca había visto ninguna de estas franjas asociadas con un arco iris ni con una fotografía de un arco iris, pero son visibles en el original de esta fotografía. Son visibles también cuando se proyecta la diapositiva sobre una pantalla. En el primer intento se consiguió una excitante recolección de efectos nuevos.

Otros efectos en las fotos infrarrojas

Es interesante considerar algunas otras características de estas fotografías infrarrojas. Si la única radiación que produjo estas imágenes fotográficas es la radiación infrarroja invisible, ¿es sorprendente o no que podamos ver la escalera, los árboles y la hierba? No deberíamos sorprendernos por ello. Estos objetos absorben ciertas longitudes de onda y reflejan o dispersan otras. Los objetos que absorben el infrarrojo aparecen oscuros en las fotos y los que lo dispersan fuertemente aparecen brillantes. Para que podamos dejar claro lo que muestran estas fotos, es necesario comprender la diferencia entre la radiación reflejada (o dispersada) y la radiación emitida.

Normalmente cuando se examinan los objetos que aparecen en un paisaje, se les ve únicamente por la luz que dispersan. Sin embargo, si la temperatura de un objeto es suficientemente alta, emite luz. Si está muy caliente —puede llamársele "al rojo blanco"— emite un amplio espectro de longitudes de onda con el pico de la curva de emisión en el espectro visible. Si el objeto se enfría un poco, el pico de la curva de emisión se desplaza hacia las longitudes de onda más largas. El resultado es que se está emitiendo más luz roja que luz azul, y la descripción apropiada para esta temperatura es "rojo cereza". A temperaturas aún más bajas se ve un brillo rojo oscuro. En este punto el pico de la curva de emisión está en el infrarrojo con una pequeña cantidad de emisión en el extremo rojo del espectro visible. A temperaturas ligeramente inferiores, el objeto aparece oscuro; el pico de emisión se ha desplazado aún más hacia el infrarrojo, de modo que no puede verse radiación visible. Si el objeto se enfría hasta que sólo resulta templado al tacto, su pico de emisión está bien dentro del infrarrojo —quizás a 10 000 nm— y no emite casi nada en el visible o bien en la región infrarroja cercana a la que resultan sensibles las películas fotográficas.

Sin embargo, si se pudiese obtener una fotografía con radiación de 10 000 nm, los objetos ligeramente más calientes que su entorno se verían brillantes, pues estarían luciendo con una radiación infrarroja emitida. *Existen* procedimientos para obtener estas fotografías; se utilizan para mostrar fuentes de calor locales en las viviendas o para señalar puntos relativamente calientes en un cuerpo humano (termogramas) que pueden indicar la situación de algún tejido enfermo. Estas fotografías suelen designarse normalmente como fotografías infrarrojas, pero son muy diferentes de las fotografías que se realizan con películas sensibles al infrarrojo. Esta película es sensible sólo al infrarrojo cercano, pero las "fotografías térmicas" son el resultado de la radiación emitida en el infrarrojo lejano. De modo que las fotografías infrarrojas mostradas aquí indican únicamente la radiación infrarroja procedente del Sol y que es dispersada por las hojas o por la escalera, o transformada por las esferas que son las gotas de lluvia en un arco iris visible.

Otra característica interesante de las fotografías es la oscuridad del cielo despejado que forma su fondo. Vemos luz en el firmamento claro y limpio alejado del Sol debido a la dispersión de las moléculas de los gases que componen el aire. Estas pequeñas partículas dispersoras (mucho menores que la longitud de onda de la luz) dispersan las ondas más cortas con más efectividad que las longitudes más largas. Así pues, se dispersa más la luz azul que la roja, dando al cielo su característico color azul. Este mismo efecto, que hace que el cielo resulte más oscuro con luz roja que con luz azul, hace que sea aún más oscuro con la luz infrarroja detectada por este tipo de fotografías.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

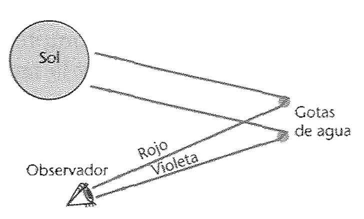
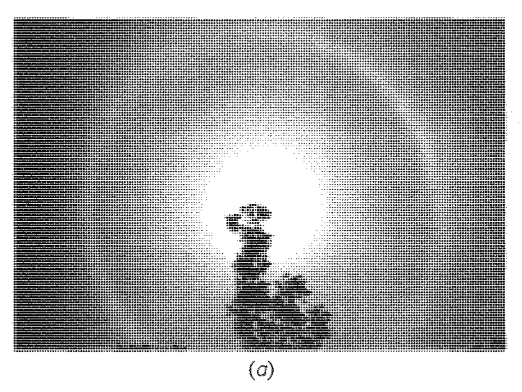
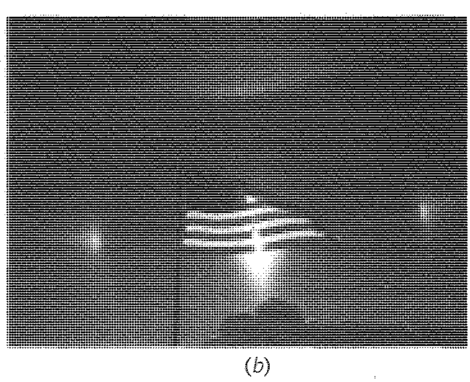


Figura 33.30 El arco iris es el resultado de la luz que procede de muchas gotitas de agua diferentes.


(a)


(b)

(*a*) Este halo de 22° alrededor del Sol es el resultado de la reflexión y refracción de los cristales de hielo hexagonales que están orientados al azar en la atmósfera. (*b*) Cuando los cristales de hielo no están orientados al azar sino que están cayendo con sus bases planas horizontales únicamente se ven las partes del halo que corresponden a cada lado del Sol. A veces se llaman "perros del Sol".

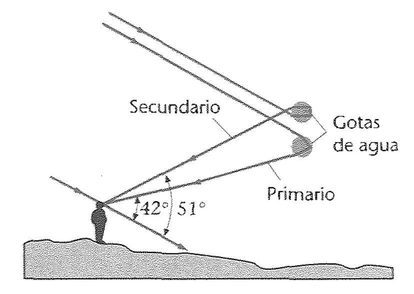


Figura 33.31 El arco iris secundario es el resultado de los rayos luminosos que se reflejan dos veces dentro de una gota de agua.

OPCIONAL

Cálculo del radio angular del arco iris Podemos calcular el radio angular del arco iris mediante las leyes de la reflexión y de la refracción. La figura 33.32 muestra un rayo de luz que incide sobre una gotita de agua esférica en el punto A. El ángulo de refracción θ_2 está relacionado con el ángulo de incidencia θ_1 mediante la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \text{ sen } \theta_1 = n_{\text{agua}} \text{ sen } \theta_2 \tag{33.13}$$

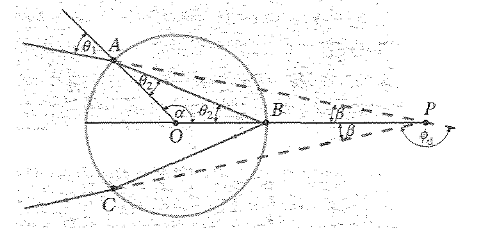


Figura 33.32 Rayo de luz que incide sobre una gota de agua esférica. El rayo se refracta en el punto A y se refleja en el punto B en el fondo de la gota. Forma un ángulo θ_2 con la línea radial OB y se refleja formando un ángulo igual. El rayo se refracta de nuevo en C al abandonar la gota.

El punto P de la figura 33.32 es el de intersección del rayo incidente con el rayo emergente. El ángulo ϕ_d es el ángulo de desviación del rayo. El ángulo 2β es el radio angular del arco iris. Está relacionado con ϕ_d por:

$$\phi_d + 2\beta = \pi \tag{33.14}$$

Deseamos relacionar el ángulo de desviación ϕ_d con el ángulo de incidencia θ_1. Según el triángulo AOB, se tiene

$$2\theta_2 + \alpha = \pi \tag{33.15}$$

Análogamente, a partir del triángulo AOP, tendremos

$$\theta_1 + \beta + \alpha = \pi \tag{33.16}$$

Eliminando α entre las ecuaciones 33.15 y 33.16 y despejando β, se obtiene

$$\beta = \pi - \theta_1 - \alpha = \pi - \theta_1 - (\pi - 2\theta_2) = 2\theta_2 - \theta_1$$

Aplicando este valor de β en la ecuación 33.14, se tiene para el ángulo de desviación:

$$\phi_d = \pi - 2\beta = \pi - 4\theta_2 + 2\theta_1 \tag{33.17}$$

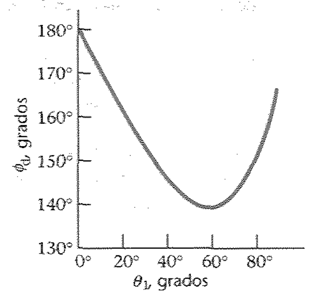


Figura 33.33 Representación gráfica del ángulo de desviación ϕ_d en función del ángulo de incidencia θ_1. El ángulo de desviación tiene su valor mínimo de 138° cuando el ángulo de incidencia vale 60°. Como $d\phi_d/d\theta_1 = 0$ en la desviación mínima, la desviación de los rayos con ángulos de incidencia ligeramente menores o mayores que 60°, será aproximadamente la misma.

La ecuación 33.17 puede combinarse con la ley de Snell para eliminar θ_2 y obtener el ángulo de desviación ϕ_d en función del de incidencia θ_1:

$$\phi_d = \pi + 2\theta_1 - 4 \text{ arcsen} \left(\frac{n_{\text{aire}} \text{ sen } \theta_1}{n_{\text{agua}}}\right) \tag{33.18}$$

En la figura 33.33 se muestra un gráfico de ϕ_d en función de θ_1. El ángulo de desviación ϕ_d tiene su valor mínimo cuando $\theta_1 = 60°$. Para este ángulo de incidencia, el ángulo de

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

desviación es $\phi_d = 138°$. Este ángulo es el de **mínima desviación**. Para ángulos incidentes que son ligeramente mayores o menores que 60°, el ángulo de desviación es aproximadamente el mismo. Por consiguiente, la luz reflejada por la gotita de agua se concentrará cerca del ángulo de desviación mínima. El radio angular del arco iris es, pues,

$$2\beta = \pi - \phi_d = 180° - 138° = 42° \quad (33.19)$$

OPCIONAL

Polarización ■ 33.7

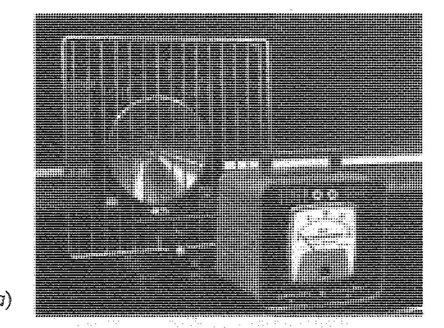
En toda onda transversal, la vibración es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, en una onda luminosa que se mueve en la dirección z el campo eléctrico es perpendicular a esta dirección. (El campo magnético de una onda de luz es también perpendicular a la dirección de z.) Si la vibración se mantiene paralela a una línea fija en el espacio, se dice que la onda está **polarizada linealmente**. Podemos visualizar la polarización con mayor facilidad considerando las ondas mecánicas en una cuerda. Si uno de los extremos se mueve hacia arriba y hacia abajo, las ondas resultantes en la cuerda están polarizadas linealmente, de forma que cada elemento de la misma vibra en dirección vertical. Análogamente, si el extremo se mueve ahora según una línea horizontal (perpendicular a la cuerda), los desplazamientos de la cuerda están polarizados linealmente en dirección horizontal. Si el extremo de la cuerda se mueve con velocidad constante describiendo una circunferencia, la onda resultante se dice que está **polarizada circularmente**. En este caso los elementos de la cuerda se mueven describiendo circunferencias. Pueden producirse ondas no polarizadas moviendo el extremo de la cuerda vertical y horizontalmente de una forma aleatoria. En este caso, si la propia cuerda está en la dirección z, las vibraciones tendrán tanto componentes x como componentes y que variarán aleatoriamente.

La mayoría de las ondas producidas por una sola fuente están polarizadas. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas producidas por una antena dipolar están linealmente polarizadas con el vector campo eléctrico paralelo a la antena. Las ondas producidas por muchas fuentes normalmente no están polarizadas. Una fuente luminosa típica, por ejemplo, contiene millones de átomos que actúan independientemente. El campo eléctrico correspondiente a dicha onda puede resolverse en componentes x e y que varían aleatoriamente debido a que no existe correlación entre los átomos individuales que producen la luz.

Puede mostrarse la polarización de las ondas electromagnéticas con microondas, que tienen longitudes de onda del orden del centímetro. En un generador de microondas típico, las ondas polarizadas son radiadas por una antena dipolar. En la figura 33.34, la antena dipolar es vertical, de modo que el vector del campo eléctrico **E** de las ondas radiadas es vertical. Puede confeccionarse un sistema absorbente con una rejilla de alambres o hilos rectilíneos paralelos. Cuando éstos son verticales, como en la figura 33.34*a*, el campo eléctrico paralelo a los alambres crea corrientes en ellos y la energía resulta absorbida. Cuando los alambres están horizontales y, por tanto, perpendiculares a **E** como en la figura 33.34*b*, no aparecen corrientes y las ondas se transmiten.

Existen cuatro fenómenos que producen ondas electromagnéticas polarizadas a partir de ondas no polarizadas: (1) absorción, (2) reflexión, (3) dispersión o "scattering" y (4) birrefringencia (también llamado doble refracción), cada uno de los cuales será examinado en las secciones siguientes.

(*a*)



(*b*)

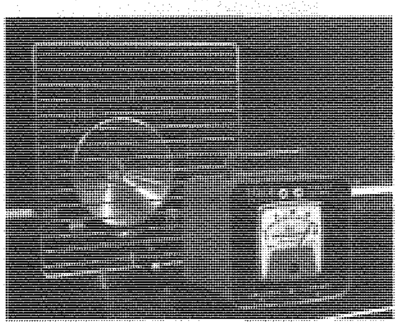


Figura 33.34 Demostración de la polarización de microondas. El campo eléctrico de las microondas es vertical, paralelo a la antena dipolar vertical. (*a*) Cuando los hilos metálicos del sistema absorbentes son verticales, se establecen corrientes eléctricas entre ellos y se absorbe energía, como se indica con la baja lectura del detector. (*b*) Cuando los hilos están horizontales, no se crean corrientes y se transmiten las microondas, como indica la lectura elevada del detector.

Polarización por absorción ■

Algunos cristales de los que se encuentran en la naturaleza, si se cortan de forma apropiada, absorben y transmiten la luz de forma diferente dependiendo de la polarización de la luz. Estos cristales pueden utilizarse para obtener luz polarizada linealmente. En 1938, E. H. Land inventó una película polarizadora simple y comercial denominada Polaroid. Este producto contiene moléculas de hidrocarburos de cadena larga que resultan alineadas cuando la lámina en que se obtienen se estira en una dirección durante el proceso de fabricación. Cuando la lámina se sumerge en una disolución que contiene

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

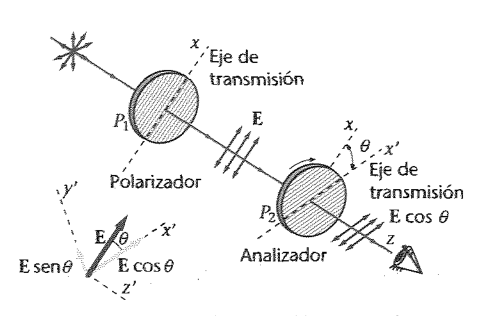


Figura 33.35 Dos películas o láminas polarizadoras con sus ejes de transmisión que forman un ángulo θ entre sí. Unicamente se transmite a través de la segunda lámina el componente $E \cos \theta$. Si la intensidad entre las láminas es I_0, la transmitida por ambas láminas es $I_0 \cos^2 \theta$.

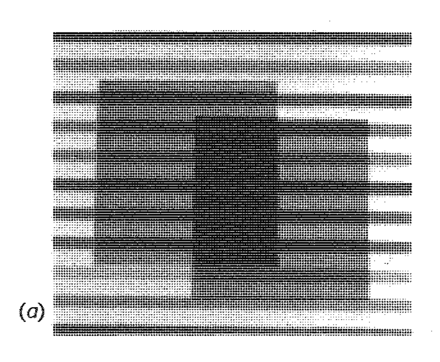
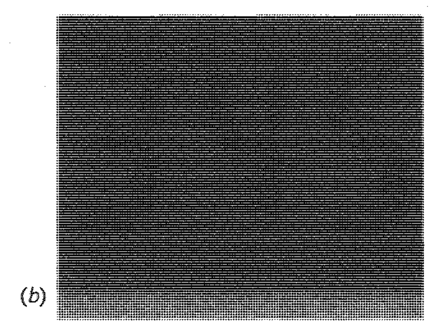
yodo, las cadenas se hacen conductoras a las frecuencias ópticas. Cuando sobre ellas incide luz con su vector campo eléctrico paralelo a las cadenas, se establecen corrientes eléctricas a lo largo de las cadenas y la energía luminosa es absorbida del mismo modo que se absorbían las microondas por los alambres de la figura 33.34. Si el campo eléctrico es perpendicular a las cadenas, se transmite la luz. La dirección perpendicular a las cadenas se denomina **eje de transmisión**. Para simplificar supondremos que cuando el campo eléctrico es paralelo al eje de transmisión se transmite la totalidad de la luz mientras que toda ella resulta absorbida si es perpendicular al eje de transmisión.

Consideremos un haz de luz no polarizada que se propaga en la dirección z y que incide sobre una película polarizadora con su eje de transmisión en la dirección x. En promedio, la mitad de la luz incidente tendrá su campo eléctrico en la dirección y y la mitad en la dirección x. Así, pues, se transmitirá la mitad de la intensidad y la luz transmitida estará polarizada linealmente con su campo eléctrico en la dirección x.

Supongamos que tenemos una segunda película polarizadora cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con el de la primera como se ve en la figura 33.35. Si el campo eléctrico existente entre ambas películas es E, su componente a lo largo de la dirección del eje de transmisión de la segunda película es $E \cos \theta$. Como la intensidad de la luz es proporcional a E^2, la intensidad de la luz transmitida por ambas películas vendrá dada por

$$I = I_0 \cos^2 \theta \qquad \textbf{(33.20)}$$

en donde I_0 es la intensidad sobre la segunda película y que es, naturalmente, la mitad de la intensidad incidente sobre la primera película. Cuando se sitúan sucesivamente a lo largo de un haz de luz dos elementos polarizadores como se acaba de describir, el primero de ellos se denomina **polarizador** y el segundo, **analizador**. Si el polarizador y el analizador están cruzados, es decir, si sus ejes son mutuamente perpendiculares, no pasará nada de luz a su través. La ecuación 33.20 se conoce como **ley de Malus** en honor de su descubridor E. L. Malus (1775-1812). Se aplica a todo sistema de dos polarizadores cuyos ejes de transmisión forman un ángulo θ entre sí.

(*a*) Los polarizadores cruzados bloquean toda la luz. (*b*) En una pantalla de cristal líquido, el cristal se sitúa entre los polarizadores cruzados. La luz incidente sobre el cristal se transmite porque el cristal gira la dirección de polarización de la luz en 90°. La luz se refleja de nuevo mediante un espejo situado detrás del cristal y se ve un fondo uniforme. Cuando se aplica una tensión a través de un pequeño segmento del cristal, la polarización no se gira, de modo que no se transmite la luz y el segmento aparece negro.

EJEMPLO 33.6

Luz no polarizada de intensidad 3,0 W/m² está incidiendo sobre dos películas polarizadoras cuyos ejes de transmisión forman entre sí un ángulo de 60° (figura 33.36). ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida por la segunda película?

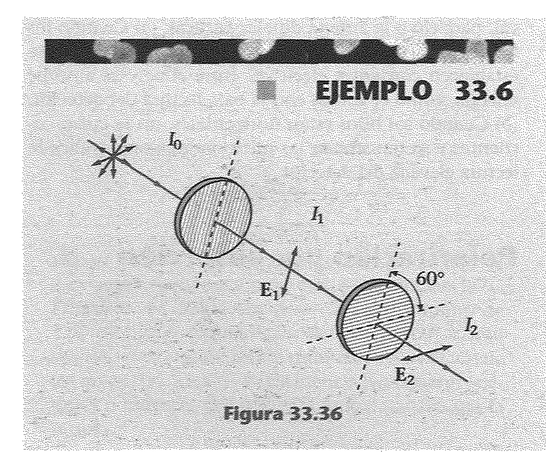


Figura 33.36

Esquema del problema Como la luz incidente no está polarizada, la mitad de la intensidad que incide se transmite por la primera película polarizadora. La segunda película reduce la intensidad luminosa en un factor de $\cos^2 \theta$, siendo $\theta = 60°$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

1. La intensidad transmitida por la segunda película está relacionada con la incidente I_1 por la ecuación 33.18: $I_2 = I_1 \cos^2 \theta$

2. La intensidad incidente sobre la segunda película es la mitad de la intensidad de luz no polarizada incidente sobre la primera película: $I_1 = \frac{1}{2}I_0$

3. Combinando estos resultados y sustituyendo los datos suministrados: $I_2 = \frac{1}{2}I_0 \cos^2 60° = \frac{1}{2}(3{,}0\ \mathrm{W/m^2})(0{,}500)^2 = (0{,}375\ \mathrm{W/m})^2$

Observaciones La mitad de la intensidad pasa a través de la primera película cualquiera que sea su orientación. Obsérvese que la segunda película gira la dirección de polarización.

Polarización por reflexión

Cuando la luz no polarizada se refleja en una superficie plana entre dos medios transparentes, por ejemplo la que separa el aire y el vidrio o el aire y el agua, la luz reflejada está parcialmente polarizada. El grado de polarización depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de ambos medios. Para cierto ángulo de incidencia llamado ángulo de polarización θ_p, la luz reflejada está completamente polarizada. Cuando el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de polarización, los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí. Este resultado fue descubierto experimentalmente por Sir David Brewster en 1812.

La figura 33.37 muestra la luz incidente con el ángulo de polarización θ_p para el cual la luz reflejada está completamente polarizada. El campo eléctrico de la luz incidente puede descomponerse en dos componentes, uno paralelo y el otro perpendicular al plano de incidencia. La luz reflejada está completamente polarizada con su vector del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia. Podemos establecer una relación entre el ángulo de polarización θ_p y los índices de refracción de los medios utilizando la ley de Snell. Si n_1 es el índice de refracción del primer medio y n_2 el del segundo medio, tenemos

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_p = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

siendo θ_2 el ángulo de refracción. A partir de la figura 33.37 vemos que la suma del ángulo de reflexión y del ángulo de refracción es 90°. Como el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, tenemos

$$\theta_2 = 90° - \theta_p$$

Entonces

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_p = n_2 \operatorname{sen} (90° - \theta_p) = n_2 \cos \theta_p$$

o sea

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textbf{(33.21)}$$

Ley de Brewster

La ecuación 33.21 se conoce como **Ley de Brewster**.

Aunque la luz reflejada está completamente polarizada cuando el ángulo de incidencia es θ_p, la luz transmitida está *sólo* parcialmente polarizada, debido a que sólo se refleja una pequeña fracción de la luz incidente. Si la propia luz incidente está polarizada con su vector campo eléctrico **E** contenido en el plano de incidencia, no existe ninguna luz reflejada cuando el ángulo de incidencia es θ_p. Podemos comprender el resultado cualitativamente a partir de la figura 33.38. Si consideramos las moléculas del segundo medio de modo que estén oscilando en la dirección del campo eléctrico del rayo refractado, no pueden radiar energía a lo largo de la dirección de oscilación que sería la dirección del rayo reflejado.

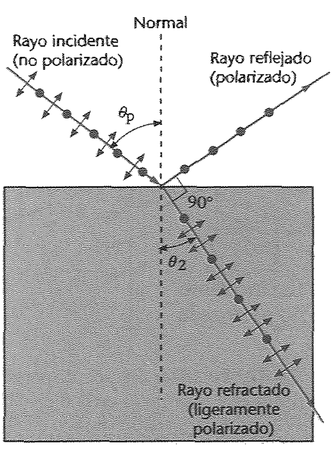


Figura 33.37 Polarización por reflexión. La onda incidente está no polarizada y tiene componentes del campo eléctrico paralelos al plano de incidencia (flechas) y componentes perpendiculares al mismo (puntos). Si la incidencia se realiza con el ángulo de polarización, la onda reflejada está completamente polarizada con su campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

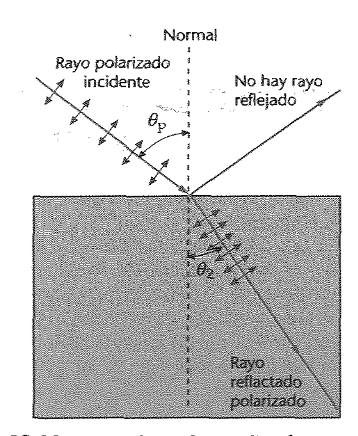


Figura 33.38 Luz polarizada incidiendo con el ángulo de polarización. Cuando la luz está polarizada de forma que **E** está en el plano de incidencia no hay rayo reflejado.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Debido a la polarización de la luz reflejada, los cristales de gafas de sol hechos de material polarizante pueden ser muy eficaces para eliminar los deslumbramientos. Si la luz se refleja en una superficie horizontal, tal como un lago o la nieve en el suelo, el plano de incidencia será vertical y el vector del campo eléctrico de la luz reflejada será predominantemente horizontal. Los cristales polarizados con sus ejes de transmisión vertical reducirán entonces el deslumbramiento por absorber gran parte de la luz reflejada. Si se tiene gafas de sol polarizadas, se podrá observar este fenómeno mirando a través de ellas a dicha luz reflejada y luego haciendo girar las gafas un ángulo de 90°, de modo que se verá cómo se transmite mucha más cantidad de luz.

OPCIONAL

Polarización por dispersión (o "scattering")

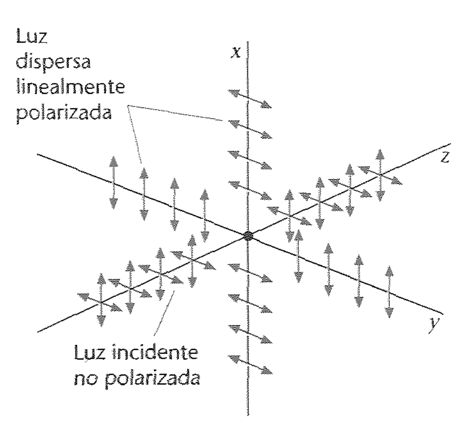


Figura 33.39 Polarización por dispersión. La luz no polarizada que se propaga en la dirección *z* incide sobre un centro de dispersión situado en el origen. La luz dispersada en la dirección *x* está polarizada en la dirección *y*, mientras que la dispersada en la dirección *y* está polarizada en la dirección *x*.

El fenómeno de absorción e irradiación subsiguiente se denomina **dispersión** o **"scattering"**. Puede comprobarse la existencia de la dispersión si se hace pasar un haz de luz a través de un recipiente con agua a la que se ha añadido una pequeña cantidad de leche en polvo. Las partículas de leche absorben la luz y la vuelven a radiar, haciendo visible el haz de luz. De forma análoga, pueden hacerse visibles los haces de láser introduciendo partículas de tiza o de humo en el aire para que dispersen la luz. Un ejemplo familiar de la dispersión de la luz lo origina el hecho de que las moléculas del aire tienden a formar masas más agrupadas (debido a las fluctuaciones aleatorias de la densidad del aire), que tienden a dispersar más las longitudes de onda cortas que las largas, dando así al cielo su color azul.

Podemos comprender la polarización por la dispersión si consideramos a una molécula absorbente como una antena dipolar eléctrica que radia ondas con una intensidad máxima en la dirección perpendicular a la antena con el vector de campo eléctrico paralelo a la antena y con intensidad cero en la dirección de la propia antena. La figura 33.39 muestra un haz de luz inicialmente no polarizada que se mueve a lo largo del eje z y que incide sobre un centro de dispersión situado en el origen. El campo eléctrico del haz de luz inicialmente no polarizada que se mueve a lo largo del eje z y que incide sobre un centro de dispersión situado en el origen. El campo eléctrico del haz de luz tiene componentes en las dos direcciones x e y perpendiculares a la dirección de movimiento del haz de luz. Estos campos provocan oscilaciones del centro de dispersión en ambas direcciones x e y, pero no aparece ninguna oscilación en la dirección z. La oscilación del centro de dispersión en la dirección x produce luz a lo largo del eje y pero no a lo largo del eje x, que coincide con la línea de la oscilación. Así pues, la luz radiada a lo largo del eje y está polarizada en la dirección x. Análogamente, la luz radiada a lo largo del eje x está polarizada en la dirección y. Esto puede verse fácilmente examinando la luz dispersada mirándola a través de un trozo de película polarizadora.

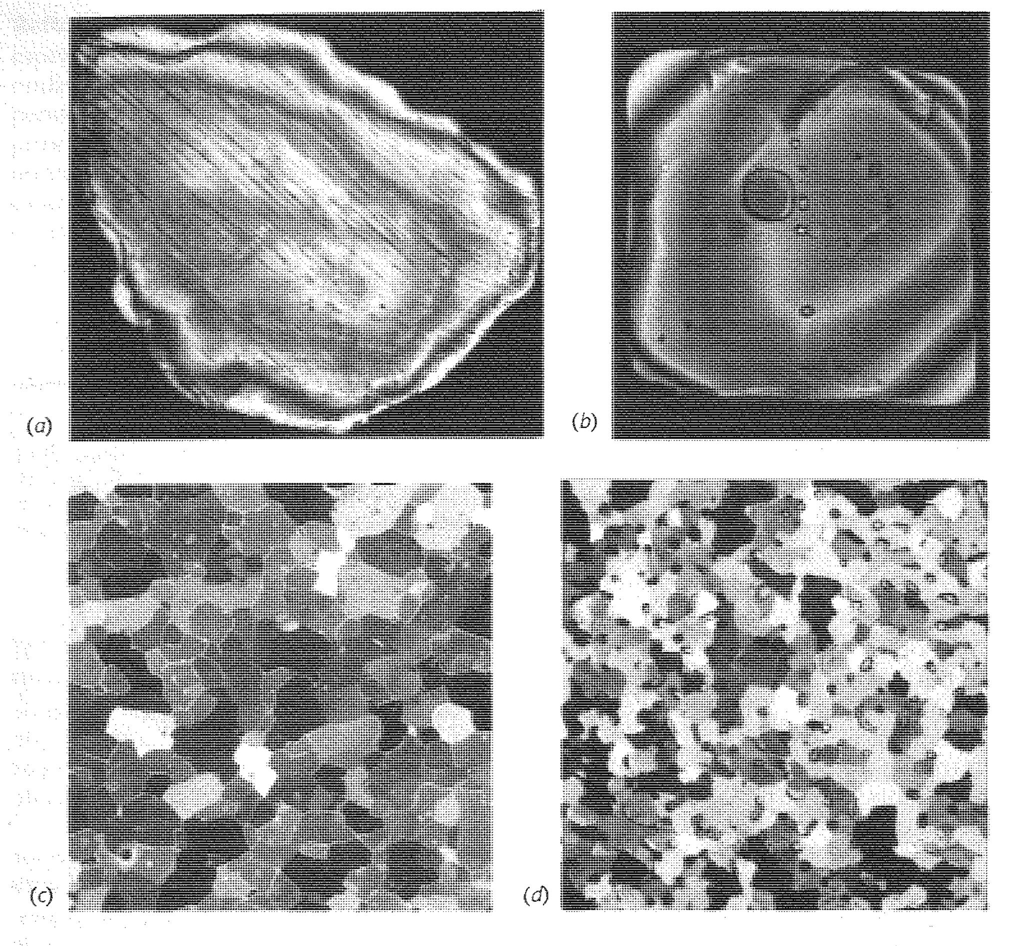
www.elsolucionario.net

Polarización por birrefringencia

La **birrefringencia**, o **doble refracción**, es un fenómeno complicado que se presenta en la calcita y otros cristales no cúbicos y en algunos plásticos sometidos a tensión como el celofán. En la mayoría de los materiales, la velocidad de la luz es la misma en todas direcciones. Estos materiales son **isótropos**. Debido a su estructura atómica, los materiales birrefringentes son **anisótropos**. La velocidad de la luz depende de su dirección de propagación a través del material. Cuando un rayo de luz está incidiendo sobre estos materiales, puede separarse en dos rayos denominados *rayo ordinario* y *rayo extraordinario*. Estos rayos están polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares y se propagan con diferentes velocidades. Dependiendo de la orientación relativa del material y de la luz incidente, los rayos pueden propagarse también en direcciones diferentes.

Existe una dirección particular en un material birrefringente en que ambos rayos se propagan con la misma velocidad. Esta dirección se denomina **eje óptico** del material. (Este eje óptico es realmente una *dirección* y no sólo una recta en el material.) Cuando la luz se propaga a lo largo del eje óptico no ocurre nada inusual. Sin embargo, cuando la luz está incidiendo en ángulo con respecto al eje óptico como se ve en la figura 33.40, los rayos se propagan en distintas direcciones y emergen separados en el espacio. Si se hace girar al material, el rayo extraordinario (el rayo e en la figura) gira en el espacio.

Si la luz está incidiendo sobre una placa birrefringente de modo que sea perpendicular a su cara cristalina y perpendicular al eje óptico, los dos rayos se propagan en la





(*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

Cuando los ejes de transmisión de dos películas polarizadoras son perpendiculares, se dice que ambos están cruzados y no se transmite luz a su través. Sin embargo, muchos materiales son birrefringentes o se vuelven así bajo tensión. Estos materiales giran la dirección de polarización de la luz de modo que la luz de una longitud de onda particular se transmite a través de ambos polarizadores. Cuando se observa un material birrefringente situado entre polarizadores cruzados, se revela cierta información acerca de sus estructura interna. (*a*) Corte fino de un grano de cuarzo procedente de un cráter creado por un meteorito. La estructura en capas, evidenciada por las líneas paralelas, se deben al fuerte golpe recibido durante el impacto del meteorito. (*b*) Grano de cuarzo típico de los que se encuentran en rocas volcánicas silíceas. No se ven líneas originadas por choques. (*c*) Cortes delgados del núcleo de hielo procedente del manto de hielo antártico en donde se revela la existencia de burbujas de CO_2 atrapadas que aparecen de color ámbar. Esta muestra se tomó a una profundidad de 194 metros correspondientes a aire atrapado hace 1600 años, mientras que en (*d*) se tomó a una profundidad de sólo 56 metros correspondiente a aire atrapado hace 450 años. Las medidas en el núcleo de hielo han sustituido la técnica menos fiable de analizar el carbono que aparece en los anillos de los árboles para comparar los niveles actuales de CO_2 atmosférico con los del pasado reciente. (*e*) Robert Mark de la Escuela de Arquitectura de Princenton examina los esquemas de tensiones que aparecen en un modelo de plástico de la estructura de la nave de la Catedral de Chartres.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

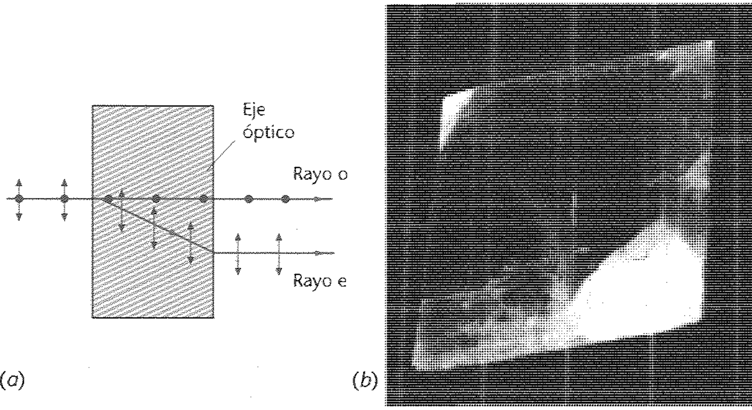


Figura 33.40 (*a*) Un haz estrecho de luz que incide sobre un cristal birrefringente como la calcita se divide en dos haces, denominados rayo ordinario (rayo o) y rayo extraordinario (rayo e) con polarizaciones mutuamente perpendiculares. Si se hace girar el cristal, el rayo extraordinario gira en el espacio. (*b*) Imagen doble del cuadriculado del fondo producido por este cristal birrefringente de carbonato cálcico.

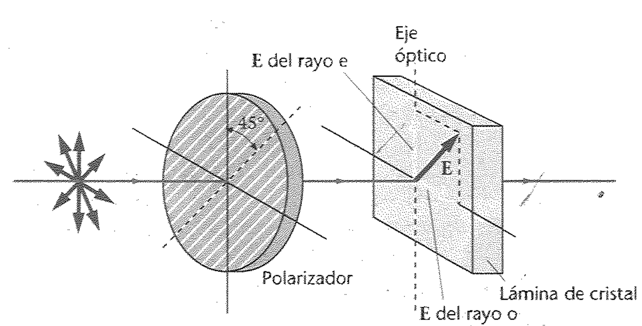


Figura 33.41 Luz polarizada que emerge de un polarizador y que incide sobre un cristal birrefringente de tal forma que el vector de campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje óptico, que es perpendicular al haz luminoso. Los rayos ordinario y extraordinario se mueven en la misma dirección pero con diferentes velocidades. La polarización del rayo emergente depende del espesor del cristal y de la longitud de onda de la luz.

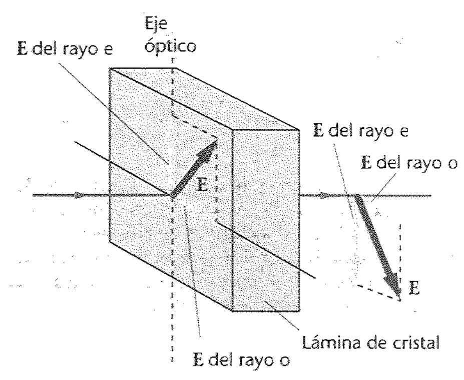


Figura 33.42 Cuando el cristal birrefringente de la figura 33.40 es una lámina de media onda, la luz emergente tiene girada su dirección de polarización en 90°.

misma dirección pero con velocidades diferentes. El número de longitudes de onda de los dos rayos contenidos en la placa es diferente porque las longitudes de onda ($\lambda = v/f$) de ambos difieren entre sí. Los rayos emergen con una diferencia de fase que depende del espesor de la placa y de la longitud de onda de la luz incidente. En una **lámina de cuarto de onda**, el espesor es tal que existe una diferencia de fase de 90° entre las ondas de una longitud de onda determinada cuando emergen, mientras que en las **láminas de media onda**, al emerger los rayos poseen una diferencia de fase de 180°.

Supongamos que la luz incidente está polarizada linealmente de forma que el vector campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje óptico, como se indica en la figura 33.41. Los rayos ordinario y extraordinario parten en fase y tienen amplitudes iguales. En el caso de una lámina de cuarto de onda, las ondas emergen con una diferencia de fase de 90°, de modo que el campo eléctrico resultante tiene componentes $E_x = E_0$ sen ωt y $E_y = E_0$ sen $(\omega t + 90°) = E_0$ cos ωt. Por tanto, el vector campo eléctrico rota barriendo un círculo y la onda está polarizada circularmente.

Con una lámina de media onda, las ondas emergen con una diferencia de fase de 180°, de modo que el campo eléctrico resultante está polarizado linealmente con componentes $E_x = E_0$ sen ωt y $E_y = E_0$ sen $(\omega t + 180°) = -E_0$ sen ωt. El efecto neto es que la dirección de polarización de la onda ha girado en 90° respecto a la de la luz incidente, como se ve en la figura 33.42.

Pueden observarse interesantes y bellos diagramas, como los de la página 1075 colocando materiales birrefringentes, como el celofán o un trozo de plástico sometido a tensión, entre dos láminas polarizadoras que tengan sus ejes de transmisión perpendiculares entre sí. Ordinariamente, no se transmite nada de luz a través de láminas polarizadoras cruzadas porque la dirección de polarización de la luz que transmite la primera lámina es perpendicular al eje de la segunda. Sin embargo, si colocamos un material birrefringente entre los polaroides cruzados, el material actúa como una lámina de media onda para la luz de un determinado color, dependiendo del espesor del material. La dirección de polarización resulta girada y cierta cantidad de luz atraviesa ambas láminas. Cuando se someten a tensiones, resultan birrefringentes diversos vidrios y plásticos. Así puede observarse el diagrama de tensiones cuando se coloca el material entre láminas polarizadoras cruzadas.

33.8 Deducción de las leyes de reflexión y refracción

Las leyes de reflexión y refracción pueden deducirse mediante el principio de Huygens o mediante el principio de Fermat.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Principio de Huygens

Reflexión La figura 33.43 muestra un frente de ondas plano AA' que incide sobre un espejo en el punto A. Como puede verse en la figura, el ángulo ϕ_1 que forma el frente de ondas con el espejo es igual al ángulo de incidencia θ_1, que es el ángulo que forma la perpendicular al espejo y los rayos perpendiculares al frente de onda. De acuerdo con el principio de Huygens, cada punto de un frente de ondas puede considerarse como un punto de una fuente de ondas elementales secundarias. La posición del frente de onda al cabo de un tiempo t se encuentra construyendo las ondas elementales de radio ct con centros en el frente de onda AA'. Las ondas elementales que no inciden en el espejo forman la parte BB' del nuevo frente de onda. Los frentes de ondas que inciden en el espejo se reflejan y forman la parte BB'' del nuevo frente de onda. Mediante una construcción semejante, se obtiene el frente de onda $C''C$ a partir de las ondas elementales de Huygens que se originan en el frente de onda $B''B$. La figura 33.44 es una parte aumentada de la figura 33.43 en la que se muestra AP, que es parte del frente de onda original. Durante el tiempo t, la onda elemental procedente del punto P alcanza al espejo en el punto B y la onda elemental procedente del punto A lo alcanza en el punto B''. El frente de onda reflejado BB'' forma un ángulo ϕ_1' con el espejo que es igual al ángulo de reflexión θ_1' entre el rayo reflejado y la normal al espejo. Los triángulos ABP y BAB'', son ambos triángulos rectángulos con la hipotenusa común AB y los catetos iguales $AB'' = BP = ct$. De aquí que estos triángulos sean semejantes y que los ángulos ϕ_1 y ϕ_1' sean iguales, lo cual implica que el ángulo de reflexión θ_1' es igual al ángulo de incidencia θ_1 (ley de la reflexión).

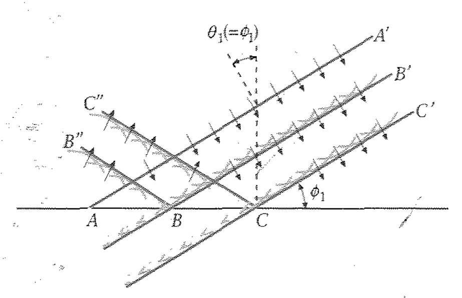


Figura 33.43 Onda plana reflejada en un espejo plano. El ángulo θ_1 entre el rayo incidente y la normal al espejo es el ángulo de incidencia. Es igual al ángulo ϕ_1 que forma el frente de onda incidente con el espejo.

Refracción La figura 33.45 muestra una onda plana que incide sobre una superficie plana aire-vidrio. Apliquemos la construcción de Huygens para hallar el frente de onda de la onda transmitida. El segmento AP indica una porción del frente de onda en el medio 1 que incide sobre la superficie de vidrio con un ángulo de incidencia ϕ_1. En el instante t la onda elemental procedente de P recorre la distancia v_1t y alcanza el punto B sobre la línea AB que separa ambos medios, mientras que la onda elemental procedente del punto A recorre una distancia menor v_2t dentro del segundo medio. El nuevo frente de onda BB' no es paralelo al frente de onda original AP porque son diferentes las velocidades v_1 y v_2. Del triángulo APB,

$$\text{sen }\phi_1 = \frac{v_1t}{AB}$$

o bien

$$AB = \frac{v_1t}{\text{sen }\phi_1} = \frac{v_1t}{\text{sen }\theta_1}$$

en donde hemos hecho uso de que el ángulo ϕ_1 es igual al de incidencia θ_1. Análogamente, según el triángulo $AB'B$,

$$\text{sen }\phi_2 = \frac{v_2t}{AB}$$

o bien

$$AB = \frac{v_2t}{\text{sen }\phi_2} = \frac{v_2t}{\text{sen }\theta_2}$$

en donde $\theta_2 = \phi_2$ es el ángulo de refracción. Igualando los dos valores obtenidos para AB, se tiene

$$\frac{\text{sen }\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen }\theta_2}{v_2} \qquad \textbf{(33.22)}$$

Si en esta ecuación reemplazamos $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$ y multiplicamos por c, obtenemos n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2, que es la ley de Snell.

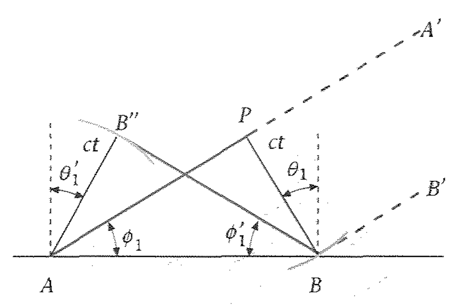


Figura 33.44 Geometría de la construcción de Huygens para el cálculo de la ley de la reflexión. El frente de onda AP incide inicialmente en el espejo en el punto A. Después de un tiempo t, la onda secundaria de Huygens procedente de P incide en el espejo en el punto B y la de A alcanza el punto B'

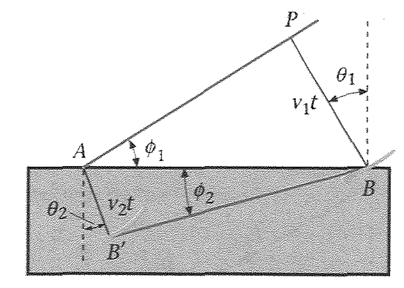


Figura 33.45 Aplicación del principio de Huygens a la refracción de ondas planas en la superficie que separa un medio, en el que la velocidad de la onda es v_1, de otro en el que la velocidad es v_2, inferior a v_1. El ángulo de refracción en este caso es menor que el de incidencia.

Principio de Fermat

Reflexión La figura 33.46 muestra dos trayectorias en las cuales la luz sale del punto A, choca contra la superficie plana que podemos considerar como un espejo y se propaga hasta el punto B. El problema para la aplicación del principio de Fermat a la reflexión puede plantearse del modo siguiente: En la figura 33.46, ¿en qué punto P debe incidir la

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

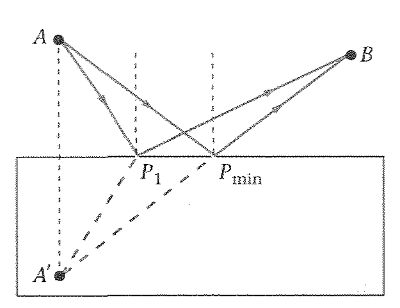


Figura 33.46 Construcción geométrica para la deducción de la ley de la reflexión a partir del principio de Fermat. El tiempo que tarda la luz en ir del punto A al punto B es un mínimo cuando la luz incide en la superficie en el punto P_{min}.

luz sobre el espejo de forma que el recorrido entre los puntos A y B se realice en el menor tiempo posible? Como en este problema la luz se está moviendo siempre dentro del mismo medio, el tiempo será mínimo cuando la distancia sea mínima. En la figura 33.46, la distancia APB es la misma que la distancia $A'PB$: en donde A' es la imagen del foco A. El punto A' está sobre la perpendicular al espejo trazada desde A y está equidistante del espejo y detrás del mismo. Evidentemente, si variamos el punto P, la distancia $A'PB$ es mínima cuando los puntos A', P y B están en línea recta. A partir de la figura se ve fácilmente que esto ocurre cuando el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Refracción La deducción de la ley de Snell de la refracción utilizando el principio de Fermat es más complicada que la correspondiente a la ley de la reflexión. En la figura 33.47 se ven los trayectos posibles para que la luz se propague desde el punto A en el aire hasta el punto B en el vidrio. El punto P_1 está sobre la recta que une A y B, pero este trayecto no corresponde al menor tiempo de recorrido porque la luz se mueve con menor velocidad en el vidrio. Si nos desplazamos ligeramente a la derecha de P_1, la longitud del trayecto total es mayor, pero la distancia recorrida en el medio donde la velocidad es más baja es inferior a la que se recorría en el trayecto que pasaba por P_1. A partir de la figura no resulta fácil identificar cuál de los trayectos posibles es el de tiempo mínimo, pero no resulta sorprendente que un trayecto que esté ligeramente a la derecha del camino rectilíneo emplee menos tiempo, porque el tiempo que se gana al recorrer una distancia más corta en el vidrio compensa sobradamente el tiempo perdido al recorrer una distancia mayor en el aire. Cuando desplazamos el punto de intersección de la posible trayectoria a la derecha del punto P_1, disminuye el tiempo total empleado de ir de A a B hasta que se alcanza un mínimo en el punto P_{min}. Más allá de este punto, el tiempo ahorrado en recorrer una distancia más corta en el vidrio ya no compensa el tiempo mayor que se necesita emplear en la distancia mayor a seguir en el aire.

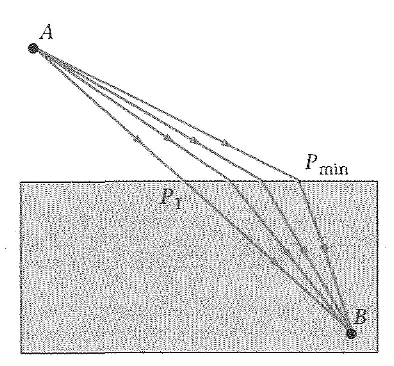


Figura 33.47 Construcción geométrica para la obtención de la ley de Snell de la refracción mediante el principio de Fermat. El punto P_{min} es el punto en que debe incidir la luz sobre el vidrio para que el tiempo de propagación desde A hasta B sea mínimo.

La figura 33.48 indica la geometría que sirve para encontrar el trayecto de mínimo tiempo. Si la distancia recorrida en el medio 1 (con índice de refracción n_1) es L_1 y la recorrida en el medio 2 (con índice de refracción n_2) es L_2, el tiempo que tarda la luz en recorrer el trayecto total AB es

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_1}{c/n_1} + \frac{L_2}{c/n_2} = \frac{n_1 L_1}{c} + \frac{n_2 L_2}{c} \qquad \textbf{(33.23)}$$

Queremos hallar el punto P_{min} para el cual el tiempo es mínimo. Para ello expresaremos el tiempo en función de un solo parámetro que indique la posición de dicho punto P_{min}. En función de la distancia x:

$$L_1^2 = a^2 + x^2 \qquad \text{y} \qquad L_2^2 = b^2 + (d-x)^2 \qquad \textbf{(33.24)}$$

Puede verse la curva del tiempo t en función de x en la figura 33.49. Para el valor de x en que el tiempo es mínimo, la pendiente de esta curva es cero:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

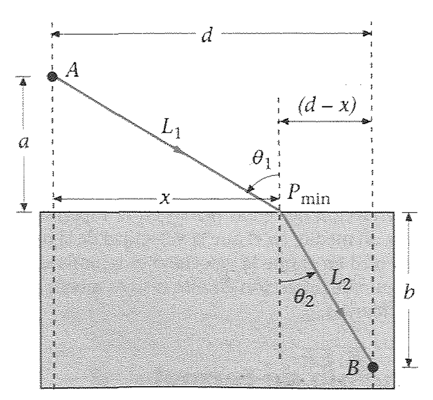


Figura 33.48 Construcción geométrica para calcular el tiempo mínimo en la obtención de la ley de Snell a partir del principio de Fermat.

Derivando cada término de la ecuación 33.23 respecto a x e igualando el resultado a cero se obtiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\left(n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx}\right) = 0 \qquad \textbf{(33.25)}$$

Estas derivadas pueden calcularse mediante las ecuaciones 33.24. En efecto:

$$2L_1 \frac{dL_1}{dx} = 2x \qquad \text{o} \qquad \frac{dL_1}{dx} = \frac{x}{L_1}$$

Pero x/L_1 es precisamente el sen θ_1, siendo θ_1 el ángulo de incidencia. Por tanto,

www.elsolucionario.net

$$\frac{dL_1}{dx} = \text{sen } \theta_1 \qquad (33.26)$$

Análogamente,

$$2L_2 \frac{dL_2}{dx} = 2(d-x)(-1)$$

o bien

$$\frac{dL_2}{dx} = -\frac{d-x}{L_2} = -\text{sen } \theta_2 \qquad (33.27)$$

siendo θ_2 el ángulo de refracción. De aquí que la ecuación 33.25 sea,

$$n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx} = 0 \qquad (33.28)$$

Sustituyendo dL_1/dx y dL_2/dx por los resultados de las ecuaciones 33.26 y 33.27 se obtiene

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 + n_2(-\text{sen } \theta_2) = 0$$

o sea,

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

que es la ley de Snell.

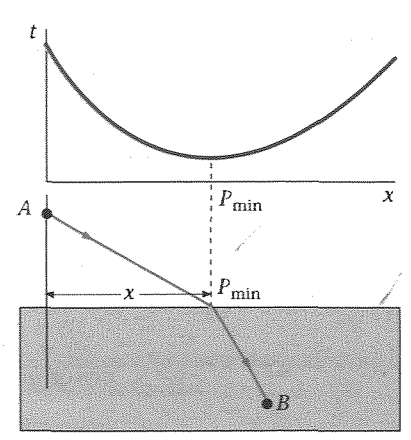


Figura 33.49 Representación gráfica del tiempo que emplea la luz para ir desde *A* hasta *B* en función de *x*, longitud medida a lo largo de la superficie refractante. El tiempo es un mínimo en el punto en que los ángulos de incidencia y de refracción obedecen la ley de Snell.

OPCIONAL

www.elsolucionario.net

Resumen

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
El *ojo humano* es sensible a la radiación electromagnética de longitudes de onda comprendidas entre 400 nm (violeta) y 700 nm (rojo), aproximadamente. Las energías de los fotones varían desde unos 1,8 eV a 3,1 eV. Ante nuestros ojos, una mezcla uniforme de longitudes de onda como la emitida por el Sol aparece de color blanco.		**1. Luz visible**
La luz se propaga como una onda, pero interacciona con la materia como una partícula.		**2. Dualidad onda-partícula**
$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$	(33.1)	Energía del fotón
$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4{,}136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$		Constante de Planck
$hc = 1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}$	(33.2)	hc
La luz se emite cuando un electrón atómico externo verifica una transición de un estado excitado a otro de menor energía.		**3. Emisión de luz**
Los átomos de gases diluidos emiten una serie discreta de longitudes de onda que constituyen un espectro de rayas. La energía del fotón $E = hf = hc/\lambda$ es igual a la diferencia de energía entre los estados inicial y final del átomo.		Espectro de rayas
Los átomos de los sólidos, líquidos y gases de alta densidad poseen bandas continuas de niveles energéticos y por ello emiten un espectro continuo de luz. La radiación térmica es visible si la temperatura del cuerpo emisor es superior a unos 600 °C.		Espectros continuos
Un átomo que esté en un estado excitado verificará espontáneamente una transición a un estado energético más bajo con emisión de un fotón. Este proceso es aleatorio y tiene una vida media característica de unos 10^{-8} s. Los fotones emitidos por dos o más átomos no están correlacionados, por lo que la luz emitida es incoherente.		Emisión espontánea

 www.elsolucionario.net

Emisión estimulada

La emisión estimulada tiene lugar si un átomo se encuentra inicialmente en un estado excitado y sobre él incide un fotón cuya energía es igual a la diferencia energética entre dicho estado y otro de nivel inferior. El campo electromagnético oscilante del fotón incidente estimula el átomo excitado y éste emite otro fotón en la misma dirección y fase que el fotón incidente. La luz emitida es coherente.

4. Láseres

Un láser produce un haz de fotones intenso, coherente y estrecho como resultado de una emisión estimulada. La operación de un láser depende de una inversión de población, en la cual existen más átomos en el estado excitado que en el estado inferior.

5. Velocidad de la luz

La unidad SI de longitud, el metro, se define de tal modo que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente

$$c = 299\,792\,457 \text{ m/s} \quad \textbf{(33.5)}$$

c en un medio

$$v = \frac{c}{n} \quad \textbf{(33.7)}$$

en donde n es el índice de refracción del medio.

6. Principio de Huygens

Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de pequeñas ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a la de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.

7. Reflexión y refracción

Cuando la luz incide sobre la superficie de separación de dos medios que poseen velocidades de la luz diferentes, parte de la energía luminosa se transmite y parte se refleja.

Ley de reflexión

El rayo reflejado se encuentra en el plano de incidencia y forma un ángulo θ_1' con la normal que es igual al ángulo de incidencia.

$$\theta_1' = \theta_1 \quad \textbf{(33.8)}$$

Intensidad reflejada, incidencia normal

$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0 \quad \textbf{(33.11)}$$

Índice de refracción

$$n = \frac{c}{v} \quad \textbf{(33.7)}$$

Ley de refracción (ley de Snell)

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad \textbf{(33.9b)}$$

Reflexión interna total

Cuando la luz que se está propagando en un medio con un índice de refracción n_1 incide sobre el límite de un segundo medio con menor índice de refracción $n_2 < n_1$, la luz se refleja totalmente si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico θ_c dado por

Ángulo crítico

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad \textbf{(33.12)}$$

Dispersión

La velocidad de la luz en un medio y, por tanto, el índice de refracción del mismo depende de la longitud de onda de la luz. Por causa de la dispersión, un haz de luz blanca que incide sobre un prisma de refracción se dispersa en sus colores componentes. Análogamente, la reflexión y la refracción de la luz solar en las gotas de agua producen los arco iris.

8. Polarización

Las ondas transversales pueden polarizarse. Los cuatro fenómenos que producen ondas electromagnéticas polarizadas son (1) absorción, (2) dispersión o "scattering", (3) reflexión y (4) birrefringencia.

Ley de Malus

Cuando dos polarizadores tiene sus ejes de transmisión formando un ángulo θ, la intensidad trasmitida por el segundo polarizador se reduce en un factor $\cos_2 \theta$:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad \textbf{(33.20)}$$

Guía para la resolución de problemas

Los diagramas de rayos son particularmente útiles en problemas que relacionan la reflexión y la refracción. No olvide identificar los ángulos apropiados e indicar el índice de refracción.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Absorción y emisión de luz	
Determinar la longitud de onda de la luz absorbida o emitida.	Utilizar $\lambda = hc/\Delta E$, en donde ΔE es la diferencia de energía entre los estados inicial y final del átomo. **Ejemplo 33.1**
2. Velocidad de la luz	
Determinar c conocida la distancia y el tiempo.	Utilizar $c = \Delta x/\Delta t$. **Ejemplo 33.2**
Determinar c mediante el experimento de Fizeau o de Foucault.	Utilizar $c = \Delta x/\Delta t$ y calcular el Δt necesario para que la rueda o el espejo gire de un hueco o un espejo al siguiente. **Ejemplo 33.3**
3. Reflexión	
Determinar el ángulo de reflexión.	El ángulo de reflexión es siempre igual al ángulo de incidencia $\theta_1' = \theta_1$.
4. Refracción	
Determinar el ángulo de refracción.	Utilizar la ley de Snell, n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2. **Ejemplo 33.4**
Determinar el ángulo crítico para la reflexión interna total.	El ángulo crítico viene dado por sen $\theta_c = n_2/n_1$. **Ejemplo 33.5**
5. Polarización	
Determinar la intensidad de la luz transmitida a través de un polarizador.	Si la luz incidente no está polarizada, la mitad de la intensidad será transmitida a través de una película polarizadora. Si la luz incidente está polarizada, la intensidad transmitida sera $I_0 \cos^2 \theta$. **Ejemplo 33.6**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

- Problemas conceptuales
- Problemas de secciones opcionales o exploratorios
- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Utilizar n = 1,33 para el agua y n = 1,5 para el vidrio a menos que se especifique de otro modo.

Fuentes luminosas

•• 1 ¿Por qué es necesario el helio en un láser helio-neón? ¿Por qué no es suficiente utilizar sólo neón?

•• 2 Cuando un haz de luz blanca visible pasa a través de un gas de hidrógeno atómico y se observa con un espectroscopio, se observan rayas oscuras que corresponden a las longitudes de onda del espectro de emisión. Los átomos que participan en la absorción por resonancia emiten luz de esta misma longitud de onda cuando vuelven al estado fundamental. Explicar por qué el espectro observado exhibe, sin embargo, líneas oscuras pronunciadas.

• 3 Un pulso de un láser de rubí posee una potencia media de 10 MW y persiste 1,5 ns.

(a) ¿Cuál es la energía total del pulso?
(b) ¿Cuántos fotones se emiten en este pulso?

• 4 Un láser helio-neón emite luz de longitud de onda 632,8 nm y posee una potencia de 4 mW. ¿Cuántos fotones por segundo emite este láser?

• 5 El primer estado excitado de un átomo de un gas es 2,85 eV por encima del estado fundamental.

(a) ¿Cuál es la longitud de la radiación correspondiente a la absorción por resonancia?
(b) Si el gas se irradia con luz monocromática de 320 nm de longitud de onda, ¿cuál es la longitud de onda de la luz emitida por dispersión Raman?

•• 6 Un gas se irradia con luz ultravioleta monocromática de longitud de onda 368 nm. Se observa luz dispersa de la misma longitud de onda y también de 658 nm. Suponiendo que los átomos del gas antes de la irradiación se encontrasen en su estado fundamental, determinar la diferencia de energía entre el estado fundamental y el estado atómico excitado por la irradiación.

•• 7 El sodio tiene los estados excitados 2,11 eV, 3,2 eV y 4,35 eV por encima del estado fundamental.

(a) ¿Cuál es la máxima longitud de onda de la radiación que puede producirse en la fluorescencia por resonancia? ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación fluorescente?
(b) ¿Qué longitud de onda resultará en la excitación del estado 4,35 eV por encima del estado fundamental? Al excitarse dicho estado, ¿cuáles son las posibles longitudes de onda de la fluorescencia por resonancia que podrían observarse?

•• 8 El helio ionizado con una sola carga negativa es un átomo semejante al hidrógeno con una carga nuclear de $2e$. Sus niveles energéti-

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

cos vienen dados por $E_n = -4E_0/n^2$, en donde E_0 = 13,6 eV. Si un haz de luz blanca visible se envía a través de un gas de este helio ionizado, ¿a qué longitudes de onda se encontrarán líneas oscuras en el espectro de la radiación transmitida?

La velocidad de la luz

• **9** Estimar el tiempo requerido para que la luz realice la trayectoria completa en la experiencia realizada por Galileo para determinar la velocidad de la luz.

• **10** Desde la estación de control se envía una breve señal para despertar a los astronautas a bordo de un lejano vehículo espacial. Cinco segundos después de enviada la señal, se oyen las voces de los astronautas en la estación de control. ¿A qué distancia (máxima) de la Tierra se encuentra el vehículo?
(a) $7,5 \times 10^8$ m (b) 15×10^8 m (c) 30×10^8 m
(d) 45×10^8 m (e) El vehículo está en la Luna.

• **11** La galaxia espiral de la constelación de Andrómeda está aproximadamente a 2×10^{19} km de la Tierra. ¿Cuántos años luz nos separan de Andrómeda?

• **12** En un cohete enviado a Marte para tomar fotografías, la cámara se dispara mediante ondas de radio las cuales (como todas las ondas electromagnéticas) se mueven con velocidad de la luz. ¿Cuál es el retraso de tiempo entre la señal emitida y recibida de la Tierra a Marte? (Considerar que la distancia a Marte es de 9×10^{10} m.)

• **13** La distancia entre un punto situado en la superficie de la Tierra y otro en la superficie de la Luna se mide enviando un haz de luz láser a un reflector situado en la superficie lunar y midiendo el tiempo que emplea la luz en su viaje de ida y vuelta. La incertidumbre en la distancia medida Δx está relacionada con la incertidumbre en el tiempo Δt por $\Delta x = c\,\Delta t$. Si los intervalos de tiempo pueden medirse hasta un ±1,0 ns, hallar la incertidumbre de la distancia en metros.

•• **14** En el intento de Galileo de determinar la velocidad de la luz, su asistente y él se colocaron en las cimas de sendas colinas separadas del orden de 3 km. Galileo hacía destellar una luz y recibía un destello de respuesta de su ayudante.
(a) Si éste tenía una reacción instantánea, ¿qué diferencia de tiempo necesitaría Galileo para hacer la medida de modo que fuese práctico este experimento?
(b) ¿Cómo se compara este tiempo con el de reacción humana, que es del orden de 0,2 s?

Reflexión y refracción

• **15** Sobre una carretera existe una capa delgada de agua. ¿Cómo afecta esta capa a la luz reflejada de los faros de un automóvil vista por su propio conductor? ¿Y si se trata de la luz reflejada procedente de los faros de un automóvil que viene en sentido contrario?

• **16** Un rayo de luz pasa del aire al agua chocando contra la superficie de separación bajo un ángulo de 45°. ¿Cuáles de las siguientes magnitudes de la luz se modifican cuando ésta penetra en el agua: (1) longitud de onda, (2) frecuencia, (3) velocidad de propagación, (4) dirección de propagación?
(a) 1 y 2 solamente. (b) 2, 3 y 4 solamente. (c) 1, 3 y 4 solamente.
(d) 3 y 4 solamente. (e) 1, 2, 3 y 4.

•• **17** La densidad de la atmósfera decrece con la altura y con ello el índice de refracción. Explicar por qué puede verse el Sol después de su puesta. ¿Por qué el Sol poniente aparece aplanado?

• **18** Calcular la fracción de energía luminosa reflejada en la interface aire-agua bajo incidencia normal.

• **19** Determinar el ángulo de refracción de un haz luminoso en el aire que choca contra una superficie de agua bajo un ángulo de incidencia de
(a) 20°, (b) 30°, (c) 45° y
(d) 60°. Representar estos rayos en un diagrama.

• **20** Repetir el problema 18 para un haz de luz inicialmente en agua que incide en la interface agua-aire.

• **21** Determinar la velocidad de la luz en el agua y en el vidrio.

• **22** El índice de refracción del vidrio flint de silicato es 1,66 para la luz con una longitud de onda de 400 nm y 1,61 para la luz con una longitud de onda de 700 nm. Determinar los ángulos de refracción para la luz de estás longitudes de onda que incide en este vidrio bajo un ángulo de 45°.

•• **23** Una loseta de vidrio con un índice de refracción de 1,5 se sumerge en agua con un índice de refracción de 1,33. La luz dentro del agua incide sobre el vidrio. Hallar el ángulo de refracción si el ángulo de incidencia es
(a) 60°, (b) 45° y (c) 30°.

•• **24** Repetir el problema 23 en el caso de un haz de luz inicialmente en el vidrio y que incide sobre la superficie vidrio-agua con los mismos ángulos.

•• **25** La luz incide normalmente sobre una lámina de vidrio de índice de refracción n = 1,5. Se produce reflexión en ambas superficies de la lámina. ¿Qué porcentaje aproximado de energía de la luz incidente es transmitida por la lámina?

•• **26** Este problema es una analogía de la refracción. Una banda de música está marchando sobre un campo de fútbol con una velocidad constante v_1. Aproximadamente hacia la mitad del campo la banda llega a una sección de terreno embarrado que tiene un límite claramente distinguible que forma un ángulo de 30° con la línea correspondiente a las 50 yardas, según se ve en la figura 33.50. En el barro, los elementos de la banda se mueven con velocidad $v_2 = \frac{1}{2}v_1$. Hacer un diagrama de cómo se desvía cada línea de personas que componen la banda cuando llegan a encontrarse con la sección embarrada del campo de modo que finalmente la banda llega a marchar en una dirección diferente. Indicar la dirección original mediante un rayo y la dirección final por otro segundo rayo, y hallar los ángulos entre estos rayos y la línea perpendicular a la límite entre el terreno normal y el embarrado. ¿Se desvía la dirección del movimiento hacia la perpendicular a la línea límite, o se aleja de la misma?

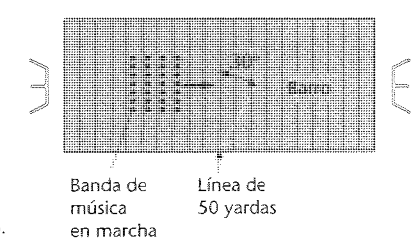


Figura 33.50 Problema 26.

•• **27** Una fuente puntual de luz está 5 cm por encima de una superficie plana reflectora (como un espejo). Dibujar un rayo desde la fuente que incida en la superficie con un ángulo de incidencia de 45° y dos rayos más que incidan sobre la superficie con ángulos ligeramente menores que 45° y dibujar el rayo reflejado por cada uno de ellos. Los rayos reflejados parecen divergir de un punto denominado imagen de la fuente luminosa. Dibujar líneas a trazos extendiendo los rayos reflejados hacia

www.elsolucionario.net

atrás hasta que se encuentren en un punto detrás de la superficie para localizar el punto imagen.

•• 28 En la figura 33.51, la luz está inicialmente en un medio (como el aire) de índice de refracción n_1. Incide con un ángulo θ_1 sobre la superficie de separación de un líquido (como el agua) de índice de refracción n_2. La luz pasa a través de la capa de agua y entra en vidrio de índice de refracción n_3. Si el ángulo de refracción en el vidrio es θ_3, demostrar que n_1 sen $\theta_1 = n_3$ sen θ_3. Es decir, demostrar que puede despreciarse el segundo medio cuando hay que hallar el ángulo de refracción en el tercer medio.

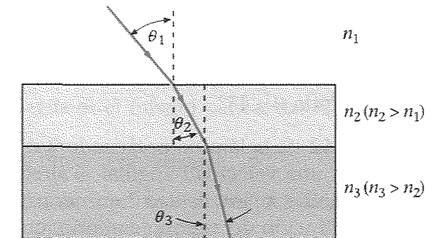


Figura 33.51 Problema 28.

••• 29 La figura 33.52 muestra un haz de luz que incide sobre una placa de vidrio de espesor d e índice de refracción n.

(a) Determinar el ángulo de incidencia tal que la separación perpendicular entre el rayo reflejado en la superficie superior y el reflejado en la superficie del fondo que sale por la superior sea un máximo.
(b) ¿Cuánto vale este ángulo de incidencia si el índice de refracción del vidrio es 1,60? ¿Cuál es la separación de los dos haces si el espesor de la placa de vidrio es 4,0 cm?

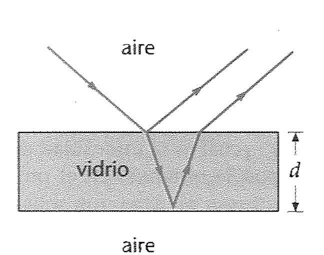


Figura 33.52 Problema 29.

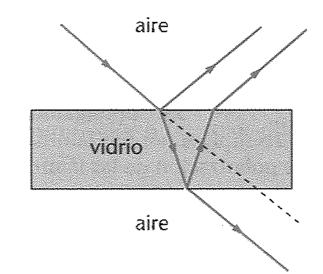


Figura 33.53 Problema 30.

••• 30 Considerar la situación indicada en la figura 33.53. El índice de refracción de la placa de vidrio es n. Determinar el ángulo de incidencia tal que la separación perpendicular entre los dos haces que emergen de la superficie superior es igual a la separación perpendicular entre el haz emergente por la superficie inferior y el haz incidente.

Deducción de las leyes de reflexión y refracción (opcional)

• 31 Un alumno de física que juega al billar desea lanzar su bola de modo que choque contra el borde de la mesa y luego choque contra una bola determinada. Escoge varios puntos sobre la banda y para cada uno de ellos mide la distancia desde dicho punto hasta la bola que ha de lanzar y a la que ha de chocar. Pretende hallar un punto para el cual la suma de estas distancias sea mínima.

(a) ¿Podrá con este método hacer chocar su bola contra la escogida?
(b) ¿Cómo se relaciona este método con el principio de Fermat?

• 32 Un nadador situado en el punto S de la figura 33.54 sufre un calambre mientras se encuentra nadando próximo a la orilla de un lago en calma y pide socorro. Un socorrista situado en el punto L oye esta llamada. El socorrista puede correr 9 m/s y nada a 3 m/s. Ha estudiado física y sabe elegir la trayectoria según la cual tardará menos tiempo en alcanzar al nadador. ¿Cuál de las trayectorias que se muestran en la figura 33.54 elige?

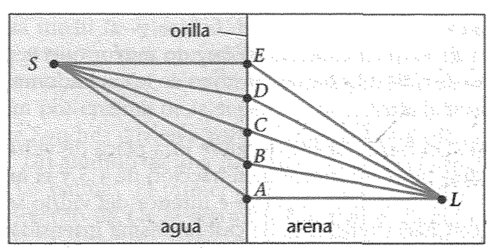


Figura 33.54 Problema 32.

Reflexión interna total

• 33 ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión interna total de la luz cuando se desplaza desde el agua y es incidente sobre una superficie agua-aire?

•• 34 Una superficie de vidrio tiene depositada encima una capa de agua ($n_{\text{vidrio}} = 1{,}50$, $n_{\text{agua}} = 1{,}33$). Luz procedente del vidrio incide sobre la superficie vidrio-agua. Hallar el ángulo crítico para la reflexión interna total.

•• 35 Un foco luminoso puntual está situado a 5 m por debajo de la superficie de un gran estanque de agua. Hallar el área de la mayor circunferencia en la superficie del estanque a través de cuyo círculo puede emerger directamente luz del foco.

•• 36 Un rayo de luz incide en dirección perpendicular a la cara mayor de un prisma, cuya sección es un triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuál es la velocidad de la luz en este prisma si justamente llega a producirse en él la reflexión interna total?

•• 37 Un foco puntual de luz está situado en el fondo de un depósito de acero y sobre él se coloca una cartulina circular opaca de radio 6,0 cm. Se añade con mucho cuidado un fluido transparente al depósito de forma que la cartulina flota en su superficie con su centro situado directamente encima del foco. Un observador situado por encima de la superficie no ve ninguna luz hasta que el fluido tiene una profundidad de 5 cm. ¿Cuál es el índice de refracción de dicho fluido?

•• 38 Un grano de arena está empotrado en el centro de la base de un cubo de material transparente. El grano de arena es visible cuando se mira a través de la superficie superior, pero no puede verse cuando se mira a través de cualquiera de los lados del cubo. ¿Cuál es el índice mínimo de refracción del material que constituye el cubo?

•• 39 Un rayo de luz incide normalmente sobre una cara de un prisma de vidrio cuyo índice de refracción es n (figura 33.55). La luz se refleja totalmente en el lado recto.

(a) ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener n?
(b) Cuando se sumerge este prisma en un líquido cuyo índice de refracción es 1,15, sigue existiendo todavía reflexión total, pero en el agua, cuyo índice es 1,33, deja de existir. Utilizar esta información para limitar los valores posibles de n.

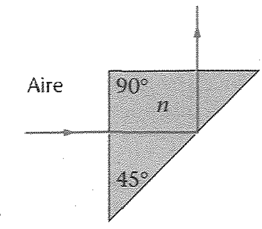


Figura 33.55 Problema 39.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

••• 40 Investigar el efecto sobre el ángulo crítico de una delgada capa de agua sobre una superficie de vidrio. Tómese $n = 1{,}33$ para el agua y $n = 1{,}5$ para el vidrio.

(a) ¿Cuál es el ángulo crítico de la reflexión total interna en la superficie vidrio-agua?

(b) ¿Son posibles rayos incidentes de ángulo mayor que θ_c para la refracción vidrio-aire, de modo que los rayos de luz abandonen el vidrio y el agua y pasen al aire?.

••• 41 Un haz láser incide sobre una placa de vidrio de 3 cm de espesor. El vidrio tiene un índice de refracción de 1,5 y el ángulo de incidencia es 40°. Las superficies superior e inferior del vidrio son paralelas y ambas producen haces reflejados de casi la misma intensidad. ¿Cuál es la distancia perpendicular *d* entre los dos haces reflejados adyacentes?

••• 42 La figura 33.56 muestra un prisma de vidrio de índice de refracción $n = 1{,}52$ en forma de un triángulo isósceles con ángulos en la base de 45°.

(a) Determinar el ángulo máximo de incidencia del haz que incide sobre la cara lateral y experimenta la reflexión total interna en la base.

(b) ¿Cuál es el valor máximo del índice de refracción del prisma para que el haz luminoso experimente la reflexión total interna en la base cualquiera que sea el ángulo de incidencia?

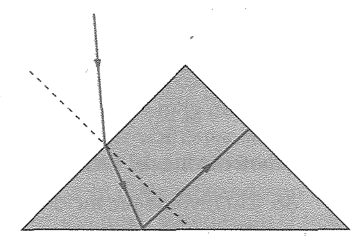


Figura 33.56 Problema 42.

Dispersión

•• 43 Un haz de luz incide sobre una superficie plana de vidrio flint de silicato con un ángulo de incidencia de 45°. El índice de refracción del vidrio varía con la longitud de onda, como se indica en el gráfico de la figura 33.26. ¿En cuánto es menor el ángulo de refracción de la luz violeta de longitud de onda de 400 nm respecto a la luz roja de 700 nm?

•• 44 Repetir el problema 43 para el cuarzo.

Polarización

• 45 Dos polarizadores tienen sus ejes de transmisión según un ángulo θ. Sobre el primer polarizador incide luz no polarizada de intensidad *I*. ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida por el segundo polarizador.

(a) $I\cos^2\theta$ (b) $(I\cos^2\theta)/2$ (c) $(I\cos^2\theta)/4$
(d) $I\cos^2\theta$ (e) $(I\cos\theta)/4$ (f) Ninguna de las anteriores.

• 46 ¿Cuál de los siguientes fenómenos *no* produce luz polarizada a partir de luz no polarizada?

(a) absorción (b) reflexión (c) birrefringencia
(d) difracción (e) dispersión.

• 47 ¿Cuál es el ángulo de polarización para

(a) el agua con $n = 1{,}33$ y (b) el vidrio con $n = 1{,}5$?

• 48 Un haz de luz polarizado en la dirección horizontal incide sobre una lámina polarizadora. Se observa que sólo el 15,0% de la intensidad de la luz incidente se transmite a través de la lámina. ¿Qué ángulo forma el eje de transmisión de la lámina con la horizontal?

(a) 8,6° (b)21° (c) 23° (d) 67° (e) 81°.

• 49 Dos láminas de polaroide tienen sus direcciones de transmisión cruzadas de modo que no pasa luz a su través. Se inserta una tercera lámina entre las dos de modo que su dirección de transmisión forma un ángulo θ con la primera. Se hace incidir luz no polarizada de intensidad I_0 sobre la primera lámina. Hallar la intensidad transmitida a través de las tres si

(a) $\theta = 45°$; (b) $\theta = 30°$.

• 50 El ángulo de polarización para una determinada sustancia es 60°.

(a) ¿Cuál es el ángulo de refracción de la luz que incide con este ángulo?

(b) ¿Cuál es el índice de refracción de esta sustancia?

•• 51 Dos láminas polarizadoras tienen cruzados sus ejes de transmisión y se inserta una tercera lámina de modo que su eje de tansmisión forme un ángulo θ con el de la primera lámina, como en el problema 49. Demostrar que la intensidad transmitida a través de las tres láminas es máxima cuando $\theta = 45°$.

•• 52 Si la lámina polarizadora intermedia del problema 51 está girando con una velocidad angular ω alrededor de un eje paralelo al haz luminoso, hallar la intensidad luminosa transmitida a través de las tres láminas en función del tiempo. Suponer que $\theta = 0$ en el instante $t = 0$.

•• 53 Tenemos una pila de $N + 1$ láminas polarizadoras en la que cada lámina está girada en un ángulo de $\pi/2N$ rad, respecto a la precedente. Una luz polarizada plana linealmente de intensidad I_0 está incidiendo sobre la pila normalmente. La luz incidente está polarizada a lo largo del eje de transmisión de la primera lámina y, por consiguiente normal al eje de transmisión de la última.

(a) ¿Cuál es la intensidad transmitida a través de la pila?

(b) Si son tres las láminas ($N = 2$), ¿cuál es la intensidad transmitida?

(c) En el caso de 101 láminas, ¿cuál es la intensidad transmitida?

(d) ¿Cuál es la dirección de polarización del haz en cada caso?

•• 54 Demostrar que una onda linealmente polarizada puede considerarse como la superposición de una onda polarizada circularmente hacia la derecha y otra polarizada circularmente hacia la izquierda.

•• 55 Supongamos que en el problema 49 la lámina del medio se reemplaza por dos láminas polaroides. Si el ángulo entre las direcciones de polarización de las láminas adyacentes es 30°, ¿cuál es la intensidad de la luz transmitida? Comparar esta intensidad con la obtenida en el problema 49a?

•• 56 En una onda polarizada circularmente, la magnitud del campo eléctrico es constante. Si la onda se propaga a lo largo del eje *z*, el ángulo comprendido entre **E** y el eje *x* cambia en 2π radianes en una longitud de onda. Expresar las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético de una onda polarizada circularmente de frecuencia angular ω que se propaga en el vacío en la dirección *z* positiva.

•• 57 Demostrar que el campo eléctrico de una onda circularmente polarizada que se propaga en la dirección *x* puede expresarse por

$$\mathbf{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\mathbf{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\mathbf{k}$$

•• 58 Para la onda cuyo campo eléctrico viene dado por la expresión del problema 57, ¿cuál es la expresión correspondiente del campo magnético **B**?

•• 59 Determinar las expresiones correspondientes al campo eléctrico **E** y el campo magnético **B** para una onda polarizada circularmente que se propaga en la dirección *z* negativa. (Véase problemas 57 y 58.)

•• 60 Una onda polarizada circularmente se dice que está polarizada a la derecha cuando los campos eléctrico y magnético giran en sentido horario vistos a lo largo de la dirección de propagación y se dice que está polarizada a la izquierda cuando los campos giran en sentido antihorario. ¿Cuál es el sentido de la polarización circular correspondiente a la onda descrita por la expresión del problema 57? ¿Cuál sería la expresión para una onda polarizada circularmente en el sentido opuesto?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

•• 61 Luz polarizada verticalmente de intensidad I_0 incide sobre una pila de N láminas polarizadoras ideales cuyos ángulos respecto a la vertical son $\theta_n = n\pi/2N$. Determinar la dirección de polarización de la luz transmitida y su intensidad. Demostrar que cuando $N \to \infty$, la dirección de polarización gira sin pérdida de intensidad.

Problemas generales

• 62 Verdadero o falso:

(a) La luz y las ondas de radio se propagan con la misma velocidad a través del vacío.
(b) La mayor parte de la luz que incide normalmente sobre una superficie aire-vidrio se refleja.
(c) El ángulo de refracción de la luz es siempre menor que el ángulo de incidencia.
(d) El índice de refracción del agua es el mismo para todas las longitudes de onda en el espectro visible.
(e) Las ondas longitudinales no pueden polarizarse.

•• 63 De las siguientes afirmaciones respecto a las velocidades de los diversos colores de la luz, ¿cuáles son ciertas?:

(a) Todos los colores de la luz tienen la misma velocidad en el vidrio.
(b) El violeta posee la máxima velocidad y el rojo la mínima.
(c) El rojo posee la máxima velocidad y el violeta la mínima.
(d) El verde posee la máxima velocidad; el rojo y el violeta la mínima.
(e) El rojo y el violeta poseen la máxima velocidad; el verde la mínima.

•• 64 En días soleados y en calma es frecuente oír las voces de personas que se encuentran en un bote a grandes distancias de la costa. Explicar este fenómeno teniendo en cuenta que el sonido se refleja en la superficie del agua y que la temperatura del aire justamente por encima de la superficie es normalmente menor que a una altura de 10 ó 20 m sobre el agua.

• 65 Un haz de luz roja monocromática de 700 nm de longitud de onda en el aire se mueve en el agua.

(a) ¿Cuál es la longitud de onda en el agua?
(b) ¿Un nadador bajo el agua observará el mismo color o un color diferente para esta luz?

• 66 A medida que la velocidad de las operaciones de un ordenador aumenta, la arquitectura de éste adquiere mayor importancia; el tiempo requerido para transferir una señal entre la unidad central de proceso (CPU) y la memoria del mismo puede ser un factor limitante en la determinación del tiempo requerido para el cálculo. ¿Cuál es la máxima separación entre un "chip" de memoria y la CPU que permite transferir información entre estas unidades en un tiempo inferior a 0,5 ns?

•• 67 El ángulo crítico para la reflexión total interna de una sustancia es 45°. ¿Cuál es su ángulo de polarización?

•• 68 La figura 33.57 muestra dos espejos planos que forman un ángulo θ entre sí. Demostrar que el ángulo formado entre el rayo incidente y el último reflejado es 2θ.

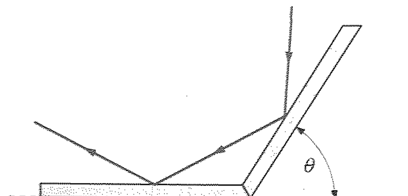


Figura 33.57 Problema 68.

•• 69 Una moneda de plata está en el fondo de una piscina de 4 m de profundidad. Un haz de luz reflejado en la moneda emerge de la piscina formando un ángulo de 20° respecto a la superficie del agua y entra en el ojo de un observador. Dibujar un rayo desde la moneda hasta el ojo del observador. Extender dicho rayo, que va desde la superficie agua-aire al ojo, hacia atrás hasta que corte a la línea vertical dibujada desde la moneda. ¿Cuál es la profundidad aparente de la piscina para este observador?

•• 70 Dos alumnos acaudalados deciden mejorar el experimento de Galileo para medir la velocidad de la luz. Uno de ellos va a Londres y llama al otro en Nueva York por teléfono. Las señales telefónicas se transmiten mediante la reflexión de ondas electromagnéticas en un satélite que está a 37,9 Mm por encima de la superficie de la Tierra. Si se desprecia la distancia entre Londres y Nueva York, la distancia recorrida es el doble de esta distancia. Un alumno da una palmada y cuando el otro oye el sonido bate a su vez las palmas. El primer alumno mide el tiempo entre su palmada y el momento de oír la segunda. Calcular el tiempo transcurrido, despreciando los tiempos de respuesta de los alumnos. ¿Puede tener éxito este experimento? ¿Qué mejoras para la medida del tiempo podrían sugerirse? (Los retrasos temporales en los circuitos electrónicos que son mayores que los debidos al tiempo que tarda la luz en ir y volver al satélite hacen que este experimento no sea factible.)

•• 71 Los pescadores suelen insistir en que se guarde silencio a su alrededor porque el ruido alejará los peces. Supongamos que un pescador lanza su anzuelo con cebo a 20 m de la orilla de un lago en calma en un punto de profundidad 15 m. Demostrar que el ruido producido en la orilla no puede ser apreciado por los peces situados en dicho punto. *Nota*: la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s y en el agua de 1450 m/s.

•• 72 Un nadador en el fondo de una piscina de 3 m de profundidad mira hacia arriba y distingue un círculo de luz. Si el índice de refracción del agua de la piscina es 1,33, hallar el radio del círculo.

•• 73 Demostrar que cuando se hace girar un espejo un ángulo θ, el haz de luz reflejado gira en 2θ.

•• 74 Utilizar la figura 33.26 para calcular los ángulos críticos correspondientes a la reflexión interna total de la luz inicialmente en el vidrio flint de silicato que incide sobre una interface vidrio-aire

(a) si la luz es violeta de longitud de onda 400 nm y
(b) si es roja de longitud de onda 700 nm.

•• 75 Demostrar que la intensidad transmitida a través de una placa de vidrio con un índice de refracción n para luz con incidencia normal vale aproximadamente

$$I_T = I_0\left[\frac{4n}{(n+1)^2}\right]^2$$

•• 76 Un rayo de luz comienza en el punto $x = -2$ m, $y = 2$ m, incide sobre un espejo en el plano yz en un cierto punto x y se refleja pasando por el punto $x = 2$ m, $y = 6$ m.

(a) Hallar el valor de x que hace que sea mínima la distancia total recorrida por el rayo.
(b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia sobre el plano reflector? ¿Cuál es el ángulo de reflexión?

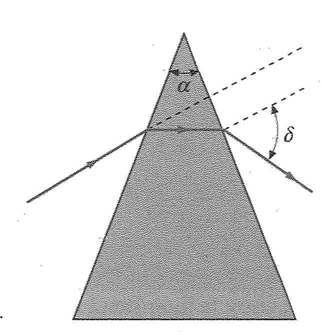


Figura 33.58 Problemas 77, 88 y 89.

•• 77 Un rayo de luz atraviesa simétricamente un prisma que tiene un ángulo α en el vértice, como se indica en la figura 33.58.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) Demostrar que el ángulo de desviación δ viene dado por

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha+\delta}{2} = n \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

(b) Si el índice de refracción para la luz roja es 1,48 y para la luz violeta es 1,52, ¿cuál es la separación angular de la luz visible en el caso de un prisma con un ángulo en el vértice de 60°?

•• 78

(a) En el caso de un rayo de luz en el interior de un medio transparente que tiene una interface plana con el vacío, demostrar que el ángulo de polarización y el ángulo crítico para la reflexión interna total satisfacen la expresión tg θ_p = sen θ_c.
(b) ¿Qué ángulo es el mayor?

•• 79 Un rayo de luz incide desde el aire sobre una sustancia transparente con un ángulo de 58,0° respecto a la normal. Se observa que los rayos reflejado y refractado son mutuamente perpendiculares.

(a) ¿Cuál es el índice de refracción de la sustancia transparente?
(b) ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna en esta sustancia?

•• 80 Un rayo de luz en un vidrio flint denso con un índice de refracción 1,655 incide sobre la cara exterior del mismo. Sobre la superficie del vidrio se condensa un líquido desconocido. La reflexión total interna sobre la superficie vidrio-líquido es 53,7°.

(a) ¿Cuál es el índice de refracción del líquido desconocido?
(b) Si se elimina el líquido, ¿cuál es el ángulo de incidencia para la reflexión interna total?
(c) Para el ángulo de incidencia encontrado en la parte (b), ¿cuál es el ángulo de refracción del rayo dentro de la película de líquido? ¿Emergerá un rayo a través de la película de líquido hacia el aire que está encima? Suponer que el vidrio y el líquido tienen superficies perfectamente planas.

•• 81 Dado que el índice de refracción para la luz roja en agua es 1,3318 y para la luz azul es 1,3435, hallar la separación angular de estos colores en el arco iris primario. (Utilizar la ecuación dada en el problema 86.)

•• 82 Un rayo de luz cae sobre un bloque de vidrio rectangular (n = 1,5) que está casi completamente sumergido en agua (n = 1,33), como se ve en la figura 33.59.

(a) Hallar el ángulo θ para el que se produce exactamente la reflexión interna en el punto P.
(b) ¿Se verificaría la reflexión interna total en el punto P para el valor de θ hallado en la parte (a) si se eliminase el agua? Razonar la respuesta.

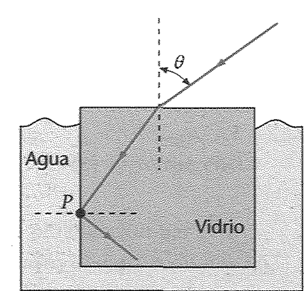


Figura 33.59 Problema 82.

•• 83

(a) Utilizar el resultado obtenido en el problema 75 para calcular la relación entre la intensidad transmitida y la intensidad incidente sobre N láminas de vidrio paralelas si la luz incide normalmente a la superficie de las láminas.
(b) Calcular esta relación para tres láminas de vidrio en las que n = 1,5.
(c) Tomando n = 1,5, ¿cuántas láminas de vidrio serán necesarias para reducir en un 10 por ciento la intensidad de la radiación incidente?

•• 84 Sobre una lámina de material transparente incide luz con un ángulo θ_1, como se ve en la figura 33.60. La lámina tiene un espesor t y un índice de refracción n. Demostrar que

$$n = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}[\operatorname{arctg}(d/t)]}$$

siendo d la distancia indicada en la figura y arctg (d/t) es el ángulo cuya tangente es d/t.

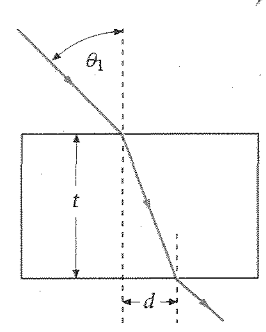


Figura 33.60 Problema 84.

•• 85 Supóngase que la lluvia cae verticalmente desde una nube estacionaria situada a 10 000 m por encima de un confuso corredor de maratón que marcha en círculo con velocidad constante de 4 m/s. La lluvia tiene una velocidad terminal de 9 m/s.

(a) ¿Cuál es el ángulo que parece formar la lluvia con la vertical desde el punto de vista del corredor?
(b) ¿Cuál es el movimiento aparente de la nube observado por el corredor?
(c) Una estrella situada en el eje de la órbita terrestre parece tener una órbita circular de diámetro angular de 41,2 segundos de arco. ¿Cómo se relaciona este ángulo con la velocidad de la Tierra en su órbita y con la velocidad de los fotones procedentes de esta estrella distante?
(d) ¿Cuál es la velocidad de la luz determinada a partir de los datos de la parte (c)?

••• 86 La ecuación 33.18 nos da la relación existente entre el ángulo de desviación ϕ_d de un rayo de luz incidente sobre una gota esférica de agua en función del ángulo de incidencia θ_1 y del índice de refracción del agua.

(a) Suponer que n_{aire} = 1 y derivar ϕ_d respecto a θ_1. [*Indicación*: Si y = arcsen x, $dy/dx = (1-x^2)^{-1/2}$.]
(b) Hacer $d\phi_d/d\theta_1 = 0$ y demostrar que el ángulo de incidencia θ_{1m} correspondiente a la desviación mínima viene dado por

$$\cos\theta_{1m} = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

y hallar θ_{1m} para el agua, cuyo índice de refracción vale 1,33.

••• 87

(a) Demostrar que un rayo luminoso transmitido a través de una lámina de vidrio emerge paralelo al rayo incidente pero desplazado respecto a él.
(b) En el caso de un ángulo incidente de 60°, índice de refracción del vidrio n = 1,5 y espesor de la lámina 10 cm, hallar el desplazamiento medido perpendicularmente desde el rayo incidente.

88 Demostrar que si el ángulo en el vértice del prisma del problema 77 es pequeño, el ángulo de desviación δ viene dado por $\delta = (n-1)\alpha$, independientemente del ángulo de incidencia.

••• 89 Demostrar que el ángulo de desviación δ es un mínimo si el ángulo de incidencia es tal que el rayo pasa a través del prisma simétricamente como se indica en la figura 33.58.

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net

CAPÍTULO

34

Imágenes ópticas

El enfoque de rayos por reflexión y refracción se demuestra mediante estos haces de láser que inciden sobre una lente de vidrio

www.elsolucionario.net

La longitud de onda de la luz suele ser muy pequeña en comparación con el tamaño de los obstáculos o aberturas que se encuentran a su paso y pueden despreciarse en general los efectos de la difracción (la desviación de las ondas alrededor de los bordes y esquinas). Por ello, el modelo de los rayos de luz, según el cual se admite que las ondas se propagan en línea recta, es válido. En este capítulo, aplicaremos las leyes de la reflexión y de la refracción para estudiar la formación de imágenes por espejos y lentes.

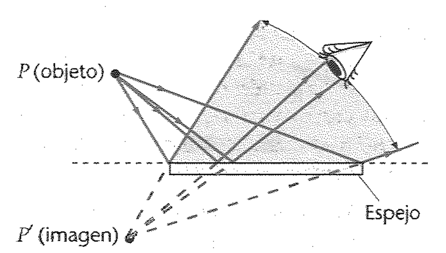


Figura 34.1 Imagen formada por un espejo plano. Los rayos procedentes del punto P que inciden sobre el espejo y entran en el ojo parecen proceder del punto imagen P', detrás del espejo. El ojo puede ver la imagen siempre que se encuentre en la región sombreada.

Espejos ■ 34.1

Espejos planos ■

La figura 34.1 muestra un haz de rayos luminosos que proceden de una fuente puntual P y se refleja en un espejo plano. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' detrás del plano del espejo. El punto P' se denomina la **imagen** del **objeto** P. Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que procedieran de una fuente situada en P' sin que hubiese espejo. La imagen se denomina **imagen virtual** debido a que la luz no procede realmente de la imagen. La imagen P' está en la línea que pasa por el objeto P y es perpendicular al plano del espejo, a una distancia detrás de dicho plano igual a la distancia a que el objeto está del mismo, como muestra la figura 34.1. La imagen puede verse siempre que el ojo esté en cualquier lugar de la región indicada, de modo que una línea trazada desde la imagen al ojo pasa cortando el espejo. En la figura se observa que el objeto no necesita estar directamente delante del espejo. Cuando se da esta situación, existe una posición en la cual puede situarse el ojo para ver la imagen.

Si levantamos la mano derecha frente a un espejo, la imagen que vemos es del mismo tamaño, pero parece una mano izquierda (figura 34.2). Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una **inversión en profundidad**; es decir, la mano derecha se transforma en una mano izquierda porque el espejo ha invertido la palma y el dorso de



Figura 34.2 La imagen de una mano derecha en un espejo plano es una mano izquierda. Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una inversión en la profundidad.

 www.elsolucionario.net

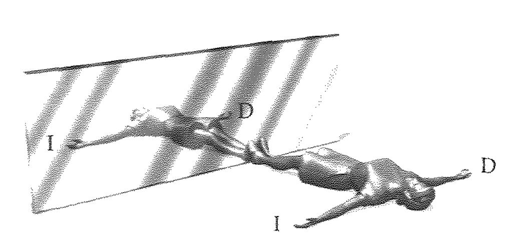


Figura 34.3 Una persona tendida en el suelo con sus pies en contacto con un espejo. La imagen está invertida en su dimensión de profundidad

la mano. En la figura 34.3 se ilustra también esta inversión en profundidad. La figura 34.4 muestra la imagen especular de un sistema de coordenadas rectangular. El espejo transforma un sistema de coordenadas "a derechas", para el cual $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, en un sistema de coordenadas "a izquierdas", para el cual $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$.

En la figura 34.5 se muestra una flecha de altura y que se mantiene paralela a un espejo plano y a una distancia s del mismo. Podemos dibujar y localizar la imagen de la punta de la flecha (y de cualquier otro punto de la misma) dibujando dos rayos. Uno de ellos se dibuja perpendicularmente al espejo. Incide en el espejo en el punto A y se refleja hacia atrás sobre sí mismo. El otro rayo, que incide en el espejo formando un ángulo θ con la normal al espejo, se refleja formando un ángulo θ igual con el eje x. La prolongación de estos dos rayos hacia atrás, detrás del espejo, sitúa la imagen de la punta de la flecha, como se indica con las líneas a trazos en la figura. Podemos ver en ella que la imagen está a la misma distancia detrás del espejo como el objeto está delante de él, y que la imagen es derecha y tiene el mismo tamaño que el objeto.

En la figura 34.6 se ilustra la formación de imágenes múltiples mediante dos espejos planos que forman un ángulo cualquiera entre sí. Es frecuente ver este fenómeno en las tiendas de ropa, que disponen de sistemas con dos o tres espejos adyacentes orientables. La luz reflejada en el espejo 1 llega al espejo 2 como si procediese del punto imagen P'_1. La imagen P'_1 es el objeto para el espejo 2, y su imagen en éste es, a su vez, un punto $P''_{1,2}$. Se formará esta imagen siempre que el punto imagen P'_1 esté delante del plano del espejo 2. La imagen que aparece en el punto P'_2 se debe a los rayos procedentes del objeto que se reflejan directamente en el espejo 2. Como P'_2 está detrás del plano del espejo 1, no puede servir de punto objeto para formar otra imagen en el espejo 1. El número de múltiples imágenes que se forman con dos espejos depende del ángulo entre ellos y de la posición del objeto.

En la figura 34.7 se muestran dos espejos mutuamente perpendiculares. En la figura 34.7a se ven los rayos que procedentes del objeto y, después de incidir primero en el espejo 1 y luego en el 2, acaban llegando al ojo. En este caso, el punto imagen $P''_{1,2}$ es el mismo que el que forman los rayos que inciden primero en el espejo 2 y luego en el 1, como puede verse en la figura 34.7b. Si se permanece de pie delante de dos espejos verticales perpendiculares entre sí, como en un rincón de una sala, la imagen que uno mismo ve es la misma que la observada por otra persona cualquiera que está frente a nosotros porque la inversión en profundidad ocurre dos veces, una en cada espejo.

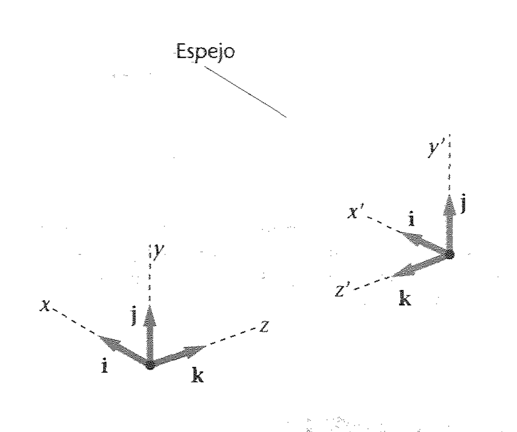


Figura 34.4 Imagen de un sistema de coordenadas rectangulares dada por un espejo plano. El sentido de la flecha a lo largo del eje z está invertido en la imagen. La imagen del sistema de coordenadas original, que es "a derechas", de forma que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, resulta "a izquierdas", de modo que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$

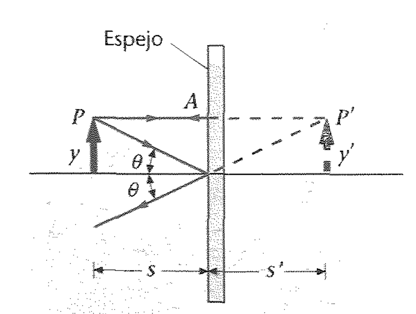


Figura 34.5 Diagrama de rayos para localizar la imagen de una flecha dada por un espejo plano.

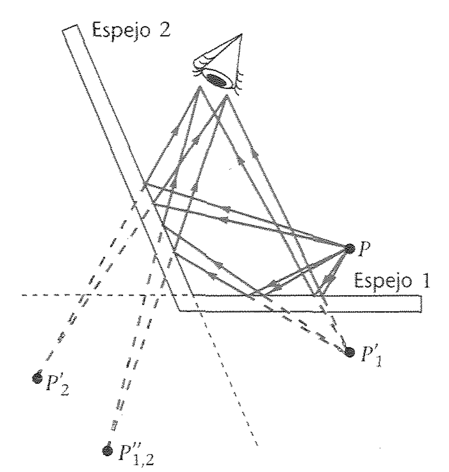


Figura 34.6 Imágenes formadas por dos espejos planos. P'_1 es la imagen del objeto P en el espejo 1, y P'_2 es la imagen en el espejo 2. El punto $P''_{1,2}$ es la imagen de P'_1 en el espejo 2 vista cuando los rayos procedentes del espejo se reflejan primero en el espejo 1 y luego en el espejo 2. La imagen P'_2 no da ninguna imagen en el espejo 1 porque se encuentra detrás de él.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

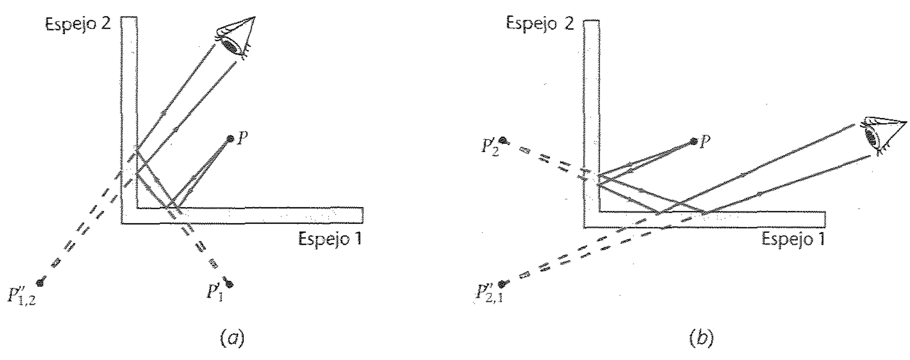


Figura 34.7 Dos espejos planos mutuamente perpendiculares. (*a*) Rayos que inciden primero en el espejo 1 y luego en el espejo 2. La imagen P'_1 en el espejo 2 es $P''_{1,2}$. (*b*) Rayos que inciden primero en el espejo 2 y luego en el 1. La imagen de P'_2 en el espejo 1 es $P''_{1,2}$, que coincide con $P''_{1,2}$ en el caso de espejos perpendiculares.

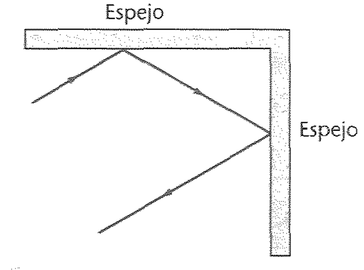


Figura 34.8 Un rayo que incide sobre uno de los espejos planos perpendiculares se refleja en el segundo espejo en sentido opuesto al original, cualquiera que sea el ángulo de incidencia.

La figura 34.8 ilustra el hecho de que un rayo horizontal reflejado en dos espejos verticales perpendiculares invierte exactamente su sentido con independencia del ángulo que el rayo forme con los espejos. Si se colocasen tres espejos perpendiculares entre sí como las caras de la esquina interior de una caja, todo rayo incidente en uno cualquiera de los espejos procedente de cualquier dirección, invierte exactamente su sentido. Se colocó en la Luna un conjunto de espejos de este tipo (realmente un conjunto de prismas reflectores) mirando hacia la Tierra. Un haz láser enviado desde la Tierra dirigido a los espejos se reflejará retornando al mismo lugar de la Tierra. Se ha utilizado un haz de este tipo para medir la distancia a los espejos con una precisión de unos centímetros, midiendo el tiempo que emplea la luz en llegar hasta los espejos y regresar de nuevo.

Espejos esféricos

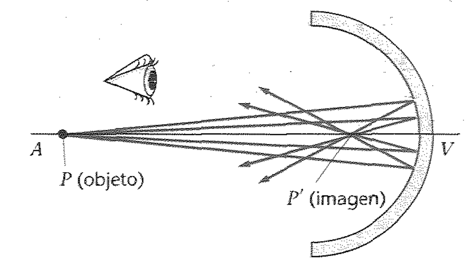


Figura 34.9 Los rayos procedentes de un punto objeto P situado sobre el eje AV de un espejo esférico cóncavo forman una imagen en P'. La imagen es nítida si los rayos inciden sobre el espejo cerca del eje.

La figura 34.9 muestra un haz de rayos que procede de un punto P situado en el eje de un espejo esférico cóncavo y que después de reflejarse en el mismo convergen en el punto P'. Los rayos entonces divergen desde este punto como si hubiese un objeto en el mismo. Esta imagen se denomina **imagen real**, debido a que la luz realmente emana del punto imagen. Puede verse por un ojo cualquiera situado a la izquierda de la imagen y que mire hacia el espejo. Podría observarse también sobre una pantalla visora de vidrio o una película fotográfica colocada en el punto imagen. Una imagen virtual, como la que se forma en un espejo plano, no puede ser observada en una pantalla situada en el punto imagen puesto que allí no existe luz. A pesar de esta diferencia entre imagen real y virtual, los rayos luminosos que divergen de una imagen real y los que parecen diverger de una imagen virtual son idénticos para el ojo.

En la figura 34.10 vemos que sólo los rayos que inciden en el espejo en los puntos próximos al eje AV se reflejan pasando por el punto imagen. Estos rayos se denominan **rayos paraxiales**. Debido a que otros *rayos no-paraxiales* convergen en puntos diferentes próximos al punto imagen, la imagen aparece borrosa, efecto denominado **aberración esférica**. La imagen puede hacerse más nítida bloqueando el espejo de modo que no incidan en él rayos que no sean paraxiales. Aunque la imagen es entonces más nítida, se reduce su brillo debido a que se refleja menos intensidad luminosa en el punto imagen.

La figura 34.11 muestra un rayo que, procedente de un punto objeto P, se refleja en el espejo y pasa por el punto imagen P'. El punto C es el centro de curvatura del espejo. Los rayos incidente y reflejado forman ángulos iguales con la línea radial CA, que es perpendicular a la superficie del espejo. La distancia imagen s' desde el vértice del espejo V a P' puede relacionarse con la distancia objeto s del vértice V al punto P y con el radio de curvatura r del espejo por geometría elemental. El resultado es

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \qquad (34.1)$$

La deducción de esta ecuación supone que los rayos son paraxiales.

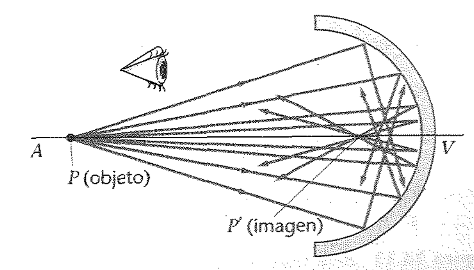


Figura 34.10 Aberración esférica de un espejo. Los rayos no-paraxiales que inciden sobre el espejo en puntos alejados del eje AV no se reflejan pasando por el punto imagen P'. Estos rayos forman una imagen borrosa.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

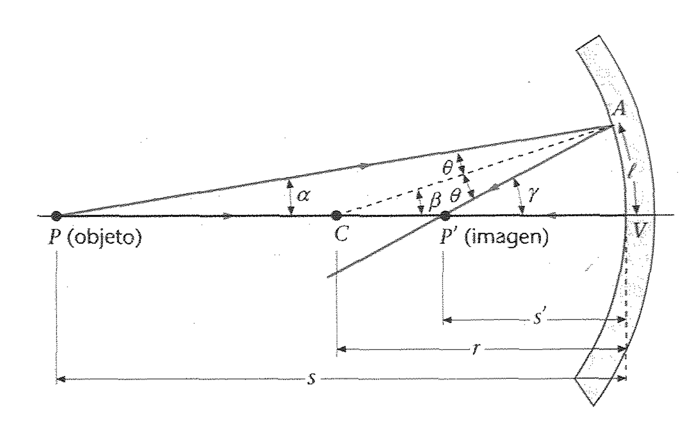


Figura 34.11 Geometría para el cálculo de la distancia s' de la imagen a partir de la distancia s del objeto y del radio de curvatura r. El ángulo β es externo al triángulo PAC y, por tanto, $\beta = \alpha + \theta$. De igual modo, en el triángulo PAP', $\gamma = \alpha + 2\theta$. Eliminando θ de estas ecuaciones resulta $2\beta = \alpha + \gamma$. La ecuación 34.1 resulta directamente si admitimos las siguientes aproximaciones de ángulo pequeño: $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$ y $\gamma \approx \ell/s'$.

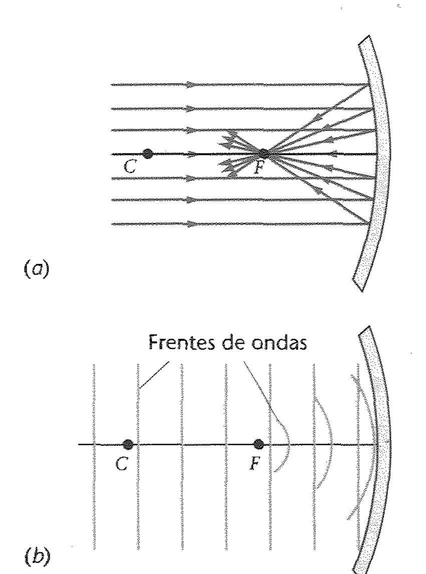


Figura 34.12 (*a*) Rayos paralelos que inciden sobre un espejo cóncavo y se reflejan pasando por el punto focal F situado a una distancia $r/2$. (*b*) Los frentes de onda incidentes son planos; después de la reflexión se convierten en ondas esféricas que convergen en el punto focal.

Cuando la distancia objeto es grande en comparación con el radio de curvatura del espejo, el término $1/s$ de la ecuación 34.1 es mucho menor que $2/r$ y puede despreciarse. Para $s = \infty$, la distancia imagen es $s' = \frac{1}{2}r$ y recibe el nombre de **distancia focal** f del espejo. El **punto focal** F (punto imagen) es el punto en donde resultan enfocados todos los rayos paralelos al eje del espejo, como se ilustra en la figura 34.12*a*. (Una vez más, sólo los rayos paraxiales se enfocan en un solo punto.)

$$f = \frac{1}{2}r \qquad (34.2)$$

Distancia focal del espejo

La distancia focal de un espejo esférico es igual a la mitad del radio de curvatura. En función de la distancia focal f, la ecuación 34.1 toma la forma

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad (34.3)$$

Ecuación del espejo

La ecuación 34.3 se denomina **ecuación del espejo**.

Cuando un objeto está muy lejos del espejo, los frentes de onda son aproximadamente planos, como se ve en la figura 34.12*b*, y los rayos son paralelos. Obsérvese cómo en esta figura los bordes del frente de onda inciden en la superficie del espejo cóncavo antes que la porción central cercana al eje, dando como resultado un frente de onda esférico después de la reflexión. La figura 34.13 muestra los frentes de onda y los rayos

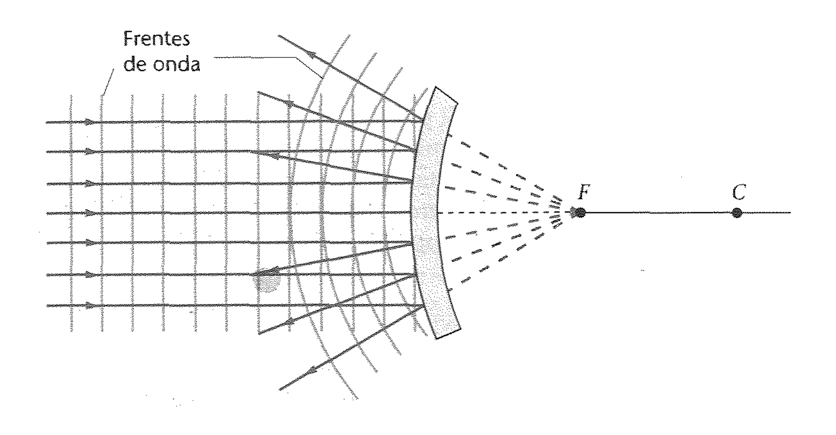


Figura 34.13 Reflexión de ondas planas en un espejo convexo. Los frentes de onda reflejados son esféricos como si emanasen del punto focal F detrás del espejo. Los rayos son perpendiculares a los frentes de onda y parece que divergen de F.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

correspondientes a ondas planas que inciden sobre un espejo convexo. En este caso, incide en primer lugar la parte central del frente de onda y las ondas reflejadas parece que proceden del punto focal detrás del espejo.

En la figura 34.14 se ilustra una propiedad de las ondas llamada **reversibilidad**. Si invertimos el sentido de un rayo reflejado, la ley de la reflexión asegura que el rayo reflejado coincidirá con el rayo incidente original, pero tendrá sentido opuesto. (La reversibilidad se cumple también con los rayos refractados, que se estudiarán en secciones posteriores.) Así pues, si tenemos una imagen real de un objeto que se ha formado mediante una superficie reflectante (o refractante), podemos colocar un objeto en el punto imagen y se formará una nueva imagen en la posición del objeto original.

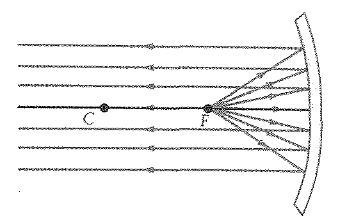
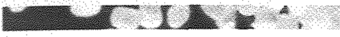


Figura 34.14 Ilustración de la reversibilidad. Los rayos que divergen de un foco puntual situado en el punto focal de un espejo cóncavo se reflejan en el espejo como rayos paralelos. Los rayos son los mismos que los de la figura 34.12*a* pero en sentido opuesto.



EJEMPLO 34.1

Un objeto está situado a 12 cm de un espejo cóncavo, cuyo radio de curvatura es 6 cm. (a) Hallar la distancia focal del espejo y (b) la distancia a que se encuentra la imagen.

Esquema del problema La distancia focal de un espejo esférico es la mitad del radio de curvatura. Una vez conocida la distancia focal, la distancia imagen se determina mediante la ecuación del espejo (ecuación 34.3).

(a) La distancia focal es la mitad del radio de curvatura: $f = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(6\text{ cm}) = 3\text{ cm}$

(b) 1. Utilizar la ecuación del espejo para determinar la distancia s': $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ o $\frac{1}{12\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{3\text{ cm}}$

2. Despejar s': $\frac{1}{s'} = \frac{4}{12\text{ cm}} - \frac{1}{12\text{ cm}} = \frac{3}{12\text{ cm}}$

$s' = 4\text{ cm}$

Ejercicio Un espejo cóncavo tiene una distancia focal de 4 cm. (a) ¿Cuál es su radio de curvatura? (b) Determinar la distancia imagen de un objeto situado a 2 cm del espejo. (*Respuestas*: (a) 8 cm; (b) $s' = -4$ cm.)

www.elsolucionario.net

Diagramas de rayos para los espejos

Un método que resulta útil a la hora de situar imágenes consiste en la construcción de un **diagrama de rayos**. Este método se aclara en la figura 34.15, en donde el objeto es una figura humana perpendicular al eje a una distancia *s* del espejo. Mediante una selección juiciosa de los rayos que parten desde la cabeza, podemos localizar rápidamente la imagen. Existen tres **rayos principales** que son convenientes para su utilización en el diagrama:

1. El **rayo paralelo** al eje. Este rayo se refleja pasando por el punto focal.
2. El **rayo focal**, que pasa por el punto focal. Este rayo se refleja paralelamente al eje.
3. El **rayo radial**, que pasa por el centro de curvatura. Este rayo incide sobre el espejo perpendicularmente a su superficie y, por ello, se refleja coincidiendo consigo mismo.

Rayos principales correspondientes a un espejo

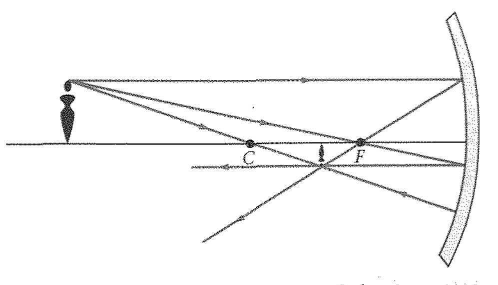


Figura 34.15 Diagrama de rayos para la localización de la imagen mediante una construcción geométrica.

Estos rayos se muestran en la figura 34.15. La intersección de dos rayos cualesquiera sitúa el punto imagen de la cabeza. Puede utilizarse el tercer rayo como comprobación.

 www.elsolucionario.net

Figura 34.16 Los diagramas de rayos son más fáciles de construir si la superficie curva se reemplaza por un plano.

Los diagramas de rayos son más fáciles de dibujar si el espejo se reemplaza por una línea recta que se prolonga lo necesario para interceptar los rayos como indica la figura 34.16. Obsérvese que la imagen en este caso está invertida y es menor que el objeto.

Cuando el objeto está entre el espejo y su punto focal, los rayos reflejados en el espejo no convergen sino que parecen divergir desde un punto situado detrás del espejo, como se ilustra en la figura 34.17. En este caso la imagen es virtual y derecha ("derecha" quiere decir que no está invertida respecto al objeto). En este caso concreto, s es menor que $\frac{1}{2}r$, de modo que la distancia imagen s' calculada con la ecuación 34.1 resulta ser negativa. Podemos aplicar las ecuaciones 34.1, 34.2, y 34.3 a este caso y a los espejos convexos si adoptamos un convenio de signos conveniente. Con independencia de que el espejo sea convexo o cóncavo, sólo pueden formarse imágenes reales delante del espejo, es decir, en el mismo lado del espejo que el objeto. Se forman imágenes virtuales detrás del espejo, en donde no existen rayos luminosos reales. Nuestro convenio de signos es el siguiente:

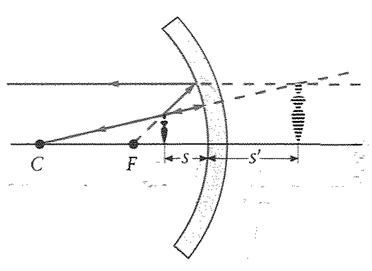


Figura 34.17 Imagen virtual formada por un espejo cóncavo cuando el objeto está dentro de la distancia focal. La imagen está situada en la intersección del rayo radial, que se refleja en sentido inverso sobre sí mismo, y del rayo focal, que se refleja paralelo al eje. Estos dos rayos parece que divergen de un punto situado detrás del espejo y se localizan prolongándolos.

s	+	si el objeto está delante del espejo (objeto real)
	–	si el objeto está detrás del espejo (objeto virtual)[1]
s'	+	si la imagen está delante del espejo (imagen real)
	–	si la imagen está detrás del espejo (imagen virtual)
r, f	+	si el centro de curvatura está delante del espejo (espejo cóncavo)
	–	si el centro de curvatura está detrás del espejo (espejo convexo)

Convenio de signos para la reflexión

Con esta convención de signos, las ecuaciones 34.1, 34.2 y 34.3 pueden utilizarse para todas las situaciones posibles con cualquier tipo de espejo.

La relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto se denomina **aumento lateral** de la imagen. En la figura 34.18 podemos ver que el aumento lateral es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad (34.4)$$

Aumento lateral

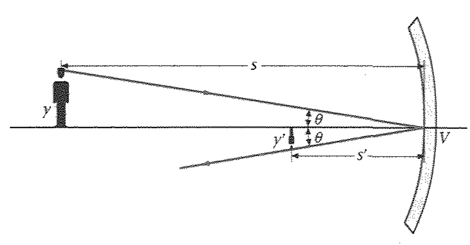


Figura 34.18 Geometría para determinar el aumento lateral. Un rayo procedente de la parte superior del objeto que incide en el vértice del espejo, forma un ángulo θ con el eje. El rayo reflejado forma un ángulo igual con el eje que pasa por la parte superior de la imagen. Comparando los triángulos formados por estos rayos, el eje, el objeto y la imagen, se muestra que el aumento lateral y'/y es igual a la relación de las distancias s'/s. El signo menos de la ecuación 34.4 resulta del hecho de ser negativa la relación y'/y cuando s' y s son ambas positivas.

Un aumento negativo, lo que tiene lugar cuando s y s' son positivos, significa que la imagen está invertida.

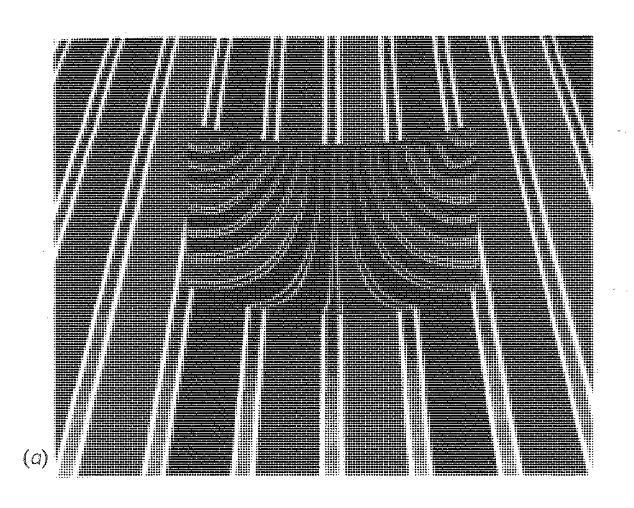
En el caso de espejos planos el radio de curvatura es infinito. La distancia focal dada por la ecuación 34.2 es entonces también infinita. La ecuación 34.3 da, pues, $s' = -s$, lo que indica que la imagen está detrás del espejo y a una distancia igual a la del objeto. La amplificación dada por la ecuación 34.4 da ahora +1, lo que indica que la imagen es derecha y tiene el mismo tamaño que el objeto.

Aunque las ecuaciones precedentes combinadas con nuestro convenio de signos son relativamente sencillas de utilizar, es frecuente que sólo se necesite saber si una imagen es real o virtual, si es derecha o invertida, y su posición y amplificación aproximadas. Este conocimiento es normalmente más sencillo de obtener con la simple construcción de rayos. Sin embargo, es siempre una buena idea utilizar ambos métodos, gráfico y algebraico, para situar una imagen de forma que uno de los métodos sirva de comprobación del otro.

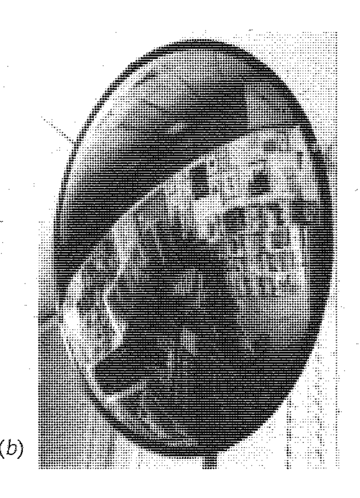
[1] El lector puede asombrarse de cómo un objeto puede estar detrás de un espejo. Esto ocurre cuando existe una lente delante del espejo y los rayos que van a la imagen que forma la lente son interceptados por el espejo. Entonces la imagen de esta lente nunca llega a formarse, pero la distancia a la imagen sin formar, detrás del espejo, se considera como la distancia objeto para el espejo y en este caso el objeto se denomina virtual. Consideraremos algunos ejemplos de esto en la sección 31.4 cuando estudiemos las lentes.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



(a)



(b)

(a) Espejo convexo apoyado sobre un papel que posee unas tiras espaciadas de forma regular y paralelas. Obsérvese el gran número de líneas que se ven en la imagen en un pequeño espacio y la reducción del tamaño y la distorsión de su forma. (b) Uso de un espejo convexo para controlar la seguridad de un almacén.

Espejos convexos En la figura 34.19 se muestra un diagrama de rayos para un objeto situado delante de un espejo convexo. El rayo central que se dirige hacia el centro de curvatura C es perpendicular al espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo paralelo al eje se refleja como si procediese del punto focal F detrás del espejo. El rayo focal (no indicado) se dibujaría hacia el punto focal y se reflejaría paralelo al eje. Podemos ver en la figura que la imagen está detrás del espejo y, por tanto, es virtual. Además es derecha y menor que el objeto.

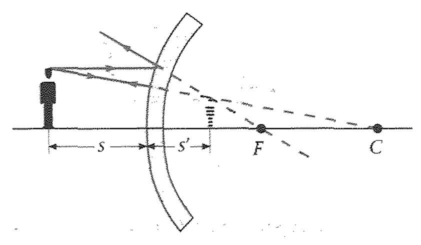
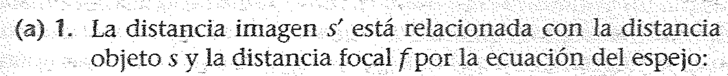


Figura 34.19 Diagrama de rayos correspondiente a un espejo convexo.



EJEMPLO 34.2

Un objeto de 2 cm de alto está a 10 cm de un espejo convexo cuyo radio de curvatura es 10 cm. (a) Localizar la imagen y (b) hallar su altura.

Esquema del problema El diagrama de rayos para este problema es el mismo que el de la figura 34.19. En ella se ve que la imagen es derecha, virtual y más pequeña que el objeto. Para determinar la localización exacta y su tamaño, utilizaremos la ecuación del espejo con $s = 10$ cm y $r = -10$ cm.

(a) 1. La distancia imagen s' está relacionada con la distancia objeto s y la distancia focal f por la ecuación del espejo:
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

2. Calcular la distancia focal del espejo:
$$f = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}(-10 \text{ cm}) = -5 \text{ cm}$$

3. Sustituir $s = 10$ cm y $f = -5$ cm en la ecuación del espejo para determinar la distancia imagen:
$$\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{-5 \text{ cm}}$$

4. Despejar s':
$$\frac{1}{s'} = -\frac{2}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{10 \text{ cm}} = -\frac{3}{10 \text{ cm}}$$
$$s' = -3{,}33 \text{ cm}$$

(b) 1. La altura de la imagen es m veces la altura del objeto:
$$y' = my$$

2. Calcular el aumento m:
$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-3{,}33 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = +0{,}333$$

3. Usar m para determinar la altura de la imagen:
$$y' = my = (0{,}333)(2 \text{ cm}) = 0{,}666 \text{ cm}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



Observaciones La distancia imagen es negativa, indicando una imagen virtual detrás del espejo. El aumento es positivo, indicando que la imagen es derecha.

Ejercicio Determinar la distancia imagen y el aumento para un objeto alejado 5 cm del espejo en el ejemplo 34.2 y dibujar el diagrama de rayos correspondiente. (*Respuestas*: $s' = -2{,}5$ cm, $m = +0{,}5$, imagen derecha, virtual y de tamaño más reducido.)

34.2 ■ Lentes

■ Imágenes formadas por refracción

La formación de una imagen por refracción en una superficie esférica que separa dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 se ilustra en la figura 34.20. En esta figura n_2 es mayor que n_1, de modo que las ondas se mueven más lentamente en el segundo medio. De nuevo, sólo los rayos paraxiales convergen en un punto. Aplicando la ley de Snell de la refracción puede deducirse una ecuación que relaciona la distancia imagen a la distancia objeto, el radio de curvatura y los índices de refracción, si se utilizan las aproximaciones de los ángulos pequeños. Se indican las relaciones geométricas en la figura 34.21. El resultado es

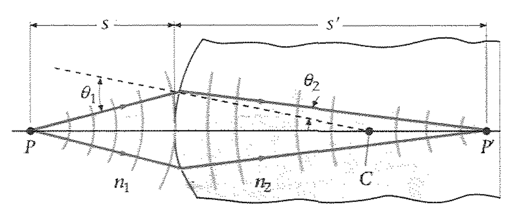


Figura 34.20 Imagen formada por refracción en una superficie esférica que separa dos medios diferentes. En esta figura las ondas se mueven más lentamente en el segundo medio.

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad (34.5)$$

Refracción en una superficie única

En la refracción, las imágenes reales se obtienen detrás de la superficie, que recibe el nombre de lado de transmisión, mientras que las imágenes virtuales se presentan en el lado de incidencia delante de la superficie. El convenio de signos que utilizamos para la refracción es semejante al empleado en la reflexión:

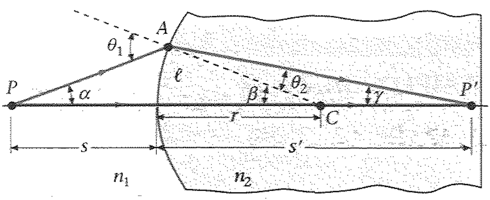


Figura 34.21 Construcción geométrica para relacionar la posición de la imagen con la posición del objeto en la refracción producida por una superficie esférica simple. Los ángulos θ_1 y θ_2 están relacionados por la ley de Snell, n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2. Utilizando la aproximación de ángulos pequeños, sen $\theta \approx \theta$, se tiene $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$. Del triángulo ACP' resulta $\beta = \theta_2 + \gamma = (n_1/n_2)\theta_1 + \gamma$. Podemos obtener otra relación para θ_1 a partir del triángulo PAC: $\theta_1 = \alpha + \beta$. Eliminando θ_1 entre estas dos ecuaciones $n_1\alpha + n_1\beta + n_2\gamma = n_2\beta$. Simplificando: $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$. Utilizando las aproximaciones de ángulo pequeño $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$ y $\gamma \approx \ell/s'$ se obtiene la ecuación 34.5

s + (objeto real) para los objetos delante de la superficie (lado de incidencia)
– (objeto virtual) para los objetos detrás de la superficie (lado de transmisión)

s' + (imagen real) para las imágenes detrás de la superficie (lado de transmisión)
– (imagen virtual) para las imágenes delante de la superficie (lado de incidencia)

r, f + si el centro de curvatura está en el lado de transmisión
– si el centro de curvatura está en el lado de incidencia

Convenio de signos para la refracción

Si comparamos este convenio de signos con el de la reflexión, vemos que s' es positivo y la imagen es real cuando la imagen está en el lado de la superficie recorrida por el rayo reflejado o refractado. En el caso de la reflexión este lado está delante del espejo, mientras que para la refracción, está detrás de la superficie refractante. Análogamente, r y f son positivos cuando el centro de curvatura está en el lado recorrido por la luz reflejada o refractada.

■ EJEMPLO 34.3 ¡Inténtelo!

Deducir una expresión del aumento $m = y'/y$ de una imagen formada por una superficie refractora.

Esquema del problema El aumento es la relación de y' a y. Estas alturas están relacionadas con las tangentes de los ángulos θ_1 y θ_2 como indica la figura 34.22. Los ángulos están relacionados por la ley de Snell. Con rayos paraxiales puede hacerse la aproximación tg $\theta \approx$ sen $\theta \approx \theta$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Escribir tg θ_1 y tg θ_2 en función de las alturas y, $-y'$, y las distancias objeto e imagen, s y s'. (Como y' es negativa, utilizar y', de modo que tg θ_2 es positiva).	$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{y}{s}; \quad \text{tg}\,\theta_2 = \frac{-y'}{s'}$
2. Aplicar la aproximación de ángulo pequeño, tg $\theta \approx \theta$ a las expresiones de la etapa 1.	$\theta_1 = \frac{y}{s} \quad \theta_2 = \frac{-y'}{s'}$
3. Expresar la ley de Snell que relaciona los ángulos θ_1 y θ_2 mediante la aproximación de ángulo pequeño, sen $\theta \approx \theta$.	$n_1\theta_1 = n_2\theta_2$
4. Sustituir las expresiones de θ_1 y θ_2 deducidas en la etapa 2.	$n_1\left(\frac{y}{s}\right) = n_2\left(\frac{-y'}{s'}\right)$
5. Despejar el aumento $m = y'/y$	$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}$

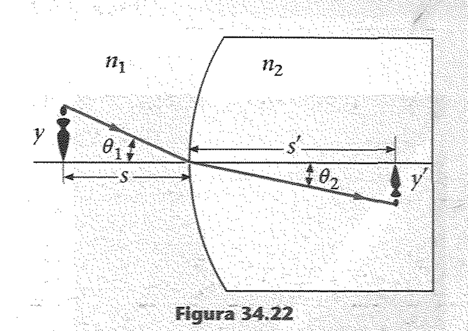


Figura 34.22

Como vemos en el ejemplo 34.3, el aumento debido a la refracción en una superficie esférica es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \tag{34.6}$$



EJEMPLO 34.4

Dentro de una pecera esférica de radio 15 cm llena de agua con índice de refracción 1,33, se encuentra un pez. El pez mira a través de la pecera y ve un gato sentado sobre la mesa con su nariz a 10 cm de la pecera (figura 34.23). (a) ¿En dónde está la imagen de la nariz del gato y (b) ¿cuál es su amplificación? Despreciar la influencia de la delgada pared de vidrio de la pecera.

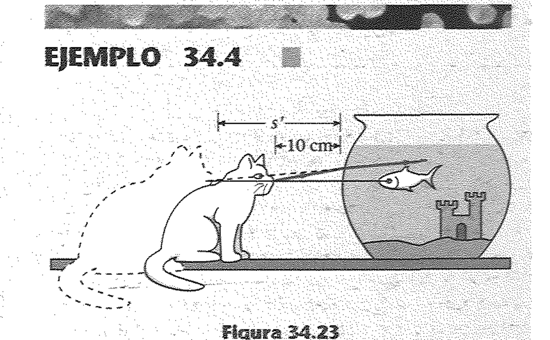


Figura 34.23

Esquema del problema Determinaremos la distancia imagen s' mediante la ecuación 34.5 y el aumento mediante la ecuación 34.6. Como la luz se propaga desde la nariz del gato a los ojos del pez, resulta que el aire es el lado incidente y el agua, el lado transmisor. Con estas identificaciones, tenemos $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}33$, $s = +10$ cm (objeto real), y $r = +\,15$ cm (centro de curvatura del lado de transmisión).

(a) 1. Sustituir los valores numéricos en la ecuación 34.5 y obtener una relación que permita determinar la distancia imagen s':

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$$\frac{1}{10\text{ cm}} + \frac{1{,}33}{s'} = \frac{1{,}33 - 1}{15\text{ cm}}$$

$$\frac{1{,}33}{s'} = \frac{0{,}33}{15\text{ cm}} - \frac{1}{10\text{ cm}}$$

2. Despejar s':

$$s' = -17{,}1\text{ cm}$$

(b) Sustituir los valores numéricos en la ecuación 34.6 para determinar el aumento m:

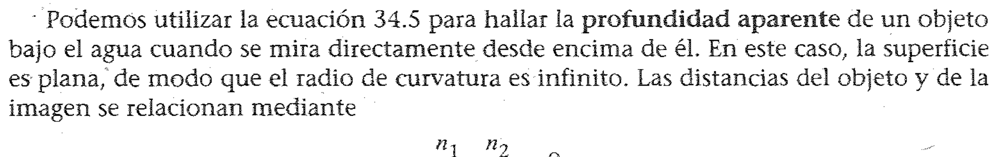
$$m = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = \frac{(1)(-17{,}1\text{ cm})}{(1{,}33)(10\text{ cm})} = 1{,}29$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Observaciones Como s' es negativa, la imagen es virtual; es decir, la imagen se encuentra en el lado incidente de la pecera, como se muestra en la figura 34.23. El gato parece estar algo más lejos ($|s'| > s$), pero mayor ($|m| > 1$). El hecho de que m sea positivo, indica que la imagen es derecha.

Ejercicio Si el pez se encuentra a 7,5 cm de la superficie de la pecera, determinar (a) la localización del pez y (b) su aumento, visto por el gato. (*Respuestas*: $n_1 = 1{,}33$, $n_2 = 1$, $s = 7{,}5$ cm, $r = -15$ cm; por tanto, (a) $s' = -6{,}44$ cm, y (b) $m = 1{,}14$. El pez parece ligeramente más próximo y mayor, visto por el gato.)



Debido a la refracción, la profundidad aparente de la porción sumergida de la paja es menor que la profundidad real. En consecuencia, la paja parece estar doblada. También se ve una imagen reflejada de la paja.

Podemos utilizar la ecuación 34.5 para hallar la **profundidad aparente** de un objeto bajo el agua cuando se mira directamente desde encima de él. En este caso, la superficie es plana, de modo que el radio de curvatura es infinito. Las distancias del objeto y de la imagen se relacionan mediante

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = 0$$

en donde n_1 es el índice de refracción del primer medio (agua) y n_2 es el del segundo medio (aire). Por tanto, la profundidad aparente es

$$s' = -\frac{n_2}{n_1}s \qquad \textbf{(34.7)}$$

El signo negativo indica que la imagen es virtual y en el mismo lado de la superficie refractora que el objeto, como se muestra con el diagrama de rayos de la figura 34.24. La amplificación es

$$m = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = +1$$

Como $n_2 = 1$ en el caso del aire, vemos que según la ecuación 34.7 la profundidad aparente es igual a la profundidad real dividida por el índice de refracción del agua.

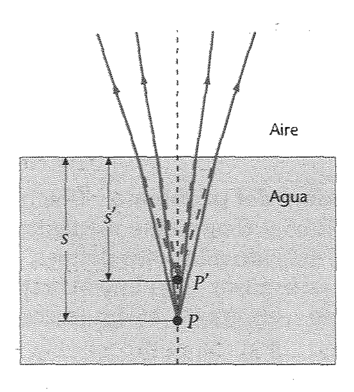


Figura 34.24 Diagrama de rayos correspondiente a la imagen de un objeto que se encuentra dentro del agua, visto directamente desde arriba. La profundidad de la imagen es menor que la del objeto.



■ EJEMPLO 34.5

Hallar la profundidad aparente de un pez que se encuentra quieto a 1 m por debajo de la superficie del agua que tiene un índice de refracción de $n = 4/3$.

Esquema del problema Como la luz se origina en el agua, utilizar $n_1 = \frac{4}{3}$ y $n_2 = 1$.

Calcular s' mediante la ecuación 34.7 y los valores dados para n_1, n_2, y s:

$$s' = \frac{1}{4/3}(1 \text{ m}) = \frac{3}{4}(1 \text{ m}) = 0{,}75 \text{ m}$$

Observaciones La profundidad aparente es tres cuartos de la real, de modo que el pez parece encontrarse a 75 cm por debajo de la superficie. Obsérvese que este resultado es válido únicamente cuando el objeto se observa directamente por encima de él, de modo que los rayos sean paraxiales.

Lentes delgadas

La aplicación más importante de la ecuación 34.5 para la refracción en una superficie simple consiste en hallar la posición de la imagen formada por una lente. Para ello hay que considerar la refracción de cada superficie por separado con objeto de deducir una ecuación que relacione la distancia imagen con la distancia objeto, el radio de curvatura de cada superficie de la lente y el índice de refracción de la misma.

Consideraremos una lente muy delgada de índice de refracción n rodeada de aire. Sean r_1 y r_2 los radios de curvatura de cada una de las superficies de la lente. Si un objeto está a una distancia s de la primera superficie (y, por tanto, de la lente), puede encontrarse la distancia s'_1 de la imagen debida a la refracción en la primera superficie utilizando la ecuación 34.5:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{r_1} \qquad \textbf{(34.8)}$$

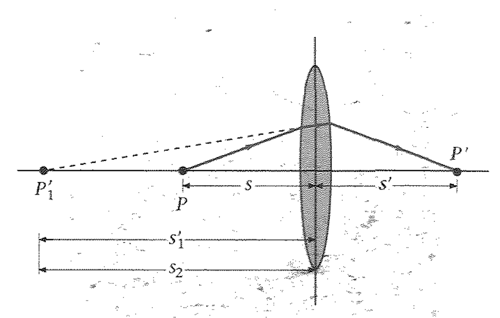


Figura 34.25 La refracción se produce en las dos superficies de la lente. En la figura, la refracción en la primera superficie origina una imagen virtual en P_1'. Como las distancias imagen son negativas cuando la imagen está en el lado de incidencia de la superficie, mientras que las distancias objeto son positivas cuando los objetos están en dicho lado, $s_2 = -s_1'$ es la distancia que hay que considerar para el objeto correspondiente a la segunda superficie de la lente.

Esta imagen no llega a formarse porque la luz se refracta de nuevo en la segunda superficie. En la figura 34.25 se muestra el caso en que la distancia imagen s'_1 para la primera superficie es negativa, indicando que sería una imagen virtual a la izquierda de la superficie. Los rayos dentro del vidrio, refractados por la primera superficie, divergen como si procediesen del punto imagen P'_1. Éstos inciden sobre la segunda superficie formando los mismos ángulos que si se encontrase un objeto en este punto imagen. Por consiguiente, la imagen dada por la primera superficie se convierte en objeto para la segunda superficie. Como la lente es de grosor despreciable, la distancia objeto es de valor igual a s'_1, pero como las distancias objeto delante de la superficie son positivas, mientras que las distancias imagen son negativas allí, la distancia objeto para la segunda superficie es $s_2 = -s'_1$.[1] A continuación escribimos la ecuación 34.5 para la segunda superficie con $n_1 = n$, $n_2 = 1$, y $s = -s'_1$. La distancia imagen para la segunda superficie es la distancia imagen final s' para la lente:

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{r_2} \qquad \textbf{(34.9)}$$

Podemos eliminar la distancia imagen de la primera superficie s'_1 sumando las ecuaciones 34.8 y 34.9. Así se obtiene

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \textbf{(34.10)}$$

La ecuación 34.10 da la distancia imagen s' en función de la distancia objeto s y de las propiedades de la lente delgada (r_1, r_2 y su índice de refracción n). Como en el caso de los espejos, la distancia focal de una lente delgada se define como la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita. Haciendo s igual a infinito y escribiendo f en lugar de la distancia imagen s', se tiene

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \textbf{(34.11)}$$

Fórmula del constructor de lentes

[1] Si s'_1 fuese positivo, los rayos convergirían al incidir sobre la segunda superficie. El objeto para la segunda superficie estaría entonces a la derecha de la superficie y sería, pues, un objeto virtual. De nuevo, $s_2 = -s'_1$.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

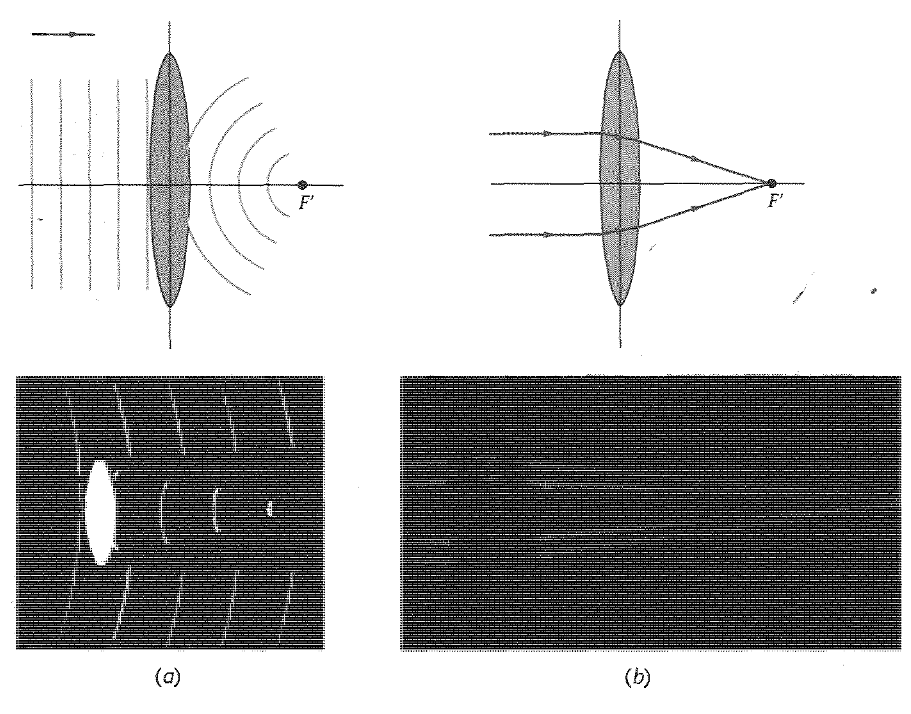


Figura 34.26 (*a*) *Arriba*: Frentes de onda correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente convergente. La parte central del frente de onda se retrasa más dentro de la lente que la parte exterior, dando como resultado una onda esférica que converge en el punto focal *F' Abajo*: Frentes de onda que pasan a través de una lente. Para conseguir verlos se ha utilizado una técnica fotográfica denominada registro de la luz en vuelo que utiliza un láser de pulsos para hacer un holograma de los frentes de onda de la luz. (*b*) *Arriba*: Rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente convergente. Los rayos se desvían en cada superficie y convergen en el punto focal. *Abajo*: Fotografía de los rayos enfocados por una lente convergente

La ecuación 34.11 se denomina **ecuación del constructor de lentes**; nos da la distancia focal de una lente delgada en función de sus propiedades. Sustituyendo el segundo miembro de la ecuación 34.10 por $1/f$ se tiene

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \tag{34.12}$$

Ecuación de la lente delgada

que se denomina **ecuación de la lente delgada**. Obsérvese que es la misma que la ecuación del espejo (ecuación 34.3). Recuérdese, sin embargo, que el convenio de signos para la refracción es un poco diferente del definido para la reflexión. En el caso de las lentes, la distancia imagen s' es positiva cuando la imagen está en el lado de transmisión de la lente, es decir, cuando está en el lado opuesto de aquél por donde incide la luz. El convenio de signos para r en la ecuación 34.11 es el mismo que el de la refracción en una sola superficie. El radio es positivo si el centro de curvatura está en el lado de transmisión de la lente, y negativo si se encuentra en la parte por donde incide la luz.

En la figura 34.26*a* se muestran frentes de onda planos que inciden sobre una lente biconvexa. Primero incide sobre la lente la parte central del frente de ondas. Como la velocidad de la onda en la lente es menor que en aire (suponiendo $n > 1$), la parte central del frente de onda se retrasa respecto a las partes más externas, dando como resultado una onda esférica que converge en el punto focal F'. Los rayos correspondientes a este caso se muestran en la figura 34.26*b*. Dicha lente se denomina **lente convergente**. Como su distancia focal calculada con la ecuación 34.11 es positiva, también se le llama **lente positiva**. Toda lente que es más gruesa en el medio que en los bordes es una lente convergente (con tal de que el índice de refracción de la lente sea mayor que el del medio que la rodea). La figura 34.27 muestra los frentes de onda y los rayos en el caso de ondas planas incidentes sobre una lente bicóncava. En este caso, las partes exteriores de los frentes de onda se retrasan respecto a las partes centrales, dando como resultado a la salida, ondas esféricas que divergen de un punto focal que se encuentra en el lado por el que inciden las ondas. La distancia focal de esta lente es negativa. Toda lente (con índice de refracción mayor que el del medio que la rodea) que es más delgada en la parte central que en los bordes es una **lente divergente**, o **lente negativa**.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

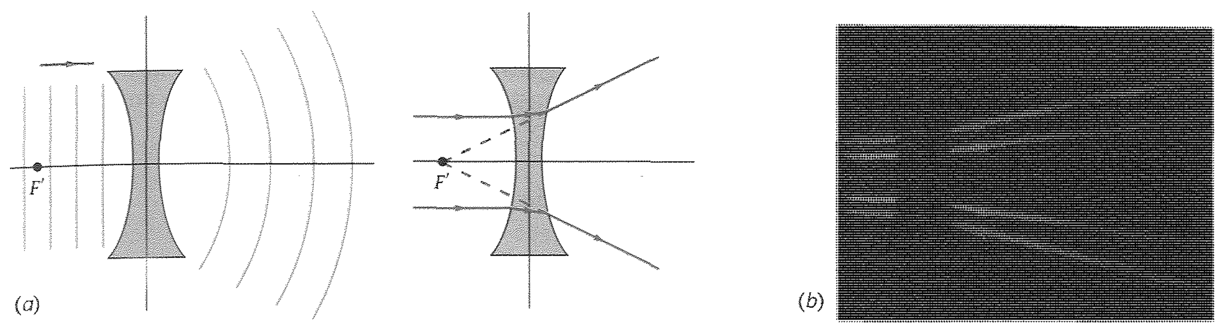


Figura 34.27 (*a*) Frentes de onda correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente divergente. En este caso las partes exteriores de los frentes de onda se retardan más que la parte central, dando como resultado una onda esférica que diverge cuando progresa como si procediese del punto focal F' delante de la lente. (*b*) *Izquierda*: Rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre la misma lente divergente. Los rayos se desvían hacia el exterior y divergen como si procediesen del punto focal F'. *Derecha*: Fotografía de los rayos que pasan a través de una lente divergente.

EJEMPLO 34.6

Una lente biconvexa de vidrio con un índice de refracción n = 1,5 tiene sus radios de curvatura de 10 cm y 15 cm, como se ve en la figura 34.28. Hallar su distancia focal.

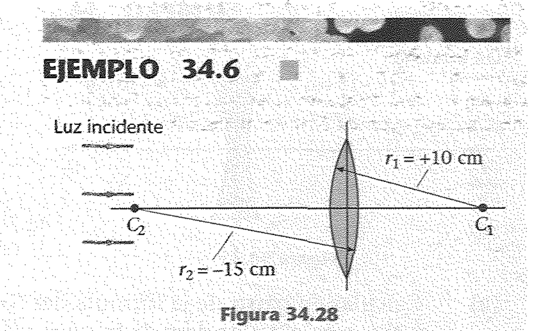


Figura 34.28

Esquema del problema Mediante la fórmula del constructor de lentes podemos determinar la distancia focal (ecuación 34.11). En este caso, la luz incide sobre la superficie de menor radio de curvatura. El centro de curvatura de esta superficie, C_1, corresponde al lado de transmisión de la lente; por tanto, $r_1 = +10$ cm. Para la segunda superficie, el centro de curvatura, C_2, se encuentra sobre el lado incidente; por tanto, $r_2 = -15$ cm.

Sustituyendo numéricamente los datos conocidos en la ecuación 34.11 se obtiene la distancia focal f:

$$\frac{1}{f} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{10\text{ cm}} - \frac{1}{-15\text{ cm}}\right) = 0{,}5\left(\frac{1}{6\text{ cm}}\right)$$

$$f = 12\text{ cm}$$

Observación Ambas superficies tienden a converger los rayos luminosos y contribuyen a dar una distancia focal positiva para la lente.

Ejercicio Una lente delgada biconvexa tiene un índice de refracción n = 1,6 y radios de curvatura del mismo valor. Si su distancia focal es 15 cm, ¿cuál es el valor del radio de curvatura de cada superficie? (*Respuesta*: 18 cm.)

Ejercicio Demostrar que si invertimos el sentido de la luz incidente sobre la lente de modo que incida sobre la superficie con mayor radio de curvatura, se obtiene el mismo resultado para la distancia focal.

Si sobre la lente del ejemplo 34.6 inciden rayos paralelos de luz desde la izquierda, éstos se verán enfocados en un punto situado a 12 cm a la derecha de la lente, mientras que en caso de que incidieran procediendo de la derecha, se enfocarían a 12 cm de la izquierda de la lente. Ambos puntos son los puntos focales o focos de la lente. Utilizando la propiedad de la reversibilidad de los rayos luminosos, podemos ver que la luz que diverge desde un foco e incide sobre la lente, saldrá de ella como un haz de rayos paralelos, como se ve en la figura 34.29. En un problema sobre lentes en particular, en que se especifique el sentido de la luz incidente, el punto objeto para el cual la luz emerge como un haz de rayos paralelos se denomina **primer punto focal** F y el punto donde se enfocan los rayos incidentes paralelos se llama **segundo punto focal** F'. En el caso de una lente positiva, el primer punto focal está en el lado de incidencia y el segundo, en el lado de transmisión. Si un haz de rayos paralelos incide sobre la lente for-

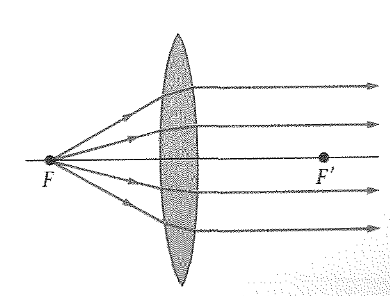


Figura 34.29 Los rayos de luz que divergen desde el punto focal de una lente positiva emergen paralelamente al eje.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

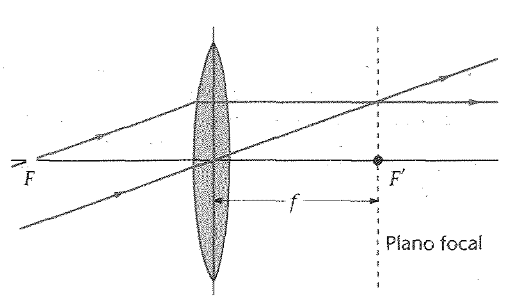


Figura 34.30 Los rayos paralelos que inciden sobre una lente, pero formando un ángulo con su eje, se enfocan en un punto del plano focal de la lente.

mando un pequeño ángulo con el eje, como se indica en la figura 34.30, se enfocará en un punto situado en el **plano focal** a una distancia f de la lente.

El valor inverso o recíproco de la distancia focal se denomina **potencia de la lente**. Cuando se expresa en metros una distancia focal, la potencia viene dada en recíprocos de metros denominados **dioptrías** (D):

$$P = \frac{1}{f} \text{ dioptrías} \qquad \textbf{(34.13)}$$

La potencia de una lente mide su capacidad para enfocar los rayos paralelos a una distancia corta de la misma. Cuanto más corta es la distancia focal, mayor es la potencia. Por ejemplo, una lente con una distancia focal de 25 cm = 0,25 m tiene una potencia de 4,0 dioptrías. Una lente de 10 cm = 0,10 m de distancia focal tiene 10 dioptrías de potencia. Como la distancia focal de una lente divergente es negativa, su potencia es también negativa.

EJEMPLO 34.7

Una lente bicóncava tiene un índice de refracción de 1,5 y los radios de curvatura miden 10 cm y 15 cm. Halar (a) su distancia focal y (b) su potencia.

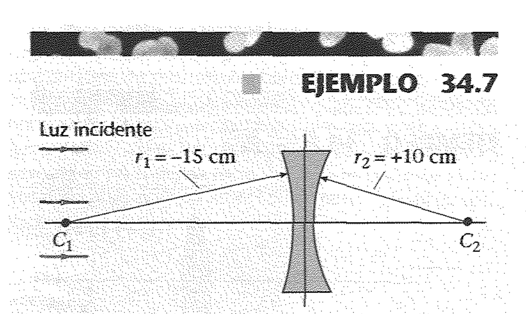


Figura 34.31

Esquema del problema En el caso de la orientación de la lente respecto a la luz incidente indicada en la figura 34.31 el radio de curvatura de la primera superficie es $r_1 = -15$ cm, y el de la segunda superficie $r_2 = +10$ cm.

(a) Calcular f a partir de la fórmula del constructor de lentes utilizando el valor de n dado y los valores de r_1 y r_2 para la orientación mostrada en la figura:

$$\frac{1}{f} = (1{,}5 - 1{,}0)\left(\frac{1}{-15\text{ cm}} - \frac{1}{+10\text{ cm}}\right)$$

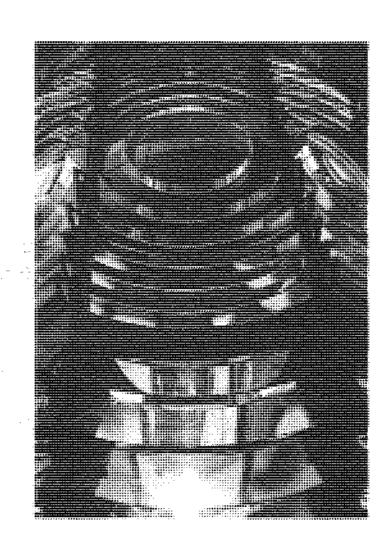
$$f = -12 \text{ cm}$$

(b) La potencia es el valor recíproco de la distancia focal expresada en metros:

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{-0{,}12\text{ m}} = -8{,}33 \text{ D}$$

Observación El resultado es el mismo, independientemente de cuál es la primera superficie de la lente sobre la que incide la luz.

En los experimentos de laboratorio con lentes es mucho más fácil medir la distancia focal que calcularla a partir de los radios de curvatura de las superficies.



El peso y volumen de una lente de gran diámetro puede reducirse construyéndola mediante segmentos anulares a diferentes ángulos, de modo que la luz procedente de un punto se ve refractada por los segmentos en un haz paralelo. Dicho sistema se denomina lente de Fresnel. En este proyector se han utilizado diversas lentes de Fresnel con objeto de producir haces luminosos intensos a partir de una fuente situada en el punto focal de las lentes.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

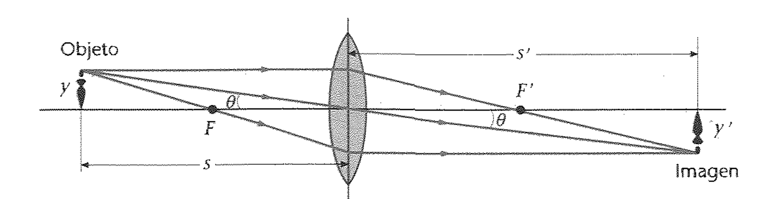


Figura 34.32 Diagrama de rayos para una lente delgada convergente. Para mayor sencillez se ha supuesto que toda la desviación de los rayos tiene lugar en el plano central. Los rayos que pasan por el centro no se desvían porque las caras de la lente son paralelas y están muy próximas.

Diagramas de rayos para las lentes

Como sucede con las imágenes formadas por los espejos, es conveniente situar las imágenes dadas por las lentes mediante métodos gráficos. La figura 34.32 ilustra este método en el caso de lentes convergentes. Para mayor sencillez, consideremos los rayos contenidos en el plano que pasa por el centro de la lente. Si la lente es positiva los tres rayos principales son

1. El **rayo paralelo**, que se dibuja paralelo al eje. Este rayo se desvía de modo que pasa por el segundo punto focal de la lente.
2. El **rayo central**, que pasa por el centro (el vértice) de la lente. Este rayo no sufre desviación. (Las caras de la lente son paralelas en este punto, de modo que el rayo emerge en la misma dirección pero ligeramente desplazado. Como la lente es delgada, dicho desplazamiento es despreciable.)
3. El **rayo focal**, que pasa por el primer punto focal. Este rayo emerge paralelo al eje.

Rayos principales en el caso de una lente positiva

Estos tres rayos convergen en el punto imagen, como se ve en la figura. En este caso, la imagen es real e invertida. En la figura 34.32 tenemos tg $\theta = y/s = -y'/s'$. La amplificación lateral vale, pues,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad \textbf{(34.14)}$$

Esta expresión es la misma que la obtenida para los espejos. Una vez más, una amplificación negativa indica que la imagen está invertida.

Los rayos principales para una lente negativa o divergente son

1. El **rayo paralelo**, que se dibuja paralelo al eje. Este rayo diverge de la lente como si procediese del segundo punto focal.
2. El **rayo central**, que pasa por el centro (el vértice) de la lente. este rayo no se desvía.
3. El **rayo focal**, que se dirige hacia el primer punto focal. Este rayo emerge paralelo al eje.

Rayos principales en el caso de una lente negativa

En la figura 34.33 se muestra el diagrama de rayos para una lente divergente.

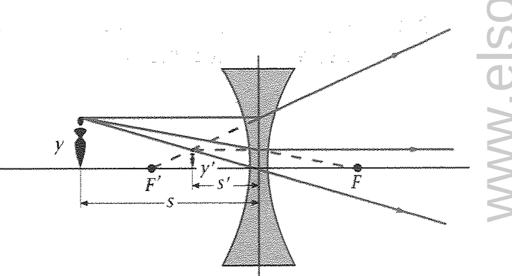


Figura 34.33 Diagrama de rayos para una lente divergente. El rayo paralelo se desvía alejándose del eje como si procediese del segundo punto focal F'. El rayo dirigido hacia el primer punto focal F emerge paralelo al eje.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 34.8

Un objeto de 1,2 cm de alto se coloca a 4 cm de la lente biconvexa del ejemplo 34.6. Localizar la imagen gráfica y algebraicamente, establecer si es real o virtual y determinar su altura.

1. Dibujar el rayo paralelo. Este rayo sale del objeto paralelo al eje y es desviado por la lente pasando por el segundo punto focal F' (figura 34.34):

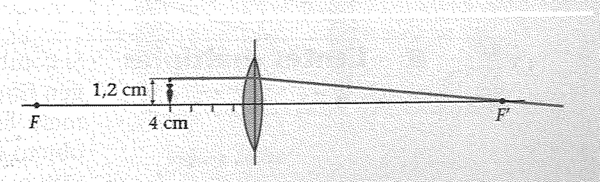


Figura 34.34

 www.elsolucionario.net

2. Dibujar el rayo central que pasa sin desviarse por el centro de la lente. Como los dos rayos son divergentes en el lado de transmisión, para hallar la imagen, trazamos sus prolongaciones en el lado incidente (figura 34.35):

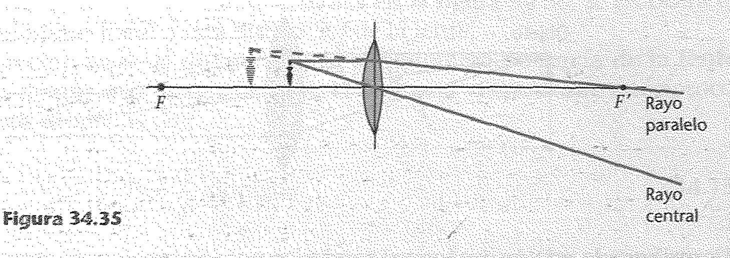


Figura 34.35

3. Como comprobación, dibujaremos también el rayo focal. Este rayo sale del objeto según una línea que pasa por el primer punto focal y emerge paralelo al eje. Obsérvese que la imagen es virtual, derecha y mayor que el objeto (figura 34.36):

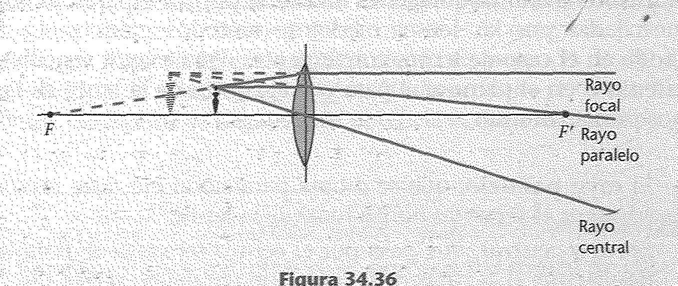


Figura 34.36

4. Comprobemos ahora los resultados del diagrama de rayos por el método algebraico. En primer lugar determinamos la distancia imagen mediante la ecuación 34.12:

$$\frac{1}{4\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{12\text{ cm}}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{12\text{ cm}} - \frac{1}{4\text{ cm}} = -\frac{1}{6\text{ cm}}$$

$$s' = -6\text{ cm}$$

5. La altura de la imagen se determina a partir de la altura del objeto y el aumento:

$$h' = mh$$

6. El aumento m viene dado por la ecuación 34.14:

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = +1{,}5$$

7. Con este resultado se obtiene la altura de la imagen, h':

$$h' = mh = (1{,}5)(1{,}2\text{ cm}) = 1{,}8\text{ cm}$$

Observaciones Nótese el acuerdo entre los resultados geométrico y algébrico. Algebraicamente se ha determinado que la imagen se encuentra a 6 cm de la lente en el lado de incidencia (pues $s' < 0$); es decir, la imagen está 2 cm a la izquierda del objeto. Como $m > 0$, resulta que la imagen es derecha y como $m > 1$, resulta de mayor tamaño. Es una buena práctica resolver los problemas de lentes por los dos métodos indicados y comparar los resultados.

Ejercicio Se coloca un objeto a 15 cm de una lente biconvexa de distancia focal 10 cm. Hallar la distancia imagen y la amplificación. Dibujar un diagrama de rayos. ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? (*Respuestas*: $s' = 30$ cm, $m = -2$, real, invertida.)

Ejercicio Repetir el ejercicio anterior para un objeto situado a 5 cm de una lente con una distancia focal de 10 cm. (*Respuestas*: $s' = -10$ cm, $m = 2$, virtual, derecha.)

www.elsolucionario.net

Lentes múltiples

Si combinamos en un sistema óptico dos o más lentes delgadas, podemos hallar la imagen final producida por el sistema hallando la distancia imagen correspondiente a la primera lente y utilizándola junto con la distancia entre lentes para hallar la distancia objeto correspondiente a la segunda lente. Es decir, se considera cada imagen, sea real o virtual y se forme o no, como el objeto para la siguiente lente.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 34.9

A la derecha de la lente del ejemplo 34.8 y a 12 cm de ella se coloca una segunda lente de distancia focal +6 cm. Localizar la imagen final.

Esquema del problema Los rayos utilizados para localizar la imagen de la primera lente no tienen por qué ser necesariamente los rayos principales correspondientes a la segunda lente. Si no lo fuesen, bastaría simplemente dibujar rayos adicionales desde la primera imagen que fuesen los rayos principales para la segunda lente, como por ejemplo un rayo desde la imagen paralelo al eje, y otro que pase por el primer punto focal de la segunda lente, o uno que pase por el vértice de esta última (figura 34.37). En este ejemplo, dos de los rayos principales para la primera lente lo son también para la segunda. El rayo paralelo para la primera lente resulta ser el rayo central para la segunda. Además el rayo focal para la primera lente emerge paralelo al eje y, por tanto, se refracta pasando por el punto focal de la segunda lente. (En la figura hemos prolongado el rayo central para la primera lente de modo que pase por el punto de la imagen que se ha encontrado mediante los otros dos rayos.)

Algebraicamente, utilizamos s_2 = 18 cm, pues la primera imagen está 6 cm a la izquierda de la primera lente y por tanto, 18 cm a la izquierda de la segunda lente.

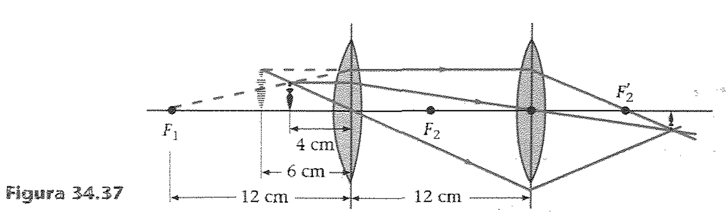


Figura 34.37

Utilizar s_2 = 18 cm y f = 6 cm para calcular s_2':

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{18\text{ cm}} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{6\text{ cm}}$$

$$s'_2 = 9\text{ cm}$$



EJEMPLO 34.10 **¡Inténtelo!**

Dos lentes con la misma distancia focal de 10 cm distan 15 cm entre sí. Hallar la imagen final de un objeto a 15 cm de una de las lentes.

Esquema del problema Utilizar un diagrama de rayos para determinar la localización aproximada de la imagen formada por la lente 1. Cuando estos rayos chocan con la lente 2 son de nuevo refractados, dando lugar a la imagen final. Los resultados precisos se obtienen algebraicamente utilizando la ecuación de la lente delgada para ambas lentes 1 y 2.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

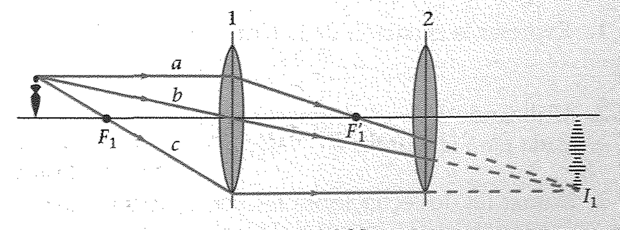
Etapas	*Respuestas*
1. Dibujar los rayos paralelo (a), central (b) y focal (c) para la lente 1 (figura 34.38). Si la lente 1 no alterase estos rayos, ellos formarían una imagen en I_1.	

Figura 34.38

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

2. Obsérvese que el rayo (*c*) choca con la lente 2 paralelamente a su eje y, por tanto, se refracta pasando por el punto focal segundo de la lente 2. Para determinar la imagen final incluir un rayo adicional (*d*) que pasa a través del primer foco de la lente 2. Este rayo se encontraría con los otros rayos en I_1, pero la lente 2 lo refracta paralelamente al eje. La intersección de los rayos (*c*) y (*d*) nos ofrece la posición de la imagen (figura 34.39).

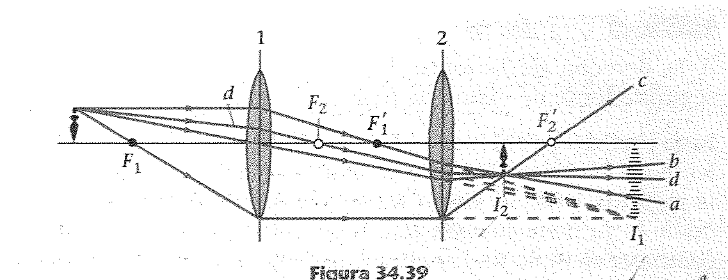


Figura 34.39

3. Para resolver algebraicamente, utilizar la ecuación de la lente delgada para determinar la distancia imagen s_1' producida por la lente 1. $s'_1 = 30$ cm

4. Para la lente 2, la imagen I_1 está a 15 cm de la lente en el lado de transmisión. Por tanto, $s_2 = -15$ cm. Utilizar este valor para determinar la distancia imagen final s'_2. $s'_2 = 6$ cm

Observación Como muestra el diagrama de rayos, la imagen final es real, invertida y ligeramente reducida.

Cuando dos lentes delgadas de distancias focales f_1 y f_2 se sitúan en contacto, la distancia focal equivalente de la combinación f viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{34.15}$$

La potencia de las dos lentes en contacto es

$$P = P_1 + P_2 \tag{34.16}$$



EJEMPLO 34.11 **¡Inténtelo!**

Se colocan en contacto dos lentes. Deducir la relación

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Esquema del problema Aplicar la ecuación de la lente delgada a cada una de las lentes, teniendo en cuenta que la distancia entre las lentes es cero y, por tanto, la distancia objeto para la segunda lente es el valor negativo de la distancia imagen para la primera lente.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Expresar la ecuación de la lente delgada para la lente 1.	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1}$
2. Utilizando $s_2 = -s'_1$, expresar la ecuación de la lente delgada para la lente 2.	$\frac{1}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_2}$
3. Sumar las dos ecuaciones resultantes para eliminar s'_1.	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Aberraciones ■ 34.3

OPCIONAL

Cuando los rayos procedentes de un punto objeto no se enfocan todos en un solo punto imagen, la imagen borrosa resultante de la imagen se denomina **aberración**. La figura 34.40 muestra los rayos, que procedentes de una fuente puntual sobre el eje, atraviesan una lente delgada con superficies esféricas. Los rayos que inciden sobre la lente lejos del eje se desvían mucho más que los próximos al mismo, con el resultado de que no todos los rayos se enfocan en un solo punto. En lugar de ello, la imagen tiene el aspecto de un disco circular. El **círculo de mínima confusión** se encuentra en el punto C, en donde el diámetro es mínimo. Este tipo de aberración se denomina **aberración esférica**. Es el mismo tipo de aberración que el considerado en la sección 34.2 al estudiar los espejos. Cuando los objetos se encuentran fuera del eje se producen aberraciones análogas pero más complicadas, denominadas *coma* (por la imagen en forma de cometa), y *astigmatismo*. La aberración en la forma de la imagen de un objeto extenso debido al hecho de que la amplificación depende de la distancia de los puntos objeto al eje, se llama **distorsión**. No estudiaremos más estas aberraciones excepto para señalar que no se deben a ningún defecto de la lente o del espejo, sino que son simples resultados de la aplicación de las leyes de la refracción y de la reflexión a las superficies esféricas. No resultan patentes en nuestras sencillas ecuaciones porque hemos utilizado las aproximaciones de los ángulos pequeños en la deducción de las mismas.

Figura 34.40 Aberración esférica en una lente. Los rayos que proceden de un punto objeto situado en el eje no se enfocan en un solo punto. Puede reducirse la aberración esférica bloqueando las partes exteriores de la lente, pero así se reduce también la cantidad de luz que llega a la imagen.

Algunas aberraciones pueden eliminarse o corregirse parcialmente con el empleo de superficies no esféricas para las lentes y espejos, pero las superficies no esféricas son normalmente mucho más difíciles y costosas de fabricar que las esféricas. Un ejemplo de superficie reflectora no esférica es el espejo parabólico que puede verse en la figura 34.41. Los rayos que son paralelos al eje de una superficie parabólica se reflejan y enfocan en un punto común sin que importe lo alejados que se encuentren del eje. Se utilizan comúnmente las superficies reflectoras parabólicas en los grandes telescopios astronómicos, que necesitan una gran superficie reflectora para recoger el máximo de luz y conseguir así que la imagen sea lo más intensa posible (los telescopios reflectores se describen en la sección siguiente, 34.4, opcional). Los detectores para enfocar microondas procedentes de satélites de comunicación se construyen con superficies parabólicas. También se utilizan estas superficies en los faros o proyectores con el fin de producir un haz luminoso paralelo a partir de un pequeño foco situado en el punto focal de la superficie.

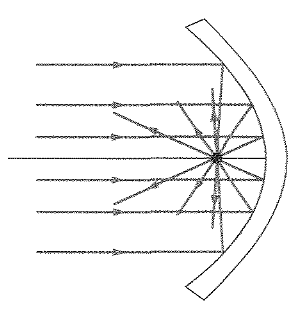


Figura 34.41 Un espejo parabólico enfoca todos los rayos paralelos al eje en un solo punto sin aberración esférica.

Una importante aberración que aparece en las lentes pero no en los espejos es la **aberración cromática**, que se debe a las variaciones del índice de refracción con la longitud de onda. A partir de la ecuación 34.11, podemos ver que la distancia focal de una lente depende de su índice de refracción y, por tanto, es diferente para cada distinta longitud de onda. Como n es ligeramente mayor para la luz azul que para la luz roja, la distancia focal para la luz azul será más corta que para la luz roja. Puesto que la aberración cromática no aparece en los espejos, muchos de los grandes telescopios utilizan espejos en lugar de una gran lente (objetivo) captadora de luz.

La aberración cromática, y otras aberraciones, pueden corregirse parcialmente utilizando combinaciones de lentes en lugar de una sola lente. Por ejemplo, una lente positiva, y otra negativa de mayor distancia focal, pueden utilizarse juntas para producir un sistema de lentes convergente que tenga una aberración cromática mucho menor que una lente simple de la misma distancia focal. La lente de una buena cámara fotográfica contiene normalmente seis elementos para corregir las diversas aberraciones que se encuentran presentes.

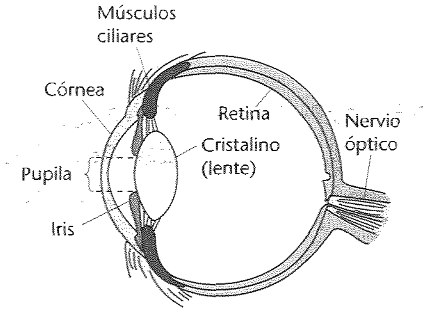


Figura 34.42 Ojo humano. La cantidad de luz que entra en el ojo se controla mediante el iris, que regula el tamaño de la pupila. El espesor del cristalino queda controlado por los músculos ciliares. El sistema córnea-cristalino enfoca la imagen sobre la retina, que contiene unos 125 millones de receptores llamados bastones y conos y aproximadamente 1 millón de fibras del nervio óptico.

Instrumentos ópticos ■ 34.4

El ojo ■

El sistema óptico de máxima importancia es el ojo, indicado en la figura 34.42. La luz entra en el ojo a través de una abertura variable, la *pupila*, y se enfoca mediante el *sistema lente-córnea* sobre la *retina*, una película de fibras nerviosas que cubre la superficie posterior del ojo. La retina contiene diminutas estructuras sensibles denominadas *bastones y conos*, que reciben la imagen y transmiten la información a lo largo del nervio

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

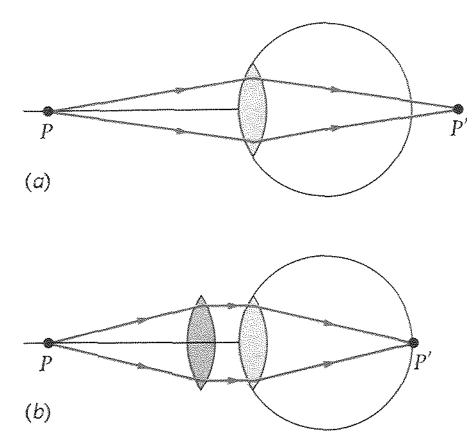


Figura 34.43 (*a*) Un ojo hipermétrope enfoca los rayos procedentes de un objeto *P* cercano en un punto *P'* detrás de la retina. (*b*) Una lente convergente corrige este defecto desplazando la imagen de forma que caiga sobre la retina. Estos diagramas y los siguientes se han dibujado como si todo el efecto de enfoque del ojo lo realizase el cristalino; de hecho, el sistema córnea-cristalino actúa más como una superficie esférica refractora que como una lente delgada.

óptico hasta el cerebro. La forma de la lente cristalina (llamada también *cristalino*) puede alterarse ligeramente mediante la acción de los *músculos ciliares*. Cuando el ojo se enfoca sobre un objeto alejado, el músculo se relaja y el sistema lente-córnea tiene su máxima distancia focal, aproximadamente 2,5 cm, que es la distancia de la córnea a la retina. Cuando el objeto se acerca hacia el ojo, se tensan los músculos ciliares aumentando la curvatura del cristalino ligeramente y disminuyendo de este modo su distancia focal, la imagen se enfoca de nuevo en la retina. Este proceso se denomina **acomodación**. Si el objeto está demasiado cercano al ojo, la lente no puede enfocar la luz del mismo en la retina y la imagen resulta borrosa. El punto más próximo para el cual la lente puede enfocar una imagen en la retina se denomina **punto próximo**. La distancia del ojo al punto próximo varía grandemente de una persona a otra y con la edad. A la edad de diez años, el punto próximo puede estar hasta 7 cm de distancia, mientras que a los 60 años puede alejarse a 200 cm debido a la pérdida de flexibilidad de la lente. El valor normalizado tomado como punto próximo es 25 cm.

Si el ojo es menos convergente de lo que debiera, dando como resultado que las imágenes quedan enfocadas detrás de la retina, se dice que la persona es hipermétrope. Una persona **hipermétrope** puede ver correctamente objetos lejanos, para lo que se requiere poca convergencia, pero tiene problemas a la hora de ver claramente objetos cercanos. La hipermetropía se corrige con una lente convergente (positiva), como puede verse en la figura 34.43.

Por el contrario, el ojo de una persona **miope** tiene excesiva convergencia y enfoca la luz procedente de objetos distantes delante de la retina. Una persona miope puede ver objetos cercanos, ya que sus rayos incidentes demasiado convergentes pueden enfocarse sobre la retina, pero no puede enfocar con nitidez los objetos lejanos. La miopía se corrige con una lente divergente (negativa), como puede verse en la figura 34.44.

Otro defecto común de la visión es el astigmatismo, que está originado porque la córnea no es perfectamente esférica, sino que tiene diferente curvatura en un plano que en otro. Esto da como resultado una imagen borrosa ya que un punto objeto da lugar a un corto segmento. El astigmatismo se corrige con lentes que combinan la forma cilíndrica con la forma esférica.

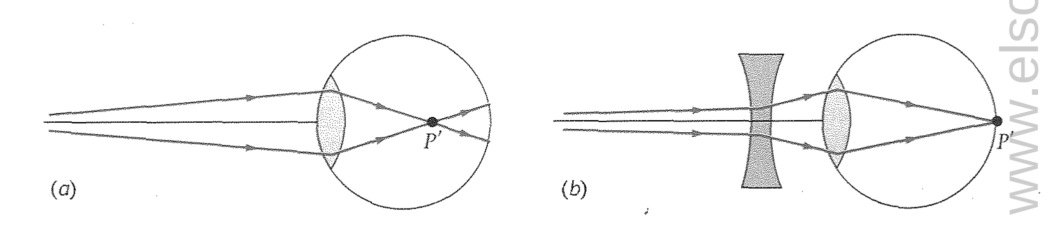


Figura 34.44 (*a*) Un ojo miope enfoca los rayos procedentes de un objeto lejano en un punto *P'* situado delante de la retina. (*b*) Una lente divergente corrige este defecto.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 34.12

¿En cuánto debe variar la distancia focal del sistema lente-córnea del ojo si el objeto se mueve desde el infinito hasta el punto próximo a 25 cm? Suponer que la distancia de la córnea a la retina es de 2,5 cm.

Esquema del problema Cuando el objeto está en el infinito, la distancia focal es 2,5 cm. Utilizaremos la ecuación de la lente delgada para calcular la distancia focal, cuando $s = 25$ cm y $s' = 2,5$ cm.

1. Utilizar la ecuación de la lente delgada para calcular f:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25\text{ cm}} + \frac{1}{2{,}5\text{ cm}} = \frac{1}{25\text{ cm}} + \frac{10}{25\text{ cm}} = \frac{11}{25\text{ cm}}$$

$$f = 2{,}27\text{ cm}$$

2. Restando 2,5 cm (distancia focal original) al valor de f hallado en la etapa 1, tendremos el cambio solicitado:

$$\Delta f = 2{,}27\text{ cm} - 2{,}5\text{ cm} = -0{,}23\text{ cm}$$

www.elsolucionario.net

Observaciones En función de la potencia del sistema córnea-lente, cuando la distancia es 2,5 cm = 0,025 m para los objetos distantes, la potencia vale $P = 1/f = 40$ dioptrías. Cuando la distancia focal es 2,27 cm, la potencia es de 44 dioptrías.

Ejercicio Hallar la variación de la distancia focal del ojo cuando un objeto originalmente a 4 m se acerca a 40 cm del ojo. (Suponer que la distancia de la córnea a la retina es de 23,5 cm.) (*Respuesta*: –0,13 cm.)

OPCIONAL

El tamaño aparente de un objeto queda determinado por el tamaño de la imagen sobre la retina. Cuanto mayor es esta imagen, mayor es el número de bastones y conos activados. En la figura 34.45 podemos ver que el tamaño de la imagen sobre la retina es mayor cuando el objeto está cerca y más pequeño si está alejado. Así, aunque el tamaño real del objeto no cambia, su tamaño aparente es mayor cuando se acerca al ojo. Una medida conveniente del tamaño de la imagen sobre la retina es el ángulo θ subtendido por el objeto en el ojo. En la figura 34.45 vemos que

$$\theta = \frac{y'}{2{,}5 \text{ cm}} \tag{34.17}$$

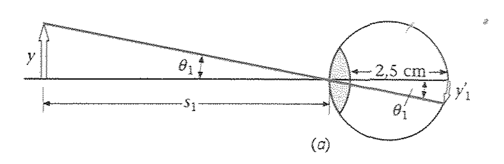
El ángulo θ está relacionado con el tamaño del objeto y y la distancia objeto. Para ángulos pequeños

$$\theta \approx \text{tg } \theta = \frac{y}{s} \tag{34.18}$$

Combinando las ecuaciones 34.17 y 34.18 resulta:

$$y' = (2{,}5 \text{ cm})\theta \approx (2{,}5 \text{ cm})\frac{y}{s} \tag{34.19}$$

Así pues, el tamaño de la imagen sobre la retina es proporcional al del objeto y es inversamente proporcional a la distancia entre el objeto y el ojo. Como el punto próximo es el más cercano al ojo para el cual se forma una imagen nítida en la retina, la distancia al punto próximo es la *distancia de mayor visión distinta* (sin confusión).



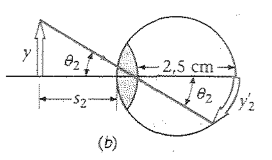


Figura 34.45 (*a*) Un objeto lejano de altura y parece pequeño debido a que su imagen sobre la retina es reducida. (*b*) Cuando el mismo objeto está más cerca, parece mayor porque su imagen en la retina es más grande. El ángulo subtendido es $\theta = y'/(2{,}5 \text{ cm})$.



EJEMPLO 34.13

Suponer que el punto próximo del ojo es 75 cm. ¿Qué potencia deberán tener unas gafas de lectura para acercar el punto próximo a 25 cm? Suponer que la lente de las gafas está en contacto con la lente del ojo.

Esquema del problema La figura 34.46 muestra un diagrama de un objeto a 25 cm de una lente convergente que produce una imagen virtual y derecha a $s' = -75$ cm.

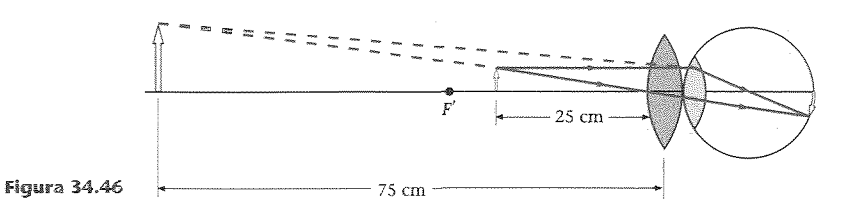


Figura 34.46

Utilizar la ecuación de la lente delgada con $s = 25$ cm y $s' = -75$ cm para calcular la potencia, $1/f$:

$$\frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{-75 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{75 \text{ cm}} = \frac{1}{0{,}375 \text{ m}} = 2{,}67 \text{ dioptrías}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

Observaciones Si el punto próximo es 75 cm, hay hipermetropía. Para leer un libro deberá sujetarse al menos a 75 cm del ojo de modo que la letra impresa quede enfocada en la retina. La imagen de la impresión sobre la retina es entonces muy pequeña. Una lente convergente, que es la que se emplea en las gafas para leer, permite que el libro se acerque al ojo de modo que la imagen de la letra impresa resulte mayor. En este ejemplo hemos supuesto que la lente estaba en contacto con el ojo. En las gafas para leer, un poco separadas del ojo, los resultados son ligeramente distintos.

Ejercicio Calcular la potencia del cristalino del ojo para el cual el punto próximo es 75 cm, y calcular la potencia combinada de las dos lentes en contacto. Comparar esta potencia con la de una lente para la cual $s' = 2,5$ cm cuando $s = 25$ cm. (*Respuestas*: $P_{ojo} = 41,33$ D; $P_C = 41,33$ D + 2,67 D = 44 D; $P = 44$ D.)

La lupa (o microscopio simple)

En el ejemplo 34.13 hemos visto que el tamaño aparente de un objeto puede aumentarse utilizando una lente convergente con la finalidad de conseguir que el objeto se acerque al ojo y, por tanto, aumente el tamaño de la imagen en la retina. Una lente convergente de este tipo recibe el nombre de lupa o microscopio simple. En la figura 34.37*a* se muestra un objeto pequeño de altura y en el punto próximo del ojo a una distancia x_{pp}. El ángulo subtendido θ_o viene dado aproximadamente por

$$\theta_o = \frac{y}{x_{pp}}$$

En la figura 34.47*b* se ha colocado delante del ojo una lente convergente de distancia focal *f*, inferior a x_{pp}, y el objeto se ha situado en el punto focal de la lente. Los rayos emergen paralelos de la lente, indicando que la imagen está delante de la misma a una distancia infinita. Los rayos paralelos son enfocados por el ojo relajado sobre la retina. Si la lente está en contacto con el ojo, el ángulo subtendido por el objeto es ahora aproximadamente

$$\theta = \frac{y}{f}$$

El cociente θ/θ_o se denomina *amplificación angular* o *poder amplificador M* de la lente:

$$M = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{x_{pp}}{f} \qquad \textbf{(34.20)}$$

Se utilizan lentes simples (llamadas *oculares*) en microscopios compuestos y en anteojos o telescopios para observar la imagen formada por otra lente o sistema de lentes. También, para corregir aberraciones, suelen utilizarse combinaciones de lentes con una distancia focal resultante positiva y corta, en lugar de emplear una sola lente, pero el principio es el mismo que el de una lupa.

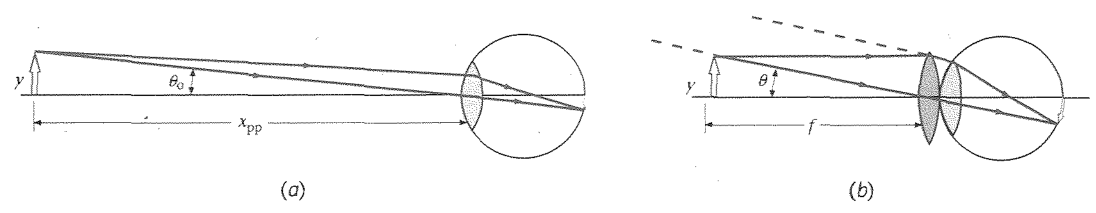


Figura 34.47 (*a*) Un objeto situado en el punto próximo subtiende un ángulo θ_o en el ojo. (*b*) Cuando el objeto está en el punto focal de la lente convergente, los rayos emergen de la lente paralelos entre sí y entran en el ojo como si procediesen de un objeto situado a una distancia muy grande. Así pues, la imagen es observada por el ojo relajado como procedente del infinito. Cuando *f* es menor que la distancia del punto próximo, la lente convergente permite que el objeto se acerque más al ojo, incrementando así el ángulo θ subtendido por el objeto y aumentando en consecuencia el tamaño de la imagen sobre la retina.

www.elsolucionario.net

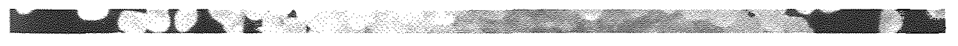
www.elsolucionario.net

(*a*) (*b*)

(*c*) (*d*)

(*a*) Ojo humano visto de perfil. (*b*) El cristalino o lente del ojo se mantiene en su lugar gracias a los músculos ciliares cuyas fibras se indican en la parte superior izquierda de la figura. Cuando las fibras se contraen, se reduce la tensión sobre el cristalino, y éste, que está constituido por un tejido elástico, tiende a curvarse más hacia fuera. Las mayores curvaturas del cristalino permiten al ojo enfocar objetos cercanos. (*c*) Algunos de los 120 millones de bastones y de los 7 millones de conos del ojo amplificados alrededor de 5000 veces. Los bastones (que son los más esbeltos) son más sensibles en luz tenue, mientras que los conos son más sensibles al color. Los bastones y los conos forman la capa inferior de la retina y están cubiertos por células nerviosas, vasos sanguíneos y células de soporte. La mayor parte de la luz que entra en el ojo es reflejada o absorbida antes de que llegue a los conos o bastoncillos. La luz que los alcanza provoca impulsos eléctricos que circulan por los nervios ópticos hasta alcanzar finalmente al cerebro (*d*) Red neural utilizada en el sistema de visión de ciertos robots. Modelada de forma aproximada como el ojo humano, contiene 1920 sensores.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 34.14 ¡Inténtelo!

Una persona con un punto próximo de 25 cm utiliza una lente de 40 dioptrías como lupa. ¿Qué amplificación angular se obtiene?

Esquema del problema El aumento angular se determina a partir de la distancia focal (ecuación 34.20), que es el valor recíproco de la potencia.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular la distancia focal de la lente.	$f = 2{,}5$ cm
2. Utilizar este resultado en la ecuación 34.20 para calcular la amplificación angular.	$M = 10$

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

Observación El objeto parece 10 veces mayor porque puede situarse a 2,5 cm del ojo, en lugar de los 25 cm del punto próximo; de este modo se incrementa diez veces el tamaño de la imagen en la retina.

Ejercicio ¿Cuál es la amplificación en este ejemplo si el punto próximo de la persona es 30 cm en lugar de 25 cm? (*Respuesta*: $M = 12$.)

Microscopio compuesto

El microscopio compuesto (figura 34.48) se utiliza para examinar objetos muy pequeños situados a distancias muy cortas. En su forma más simple, está formado por dos lentes convergentes. La lente más cercana al objeto, denominada **objetivo**, forma una imagen real del objeto. Esta imagen está aumentada y es invertida. La lente más próxima al ojo, denominada **ocular**, se utiliza como una simple lupa para observar la imagen formada por el objetivo. El ocular se coloca de forma tal que la imagen formada por el objetivo cae en el primer punto focal del ocular. La luz emerge así del ocular en forma de haz paralelo como si procediese de un punto situado a una gran distancia delante de la lente. (Esto se denomina normalmente "ver la imagen en el infinito".)

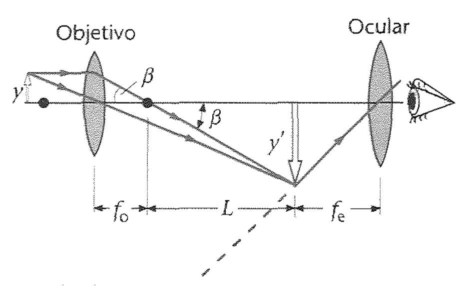


Figura 34.48 Diagrama esquemático de un microscopio compuesto formado por dos lentes positivas, el objetivo de distancia focal f_o y el ocular de distancia focal f_e. La imagen real del objeto formada por el objetivo se observa a través del ocular, que actúa como una lupa simple. La imagen final se encuentra en el infinito.

La distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular recibe el nombre de **longitud del tubo** L. Su valor es aproximadamente 16 cm. El objeto se coloca ligeramente fuera del primer punto focal del objetivo de modo que se forme una imagen aumentada en el primer punto focal del ocular a una distancia $L + f_o$ del objetivo, en donde f_o es la distancia focal del objetivo. Según se ve en la figura 34.48, tg $\beta = y/f_o = -y'/L$. La amplificación lateral del objetivo es, pues,

$$m_o = \frac{y'}{y} = -\frac{L}{f_o} \tag{34.21}$$

La amplificación angular del ocular es

$$M_e = \frac{x_{pp}}{f_e}$$

en donde x_{pp} es el punto próximo del observador (el punto más próximo del observador al cual éste puede enfocar) y f_e es la distancia focal del ocular. El poder amplificador de un microscopio es el producto de la amplificación lateral del objetivo por la amplificación angular del ocular:

$$M = m_o M_e = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{pp}}{f_e} \tag{34.22}$$

Poder amplificador de un microscopio

EJEMPLO 34.15

Un microscopio tiene una lente objetivo de 1,2 cm de distancia focal y un ocular de 2,0 cm de distancia focal separadas 20 cm. (a) Hallar el poder amplificador si el punto próximo del observador está a 25 cm. (b) ¿En dónde deberá colocarse el objeto si la imagen final ha de verse en el infinito?

(a) 1. El poder amplificador viene dado por la ecuación 34.22: $M = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{pp}}{f_e}$

2. La longitud del tubo es la distancia entre las lentes menos las distancias focales: $L = 20\text{ cm} - 2\text{ cm} - 1{,}2\text{ cm} = 16{,}8\text{ cm}$

3. Sustituir este valor de L y los valores dados de x_{pp}, f_o y f_e para calcular M: $M = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{pp}}{f_e} = -\frac{16{,}8\text{ cm}}{1{,}2\text{ cm}}\frac{25\text{ cm}}{2\text{ cm}} = -175$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(b) 1. Calcular la distancia objeto s en función de la distancia imagen s' correspondiente al objetivo y de la distancia focal, f_o:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_o}$$

2. Como puede verse en la figura 34.48, la distancia imagen para la imagen formada por el objetivo es $f_o + L$:

$$s' = f_o + L = 1{,}2 \text{ cm} + 16{,}8 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

3. Sustituir este valor en el cálculo de s:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{18 \text{ cm}} = \frac{1}{1{,}2 \text{ cm}}$$

$$s = 1{,}29 \text{ cm}$$

Observación El objeto debe situarse a 1,29 cm del objetivo, o sea, a 0,09 cm más allá de su primer punto focal.

Telescopio

El telescopio se utiliza para observar objetos que están muy alejados y son normalmente grandes. Funciona creando una imagen del objeto mucho más próxima que éste. El telescopio astronómico, ilustrado esquemáticamente en la figura 34.49 se compone de dos lentes positivas: una lente objetivo que forma una imagen real e invertida, y un ocular que se utiliza como una simple lupa para observar esta imagen. Como el objeto está muy lejano, la imagen dada por el objetivo cae en su punto focal y la distancia imagen es igual a f_o. Puesto que la distancia objeto es mucho mayor que la distancia focal del objetivo, la imagen formada por el objetivo es mucho menor que el objeto. Por ejemplo, si estamos mirando a la Luna, la imagen del satélite formada por el objetivo es mucho menor que la propia Luna. Lo que se pretende con el objetivo no es amplificar el objeto, sino producir una imagen que está más cerca y que pueda así observarse con el ocular. Este se encuentra a una distancia f_e de la imagen, siendo f_e la distancia focal del ocular, de modo que la imagen final puede observarse en el infinito. Como esta imagen se encuentra en el segundo punto focal del objetivo y en el primer punto focal del ocular, las lentes objetivo y ocular deben estar separadas por la suma de sus distancias focales, $f_o + f_e$.

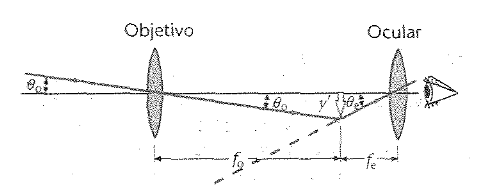


Figura 34.49 Diagrama esquemático de un telescopio astronómico. El objetivo forma una imagen real de un objeto distante cerca de su segundo punto focal, que coincide con el primer punto focal del ocular. Éste sirve como lupa simple para observar la imagen.

El poder amplificador del telescopio es la amplificación angular θ_e/θ_o, siendo θ_e el ángulo subtendido por la imagen final, según se ve a través del ocular, y θ_o es el ángulo subtendido por el objeto cuando se observa directamente sin la ayuda de ninguna lente. El ángulo θ_o es el mismo que el que subtendía el objeto en el objetivo indicado en la figura 34.49. (La distancia de un objeto lejano, como la Luna, al objetivo, es esencialmente la misma que la distancia al ojo.) En esta figura puede verse que

$$\text{tg } \theta_o = -\frac{y'}{f_o} \approx \theta_o$$

en donde hemos utilizado la aproximación de ángulo pequeño tg $\theta \approx \theta$ y hemos introducido un signo menos para hacer que θ_o sea positivo cuando y' sea negativo. El ángulo θ_e de la figura es el subtendido por la imagen final:

$$\text{tg } \theta_e = \frac{y'}{f_e} \approx \theta_e$$

Como y' es negativo, θ_e también lo es, indicando que la imagen está invertida. El poder amplificador del anteojo es entonces

$$M = \frac{\theta_e}{\theta_o} = -\frac{f_o}{f_e} \tag{34.23}$$

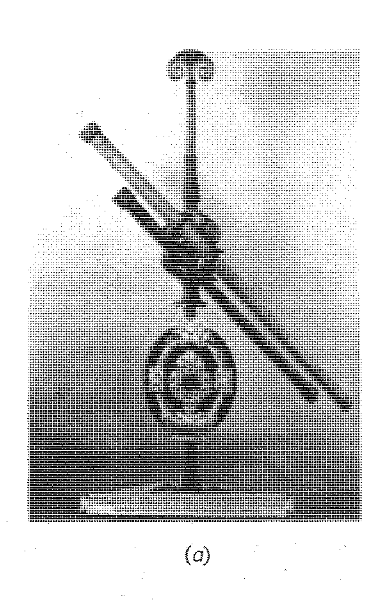
Poder amplificador de un telescopio

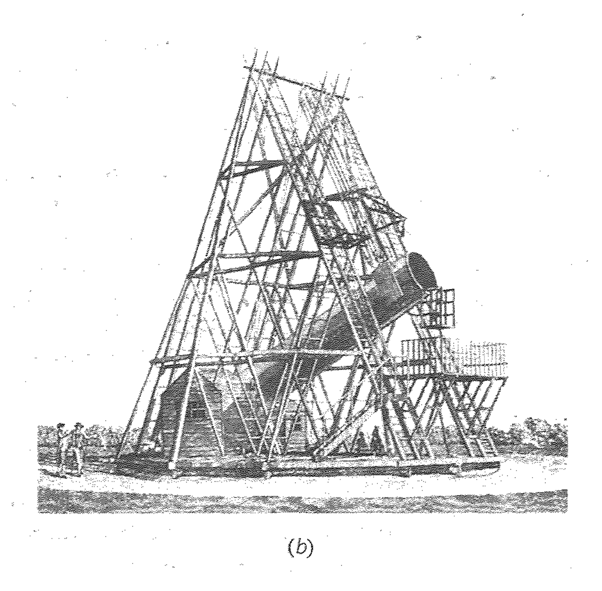
Según esta ecuación, podemos ver que se consigue un gran poder amplificador con un objetivo de gran distancia focal y un ocular de pequeña distancia focal.

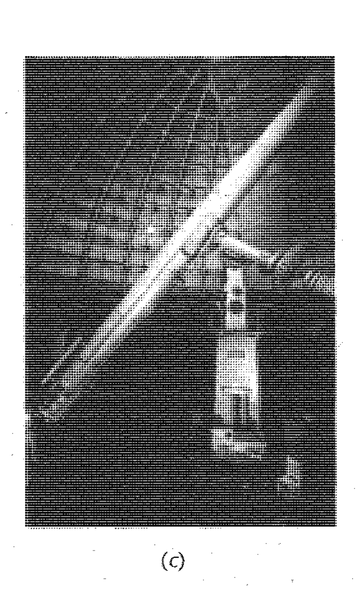
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

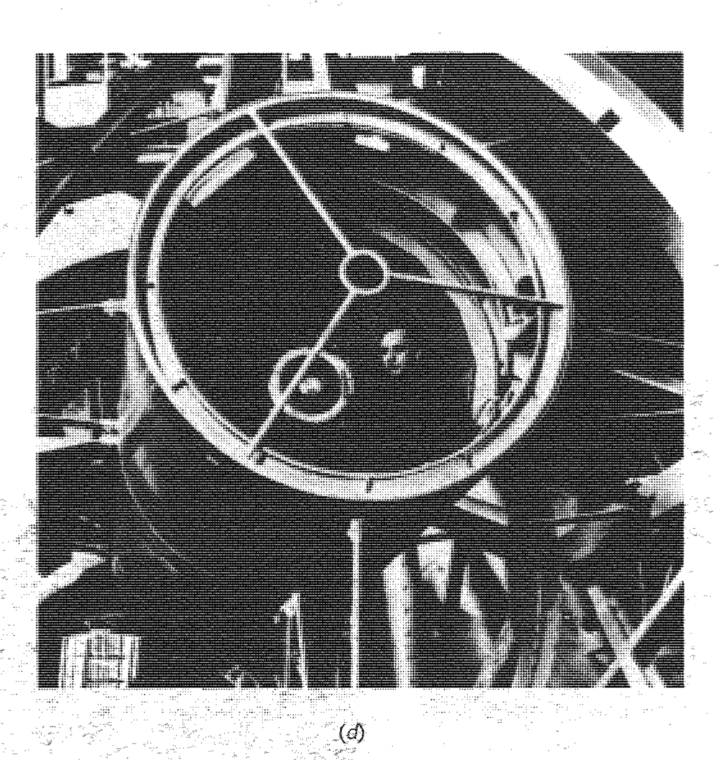
OPCIONAL

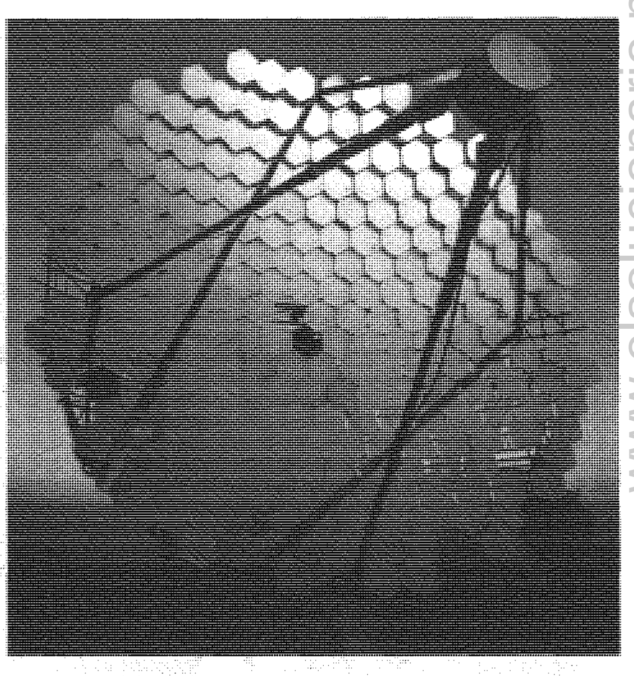

(a)


(b)


(c)

www.elsolucionario.net


(d)


(e)

La astronomía con longitudes de onda ópticas comenzó con Galileo aproximadamente hace unos 400 años. En el siglo XX, los astrónomos empezaron a explorar el espectro electromagnético a otras longitudes de onda, empezando con la radioastronomía en los años 40; luego, en los comienzos de la década de 1960 siguieron con la astronomía de los rayos X basada en los satélites artificiales y, más recientemente, se trabaja en astronomía de ultravioletas, infrarrojos y rayos gamma. *(a) Anteojo de Galileo del siglo XVII con el que éste descubrió las montañas de la Luna, las manchas solares, los anillos de Saturno y las bandas y las lunas de Júpiter.* (*b*) Grabado del telescopio reflector construido en la década de 1780 y que fue utilizado por el gran astrónomo Hershel. Fue el primero en observar galaxias exteriores a la nuestra. (*c*) Debido a la dificultad de construir lentes grandes y libres de defectos, los anteojos o telescopios refractores, como este de 91,4 cm del Observatorio de Lick, han sido superados en su capacidad de recoger grandes cantidades de luz por los telescopios reflectores. (*d*) Aquí puede verse al gran astrónomo Hubble, que descubrió la aparente expansión del universo. Se encuentra sentado en la cabina del observador del telescopio reflector Hale de 5,08 m, que es lo suficientemente grande como para que el observador se siente en el propio foco. (*e*) Este reflector óptico de 10 m, en el Observatorio de Whipple, en el sur de Arizona, es el instrumento más grande construido expresamente para ser utilizado en la astronomía de los rayos gamma. Los rayos gamma de alta energía de origen desconocido inciden sobre la parte superior de la atmósfera y crean cascadas de partículas, como electrones de elevada energía que emiten radiación Cerenkov que puede observarse desde el suelo. De acuerdo con cierta hipótesis, los rayos gamma de alta energía son emitidos cuando la materia se acelera hacia unas estrellas ultradensas en rotación, denominadas pulsares.

www.elsolucionario.net

Ejercicio El telescopio refractor más grande del mundo está en el Observatorio Yerkes de la Universidad de Chicago en Williams Bay, Wisconsin (Estados Unidos). El objetivo tiene un diámetro de 102 cm y una distancia focal de 19,5 m. La distancia focal del ocular es 10 cm. ¿Cuál es su poder amplificador? (*Respuesta*: −195.)

La principal consideración a tener en cuenta en el caso de un telescopio astronómico no es su poder amplificador, sino su capacidad de recoger la luz procedente del objeto lejano, que depende del tamaño del objetivo. Cuanto mayor es el objetivo, mayor es la luminosidad de la imagen. Sin embargo, son muy difíciles de fabricar lentes muy grandes sin aberraciones. Además, se plantean serios problemas mecánicos a la hora de sujetar y soportar lentes muy grandes por sus bordes. Un telescopio reflector (figuras 34.50 y 34.51) utiliza un espejo cóncavo en lugar de una lente como objetivo. Esto ofrece varias ventajas importantes. Una de ellas es que un espejo no produce aberración cromática. Además, su sujeción mecánica es mucho más sencilla porque el espejo pesa bastante menos que una lente de calidad óptica equivalente y puede sujetarse en toda su superficie trasera. En los telescopios modernos, el espejo objetivo consta de varias docenas de segmentos que se adaptan entre sí, y que pueden ajustarse individualmente para corregir pequeñas variaciones de tensión gravitatoria cuando el telescopio se inclina o compensar dilataciones y contracciones térmicas y otros cambios producidos por condiciones climáticas.

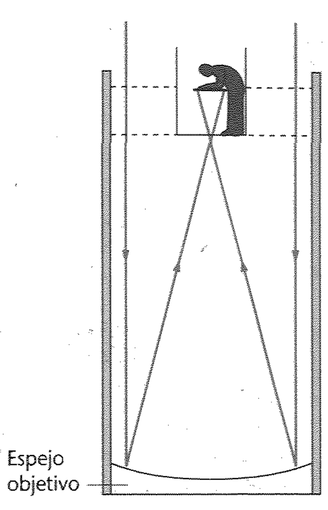


Figura 34.50 Los telescopios reflectores utilizan espejos como objetivo. Como el compartimiento donde se aloja el observador bloquea parte de la luz incidente, el montaje indicado en la figura sólo se utiliza en telescopios con espejos objetivo muy grandes.

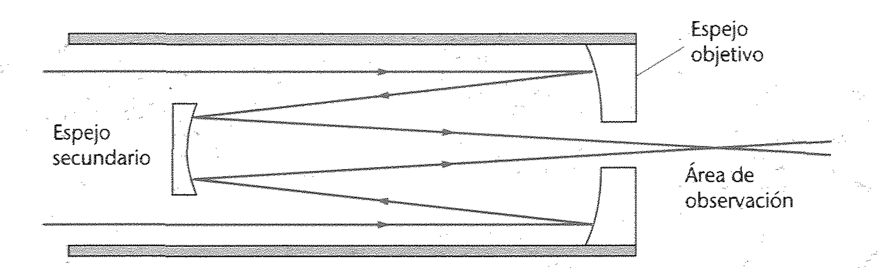
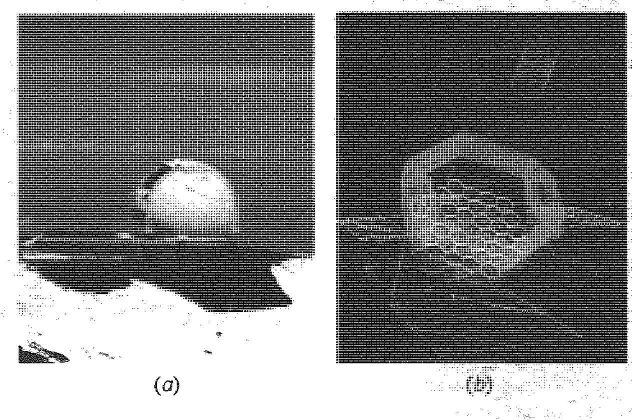
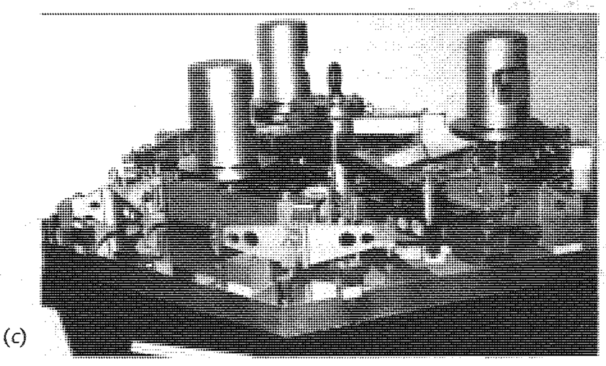
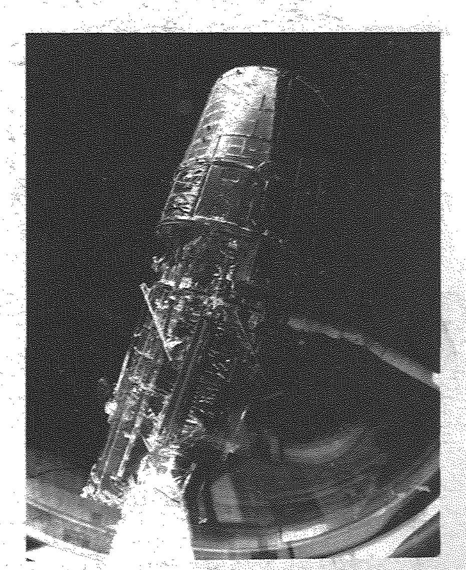


Figura 34.51 Telescopio reflector con un espejo secundario para dirigir la luz de forma que atraviese un pequeño orificio existente en el espejo objetivo. Así se dispone de más sitio para alojar instrumentación auxiliar en la región donde se realiza la observación.





(*a*) El Observatorio Keck, situado en la cima del volcán inactivo de Mauna Kea, Islas Hawaii alojan el telescopio óptico más grande del mundo. En este lugar tan remoto y a esta altitud tan elevada existe poco vapor de agua, escasa turbulencia atmosférica u otras clases de contaminación, lo que hace que este lugar sea casi el ideal para la astronomía. (*b*) El telescopio Keck, está compuesto de 36 segmentos de espejo hexagonales que en conjunto constituyen un solo espejo de 10 m de amplitud —aproximadamente el doble de grande que el hasta ahora telescopio más grande de un solo espejo que funciona actualmente. (c) Debajo de cada segmento de espejo Keck existe un sistema de sensores controlados por ordenador y sistemas mecánicos accionados por motor que pueden hacer variar de modo continuo la forma del espejo. Estos ajustes en las posiciones, que son sensibles hasta dentro de los 100 nm, permiten al sistema compensar las variaciones en la alineación de los segmentos debidas a pequeñísimos cambios en las tensiones gravitatorias cuando se inclina el telescopio, a las dilataciones y contracciones térmicas, y a las fluctuaciones en las corrientes de aire que se producen en la cima de la montaña.



El telescopio espacial Hubble, situado en órbita muy por encima de la turbulencia atmosférica que limita la capacidad en los telescopios montados en Tierra de resolver imágenes en las longitudes de onda ópticas.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Imágenes y objetos virtuales y reales	Una imagen es real si la luz converge realmente en el punto imagen y desde este punto diverge (tal como ocurre en un espejo cóncavo o detrás de una lente delgada. Es virtual cuando la luz sólo parece divergir desde el punto imagen (tal como de detrás de un espejo plano).	
Objeto virtual	Las imágenes debidas a la reflexión o refracción en una superficie actúan frecuentemente como objetos en la superficie siguiente de un sistema óptico. Si tal imagen no está formada porque la luz se interrumpe por la superficie, se trata de un objeto virtual.	
2. Espejos		
Distancia focal	La distancia focal es la distancia imagen cuando el objeto está en el infinito, de modo que la luz incidente es paralela al eje:	
	$f = \frac{1}{2}r$	**(34.2)**
Ecuación para la localización de una imagen	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$	**(34.3)**
Aumento lateral	$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$	**(34.4)**
Diagramas de rayos	Las imágenes pueden localizarse mediante un diagrama de rayos utilizando dos cualesquiera de los tres rayos principales: 1. El rayo paralelo, trazado paralelamente al eje, se refleja pasando por el punto focal. 2. El rayo focal, trazado a través del foco, se refleja paralelamente al eje. 3. El rayo radial, trazado a través del centro de curvatura, choca contra el espejo perpendicularmente a su superficie y se refleja de nuevo hacia atrás sobre sí mismo.	
Convenio de signos	s + si el objeto está enfrente del espejo (objeto real). – si el objeto está detrás del espejo (objeto virtual). s' + si la imagen está enfrente del espejo (imagen real). – si la imagen está detrás del espejo (imagen virtual). r, f + si el centro de curvatura está enfrente del espejo (espejo cóncavo). – si el centro de curvatura está detrás del espejo (espejo convexo).	
3. Imágenes formadas por refracción sobre una superficie esférica		
Localización	$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{f}$	**(34.5)**
Aumento	$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}$	**(34.6)**
Convenio de signos	s + (objeto real) para objetos enfrente de la superficie (lado incidente). – (objeto virtual) para objetos detrás de la superficie (lado de transmisión). s' + (imagen real) para imágenes detrás de la superficie (lado de transmisión). – (imagen virtual) para imágenes enfrente de la superficie (lado incidente). r, f + si el centro de curvatura está en el lado de transmisión. – si el centro de curvatura está en el lado incidente.	
4. Lentes delgadas		
Distancia focal (fórmula del constructor de lentes)	$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$	**(34.11)**
	Una lente positiva ($f > 0$) es convergente (por ej. lente biconvexa). Una lente negativa ($f < 0$) es divergente (por ej. lente bicóncava).	
Potencia	$P = \frac{1}{f}$ dioptrías	**(34.13)**

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (34.12)$$

Ecuación para localización de la imagen

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (34.14)$$

Aumento

Diagramas de rayos

Las imágenes pueden localizarse de modo conveniente mediante un diagrama de rayos utilizando dos cualesquiera de los tres rayos principales.

Lente positiva

1. El rayo paralelo, trazado paralelamente al eje, se desvía pasando por el segundo punto focal de la lente.
2. El rayo central, trazado a través del centro (el vértice) de la lente no se desvía.
3. El rayo focal, trazado a través del primer punto focal, emerge paralelo al eje.

Lente negativa

1. El rayo paralelo, trazado paralelamente al eje, diverge de la lente como si procediera del segundo punto focal.
2. El rayo central trazado a través del centro de la lente (el vértice) no se desvía.
3. El rayo focal, trazado a través del primer punto focal, emerge paralelo al eje.

Convenio de signos

El convenio de signos es el mismo que el establecido para la refracción en una superficie esférica.

5. **Aberraciones** (opcional)

El fenómeno en virtud del cual se ve borrosa la imagen de un simple punto se conoce como aberración. Se produce la aberración esférica debido a que las superficies esféricas enfocan sólo los rayos paraxiales (los que se propagan cercanos al eje) en un solo punto. Los rayos no-paraxiales se enfocan en puntos cercanos dependiendo del ángulo que formen con el eje. Puede reducirse la aberración esférica, reduciendo el tamaño de la superficie esférica, lo cual reduce también la cantidad de luz que alcanza la imagen.

La aberración cromática, que se produce en las lentes, pero no en los espejos, es el resultado de la variación del índice de refracción con la longitud de onda. La forma más común de reducir las aberraciones de las lentes es mediante el uso de un sistema adecuado de varias lentes.

6. **El ojo** (opcional)

El sistema córnea-lente (córnea-cristalino) del ojo enfoca la luz sobre la retina, en donde se encuentran los elementos sensibles (bastones y conos) que transmiten la información a lo largo del nervio óptico al cerebro. Cuando el ojo está relajado, la distancia focal del sistema córnea-cristalino es del orden de 2,5 cm, distancia de la córnea a la retina. Cuando los objetos se acercan al ojo, la forma del cristalino varía ligeramente para que disminuya la distancia focal global de modo que la imagen quede de nuevo enfocada en la retina. La distancia más corta a la que puede enfocar el cristalino sobre la retina se denomina punto próximo, cuyo valor medio típico es de 25 cm aproximadamente. El tamaño aparente de un objeto depende del tamaño de la imagen sobre la retina. Cuanto más cerca esté el objeto, mayor será su imagen sobre la retina y, por consiguiente, mayor será el tamaño aparente del objeto.

7. **Lupa (o microscopio simple)** (opcional)

Una lupa es una lente simple con distancia focal positiva cuyo valor es menor que la distancia del punto próximo.

$$M = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{x_{pp}}{f} \quad (34.20)$$

Aumento angular (o poder amplificador)

8. **Microscopio compuesto** (opcional)

El microscopio compuesto se utiliza para observar objetos muy pequeños a cortas distancias. En su forma más sencilla consta de dos lentes: un objetivo y un ocular. El objeto a examinar se coloca ligeramente más allá del punto focal del objetivo, que forma así una imagen aumentada del objeto en el punto focal del ocular. Éste actúa como una lupa simple para la observación de la imagen final.

$$M = m_o M_e = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{pp}}{f_e} \quad (34.22)$$

Poder amplificador

en donde L es la longitud del tubo, que es la distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular.

9. **Telescopio** (opcional)

Se emplea el anteojo o telescopio para observar objetos que están muy lejanos. El objetivo del anteojo o telescopio forma una imagen real que es mucho menor que el objeto pero que está mucho más cercana. Entonces se utiliza el ocular como una lupa simple para ver la imagen. Un telescopio reflector utiliza un espejo como objetivo.

$$M = \frac{\theta_e}{\theta_o} = -\frac{f_o}{f_e} \quad (34.23)$$

Poder amplificador

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Guía de resolución de problemas

1. La localización aproximada, tamaño y orientación de una imagen se determinan fácilmente con un diagrama de rayos.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Espejos	
Determinar la distancia imagen y el tamaño	Utilizar $1/s + 1/s' = 1/f$, en donde $f = \frac{1}{2}r$ es la distancia focal del espejo. Dibujar un diagrama de rayos para comprobar el resultado. Para determinar el tamaño, utilizar $m = y'/y = -s'/s$. **Ejemplos 34.1, 34.2**
2. Superficies refractantes	
Determinar la distancia imagen y el tamaño.	Utilizar $n_1/s + n_2/s' = (n_2 - n_1)/r$ para determinar la distancia. Utilizar $m = y'/y = -n_1s'/n_2s$ para el tamaño. **Ejemplo 34.4**
Determinar la profundidad aparente de un objeto	La profundidad aparente es igual a la profundidad real dividida por el índice de refracción del medio. **Ejemplo 34.5**
3. Lentes delgadas	
Determinar la distancia focal	Utilizar $1/f = (n - 1)\ (1/r_1 - 1/r_2)$. Usar el signo correcto de cada radio. **Ejemplos 34.6, 34.7**
Determinar la potencia	La potencia es el recíproco de la distancia focal expresada en metros. **Ejemplo 34.7**
Determinar la distancia imagen y el tamaño	Utilizar $1/s + 1/s' = 1/f$ para localizar la imagen y $m = y'/y = -s'/s$ para determinar el tamaño. La imagen es real si s' es positivo, y virtual si s' es negativo. Comprobar con un diagrama de rayos. **Ejemplo 34.8**
4. Combinaciones de lentes	Para determinar la imagen final, localizar en primer lugar la distancia imagen para la primera lente y después determinar la distancia objeto para la segunda lente. **Ejemplos 34.9, 34.10**
5. *Instrumentos ópticos* *(opcional)*	
Determinar la variación de la distancia focal del cristalino	La distancia imagen es fija, $s' = 2{,}5$ cm (distancia del cristalino a la retina). Utilizar la ecuación de la lente delgada para determinar f, conocido s. **Ejemplo 34.12**
Determinar la potencia de las gafas necesarias para leer.	Utilizar el mismo procedimiento seguido en las combinaciones de lentes. Si los vidrios de las gafas están junto al ojo, la distancia objeto para el cristalino será el valor negativo de la distancia imagen de la lente de las gafas. **Ejemplo 34.13**
Determinar el poder amplificador de una lupa	Utilizar $M = x_{pp}/f$, en donde x_{pp} es el punto próximo del ojo. **Ejemplo 34.14**
Determinar el poder amplificador de un microscopio compuesto	Utilizar $M = -f_o/f_e$. **Ejemplo 34.15**

www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

- Problemas conceptuales
- Problemas de secciones opcionales o exploratorios
- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

A menos que se especifique lo contrario, utilizar $n = 1{,}33$ para el índice de refracción del agua.

Espejos planos

• **1** ¿Puede fotografiarse una imagen virtual?

• **2** Suponer que cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas como el de la figura 34.4 está dibujado con un color distinto. Se toma una fotografía del sistema de coordenadas y otra de su imagen en un espejo plano. ¿Es posible afirmar que una de las fotografías corresponde a la imagen del espejo o pensaremos que ambas son fotografías del sistema de coordenadas real tomadas desde ángulos distintos?

• **3** La imagen del punto objeto P de la figura 34.52 está siendo observada como se indica en ella. Dibujar un haz de rayos proce-

dentes del objeto que se refleja en el espejo y entra en el ojo. Para estas posiciones del objeto y del espejo, indicar la región del espacio en que el ojo puede ver la imagen.



Figura 34.52 Problema 3.

• 4 Una persona de 1,62 m de altura desea poder ver su imagen completa en un espejo plano.
(a) ¿Cuál debe ser la altura mínima de dicho espejo?
(b) ¿A qué altura sobre el suelo deberá colocarse, suponiendo que la parte superior de la cabeza de dicha persona está a 15 cm por encima del nivel de sus ojos? Dibujar un diagrama de rayos.

• 5 Dos espejos planos forman un ángulo de 90°. Demostrar, considerando diferentes posiciones de un objeto, que existen tres imágenes sea cualquiera la posición del mismo. Dibujar un haz de rayos apropiados del objeto al ojo para visualizar cada imagen.

• 6
(a) Dos espejos planos forman un ángulo de 60° entre sí. Demostrar esquemáticamente la situación de todas las imágenes formadas a partir de un punto objeto situado en el bisector del ángulo entre espejos.
(b) Repetir para un ángulo de 120°.

•• 7 Cuando dos espejos planos son paralelos, como los que ponen en las paredes opuestas de una peluquería, se producen imágenes múltiples porque cada imagen de un espejo sirve como objeto para el otro espejo. Se coloca un punto objeto entre espejos paralelos distantes entre sí 30 cm. El objeto está a 10 cm de un espejo y a 20 cm del otro.
(a) Hallar la distancia del primer espejo a las cuatro primeras imágenes formadas en él.
(b) Hallar la distancia del segundo espejo a las cuatro primeras imágenes formadas en él.

Espejos esféricos

•• 8 Verdadero o falso:
(a) La imagen virtual formada por un espejo cóncavo es siempre menor que el objeto.
(b) Un espejo cóncavo siempre forma una imagen virtual.
(c) Un espejo convexo nunca forma una imagen real de un objeto real
(d) Un espejo cóncavo nunca forma una imagen real ampliada de un objeto.

•• 9 ¿En qué condiciones producirá un espejo cóncavo una imagen derecha? ¿Una imagen virtual? ¿Una imagen menor que el objeto? ¿Mayor que el objeto?

•• 10 Contestar al problema 9 en el caso en que el espejo sea convexo.

•• 11 Es corriente que se utilicen espejos convexos como retrovisores en coches y camiones con objeto de proporcionar un mayor ángulo de visión. Bajo los espejos se indica: "Atención, los objetos están más cerca de lo que parecen". Sin embargo, de acuerdo con un diagrama de rayos, como el de la figura 34.19, la distancia imagen para objetos alejados es mucho menor que la distancia objeto. Entonces, ¿por qué parecen más alejados?

•• 12 Cuando un objeto se mueve desde una gran distancia hacia el punto focal de un espejo cóncavo, la imagen se mueve desde
(a) una gran distancia hacia el punto focal y es siempre real.
(b) el punto focal a una gran distancia del espejo y es siempre real.
(c) el punto focal a una gran distancia del espejo y es siempre real.
(d) el punto focal a una gran distancia del espejo y cambia de imagen real a imagen virtual.

• 13 Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 40 cm. Dibujar diagramas de rayos para localizar la imagen (si se forma una) para un objeto situado a una distancia de
(a) 100 cm, (b) 40 cm,
(c) 20 cm y (d) 10 cm del espejo.
En cada caso, decir si la imagen es real o virtual; derecha o invertida; y aumentada, reducida o del mismo tamaño que el objeto.

• 14 Utilizar la ecuación del espejo para situar y describir las imágenes correspondientes al espejo y a las distancias objeto del problema 13.

• 15 Repetir el problema 13 para un espejo convexo con el mismo radio de curvatura.

• 16 Utilizar la ecuación del espejo para localizar y describir las imágenes correspondientes al espejo convexo y a las distancias objeto del problema 15.

• 17 Demostrar que un espejo convexo no puede formar una imagen real de un objeto real, sea cualquiera la distancia a que esté, demostrando que s' es siempre negativo para s positivo.

• 18 Un dentista necesita un pequeño espejo que le produzca una imagen derecha con una amplificación de 5,5 cuando esté situado a 2,1 cm de un diente.
(a) ¿Cuál deberá ser el radio de curvatura del espejo?
(b) ¿Deberá ser cóncavo o convexo?

•• 19 En los almacenes se utilizan espejos convexos para conseguir un amplio margen de observación y vigilancia con un espejo de tamaño razonable. El espejo indicado en la figura 34.53 permite a una dependienta, situada a 5 m del mismo, inspeccionar el local entero. Tiene un radio de curvatura de 1,2 m.
(a) Si un cliente está a 10 m del espejo, ¿a qué distancia de la superficie del espejo está su imagen?
(b) ¿La imagen está detrás o delante del espejo?
(c) Si el cliente mide 2 m, ¿qué altura tendrá su imagen?

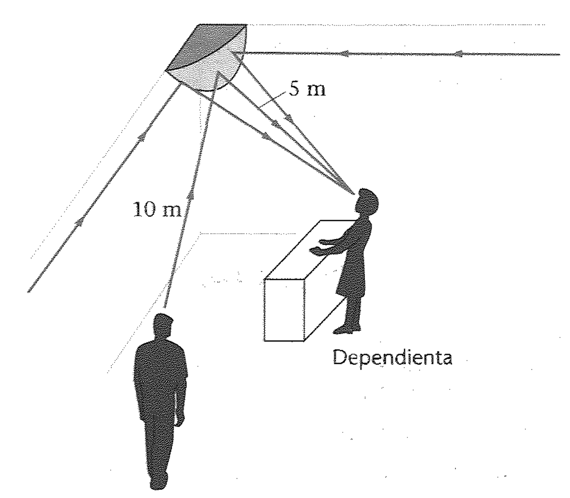


Figura 34.53 Problema 19.

•• 20 Un telescopio utiliza un espejo cóncavo esférico de 8 m de radio de curvatura. Hallar la posición y el diámetro de la imagen de la Luna que formará este espejo. La Luna tiene un diámetro de $3,5 \times 10^6$ m y dista $3,8 \times 10^8$ m de la Tierra.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **21** Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 6,0 cm. Un punto objeto está sobre el eje y a 9 cm del espejo. Construir un diagrama de rayos preciso mostrando los rayos que a partir del objeto forman ángulos de 5°, 10°, 30° y 60° con el eje, que inciden sobre el espejo y se reflejan en sentido contrario hasta cortar el eje. (Utilizar un compás para dibujar el espejo y un transportador para medir los ángulos que sean necesarios para dibujar los rayos reflejados.) ¿Cuál es la dispersión δx de los puntos donde estos rayos cortan al eje?

•• **22** Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 6,0 cm. Dibujar rayos paralelos al eje a 0,5, 1,0, 2,0 y 4,0 cm del eje y hallar los puntos en que los rayos reflejados cortan el eje. (Utilizar un compás para dibujar el espejo y un transportador para hallar el ángulo de reflexión de cada rayo.)

(a) ¿Cuál es la dispersión δx de los puntos en donde estos rayos cortan al eje x?

(b) ¿En qué porcentaje podría reducirse esta dispersión si se bloquease el borde del espejo de modo que los rayos que disten más de 2,0 cm no puedan incidir sobre él?

•• **23** Un objeto situado a 8 cm de un espejo esférico cóncavo produce una imagen virtual 10 cm detrás del espejo.

(a) Si el objeto se aleja hasta 25 cm del espejo, ¿en dónde se situará la imagen?

(b) ¿Es real o virtual?

•• **24** Un objeto situado a 100 cm de un espejo cóncavo forma una imagen real a 75 cm del mismo. Se da entonces la vuelta al espejo de forma que su cara convexa mire al objeto. El espejo se mueve de forma que la imagen queda ahora a 75 cm por detrás del espejo. ¿Cuánto se habrá trasladado el espejo? ¿Se habrá acercado o alejado del objeto?

•• **25** Luz de rayos paralelos procedente de un objeto lejano incide en el gran espejo de la figura 34.54 (r = 5 m) y se refleja en un espejo pequeño que está a 2 m del grande y que realmente es esférico y no plano como se ve en la figura. La luz se enfoca en el vértice del espejo grande.

(a) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo pequeño?

(b) ¿Es convexo o cóncavo?

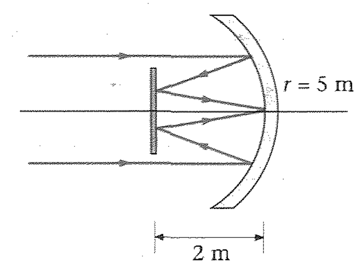


Figura 34.54 Problema 25.

•• **26** Una mujer utiliza un espejo cóncavo de 1,5 m de radio de curvatura para maquillarse. ¿A qué distancia del espejo deberá estar su cara para que la imagen se encuentre a 80 cm de la cara?

Imágenes formadas por refracción

• **27** Un pájaro por encima del agua es observado por un buceador sumergido bajo del agua en la misma vertical que el pájaro. El pájaro, según el buceador, ¿parece estar más lejos o más cerca de la superficie del agua de lo que realmente está?

• **28** Una hoja de papel escrita se protege mediante una lámina gruesa de vidrio que tiene un índice de refracción de 1,5. Si la lámina tiene 2 cm de grosor, ¿a qué distancia por debajo de la parte superior de la lámina se verá el escrito cuando se mire directamente por encima?

• **29** Un pez está a 10 cm de la superficie delantera de una pecera de 20 cm de radio.

(a) ¿Dónde parece estar el pez para alguien del exterior que lo ve mirándolo de frente a la pecera?

(b) ¿Dónde parecerá estar el pez cuando se encuentre a 30 cm de la superficie delantera de la pecera?

•• **30** Una varilla de vidrio muy larga tiene uno de sus extremos conformado como una superficie hemisférica convexa de 5 cm de radio. Su índice de refracción es 1,5.

(a) Un punto objeto en el aire está sobre el eje de la varilla y a 20 cm de la superficie. Hallar la imagen y decir si es real o virtual.

Repetir para

(b) un objeto a 5 cm de la superficie y

(c) un objeto muy lejos de la misma. Dibujar un diagrama de rayos en cada caso.

•• **31** ¿A qué distancia de la varilla del problema 30 deberá colocarse el objeto para que los rayos de luz dentro de la varilla sean paralelos? Dibujar un diagrama de rayos para esta situación.

•• **32** Repetir el problema 30 para una varilla de vidrio con una superficie hemisférica cóncava de −5 cm de radio.

•• **33** Repetir el problema 30 cuando la varilla y el objeto están sumergidos en agua.

•• **34** Repetir el problema 30 para una varilla de vidrio con una superficie hemisférica cóncava de −5 cm de radio cuando ella y el objeto están sumergidos en agua.

•• **35** Una varilla de vidrio de 96 cm de longitud con un índice de refracción de 1,6 tiene sus extremos tallados en forma de superficies esféricas convexas de radios 8 cm y 16 cm. Un punto objeto está fuera de la varilla sobre su eje y a 20 cm del extremo de radio 8 cm.

(a) Hallar la distancia imagen debida a la refracción en la primera superficie.

(b) Hallar la imagen final debida a la refracción en ambas superficies.

(c) ¿La imagen final es real o virtual?

•• **36** Repetir el problema 44 para un punto objeto en el aire sobre el eje de la varilla a 20 cm del extremo con el radio de 16 cm.

Lentes delgadas

• **37** ¿En qué condiciones será positiva la distancia focal de una lente delgada? ¿Negativa?

• **38** La distancia focal de una lente simple es diferente para los distintos colores de la luz. ¿Por qué?

•• **39** Un objeto se sitúa a 40 cm de una lente de distancia focal −10 cm. La imagen es

(a) real, invertida y disminuida.

(b) real, invertida y aumentada.

(c) virtual, invertida y disminuida.

(d) virtual, derecha y disminuida.

(e) virtual, derecha y aumentada.

•• **40** Si un objeto real se sitúa junto al punto focal en su parte interior de una lente convergente, la imagen es

(a) real, invertida y aumentada.

(b) virtual, derecha y disminuida.

(c) virtual, derecha y aumentada.

(d) real, invertida y disminuida.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

• **41** Las lentes delgadas siguientes están hechas de vidrio con un índice de refracción de 1,5. Hacer un esquema de cada lente y hallar su distancia focal en aire:

(a) biconvexa, $r_1 = 10$ cm y $r_2 = -21$ cm;
(b) plano-convexa, $r_1 = \infty$ y $r_2 = -10$ cm;
(c) bicóncava, $r_1 = -10$ cm, $r_2 = +10$ cm;
(d) plano-cóncava, $r_1 = \infty$ y $r_2 = +20$ cm.

• **42** Para construir una lente delgada con radios iguales se utiliza un vidrio de índice de refracción 1,6. Hallar los radios de curvatura y hacer un esquema de la misma si la distancia focal en aire es

(a) + 5 cm y (b) –5 cm.

• **43** Hallar la distancia focal de una lente de vidrio de índice de refracción 1,62 que tiene una superficie cóncava con 100 cm de radio y una superficie convexa con 40 cm de radio.

• **44** Una lente bicóncava de índice de refracción 1,45 tiene sus radios de 30 cm y 25 cm. Se sitúa un objeto a 80 cm a la izquierda de la lente. Hallar

(a) la distancia focal de la misma,
(b) la posición de la imagen y
(c) su amplificación.
(d) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

• **45** Las lentes delgadas siguientes están hechas de vidrio de índice de refracción 1,6. Hacer un esquema de cada lente y hallar su distancia focal en aire:

(a) $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 10$ cm;
(b) $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 20$ cm;
(c) $r_1 = -10$ cm, $r_2 = -20$ cm.

• **46** Para las siguientes distancias objeto y distancias focales de lentes delgadas en el aire, hallar la distancia imagen y la amplificación, y decir si la imagen es real o virtual, derecha o invertida:

(a) $s = 40$ cm, $f = 20$ cm; (b) $s = 10$ cm, $f = 20$ cm;
(c) $s = 40$ cm, $f = -30$ cm; (d) $s = 10$ cm, $f = -30$ cm.

• **47** Un objeto de 3,0 cm de altura se coloca a 20 cm delante de una lente delgada de 20 dioptrías de potencia. Dibujar un diagrama de rayos preciso para hallar la posición y el tamaño de la imagen y comprobar los resultados utilizando la ecuación de las lentes delgadas.

• **48** Repetir el problema 47 para un objeto de 1,0 cm de alto situado a 10 cm delante de una lente delgada de 20 dioptrías de potencia.

• **49** Repetir el problema 47 para un objeto de 1,0 cm de alto situado a 10 cm delante de una lente delgada cuya potencia es –20 dioptrías.

•• **50**

(a) ¿Qué se entiende por distancia objeto negativa? ¿Cómo puede obtenerse? Hallar la distancia imagen y la amplificación, y establecer si la imagen es virtual o real, y derecha o invertida para una lente delgada en aire cuando
(b) $s = -20$ cm, $f = +20$ cm y
(c) $s = -10$ cm, $f = -30$ cm. Dibujar un diagrama de rayos para cada uno de estos casos.

•• **51** Dos lentes convergentes, cada una de ellas de 10 cm de distancia focal, están separadas 35 cm. Un objeto está a 20 cm a la izquierda de la primera lente.

(a) Hallar la posición de la imagen final utilizando un diagrama de rayos y la ecuación de las lentes delgadas.
(b) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida?
(c) ¿Cuál es la amplificación lateral total de la imagen?

•• **52** Resolver el problema 51 para una segunda lente que es divergente con –15 cm de distancia focal.

•• **53** Una lente delgada de índice de refracción 1,5 tiene una cara convexa con un radio de 20 cm. Cuando se coloca a 50 cm de esta lente un objeto de 1 cm de altura, se forma una imagen derecha de 2,15 cm de altura.

(a) Calcular el radio de la segunda cara de la lente. ¿Es cóncava o convexa?
(b) Dibujar un esquema de la lente.

•• **54**

(a) Demostrar que para obtener una amplificación de magnitud m con una lente delgada convergente de distancia focal f, la distancia objeto viene dada por $s = (m - 1)f/m$.
(b) La lente de una cámara con 50 mm de distancia focal se utiliza para hacer una fotografía de una persona de 1,75 m de altura. ¿A qué distancia de la cámara deberá colocarse la persona para que el tamaño de la imagen sea de 24 mm?

•• **55** A 15 cm delante de una lente positiva de 15 cm de distancia focal se encuentra un objeto. A 20 cm de la primera lente se encuentra otra también positiva de 15 cm de distancia focal. Hallar la imagen final y dibujar un diagrama de rayos.

•• **56** Resolver el problema 55 si la segunda lente tiene una distancia focal de –15 cm.

••• **57** En una expresión de la ecuación de la lente utilizada por Newton, y que es útil en algunos casos, se miden las distancias objeto e imagen a partir de los puntos focales. Demostrar que si $x = s - f$ y $x' = s' - f$, puede escribirse la ecuación de las lentes delgadas como $xx' = f^2$, y que la amplificación lateral viene dada por $m = -x'/f = -f/x$. Hacer un esquema de una lente y sobre él indicar x y x'.

••• **58** Se coloca un objeto a 2,4 m de una pantalla y se sitúa una lente de distancia focal f entre el objeto y la pantalla de modo que se forma sobre ésta una imagen real del objeto. Cuando la lente se acerca 1,2 m a la pantalla, se forma sobre ésta, otra imagen del objeto. ¿En dónde estaba situada la lente antes de moverla? ¿Cuál es su distancia focal?

••• **59** Un objeto se encuentra a 17,5 cm a la izquierda de una lente de 8,5 cm de distancia focal. A 5 cm de ésta se encuentra otra lente de –30 cm de distancia focal.

(a) Hallar la distancia entre el objeto y la imagen final formada por la segunda lente.
(b) ¿Cuál es la amplificación total?
(c) La imagen final, ¿es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

Aberraciones (opcional)

• **60** La aberración cromática es un defecto común de

(a) las lentes cóncavas y convexas.
(b) las lentes cóncavas solamente.
(c) los espejos cóncavos y convexos.
(d) todas las lentes y espejos.

• **61** Verdadero o falso:

(a) Las aberraciones se producen sólo en el caso de imágenes reales.
(b) La aberración cromática no aparece en los espejos.

• **62** Una lente biconvexa de radios $r_1 = +10$ cm y $r_2 = -10$ cm está hecha de un vidrio con índice de refracción 1,53 para la luz azul y 1,47 para la luz roja. Hallar la distancia focal de esta lente para

(a) la luz roja y (b) la luz azul.

El ojo (opcional)

En los problemas siguientes, tomar como distancia entre el sistema córnea-cristalino del ojo y la retina 2,5 cm.

• **63** Si un objeto se sitúa a 25 cm del ojo de una persona hipermétrope, sin gafas de corrección, se forma una imagen nítida.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(a) detrás de la retina y la lente correctiva debe ser convexa.
(b) detrás de la retina y la lente correctiva debe ser cóncava.
(c) delante de la retina y la lente correctiva debe ser convexa.
(d) delante de la retina y la lente correctiva debe ser cóncava.

•• **64** Las personas miopes suelen decir que ven mejor debajo del agua sin lentes correctivas. ¿Por qué?

(a) La acomodación del cristalino del ojo es mejor debajo del agua.
(b) La refracción de la interfase agua-córnea es menor que la correspondiente a la interfase aire-córnea.
(c) La refracción de la interfase agua-córnea es mayor que la correspondiente a la interfase aire-córnea.
(d) No hay ninguna razón; el efecto es sólo una ilusión falsa.

•• **65** Una persona miope que utiliza lentes correctivas quiere examinar un objeto a corta distancia.

(a) Las lentes correctivas le ofrecen una imagen ampliada y deben utilizarse mientras examina el objeto.
(b) Las lentes correctivas le ofrecen una imagen reducida del objeto y deben quitarse mientras examina el objeto.
(c) Las lentes correctivas poseen un poder amplificador igual a la unidad; por tanto, no importa si se usan o no.

• **66** Suponer que el ojo estuviese diseñado como una cámara con una lente de distancia focal fija $f = 2{,}5$ cm que pudiese moverse acercándose o alejándose de la retina. Aproximadamente, ¿cuánto habría que alejar la lente para enfocar la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo sobre la retina? (*Indicación*: Determinar la distancia de la retina a la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo.)

• **67** Determinar la variación experimentada por la distancia focal del ojo cuando un objeto originalmente a 3 m se desplaza a 30 cm del ojo

• **68** Hallar

(a) la distancia focal y
(b) la potencia de una lente que producirá una imagen a 80 cm del ojo de un libro que está a 30 cm del mismo.

• **69** Una persona hipermétrope necesita lentes con una potencia de 1,75 dioptrías para leer confortablemente en un libro que está a 25 cm de su ojo. ¿Cuál es su punto próximo sin las lentes?

• **70** Si dos objetos puntuales próximos entre sí han de verse como dos objetos distintos, sus imágenes deben caer en la retina sobre dos conos diferentes que no sean adyacentes. Es decir, debe existir un cono inactivado entre ellos. La separación de los conos es del orden de 1 μm.

(a) ¿Cuál es el ángulo menor que pueden subtender los dos puntos? (Ver figura 34.55)
(b) ¿A qué distancia mínima pueden encontrarse entre sí los dos puntos si están a 20 m del ojo?

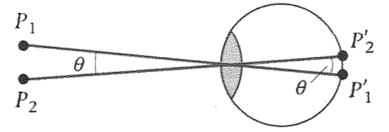


Figura 34.55 Problema 70. Los dos puntos parecerán separados sólo si sus imágenes inciden sobre dos conos diferentes, y no adyacentes, de la retina.

•• **71** Una persona hipermétrope necesita leer la pantalla de un ordenador situada a 45 cm de su ojo. Su punto próximo está a 80 cm.

(a) Hallar la distancia focal de las lentes de sus gafas de lectura que producirán una imagen de la pantalla a 80 cm de su ojo.
(b) ¿Cuál es la potencia de las lentes?

•• **72** Una persona miope no puede enfocar claramente objetos que están a una distancia superior a 225 cm de su ojo. ¿Qué potencia deberán tener las lentes necesarias para poder ver objetos distantes claramente?

•• **73** Como el índice de refracción del cristalino no es muy diferente del que posee el material que le rodea, la mayor parte de la refracción tiene lugar en la córnea, en donde n cambia abruptamente desde 1,0 en el aire a 1,4. Suponiendo que la córnea tiene forma esférica homogénea con un índice de refracción de 1,4, calcular su radio si enfoca la luz paralela sobre la retina que está a una distancia de 2,5 cm. ¿Es de esperar que el resultado obtenido sea mayor o menor que el radio real de la córnea?

•• **74** El punto próximo de cierta persona es 80 cm. Se le prescriben gafas para lectura de modo que pueda leer un libro a 25 cm de sus ojos. Las gafas están a 2 cm de los ojos. ¿Qué potencia deberán tener las lentes a utilizar en sus gafas?

••• **75** A la edad de 45 años, una persona empezó a utilizar gafas para leer de 2,1 dioptrías de potencia, de modo que pudiese leer un periódico a 25 cm. Después a la edad de 55 años, se dio cuenta de que debía mantener el periódico a una distancia de 40 cm para poder verlo claramente con las gafas.

(a) ¿En dónde estaba su punto próximo a los 45 años?
(b) ¿En dónde está a los 55?
(c) ¿Qué potencia necesitarán tener sus gafas a esta edad, de modo que pueda leer de nuevo a una distancia de 25 cm? (Suponer que las gafas están a 2,2 cm de sus ojos.)

••• **76** Un profesor de física de edad avanzada descubre que puede ver claramente sólo aquellos objetos que estén situados entre 0,75 m y 2,5 m, de modo que decide que necesita bifocales. La parte superior de la lente le permitirá ver claramente los objetos situados en el infinito y la parte inferior le permitirá ver nítidamente objetos hasta 25 cm. Suponer que la lente está a 2 cm de su ojo.

(a) Calcular la potencia de la lente requerida para la parte superior de sus bifocales.
(b) Calcular la potencia de la lente para la parte inferior.
(c) ¿Existe un margen de distancias en el que no pueda ver claramente los objetos, mire por donde mire, de sus bifocales? Si es así, ¿cuál es este margen?

La lupa (o microscopio simple) (opcional)

• **77** Una persona con un punto próximo a 30 cm utiliza una lupa de 20 dioptrías de potencia. ¿Cuál es la amplificación que se obtiene si la imagen final está en el infinito?

• **78** Una persona con un punto próximo a 25 cm desea obtener una amplificación de 5 con una lupa. ¿Cuál debería ser su distancia focal?

• **79** ¿Cuál es el poder amplificador de una lente de 7 cm de distancia focal cuando se observa la imagen en el infinito por una persona cuyo punto próximo está a 35 cm?

•• **80** Se utiliza como lupa una lente de distancia focal 6 cm con la imagen en el infinito para una persona cuyo punto próximo está a 25 cm, y para otra cuyo punto próximo está a 40 cm.

(a) ¿Cuál es el poder amplificador efectivo de la lente para cada una de las personas?
(b) Comparar el tamaño de la imagen en la retina cuando cada una de ellas mira el mismo objeto con la lupa.

•• **81** Un botánico examina una hoja utilizando una lente convexa de 12 dioptrías de potencia como lupa. ¿Cuál es la amplificación angular esperada si

(a) la imagen final está en el infinito y
(b) está a 25 cm?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 82

(a) Demostrar que si la imagen final de una lupa está en el punto próximo del ojo en lugar de estar en el infinito, la amplificación angular viene dada por

$$M = \frac{x_{pp}}{f} + 1$$

(b) Hallar la amplificación de una lente de 20 dioptrías para una persona de 30 cm de punto próximo si la imagen final está en dicho punto. Dibujar un diagrama de rayos para este caso.

•• 83 Demostrar que cuando la imagen de una lupa se ve en el punto próximo, la amplificación angular y lateral de la lupa son iguales.

Microscopios (opcional)

•• 84 El objetivo de un microscopio tiene una distancia focal de 0,5 cm. Forma una imagen a 16 cm de su segundo punto focal. ¿Cuál es el poder amplificador para una persona cuyo punto próximo está a 25 cm si la distancia focal del ocular es 3 cm?

•• 85 Un microscopio tiene un objetivo de 16 mm de distancia focal y ocular que da una amplificación angular de 5 para una persona cuyo punto próximo es de 25 cm. La longitud del tubo es 18 cm.

(a) ¿Cuál es la amplificación lateral del objetivo?
(b) ¿Cuál es el poder amplificador del microscopio?

•• 86 Un microscopio manual, simétrico y de poca precisión, está compuesto por dos lentes convergentes de 20 dioptrías, sujetas en los extremos de un tubo de 30 cm de longitud.

(a) ¿Cuál es la "longitud del tubo" de este microscopio?
(b) ¿Cuál es la amplificación lateral del objetivo?
(c) ¿Cuál es el poder amplificador del microscopio?
(d) ¿A qué distancia del objetivo deberá colocarse el objeto?

•• 87 Repetir el problema 86 para el mismo sistema de dos lentes separadas 40 cm.

•• 88 Un microscopio tiene un objetivo con una potencia de 45 dioptrías y un ocular con una potencia de 80 dioptrías. Las lentes están separadas 28 cm. Suponiendo que la imagen final se forma a 25 cm del ojo, ¿cuál es el poder amplificador?

••• 89 Un microscopio tiene un poder amplificador igual a 600 y un ocular con una amplificación angular de 15. La lente objetivo está a 22 cm del ocular. Sin hacer ninguna aproximación, calcular

(a) la distancia focal del ocular,
(b) la posición de un objeto en donde quedará enfocado por un ojo relajado y
(c) la distancia focal de la lente objetivo.

Telescopios (opcional)

• 90 Un telescopio simple tiene un objetivo de 100 cm de distancia focal y un ocular de 5 cm de distancia focal. Se utiliza para mirar a la Luna, que subtiende un ángulo de 0,009 rad.

(a) ¿Cuál es el diámetro de la imagen formada por el objetivo?
(b) ¿Qué ángulo subtiende la imagen final en el infinito?
(c) ¿Cuál es el poder amplificador del telescopio?

• 91 La lente objetivo del telescopio refractor del Observatorio de Yerkes tiene una distancia focal de 19,5 m. Se utiliza para examinar la Luna, que subtiende un ángulo de 0,009 rad aproximadamente. ¿Cuál es el diámetro de la imagen de la Luna formado por el objetivo?

•• 92 El telescopio reflector de 200 pulgadas del Monte Palomar tiene un espejo con un diámetro de 200 pulgadas = 5,1 m y una distancia focal de 1,68 m.

(a) ¿En qué factor se ha incrementado la capacidad de recibir la luz respecto a la lente de 40 pulgadas (1,016 m) de diámetro de la lente del telescopio refractor del Observatorio de Yerkes?
(b) Si la distancia focal del ocular es 1,25 cm, ¿cuál es el poder amplificador de este telescopio?

•• 93 Un telescopio astronómico tiene un poder amplificador de 7. Las dos lentes están separadas 32 cm. Hallar la distancia focal de cada lente.

•• 94 Una desventaja del telescopio astronómico para su empleo terrestre (por ejemplo, para ver un partido de fútbol) es que la imagen está invertida. Un telescopio de Galileo utiliza una lente convergente como objetivo pero una lente divergente como ocular. La imagen formada por el objetivo está detrás del ocular en su punto focal de modo que la imagen final es virtual, derecha y en el infinito.

(a) Demostrar que el poder amplificador es $M = -f_o/f_e$, en donde f_o es la distancia focal del objetivo y f_e es la del ocular (que es negativa).
(b) Dibujar un diagrama de rayos para demostrar que la imagen final es verdaderamente virtual, derecha y que está en el infinito.

•• 95 Un telescopio de Galileo (ver problema 94) está diseñado de forma que la imagen final esté en el punto próximo, que está a 25 cm, en lugar de estar en el infinito. La distancia focal del objetivo es 100 cm y la del ocular es −5 cm.

(a) Si la distancia a que se encuentra el objeto es 30 m, ¿dónde está la imagen del objetivo?
(b) ¿Cuál es la distancia objeto para el ocular en el que la imagen final está en el punto próximo?
(c) ¿A qué distancia están entre sí las lentes?
(d) Si la altura del objeto es 1,5 m, ¿cuál es la altura de la imagen final?
(e) ¿Cuál es la amplificación angular de la imagen?

••• 96 Un cazador perdido en las montañas intenta construir un telescopio con dos lentes, una de 2,0 dioptrías de potencia y la otra con 6,5 dioptrías de potencia, y un tubo de cartón.

(a) ¿Cuál es el poder amplificador máximo posible?
(b) ¿Qué longitud deberá tener el tubo?
(c) ¿Qué lente deberá utilizar como ocular? ¿Por qué?

••• 97 Si en un telescopio se mira por el extremo correspondiente al objetivo, se verá un objeto distante de tamaño reducido. Si el objetivo tiene una distancia focal de 2,25 m y un ocular de distancia focal 1,5 cm, ¿en qué factor se reduce el tamaño angular del objeto?

Problemas generales

• 98 La imagen de un objeto real formado por un espejo convexo

(a) es siempre real e invertida
(b) es siempre virtual y aumentada
(c) puede ser real
(d) es siempre virtual y disminuida.

• 99 El cristal de una lente convergente tiene un índice de refracción de 1,6. Cuando la lente está en el aire su distancia focal es 30 cm. Sumergida en agua, su distancia focal será:

(a) mayor de 30 cm
(b) menor de 30 cm
(c) la misma de antes, 30 cm
(d) negativa

•• 100 Verdadero o falso:

(a) Una imagen virtual no puede ser expuesta sobre una pantalla.
(b) Una distancia imagen negativa implica que la imagen es virtual.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(c) Todos los rayos paralelos al eje de un espejo esférico se reflejan pasando por un solo punto.
(d) Una lente divergente no puede formar una imagen real de un objeto real.
(e) La distancia imagen en el caso de una lente positiva es siempre positiva.

• **101** Demostrar que las lentes divergentes no pueden formar nunca una imagen real de un objeto real. (*Indicación*: Demostrar que s' es siempre negativo.)

• **102** Una cámara utiliza una lente positiva para enfocar la luz de un objeto sobre una película. Al contrario que el ojo, la lente de la cámara posee una distancia focal fija, pero la propia lente puede desplazarse ligeramente hasta que su distancia imagen coincida con la distancia a la película. Una lente teleobjetivo posee una longitud focal de 200 mm ¿En cuánto debe desplazarse para pasar del enfoque de un objeto en el infinito al enfoque de otro situado a una distancia de 30 m?

• **103** Una lente gran-angular tiene una distancia focal de 28 mm. ¿En cuánto deberá trasladarse para cambiar su enfoque desde un objeto situado en el infinito a otro que se encuentra a una distancia de 5 m?

• **104** Una lente convergente hecha de poliestireno (índice de refracción 1,59) tiene una distancia focal de 50 cm. Hallar el radio de la segunda superficie. ¿Es convexa o cóncava?

• **105** Una lente delgada convergente de 10 cm de distancia focal se utiliza para obtener una imagen el doble de grande que un objeto pequeño. Hallar las distancias objeto e imagen si

(a) la imagen ha de estar derecha y
(b) si ha de ser invertida. Dibujar para cada caso un diagrama de rayos.

•• **106** Un submarinista lleva una máscara de buceo cuya parte delantera está curvada hacia el exterior con un radio de curvatura de 0,5 m. Existe así una superficie esférica convexa entre el agua y el aire que llena la máscara. Un pez se encuentra a 2,5 m delante de la máscara.

(a) ¿Dónde parece estar?
(b) ¿Cuál es la amplificación de su imagen?

•• **107** Supóngase que queremos ver nuestra cara durante el afeitado o el maquillaje. Si se desea que la imagen sea derecha, virtual y amplificada 1,5 veces cuando la cara está a 30 cm delante del espejo, ¿qué clase de espejo deberá utilizarse, convexo o cóncavo, y cuál deberá ser su distancia focal?

•• **108** Un objeto pequeño está a 20 cm de una lente positiva delgada de 10 cm de distancia focal. A la derecha de la misma se encuentra un espejo plano que corta el eje en el segundo punto focal de la lente y está inclinado de modo que los rayos reflejados no vuelven a pasar por la lente (ver figura 34.56).

(a) Hallar la posición de la imagen final.
(b) ¿Esta imagen es real o virtual?
(c) Dibujar un diagrama de rayos mostrando la imagen final.

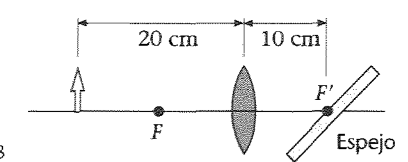


Figura 34.56 Problema 108

•• **109** Una cámara de 35 mm produce fotografías de 24 mm por 36 mm de tamaño. Se utiliza para tomar una fotografía de una persona de 175 cm de altura, cuya imagen llena justo la altura (24 mm) de la película. ¿A qué distancia de la cámara se encontraba la persona si la distancia focal de la lente es de 50 mm?

•• **110** Se utiliza una cámara de 35 mm con objetivos intercambiables para tomar una fotografía de un halcón que tiene una envergadura entre las alas de 2 m. El halcón está a 30 m de distancia. ¿Cuál deberá ser la distancia focal ideal del objetivo para que la imagen de las alas llene justo la anchura de la película, que es 36 mm?

•• **111** Un objeto está situado 12 cm a la izquierda de una lente de 10 cm de distancia focal. A la derecha de ésta y a 20 cm se coloca una segunda lente de 12,5 cm de distancia focal.

(a) Hallar la posición de la imagen final.
(b) ¿Cuál es la amplificación de la imagen?
(c) Dibujar un diagrama de rayos mostrando la imagen final.

•• **112**

(a) Demostrar que si f es la distancia focal de una lente delgada en aire, su distancia focal en agua es

$$\frac{n_a(n-1)}{n-n_a}\,f$$

en donde n_a es el índice de refracción del agua y n el de la lente.

(b) Calcular la distancia focal en aire y en agua de una lente bicóncava de índice de refracción $n = 1,5$ que tiene radios de valores 30 cm y 35 cm.

•• **113**

(a) Hallar la distancia focal de una lente biconvexa gruesa con un índice de refracción de 1,5, un espesor de 4 cm y radios de +20 cm y −20 cm.
(b) Hallar la distancia focal de agua.

•• **114** Una capa de agua de 2 cm de espesor (n = 1,33) flota encima de una capa de 4 cm de gruesa de tetracloruro de carbono (n = 1,46) dentro de un depósito. ¿A qué profundidad respecto a la superficie libre del agua parecerá estar el fondo del depósito para un observador que está mirando desde arriba y con incidencia normal?

•• **115** Un observador sentado en su coche en reposo ve a un corredor por su retrovisor lateral, que es un espejo convexo con un radio de curvatura de 2 m. El corredor está a 5 m del espejo y se está acercando a 3,5 m/s. ¿Con qué rapidez parece estar corriendo cuando se le observa en el espejo?

•• **116** En el siglo XVII, Antonie van Leeuwenhoek, el primer gran microscopista, utilizó lentes esféricas simples hechas primero con gotas de agua y después de vidrio en sus primeros instrumentos, con los que realizó sorprendentes descubrimientos. Consideremos una esfera de vidrio de 2,0 mm de radio con un índice de refracción de 1,50. Hallar la distancia focal de esta lente. *Indicación*: Utilizar la ecuación para la refracción en una superficie esférica simple para hallar la distancia imagen correspondiente a una distancia objeto infinita de la primera superficie. Luego utilizar este punto imagen como punto objeto para la segunda superficie.

••• **117** Un objeto está 15 cm a la izquierda de una lente delgada convexa de 10 cm de distancia focal 25 cm a la derecha de la misma se halla un espejo cóncavo de 10 cm de radio.

(a) Hallar la posición de la imagen final formada por el espejo y la lente.
(b) ¿La imagen es virtual o real? ¿Derecha o invertida?
(c) Mostrar sobre un esquema dónde debe estar el ojo para ver esta imagen.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

••• **118** Hallar la imagen final correspondiente al caso del problema 108 cuando el espejo no esté inclinado. Suponer que la imagen se ve con el ojo situado a la izquierda de la lente mirando hacia el espejo a través de la misma.

••• **119** Cuando se coloca 30 cm delante de una lente un foco luminoso brillante, aparece una imagen derecha a 7,5 cm de la lente. Aparece también una imagen invertida débil a 6 cm delante de la lente debida a la reflexión en la cara delantera de la misma. Cuando se da la vuelta a la lente, esta imagen más débil e invertida, resulta estar a 10 cm delante de la lente. Hallar el índice de refracción de la lente.

••• **120** Un espejo cóncavo horizontal de 50 cm de radio de curvatura, contiene una capa de agua con un índice de refracción de 1,33 y una profundidad máxima de 1 cm. ¿A qué altura sobre el espejo deberá colocarse un objeto de modo que su imagen esté en la misma posición que el objeto?

••• **121** Una lente con una cara cóncava de 17 cm de radio y la otra convexa de 8 cm de radio tiene una distancia focal en aire de 27,5 cm. Cuando se coloca en un líquido de índice de refracción desconocido, la distancia focal aumenta a 109 cm. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

••• **122** Una bola de vidrio de 10 cm de radio tiene un índice de refracción de 1,5. La mitad trasera de la bola está plateada de forma que actúa como un espejo cóncavo (figura 34.57). Hallar la posición de la imagen final vista por un ojo a la izquierda del objeto y de la bola para un objeto situado a

(a) 30 cm y

(b) 20 cm a la izquierda de la superficie delantera de la bola.

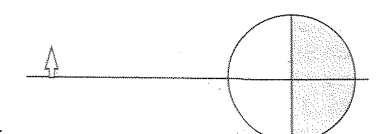


Figura 34.57 Problema 122.

••• **123**

(a) Demostrar que una pequeña variación dn en el índice de refracción del material de una lente produce un pequeño cambio en la distancia focal df dado aproximadamente por $df/f = -dn/(n-1)$.

(b) Utilizar este resultado para hallar la distancia focal de una lente delgada para la luz azul, con $n = 1,53$, si la distancia focal para la luz roja con $n = 1,47$, es 20 cm.

••• **124** La amplificación lateral de un espejo esférico o de una lente delgada viene dada por $m = -s'/s$. Demostrar que en el caso de objetos de extensión horizontal pequeña, la amplificación longitudinal es aproximadamente $-m^2$. *Indicación*: Demostrar que $ds'/ds = s'^2/s^2$.

••• **125** Una lente delgada biconvexa tiene radios r_1 y r_2 y un índice de refracción n_L. La superficie de radio r_1 está en contacto con un líquido de refracción n_1, y la superficie de radio r_2 está en contacto con un líquido de índice de refracción n_2. Demostrar que la ecuación de la lente delgada en estas condiciones puede expresarse como $n_1/s + n_2/s' = n_2/f$ en donde la distancia focal viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n_1}{n_1 r_1} - \frac{n_L - n_2}{n_2 r_2}$$

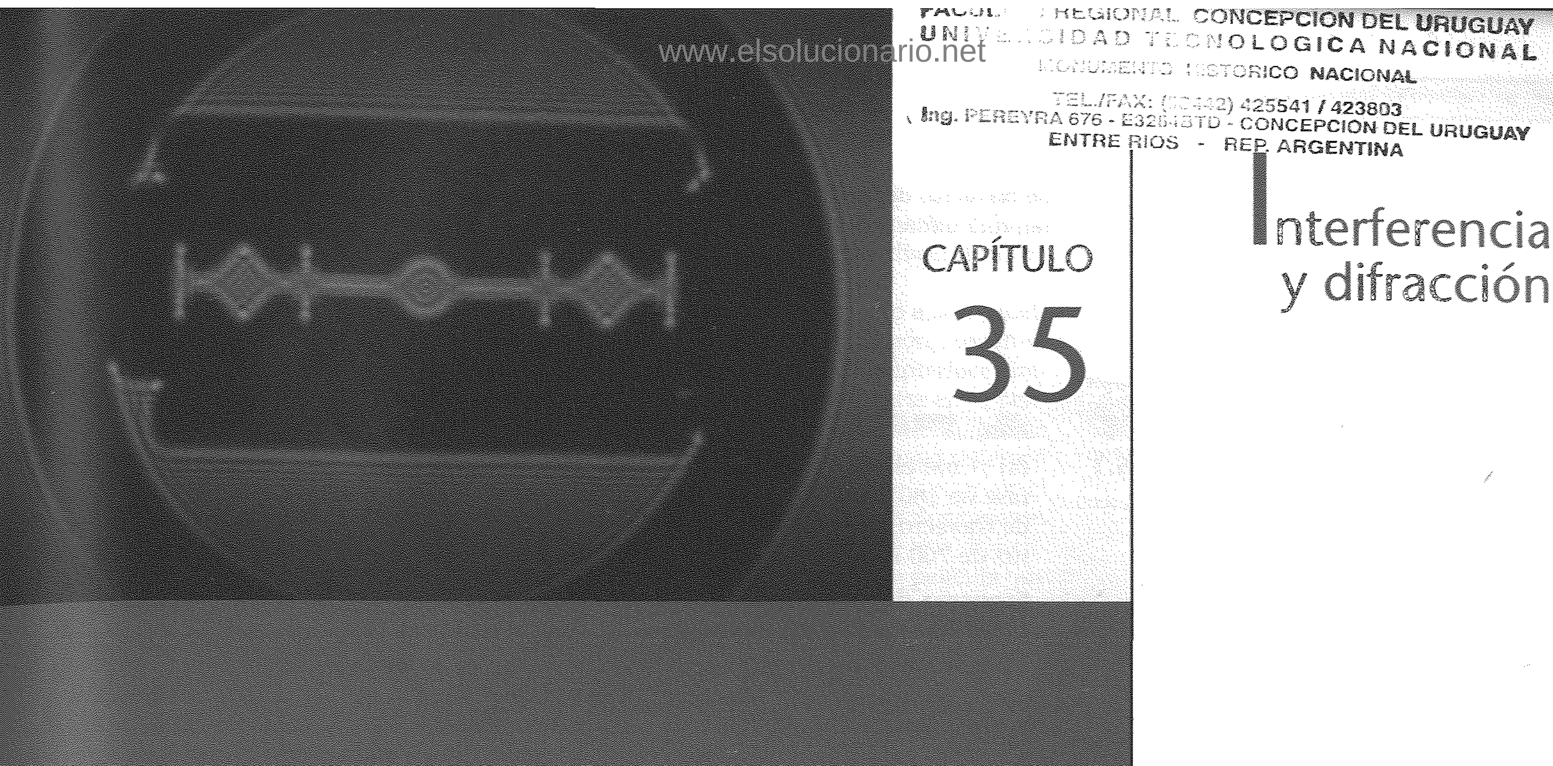
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO

35

Interferencia y difracción

Difracción de la luz incidente sobre una hoja de afeitar.

www.elsolucionario.net

Los fenómenos de singular importancia que distinguen las ondas de las partículas son la interferencia y la difracción.[1] La interferencia es la combinación por superposición de dos o más ondas que se encuentran en un punto en el espacio. La difracción es la desviación que sufren las ondas alrededor de los bordes y esquinas que se produce cuando una porción de un frente de ondas se ve cortado o interrumpido por una barrera u obstáculo. El esquema de la onda resultante puede calcularse considerando cada punto del frente de onda original como una fuente puntual de acuerdo con el principio de Huygens y calculando el diagrama de interferencia que resulta de todas estas fuentes.

Diferencia de fase y coherencia 35.1

Cuando se combinan dos ondas armónicas procedentes de dos focos de la misma frecuencia y longitud de onda pero de diferente fase, la onda resultante es una onda armónica cuya amplitud depende de la diferencia de fase. Si esta diferencia de fase es cero o un número entero de veces 360°, las ondas están en fase y la interferencia es constructiva. La amplitud resultante es igual a la suma de las amplitudes individuales, y la intensidad (que es proporcional al cuadrado de la amplitud) es máxima. Si la diferencia es igual a 180° (π radianes) o un número entero impar de veces 180°, las ondas están desfasadas y la interferencia es destructiva. En este caso la amplitud resultante es igual a la diferencia entre las amplitudes individuales y la intensidad es un mínimo. Si las amplitudes son iguales, la intensidad máxima es cuatro veces la de cada uno de los focos y la intensidad mínima es igual a cero.

Una causa común de la existencia de una diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia en la longitud de la trayectoria recorrida por las dos ondas. Una diferencia de trayectos de una longitud de onda produce una diferencia de fase de 360°, que es equivalente a decir que no existe ninguna diferencia de fase en absoluto. Una diferencia

[1] Antes de estudiar este capítulo, el alumno debe revisar los capítulos 15, 16 y 17, en donde se tratan los principios generales de interferencia y difracción de ondas.

 www.elsolucionario.net

de trayectos de media longitud de onda produce una diferencia de fase de 180°. En general, una diferencia de trayectos de Δr contribuye a una diferencia de fase δ dada por

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} 360° \qquad \textbf{(35.1)}$$

EJEMPLO 35.1

(a) ¿Cuál es la mínima diferencia de trayectos que producirá una diferencia de fase de 180° en el caso de luz de 800 nm de longitud de onda? (b) La diferencia de trayectos que acabamos de obtener, ¿qué diferencia de fase producirá en una luz de 700 nm de longitud de onda?

Esquema del problema En ambas cuestiones usaremos la relación entre diferencia de fase y diferencia de trayectos dada por la ecuación 35.1.

(a) Hacemos $\delta = 180°$ en la ecuación 35.1 y despejamos Δr:

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 360° = 180°$$

$$\Delta r = \frac{\lambda \delta}{360°} = \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2}(800 \text{ nm}) = 400 \text{ nm}$$

(b) Hacemos $\lambda = 700$ nm, $\Delta r = 400$ nm y despejamos δ:

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 360° = \frac{400 \text{ nm}}{700 \text{ nm}} 360° = 206° = 3{,}59 \text{ rad}$$

Otra causa de diferencias de fase es el cambio de fase en 180° que a veces sufre una onda cuando se refleja en una superficie límite determinada. Este cambio de fase es análogo a la inversión de un pulso sobre una cuerda cuando se refleja en un punto en donde la densidad aumenta repentinamente, como sucede si una cuerda ligera está unida a otra más pesada. La inversión del pulso reflejado es equivalente a un cambio de fase de 180° en el caso de una onda sinusoidal, que puede considerarse como una serie de pulsos. Cuando la luz que se propaga en aire incide sobre la superficie de un medio en el que la luz se desplaza más lentamente, como un vidrio o el agua, existe un cambio de fase de 180° en la luz reflejada. Cuando la luz se está propagando inicialmente en vidrio o agua, no se produce ningún cambio de fase en la luz reflejada en la superficie vidrio-aire o agua-aire. Este hecho es análogo a la reflexión sin inversión de un pulso que se mueve en una cuerda pesada y llega a un punto en donde ésta se encuentra unida a otra cuerda más ligera.



Interferencia de los rayos de luz que proceden de la superficie delantera y trasera de una película delgada jabonosa. En la parte superior, donde la película es muy delgada, los rayos procedentes de la superficie delantera de la película (que sufren un cambio de fase de 180°) y los rayos procedentes de la superficie trasera (que no cambian de fase) interfieren destructivamente y la película se ve oscura. En otras partes de la película, la interferencia es destructiva o constructiva dependiendo de la longitud de onda y del espesor de la película.

Como ya mencionamos en el capítulo 16, la interferencia de ondas procedentes de dos focos no se observa a menos que los focos sean coherentes. Como normalmente un haz de luz es el resultado de millones de átomos que irradian independientemente, la diferencia de fase entre las ondas procedentes de estos focos fluctúa al azar muchas veces por segundo y, en general, dos focos de luz no son coherentes. Normalmente en óptica se consigue la coherencia dividiendo el haz de luz procedente de un foco en dos o más haces, que posteriormente se combinan para producir un diagrama de interferencia. Esta división puede ser producida por reflexión en las dos superficies de una película delgada (sección 35.2), por difracción del haz en dos pequeñas rendijas practicadas en una barrera opaca (sección 35.3) o utilizando una sola fuente puntual y su imagen en un espejo plano, lo que equivale a las dos fuentes (sección 35.3). Hoy en día los láseres son las fuentes más importantes de luz coherentes en el laboratorio.

35.2 ■ Interferencia en películas delgadas

Sin ninguna duda todos hemos observado las bandas coloreadas que aparecen en las pompas de jabón o en las películas aceitosas que suelen cubrir el agua que se encuentra

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

en una calle mojada. Estas bandas se deben a la interferencia producida por la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película. Resultan diferentes colores debido a las variaciones que existen en el espesor de la película, que producen interferencia para distintas longitudes de onda en diferentes puntos de la misma.

Consideremos que estamos observando, con ángulos pequeños respecto a la normal, una película delgada de agua (como una pequeña sección de burbuja de jabón), según se ve en la figura 35.1. Parte de la luz se refleja en la superficie superior de la interface aire-agua en donde experimenta un cambio de fase de 180°. Parte de la luz entra en la película y es parcialmente reflejada por la superficie inferior agua-aire. No existe cambio de fase en esta reflexión. Si la luz es casi perpendicular a la superficie, tanto el rayo reflejado en la superficie superior como el reflejado en la superficie inferior pueden entrar en el ojo situado en el punto P en la figura. La diferencia de caminos entre estos dos rayos es de $2t$, siendo t el espesor de la película. Esta diferencia de caminos produce una diferencia de fase de $(2t/\lambda')$ 360°, en donde λ' es la longitud de onda de la luz en la película que está relacionada con la longitud de onda λ en el aire por $\lambda' = \lambda/n$ y n es el índice de refracción de la película. La diferencia de fase entre estos dos rayos es de 180° más la debida a la diferencia de caminos. Se produce interferencia destructiva cuando la diferencia de caminos $2t$ es cero o un número entero de longitudes de onda λ' (dentro de la película). Se produce una interferencia constructiva si la diferencia de caminos es un número impar de semilongitudes de onda.

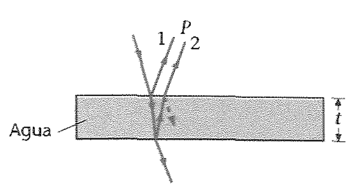


Figura 35.1 Los rayos de luz que se reflejan en las superficies superior e inferior de una película delgada son coherentes porque ambos rayos proceden de la misma fuente. Si la luz está incidiendo casi normalmente, los dos rayos reflejados estarán más cerca el uno del otro y producirán interferencia.

Cuando una película delgada de agua está sobre una superficie de vidrio (figura 35.2), el rayo que se refleja en la superficie inferior agua-vidrio sufre también un cambio de fase de 180° debido a que el índice de refracción del vidrio (aproximadamente 1,5) es mayor que el del agua (aproximadamente 1,33). Así pues los dos rayos indicados en la figura sufren un cambio de fase de 180° después de la reflexión. La diferencia de fase entre estos rayos se debe entonces solamente a la diferencia de caminos y viene dada por $\delta = (2t/\lambda')$ 360°.

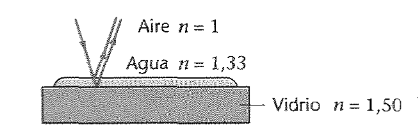


Figura 35.2 Interferencia de la luz reflejada en una película delgada de agua que está sobre una superficie de vidrio. En este caso ambos rayos sufren un cambio de fase de 180° en la reflexión.

Cuando se observa con luz monocromática una película delgada de espesor variable, utilizando, por ejemplo, la luz amarilla de una lámpara de sodio, se ven bandas o líneas alternativamente brillante y oscuras, denominadas **franjas**. La distancia entre una franja brillante y otra oscura inmediata, es la distancia en que la película cambia de espesor de forma tal que la diferencia de trayectos de la luz $2t$ es $\lambda'/2$. La figura 35.5*a* ilustra el diagrama de interferencias observado cuando se refleja la luz en una película de aire encerrada entre una superficie de vidrio esférica y una superficie de vidrio plana en contacto. Estas franjas de interferencias circulares se conocen como **anillos de Newton**. En la figura 35.3*b* se muestran los típicos rayos reflejados en la superficie superior e inferior de la película de aire. Cerca del punto de contacto de las superficies, en donde la diferencia de caminos entre el rayo reflejado en la superficie superior vidrio-aire y en la superficie inferior aire-vidrio es esencialmente cero, o por lo menos muy pequeña comparada con la longitud de onda de la luz, la interferencia es perfectamente destructiva debido al desplazamiento de fase de 180° del rayo reflejado en la superficie inferior aire-vidrio. Por consiguiente, en la figura 35.3*a* la región central es oscura. La primera franja brillante se presenta para un radio tal que la diferencia de caminos es $\lambda/2$ que contribuye a una diferencia de fase de 180°, la cual se suma a la causada por el desplazamiento de fase en la reflexión y produce una diferencia de fase total de 360°, o cero. La segunda región oscura se presenta en un radio para el que la diferencia de caminos es λ, y así sucesivamente.

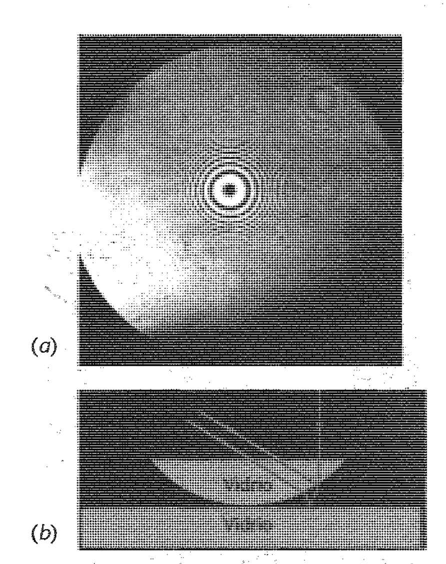
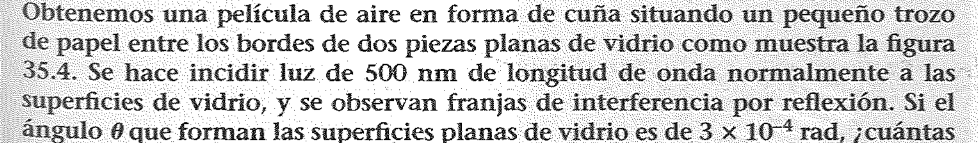


Figura 35.3 (*a*) Anillos de Newton observados con luz reflejada en una película delgada de aire entre un vidrio plano y una superficie de vidrio esférica. En el centro, el espesor de la película de aire es despreciable y la interferencia es destructiva debido al cambio de fase de uno de los rayos. (*b*) Superficies de vidrio para la observación de los anillos de Newton que se ven en (*a*). En este caso, la película delgada es la capa de aire entre ambas superficies de vidrio.



EJEMPLO 35.2

Obtenemos una película de aire en forma de cuña situando un pequeño trozo de papel entre los bordes de dos piezas planas de vidrio como muestra la figura 35.4. Se hace incidir luz de 500 nm de longitud de onda normalmente a las superficies de vidrio, y se observan franjas de interferencia por reflexión. Si el ángulo θ que forman las superficies planas de vidrio es de 3×10^{-4} rad, ¿cuántas franjas de interferencia se observan por unidad de longitud?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

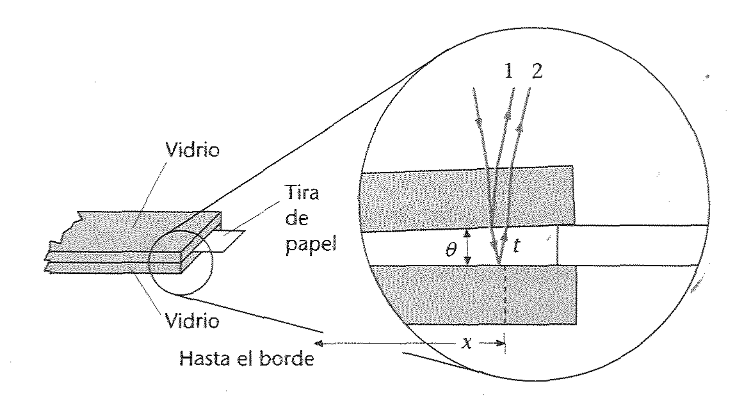


Figura 35.4 El ángulo θ, menor de 0,02°, está exagerado. Los rayos incidente y emergente son esencialmente perpendiculares a todas las interfases aire-vidrio.

Esquema del problema El número de franjas por centímetro se obtiene determinando la distancia horizontal x a la franja m y dividiendo m/x. Como el rayo reflejado en la lámina inferior del vidrio experimenta un cambio de fase de 180°, el punto de contacto (en donde la diferencia de trayectorias es igual a cero) será oscuro. La primera franja oscura después de este punto tiene lugar cuando $2t = \lambda'$, en donde $\lambda' = \lambda$ es la longitud de onda en la película de aire y t es la separación de las placas en x como se indica en la figura 35.4. Como el ángulo θ es pequeño, podemos utilizar la aproximación $\theta \approx t/x$.

1. La franja m-ésima tiene lugar cuando la diferencia de recorridos $2t$ es igual a m longitudes de onda:

$$2t = m\lambda' = m\lambda$$
$$m = \frac{2t}{\lambda}$$

2. El espesor t está relacionado con el ángulo θ:

$$\theta = \frac{t}{x}$$

3. Sustituir $t = x\theta$ en la ecuación correspondiente a m:

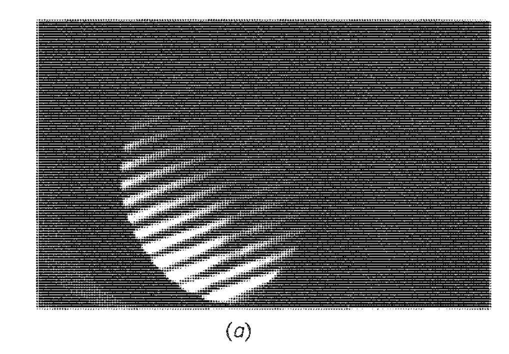
$$m = \frac{2x\theta}{\lambda}$$

4. Calcular m/x:

$$\frac{m}{x} = \frac{2\theta}{\lambda} = \frac{2(3\times10^{-4})}{5\times10^{-7}\ \text{m}} = 1200\ \text{m}^{-1} = 12\ \text{cm}^{-1}$$

Observaciones Podemos, por tanto, observar 12 franjas oscuras por centímetro. En la práctica, el número de franjas por centímetro, que es fácil de contar, puede utilizarse para determinar el ángulo. Obsérvese que si el ángulo de la cuña se incrementa, las franjas se presentan más apretadas.

Ejercicio ¿Cuántas franjas por centímetro se observan si se utiliza luz de longitud de onda 650 nm? (*Respuesta*: 9,2 cm^{-1}.)


(*a*)

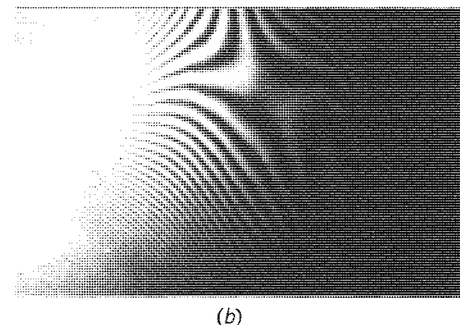

(*b*)

Figura 35.5 (*a*) Franjas en línea recta producidas en una película de aire en forma de cuña como la de la figura 35.4. La rectitud de las franjas nos indica que las placas de vidrio son ópticamente planas. (*b*) Franjas procedentes de una película de aire en forma de cuña contenida entre dos placas de vidrio que no son ópticamente planas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

En la figura 35.5*a* se muestran las franjas de interferencia producidas por una película de aire en forma de cuña que se encuentra entre dos láminas planas de vidrio, tal y como se describe en el ejemplo 35.2. Las placas que producen franjas rectas como las de esta figura se llaman **ópticamente planas**. Una película similar en forma de cuña pero formada entre dos láminas de vidrio ordinario producen un diagrama de franjas tan irregular como el que se muestra en la figura 35.5*b*, lo que indica que estas láminas no son ópticamente planas.

Una aplicación de los efectos de interferencia en láminas delgadas son las lentes no reflectantes. Una lente de este tipo se construye cubriéndola con una delgada película de un material que tiene un índice de refracción de 1,22 aproximadamente, que es un valor comprendido entre el del vidrio y el del aire, de modo que las intensidades de la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película sean aproximadamente iguales. Como ambos rayos sufren un cambio de fase de 180°, no existe diferencia de fase entre ellos debida a la reflexión. El espesor de la película se escoge de modo que sea $\lambda'/4$ en donde $\lambda' = \lambda/n$ y λ' es un valor en la mitad del espectro visible, de modo que se consigue un cambio de fase de 180° debido a la diferencia de trayectos de $\lambda'/2$. Así se reduce al mínimo la reflexión en la superficie recubierta de esta manera.

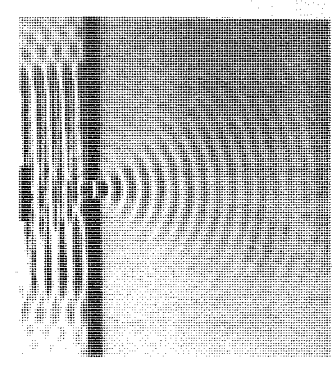


Figura 35.6 Ondas de agua planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una pequeña abertura. Las ondas a la derecha de la barrera son ondas circulares concéntricas con la abertura, como si allí existiese una fuente puntual.

Diagrama de interferencia de dos rendijas ■ 35.3

Los diagramas de interferencia de la luz procedentes de dos o más focos solo pueden observarse si los focos son coherentes. Las interferencias en láminas delgadas tratadas anteriormente se observan porque los dos haces procedentes de la misma fuente luminosa han sido separados por reflexión. En el famoso experimento ideado por Thomas Young en 1801 en el que demostró la naturaleza ondulatoria de la luz, se producían dos fuentes luminosas coherentes iluminando dos rendijas paralelas con una sola fuente. En el capítulo 15 vimos que cuando una onda se encuentra con una barrera que posee una abertura muy pequeña, ésta actúa como fuente puntual de ondas (figura 35.6). En el experimento de Young cada rendija actúa como una fuente lineal (que es equivalente a una fuente puntual en dos dimensiones). El diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla bastante alejada de las rendijas (figura 35.7*a*) que están separadas entre sí en una distancia d. A distancias muy grandes de las rendijas, las líneas que van desde las mismas a un cierto punto P sobre la pantalla son aproximadamente paralelas y la diferencia de trayectos es aproximadamente d sen θ, como se indica en la figura 35.7*b*. Así pues, tenemos máximos de interferencia en unos ángulos dados por

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{35.2}$$

Máximos de interferencia de dos rendijas

en donde m se llama **número de orden**. Los mínimos de interferencia se presentan en

$$d \operatorname{sen} \theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{35.3}$$

Mínimos de interferencia de dos rendijas

La diferencia de fase δ en un punto P es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta \tag{35.4}$$

La distancia y_m, medida sobre la pantalla desde el punto central a la m-ésima franja brillante (véase figura 35.7*b*) está relacionada con la distancia L desde las rendijas a la pantalla por la expresión

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_m}{L}$$

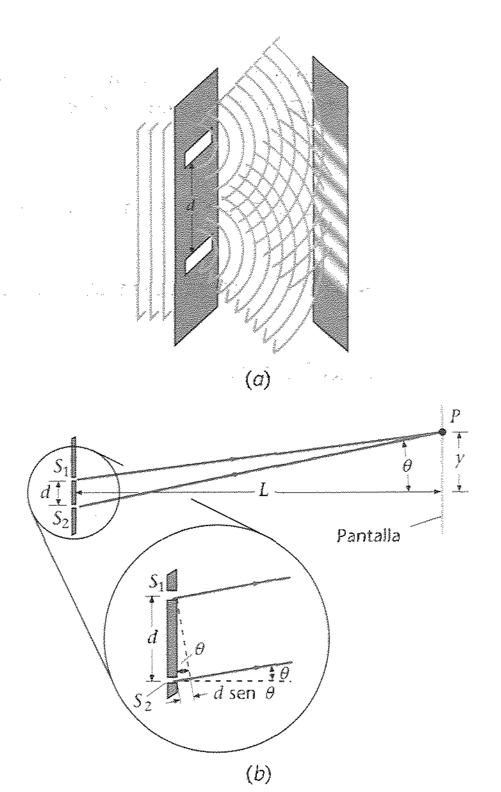


Figura 35.7 (*a*) Dos rendijas actúan como fuentes coherentes de luz para la observación de la interferencia en el experimento de Young. Las ondas cilíndricas procedentes de las rendijas se solapan y producen un diagrama de interferencia sobre una pantalla lejana. (*b*) Construcción geométrica para calcular la relación entre la distancia y medida sobre la pantalla con L y θ. Debido a que la pantalla está muy lejos en comparación con la separación entre rendijas, los rayos procedentes de éstas que van a un punto de la pantalla son casi paralelos y la diferencia de trayectos entre ambos es d sen θ.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Para ángulos pequeños (que es casi siempre el caso) tg $\theta \approx$ sen θ. Sustituyendo sen θ por y_m/L en la ecuación 35.2 y despejando y_m resulta

$$y_m = m\frac{\lambda L}{d} \tag{35.5}$$

Distancia sobre la pantalla a la franja brillante m-ésima

Obsérvese que según este resultado, las franjas están igualmente separadas entre sí sobre la pantalla.

Cálculo de la intensidad

Para calcular la intensidad en un punto cualquiera P de la pantalla, es necesario sumar dos funciones de onda armónicas que difieran en fase.[1] Las funciones de onda para las ondas electromagnéticas son los vectores del campo eléctrico. Sea E_1 el campo eléctrico en un punto P de la pantalla generado por las ondas procedentes de la rendija 1, y sea E_2 el campo eléctrico generado por las ondas procedentes de la rendija 2. Como los ángulos que nos interesan son muy pequeños, podemos suponer que los campos son paralelos y considerar sólo sus magnitudes. Ambos campos eléctricos oscilan con la misma frecuencia (ya que ambos proceden de una única fuente que ilumina a ambas rendijas) y poseen la misma amplitud. (La diferencia de caminos es sólo del orden de unas pocas longitudes de onda de la luz.) La diferencia de fase δ viene dada por la ecuación 35.4. Si representamos estas funciones de onda por

$$E_1 = A_0 \text{ sen } \omega t \qquad \text{y} \qquad E_2 = A_0 \text{ sen } (\omega t + \delta)$$

la función de onda resultante es

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = A_0 \text{ sen } \omega t + A_0 \text{ sen } (\omega t + \delta) \\ &= 2A_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta \text{ sen } (\omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \end{aligned} \tag{35.6}$$

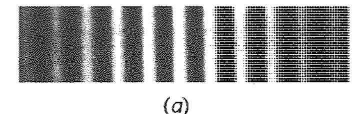
en donde se ha utilizado la expresión

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \text{ sen } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \tag{35.7}$$

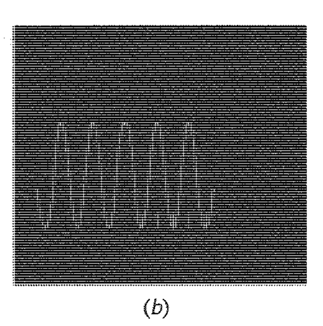
La amplitud de la onda resultantes es $2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta$. Posee su valor máximo igual a $2A_0$ cuando las ondas se encuentran en fase y es igual a cero cuando están desfasadas 180°. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad en el punto P es

$$I = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\delta \tag{35.8}$$

Intensidad en función de la diferencia de fase



(a)



(b)

Figura 35.8 (a) Diagrama de interferencia observado sobre la pantalla alejada de las dos rendijas de la figura 33.7. (b) Representación de la intensidad en función del sen θ. La intensidad máxima es $4I_0$, siendo I_0 la intensidad debida a cada rendija por separado. La intensidad media (línea a trazos) es $2I_0$.

en donde I_0 es la intensidad de la luz que se obtiene en la pantalla para cualquiera de las rendijas por separado. El ángulo de fase δ está relacionado con la posición sobre la pantalla para la ecuación 35.4.

La figura 35.8*a* muestra el diagrama de intensidad como se ve en la pantalla. Se indica un gráfico de la intensidad en función del sen θ en la figura 35.8*b*. Cuando θ es pequeño, es equivalente a una representación de la intensidad en función de y puesto que $y \approx L$ sen θ. La intensidad I_0 es la que produce cada rendija por separado. La línea a trazos de esta figura muestra la intensidad media, $2I_0$, que es el resultado de promediar sobre muchos máximos y mínimos de interferencia. Sería la intensidad que se obtendría de las dos fuentes si actuasen independientemente sin interferencia. En otras palabras, es la intensidad que se observaría si las fuentes fuesen incoherentes, porque entonces

[1] Vimos esto en el capítulo 16 al tratar la superposición general de dos ondas.

www.elsolucionario.net

existiría una diferencia de fase adicional entre ellas que fluctuaría al azar de modo que sólo podría observarse la intensidad media.

Mediante el dispositivo que se muestra en la figura 35.9, que se conoce con el nombre de **espejo de Lloyd**, se puede seguir otro método para producir un diagrama de interferencia de dos rendijas. Se sitúa una sola rendija a una distancia igual a $\frac{1}{2}d$ por encima del plano de un espejo. La luz procedente del foco que incide directamente sobre la pantalla interfiere con la reflejada en el espejo. Se puede considerar que la luz reflejada procede de la imagen virtual de la rendija formada por el espejo. Debido al cambio de fase de 180° en la reflexión en el espejo, el diagrama de interferencia es el de dos fuentes rectilíneas coherentes que difieren en fase en 180°. El diagrama es el mismo que el de la figura 35.8 para dos rendijas exceptuando el hecho de que los máximos y los mínimos están intercambiados. La franja central situada justo encima del espejo en un punto equidistante de los focos es oscura. Se produce interferencia constructiva en los puntos para los cuales la diferencia de caminos es de media longitud de onda o cualquier número impar de medias longitudes de onda. En estos puntos, la diferencia de fase de 180° debida a la diferencia de caminos se combina con la diferencia de fase de 180° de las fuentes para producir una interferencia constructiva.

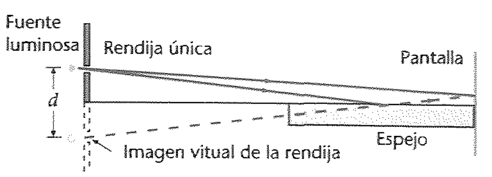


Figura 35.9 Espejo de Lloyd para producir un diagrama de interferencia de doble rendija. Las dos fuentes (fuente luminosa y su imagen) son coherentes y están desfasadas 180°. La banda central de interferencia en el punto equidistante de las fuentes es oscura.

EJEMPLO 35.3 ■

¡Inténtelo!

Dos rendijas estrechas distantes entre sí 1,5 mm se iluminan con luz amarilla de una lámpara de sodio de 589 nm de longitud de onda. Las franjas de interferencia se observan sobre una pantalla situada a 3 m de distancia. Hallar la separación de las franjas sobre la pantalla.

Esquema del problema La distancia y_m medida a lo largo de la pantalla hasta la franja brillante m-ésima viene dada por la ecuación 35.5, con $L = 3$ m, $d = 1{,}5$ mm y $\lambda = 589$ nm. La separación entre franjas es igual a esta distancia dividida por el número de franjas, o sea y_m/m.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Resolver la ecuación 35.5 para y_m/m:	$\frac{y_m}{m} = \lambda \frac{L}{d}$
2. Reemplazar por los datos del problema:	$\frac{y_m}{m} = 1{,}18$ mm

Ejercicio Un foco de luz puntual ($\lambda = 589$ nm) está situado 0,4 mm por encima de un espejo. Se observan franjas de interferencia en una pantalla situada a 6 m. Hallar la separación de las franjas en la pantalla. (*Respuesta*: 4,42 mm.)

Diagrama de difracción de una sola rendija ■ 35.4

En nuestro estudio de los diagramas de interferencia producidos por dos o más rendijas, hemos supuesto que éstas eran muy estrechas, de modo que podíamos considerarlas como fuentes lineales que generan ondas cilíndricas, que en nuestros diagramas bidimensionales son focos puntuales de ondas circulares. Por consiguiente, podíamos admitir que la intensidad debida a una sola rendija que actuara aislada era la misma (I_0) en cualquier punto P sobre la pantalla con independencia del ángulo θ formado entre el rayo dirigido al punto P y la recta normal entre la rendija y la pantalla. Cuando la rendija no es estrecha, la intensidad recibida en una pantalla alejada no es independiente del ángulo sino que disminuye cuando aumenta el ángulo. Consideremos una rendija de anchura a. La figura 35.10 muestra el diagrama de intensidad sobre una pantalla lejana

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

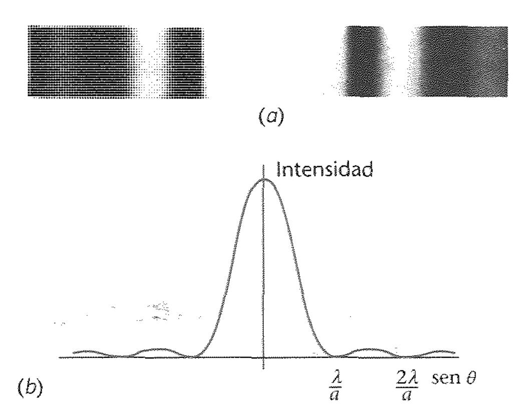


Figura 35.10 (*a*) Diagrama de difracción de una sola rendija observado sobre una pantalla lejana. (*b*) Representación de la intensidad en función del sen θ correspondiente al diagrama en (*a*).

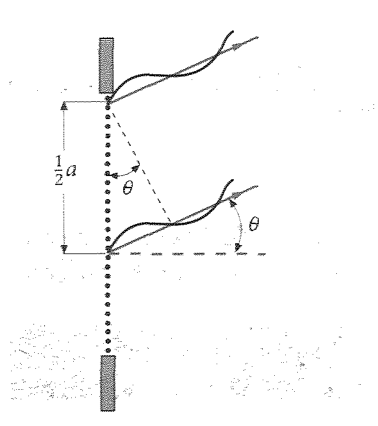


Figura 35.11 Una sola rendija se representa mediante un gran número de focos o fuentes puntuales de igual amplitud. En el primer mínimo de difracción de una rendija, las ondas procedentes del foco junto a la parte superior de la misma y las que proceden del foco justo debajo del punto medio de la rendija están desfasadas en 180° y se anulan entre sí, como ocurre con todos los demás pares de focos.

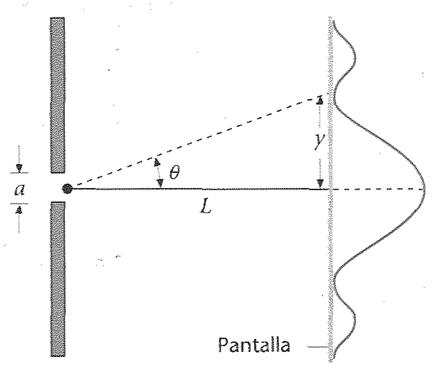


Figura 35.12 La distancia y medida sobre la pantalla desde el máximo central al primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ por tg $\theta = y/L$, en donde L es la distancia a la pantalla. Como el ángulo es muy pequeño, tg $\theta \approx$ sen θ. Entonces $y = L$ tg $\theta \approx L$ sen $\theta = L\,\lambda/a$.

respecto a la rendija de anchura a en función del sen θ. Podemos ver que la intensidad es máxima en la dirección normal (sen $\theta = 0$) y disminuye hasta cero para un ángulo que depende de la anchura de la rendija a y de la longitud de onda λ. La mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en un amplio **máximo central de difracción**, aunque existen bandas de máximos secundarios menores a cada lado del máximo central. Los primeros valores nulos de intensidad se presentan para ángulos dados por

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\lambda}{a} \qquad \textbf{(35.9)}$$

Obsérvese que para una longitud de onda determinada λ, la anchura del máximo central varía en razón inversa con la anchura de la rendija. Es decir, si *aumentamos* la anchura de la rendija a, el ángulo θ en que la intensidad se anula por vez primera *disminuye*, originándose un máximo de difracción central más estrecho. Inversamente si *disminuye* la anchura de la rendija, el ángulo correspondiente al primer mínimo *aumenta*, dando así un máximo central de difracción más ancho. Cuando a es muy pequeña, no existen puntos de intensidad nula en el diagrama y la rendija actúa como una fuente lineal (un foco puntual en dos dimensiones), radiando energía luminosa esencialmente por igual en todas direcciones.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación 35.9 por a resulta

$$a\ \text{sen}\ \theta = \lambda \qquad \textbf{(35.10)}$$

La cantidad a sen θ es la diferencia de caminos entre un rayo de luz que sale de la parte superior de la rendija y otro que sale de su parte inferior. Vemos que el primer mínimo de difracción se produce cuando estos dos rayos están en fase, es decir, cuando su diferencia de caminos es de 1 longitud de onda. Podemos comprender este resultado considerando cada punto sobre un frente de onda como si fuese un foco luminoso puntual de acuerdo con el principio de Huygens. En la figura 35.11, hemos colocado una línea de puntos sobre el frente de ondas en la rendija para representar esquemáticamente estos focos puntuales. Supongamos, por ejemplo, que tenemos 100 de dichos puntos y que estamos observando bajo un ángulo θ para el que a sen $\theta = \lambda$, es decir, el ángulo para el que las ondas procedentes de la parte superior e inferior de la rendija están en fase. Consideremos la rendija dividida en dos regiones, con los primeros 50 puntos en la primera de ellas, región superior, y los focos del 51 al 100 en la región segunda, inferior. Cuando la diferencia de caminos entre la parte superior y la inferior de la rendija es igual a una longitud de onda, la diferencia de caminos entre el foco 1 (el primer foco de la región superior) y el foco 51 (el primer foco de la región inferior) es $\frac{1}{2}$ longitud de onda. Las ondas procedentes de estos dos focos estarán desfasadas en 180° y, por tanto se anularán mutuamente. Análogamente, las ondas procedentes del segundo foco en cada región (foco 2 y foco 52) se cancelarán. Continuando con este argumento podemos ver que las ondas procedentes de cada par de focos separados entre sí en $a/2$ se cancelarán. Así pues, no existirá energía luminosa bajo este ángulo. Podemos ampliar este argumento al segundo y tercer mínimos en el diagrama de difracción de la figura 35.10. Para un ángulo tal que a sen $\theta = 2\lambda$, podemos dividir la rendija en cuatro regiones, dos en la mitad superior y otras dos en la mitad inferior. Utilizando el mismo razonamiento, la intensidad de la luz de la mitad superior es cero por la cancelación de pares de focos y, análogamente, ocurre lo mismo con la segunda mitad. La expresión general para los puntos de intensidad cero en el diagrama de difracción de una sola rendija es pues

$$a\ \text{sen}\ \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(35.11)}$$

Puntos de intensidad cero en un diagrama de difracción de una sola rendija

Normalmente sólo nos interesa la presencia del primer mínimo de intensidad luminosa porque casi toda la energía luminosa se encuentra contenida en el máximo de difracción central.

En la figura 35.12 la distancia y desde el máximo central al primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ y la distancia L que separa la rendija de la pantalla por

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{L}$$

Como este ángulo es muy pequeño, tg $\theta \approx$ sen θ. Por ello, de acuerdo con la ecuación 35.11, sen $\theta = \lambda/a \approx y/L$, o sea,

$$y = \frac{L\lambda}{a} \qquad (35.12)$$

EJEMPLO 35.4 ■

En un experimento en clase para demostrar la difracción por una sola rendija, se hace pasar el haz de un láser de 700 nm de longitud de onda a través de una rendija vertical de 0,2 mm de ancho que luego incide sobre una pantalla a 6 m de distancia. Hallar la anchura del máximo de difracción central sobre la pantalla, es decir, la distancia entre el primer mínimo a la izquierda y el primer mínimo a la derecha del máximo central.

Esquema del problema Según la figura 35.12, la anchura del máximo central de difracción es $2y$.

Reemplazar por los datos del problema para calcular $2y$ a partir de la ecuación 35.12:

$$2y = \frac{2L\lambda}{a} = \frac{2(6\text{ m})(700 \times 10^{-9}\text{ m})}{0{,}0002\text{ m}} = 4{,}2 \times 10^{-2}\text{ m} = 4{,}2\text{ cm}$$

Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas ■

Cuando se tienen dos o más rendijas, el diagrama de intensidad obtenido sobre una pantalla lejana es una combinación del diagrama de difracción de una sola rendija y el diagrama de interferencia de varias rendijas, que ya hemos estudiado. En la figura 35.13 se ve el diagrama de intensidad obtenido sobre una pantalla originado por dos rendijas cuya separación d es 10 veces la anchura a de cada una de ellas. El diagrama es el mismo que el obtenido por la interferencia de dos rendijas muy estrechas (figura 35.10) excepto en que se encuentra modulado por el diagrama de difracción de una sola rendija; es decir, la intensidad debida a cada rendija por separado no es ahora constante sino que disminuye con el ángulo, como se indica en la figura 35.13*b*.

Obsérvese que en la figura 35.13 el máximo central de difracción contiene 19 máximos de interferencia —el máximo central de interferencia y 9 máximos a cada lado. El décimo máximo de interferencia a cada lado del central está en un ángulo θ dado por sen $\theta = 10\lambda/d = \lambda/a$, puesto que $d = 10a$. Este valor coincide con el primer mínimo de difracción de modo que este máximo de interferencia no se ve. En estos puntos, la luz procedente de las dos rendijas se encontraría en fase e interferirían constructivamente, pero no existe la luz de ninguna de ellas porque esos puntos son mínimos de difracción. En general, vemos que si $m = d/a$ el máximo m-ésimo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción. Como la franja m-ésima no se ve, existirán $m - 2$ franjas a cada lado de la franja central para un total de N franjas en el máximo central en donde N viene dado por

$$N = 2(m-1) + 1 = 2m - 1 \qquad (35.13)$$

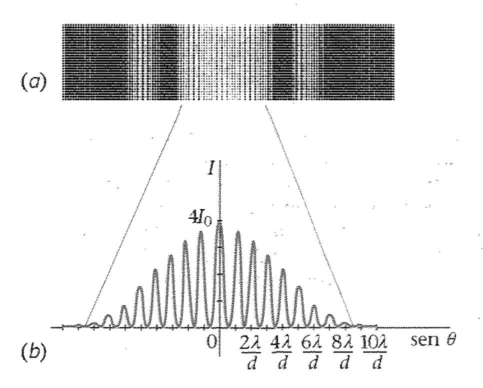


Figura 35.13 (*a*) Diagrama de interferencia-difracción correspondiente a dos rendijas cuya separación d es igual a 10 veces su anchura a. Se pierde el décimo máximo de interferencia a cada lado del máximo de interferencia central porque cae en el primer mínimo de difracción. (*b*) Representación de la intensidad en función del sen θ correspondiente a la banda central del diagrama en (*a*).



EJEMPLO 35.5 ■

Dos rendijas de anchura a = 0,015 mm están separadas por una distancia d = 0,06 mm y se encuentran iluminadas por luz de longitud de onda λ = 650 nm. ¿Cuántas franjas brillantes se ven en el máximo central de difracción?

Esquema del problema Ante todo debemos determinar el valor de m para el cual el máximo m-ésimo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción. Por tanto, existirán $N = 2m - 1$ franjas en el máximo central.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

1. Determinar el ángulo θ_1 del primer mínimo de difracción: $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ (primer mínimo de difracción)

2. Determinar el ángulo θ_m del m-simo máximo de interferencia: $\operatorname{sen}\theta_m = \frac{m\lambda}{d}$ (m-ésimo máximo de interferencia)

3. Igualar estos ángulos y despejar m:

$$\frac{m\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}$$

$$m = \frac{d}{a} = \frac{0{,}06\text{ nm}}{0{,}015\text{ nm}} = 4$$

4. Utilizar $N = 2m - 1$ para determinar el número de franjas brillantes del máximo central: $N = 2m - 1 = 2(4) - 1 = 7$ franjas

Observaciones El primer mínimo de difracción coincide con la cuarta franja brillante. Por tanto existen tres franjas brillantes visibles a cada lado del máximo central de difracción. Estos seis máximos, más el máximo central de interferencia se combinan dando un total de 7 franjas brillantes en el máximo de difracción central.

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

35.5 Suma de ondas armónicas mediante fasores

Para calcular el diagrama de interferencia producido por tres, cuatro o más focos coherentes y el diagrama de difracción de una sola rendija, es necesario combinar varias ondas armónicas de la misma frecuencia pero que difieren en fase. Una interpretación geométrica de las funciones de onda armónicas conduce a un método general de suma de ondas armónicas de la misma frecuencia mediante una construcción geométrica.

Sean $E_1 = A_1 \operatorname{sen}\alpha$ y $E_2 = A_2 \operatorname{sen}(\alpha + \delta)$, donde $\alpha = \omega t$, las funciones de onda de dos ondas consideradas en un determinado punto. Nuestro problema es determinar la suma

$$E_1 + E_2 = A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}(\alpha + \delta)$$

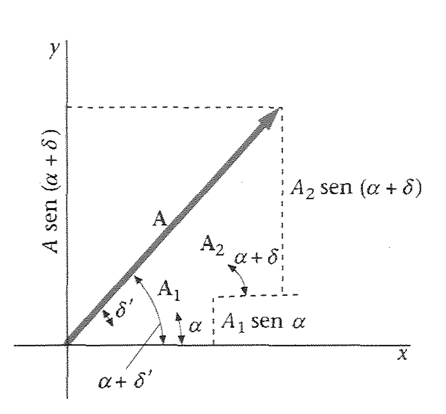


Figura 35.14 Representación mediante fasores de las funciones de onda.

Podemos representar cada función de onda por un vector bidimensional como se indica en la figura 35.14. El método geométrico de la suma se basa en el hecho de que el componente y (o el x) de la resultante de dos vectores es igual a la suma de los componente y (o el x) de los vectores, como se ilustra en la figura. La función de onda y_1 viene representada por el vector $\mathbf{A}_1$. A medida que transcurre el tiempo, este vector gira en el plano xy con frecuencia angular ω. Este vector se llama **fasor**. (Ya vimos los fasores en la sección 31.4 al estudiar los circuitos de ca.) La función de onda E_2 es el componente y de un fasor de magnitud A_2 que forma un ángulo $\alpha + \delta$ con el eje x. Según las leyes de la adición vectorial, la suma de estos componentes es igual al componente y del fasor resultante $\mathbf{A}$, como se indica en la figura 35.14. El componente y del fasor resultante, $A \operatorname{sen}(\alpha + \delta')$, es una función de onda armónica que es la suma de las dos funciones de onda originales.

$$A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}(\alpha + \delta) = A \operatorname{sen}(\alpha + \delta') \qquad \textbf{(35.14)}$$

en donde A (la amplitud de la onda resultante) y δ' (la fase de la onda resultante respecto a la primera onda) se pueden hallar sumando los fasores que representan las ondas. Al variar el tiempo, α varía. Los fasores que representan las dos funciones de onda y el fasor resultante que representa la función de onda resultante giran en el espacio, pero sus posiciones relativas no varían debido a que todos giran con la misma velocidad angular ω.

Utilizar el método de suma de fasores para deducir la ecuación 35.14 corresponde a la superposición de dos ondas de la misma amplitud.

EJEMPLO 35.6

¡Inténtelo!

OPCIONAL

Esquema del problema Representar las ondas $y_1 = A_0$ sen α e $y_2 = A_0$ sen $(\alpha + \delta)$ por fasores de longitud A_0 que formen entre sí un ángulo δ. La onda resultante $y_r = A$ sen $(\alpha + \delta')$ viene representada por la suma de estos vectores que forman un triángulo isósceles como se muestra en la figura 35.15.

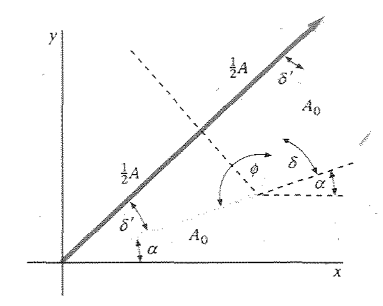


Figura 35.15

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Determinar el ángulo de fase δ' en función de ϕ, teniendo en cuenta que los tres ángulos internos del triángulo deben sumar 180°.	$\delta' + \delta' + \phi = 180°$
2. Relacionar ϕ con δ.	$\delta + \phi = 180°$
3. Eliminar ϕ y despejar δ'.	$\delta' = \frac{1}{2}\delta$
4. Expresar cos δ' en función de A y A_0.	$\cos \delta' = \dfrac{\frac{1}{2}A}{A_0}$
5. Despejar estos resultados de δ.	$A = 2A_0 \cos \delta' = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta$
6. Utilizar estos resultados de A y δ' para expresar la función de onda resultante.	$y_r = A \text{ sen } (\alpha + \delta') = (2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta) \text{sen } (\alpha + \frac{1}{2}\delta)$

Ejercicio Calcular la resultante de las siguientes dos ondas: $E_1 = 4$ sen (ωt) y $E_2 = 3$ sen $(\omega t + 90°)$. (*Respuesta*: $E_1 + E_2 = 5$ sen $(\omega t + 37°)$.)

Diagrama de interferencia de tres o más fuentes igualmente espaciadas

El método de adición de fasores puede aplicarse al cálculo del diagrama de interferencia de tres o más focos coherentes, en fase e igualmente espaciados. Nos interesan particularmente los máximos y mínimos de interferencia. La figura 35.16 ilustra el caso de tres fuentes. La geometría es la misma que en el caso de las dos fuentes. A una distancia grande de las fuentes los rayos procedentes de ellas y que llegan a un punto P de la pantalla son aproximadamente paralelos. La diferencia de caminos entre la primera y la segunda fuente es entonces d sen θ, como antes, y entre la primera y tercera fuente la diferencia de caminos es de $2d$ sen θ. La onda en el punto P es la suma de las tres ondas. Sea $\alpha = \omega t$ la fase de la primera onda en el punto P. Así pues, tenemos el problema de sumar tres ondas de la forma

$$E_1 = A_0 \text{ sen } \alpha$$
$$E_2 = A_0 \text{ sen } (\alpha + \delta) \qquad \textbf{(35.15)}$$
$$E_3 = A_0 \text{ sen } (\alpha + 2\delta)$$

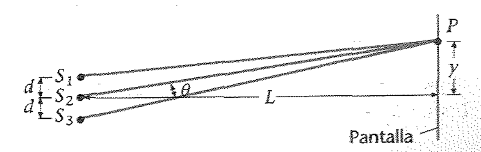


Figura 35.16 Construcción geométrica para calcular el diagrama de intensidad obtenido lejos de tres fuentes igualmente separadas que están en fase.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

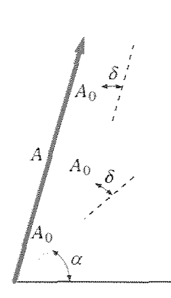


Figura 35.17 Diagrama de fasores para determinar la amplitud resultante A debida a tres ondas, cada una de ellas de amplitud A_0, que tienen diferencias de fase de δ y 2δ debidas a diferencias de caminos de d sen θ y $2d$ sen θ. En ángulo $\alpha = \omega t$ varía con el tiempo pero no influye en el cálculo de A.

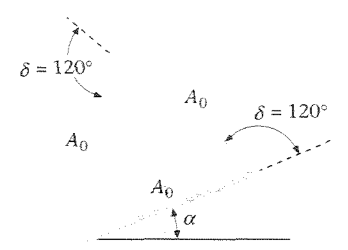


Figura 35.18 La amplitud resultante correspondiente a las ondas procedentes de tres focos es cero cuando δ es 120°. Este mínimo de interferencias se presenta para un ángulo θ menor que el correspondiente al primer mínimo con dos focos, que se presenta cuando δ es 180°.

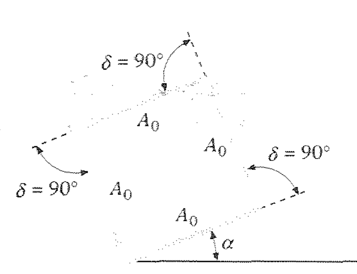


Figura 35.19 Diagrama de fasores para el primer mínimo en el caso de cuatro fuentes en fase e igualmente espaciadas. La amplitud es nula cuando la diferencia de fase de las ondas procedentes de fuentes adyacentes es 90°.

en donde

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\, d \text{ sen } \theta \approx \frac{2\pi}{\lambda}\frac{yd}{L} \tag{35.16}$$

como en el problema de las dos rendijas.

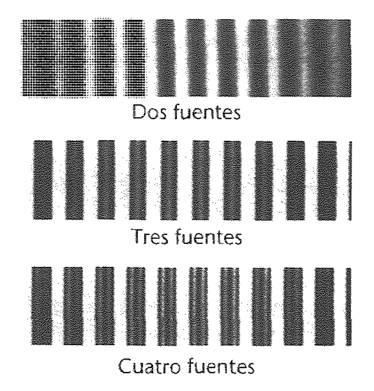
En el punto del máximo central, $\theta = 0$, $\delta = 0$ y todas las ondas están en fase. La amplitud de la onda resultante es tres veces la de cada onda individual. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad en este máximo central es 9 veces la correspondiente a cada fuente actuando separadamente. Cuando el ángulo θ aumenta desde $\theta = 0$, el ángulo de fase δ aumenta y disminuye la intensidad. Por tanto, la posición $\theta = 0$ es una posición de intensidad máxima.

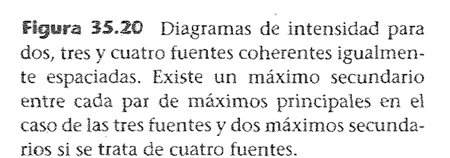
La figura 35.17 muestra la suma de fasores de tres ondas correspondientes a un ángulo de fase δ de aproximadamente 30°. (Esto corresponde a un punto P situado en la pantalla para el cual θ viene dado por sen $\theta = \lambda\delta/2\pi d = \lambda/12d$.) La amplitud resultante es considerablemente menor que tres veces la de cada fuente. Cuando aumenta el ángulo de fase δ, la amplitud resultante disminuye hasta que la amplitud resulta ser nula para $\delta = 120°$. En el caso de esta diferencia de fases, los tres fasores forman un triángulo equilátero (figura 35.18). El primer mínimo de interferencia para tres focos se presenta para un ángulo de fase menor (y, por tanto, para un ángulo espacial θ menor) que en el caso de sólo dos focos (en este caso el primer mínimo se presenta a $\delta = 180°$). Cuando δ aumenta a partir de 120°, la amplitud resultante crece y se llega a un **máximo secundario** cerca de $\delta = 180°$. En el ángulo de fase $\delta = 180°$, la amplitud es la misma que se tendría para una sola fuente puesto que las ondas de las dos primeras fuentes se cancelan entre sí, quedando sólo la tercera. La intensidad de este máximo secundario es un noveno del máximo en $\theta = 0$. Cuando δ aumenta más allá de 180°, la amplitud disminuye nuevamente y es nula para $\delta = 180° + 60° = 240°$. Para δ mayor que 240°, la amplitud crece y es de nuevo igual a tres veces la de cada foco cuando $\delta = 360°$. Este ángulo de fase corresponde a una diferencia de caminos de 1 longitud de onda para las ondas de las dos primeras fuentes y de 2 longitudes de onda para las ondas de la primera y tercera fuente. Por tanto, las tres ondas están en fase en este punto. Los máximos más grandes, denominados **máximos principales**, están en las mismas posiciones que cuando sólo existen dos fuentes, y corresponden a los puntos en que los ángulos θ vienen dados por

$$d \text{ sen } \theta = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{35.17}$$

Estos máximos son más intensos y más estrechos que los que aparecen con sólo dos fuentes. Se presentan en los puntos en que la diferencia de caminos entre focos adyacentes es cero o un número entero de longitudes de onda.

Estos resultados pueden generalizarse a más de tres fuentes. Por ejemplo, si tenemos cuatro fuentes en fase igualmente espaciadas, los máximos de interferencia vienen de nuevo dados por la ecuación 35.17, pero los máximos son todavía más estrechos y existen dos pequeños máximos secundarios entre cada par de máximos principales. Para $\theta = 0$, la intensidad es 16 veces la correspondiente a una sola fuente. El primer mínimo de interferencia se presenta cuando δ es 90°, como puede verse mediante el diagrama de fasores de la figura 35.19. El primer máximo secundario está próximo a $\delta = 120°$, en




Figura 35.20 Diagramas de intensidad para dos, tres y cuatro fuentes coherentes igualmente espaciadas. Existe un máximo secundario entre cada par de máximos principales en el caso de las tres fuentes y dos máximos secundarios si se trata de cuatro fuentes.

www.elsolucionario.net

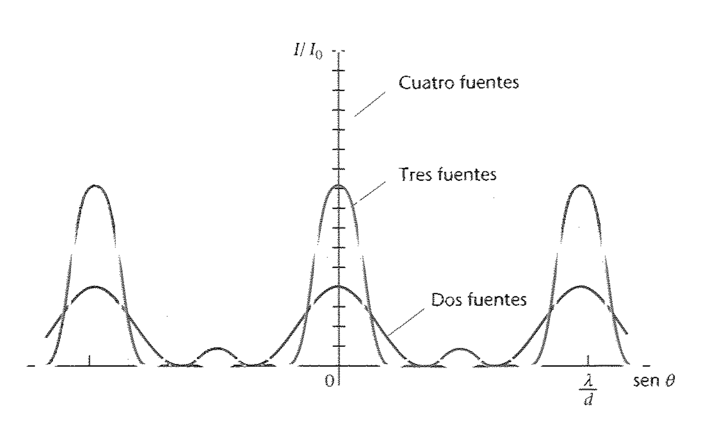


Figura 35.21 Representación de la intensidad en función del sen θ para dos, tres y cuatro fuentes coherentes igualmente espaciadas.

OPCIONAL

donde las ondas procedentes de tres de las fuentes se cancelan dejando solamente la onda que procede de la cuarta fuente. La intensidad del máximo secundario es aproximadamente un dieciseisavo de la correspondiente al máximo central. Existe otro mínimo para $\delta = 180°$, otro máximo secundario cerca de $\delta = 240°$ y otro mínimo para $\delta = 270°$ antes del máximo principal siguiente que corresponde a $\delta = 360°$.

La figura 35.20 muestra los diagramas de intensidad para dos, tres y cuatro fuentes igualmente espaciadas. La figura 35.21 muestra un gráfico de I/I_0, en donde I_0 es la intensidad debida a cada fuente actuando por separado. En el caso de tres fuentes existe un máximo secundario muy pequeño entre cada par de máximos principales, y éstos son más nítidos, más agudos y más intensos que los debidos a sólo dos fuentes. Si se tienen cuatro fuentes, aparecen dos pequeños máximos secundarios entre cada par de máximos principales y estos últimos son todavía más estrechos e intensos.

A partir de estos comentarios, podemos ver que al aumentar el número de fuentes, la intensidad se concentra cada vez más en los máximos principales dados por la ecuación 35.17 y estos máximos se hacen cada vez más estrechos. Si se tienen N fuentes, la intensidad de los máximos principales es N^2 veces la debida a una sola de ellas. El primer mínimo se presenta en un ángulo de fase de $\delta = 360°/N$, puesto que los N fasores forman entonces un polígono cerrado de N lados. Existen $N - 2$ máximos secundarios entre cada par de máximos principales. Estos máximos secundarios son muy débiles comparados con los máximos principales. Cuando aumenta el número de fuentes, los máximos principales se hacen cada vez más agudos y más intensos, mientras que las intensidades de los máximos secundarios se hacen despreciables frente a las de los máximos principales.

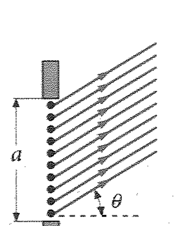


Figura 35.22 Esquema para el cálculo del diagrama de interferencias lejos de una rendija estrecha. Se supone que la rendija de anchura a contiene un gran número de fuentes puntuales en fase separadas por una distancia d. Los rayos procedentes de estas fuentes que terminan en un punto muy alejado son aproximadamente paralelos. La diferencia de caminos para las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes, es, pues, d sen θ.

www.elsolucionario.net

Cálculo del diagrama de difracción producido por una sola rendija

A continuación calcularemos el diagrama de intensidad indicado en la figura 35.10 utilizando el método de los fasores para sumar ondas armónicas. Supondremos que se divide en N intervalos la rendija de anchura a y que existe un foco puntual de ondas en el punto medio de cada intervalo (figura 35.22). Si la distancia entre dos fuentes adyacentes es d y a es la anchura de la abertura tenemos $d = a/N$. Como la pantalla sobre la cual estamos calculando la intensidad está muy alejada de las fuentes, los rayos procedentes de éstas y que llegan hasta un punto P de dicha pantalla son aproximadamente paralelos. La diferencia de trayectos entre dos fuentes cualesquiera adyacentes es entonces d sen θ y la diferencia de fases es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ sen } \theta$$

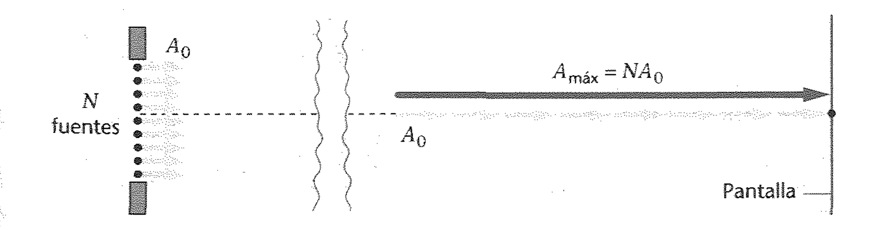


Figura 35.23 Una sola rendija se representa por N fuentes de amplitud A_0. En el punto máximo central con $\theta = 0$, las ondas procedentes de las mismas se suman en fase, dando una amplitud resultante $A_{max} = NA_0$.

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

$\delta = \frac{360°}{N}$

Figura 35.24 Diagrama de fasores correspondiente al primer mínimo en el diagrama de difracción de una sola rendija. Cuando las ondas procedentes de las N fuentes se cancelan completamente, los N fasores forman un polígono cerrado. La diferencia de fase entre ondas procedentes de fuentes adyacentes es entonces $\delta = 360°/N$. Cuando N es muy grande, las ondas procedentes de la primera y última fuentes están aproximadamente en fase.

Si A_0 es la amplitud debida a una sola fuente, la amplitud en el punto máximo central en donde $\theta = 0$ y todas las ondas están en fase, es $A_{max} = NA_0$ (figura 35.23).

Se encuentra el valor de la amplitud en otro punto en un cierto ángulo θ utilizando el método de fasores para la suma de ondas armónicas. Como en el caso de la suma de 2, 3 o 4 ondas, la intensidad es cero en un punto en el que los fasores que representan las ondas forman un polígono cerrado. En este caso el polígono tiene N lados (figura 35.24). En el primer mínimo, la onda procedente de la primera fuente justo por debajo de la parte superior de la abertura y la que procede de la fuente exactamente debajo del punto medio de la abertura están desfasadas 180°. En este caso las ondas procedentes de la fuente cerca de la parte superior e inferior de la abertura están desfasadas en casi 360°. (La diferencia de fase es realmente 360° – 360°/N.) Así pues, si el número de fuentes es muy grande, se obtiene una anulación completa cuando las ondas procedentes de la primera y última fuente están desfasadas en 360°, lo cual corresponde a una diferencia de caminos de una longitud de onda de acuerdo con la ecuación 35.11.

Podemos calcular ahora la amplitud en un punto general para el cual las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes difieran en una fase igual a δ. La figura 35.25 muestra el diagrama de fasores para la suma de N ondas que difieren en fase de la primera onda en δ, 2δ, ..., $(N-1)\delta$. Cuando N es muy grande y δ muy pequeña, el diagrama de fasores es aproximadamente un arco de circunferencia. La amplitud resultante A es la longitud de la cuerda de este arco. Se calcula esta amplitud resultante en función de la diferencia de fases entre la primera y última onda. A partir de la figura 35.25 tenemos

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\phi = \frac{A/2}{r}$$

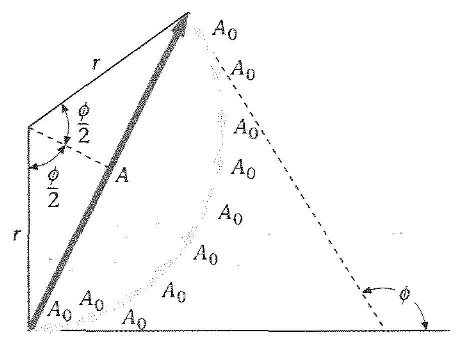


Figura 35.25 Modelo de fasores para el cálculo de la amplitud de las ondas procedentes de N fuentes en función de la diferencia de fase ϕ entre las ondas procedentes de la primera fuente cercana al borde superior de la rendija y la última cercana a su borde inferior. En el caso de que N sea muy grande, la amplitud resultante A es la cuerda de un arco de circunferencia de longitud $NA_0 = A_{max}$.

o bien

$$A = 2r\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\phi \qquad \textbf{(35.18)}$$

en donde r es el radio del arco. Como la longitud del arco es $A_{max} = NA_0$ y el ángulo subtendido es ϕ, tenemos

$$\phi = \frac{A_{max}}{r} \qquad \textbf{(35.19)}$$

o sea,

$$r = \frac{A_{max}}{\phi}$$

Sustituyendo por esta expresión en la ecuación 35.18, se tiene,

$$A = \frac{2A_{max}}{\phi}\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\phi = A_{max}\ \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}$$

Como la amplitud en el punto máximo central ($\theta = 0$) es A_{max}, el cociente entre la intensidad en cualquier otro punto y la del máximo central, viene dado por

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A^2_{max}} = \left(\frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2$$

o sea,

$$I = I_0\left(\frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2 \qquad \textbf{(35.20)}$$

Intensidad de difracción de una sola rendija

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

La diferencia de fase ϕ entre la primera y última onda es $2\pi/\lambda$ veces la diferencia de camino a sen θ entre la parte superior y la inferior de la abertura:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ sen } \theta \qquad \textbf{(35.21)}$$

Las ecuaciones 35.20 y 35.21 describen el diagrama de intensidad de la figura 35.10. El primer mínimo aparece para a sen $\theta = \lambda$, punto en donde las ondas procedentes de la parte superior y de la parte inferior de la abertura tienen una diferencia de caminos de λ y están en fase. El segundo mínimo se presenta para a sen $\theta = 2\lambda$, en donde las ondas que proceden de la parte superior e inferior de la abertura poseen una diferencia de caminos de 2λ.

Existe un máximo secundario aproximadamente a medio camino entre el primero y segundo mínimos para a senθ = $\frac{3}{2}\lambda$. En la figura 35.26 se ve el diagrama de fasores para determinar la intensidad aproximada de este máximo secundario. La diferencia de fases entre la primera y la última onda es aproximadamente 360° + 180°. Los fasores completan así $1\frac{1}{2}$ circunferencias. La amplitud resultante es el diámetro de una circunferencia cuya longitud es dos tercios de la longitud total A_{max}. Si $C = \frac{3}{2}A_{max}$ es el valor de la circunferencia, el diámetro A vale

$$A = \frac{C}{\pi} = \frac{\frac{3}{2}A_{max}}{\pi} = \frac{2}{3\pi} A_{max}$$

y

$$A^2 = \frac{4}{9\pi^2} A^2_{max}$$

La intensidad en este punto es

$$I = \frac{4}{9\pi^2} I_0 = \frac{1}{22{,}2} I_0 \qquad \textbf{(35.22)}$$

Circunferencia $C = \frac{2}{3} NA_0$

$= \frac{2}{3} A_{max} = \pi A$

A

$A = \frac{2}{3\pi} A_{max}$

$A^2 = \frac{4}{9\pi^2} A^2_{max}$

Figura 35.26 Diagrama de fasores para el cálculo de la amplitud aproximada del primer máximo secundario del diagrama de difracción de una sola rendija. Este máximo secundario se produce cerca del punto medio entre el primero y segundo mínimos cuando los N fasores completan $1\frac{1}{2}$ circunferencias.

Cálculo del diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas ■

La intensidad del diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas puede calcularse a partir de la ecuación 35.8 sustituyendo la intensidad de cada rendija (I_0 en dicha ecuación) por la intensidad del diagrama de difracción correspondiente a cada rendija, I, expresada por la ecuación 35.20. Por tanto, la intensidad del diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas será

$$I = 4I_0\left(\frac{\text{sen } \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\delta \qquad \textbf{(35.23)}$$

Intensidad del diagrama interferencia-difracción para dos rendijas

en donde ϕ es la diferencia de fase entre los rayos procedentes de la parte superior e inferior de cada rendija, relacionada con la anchura de cada rendija por

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ sen } \theta$$

y δ es la diferencia de fase entre los rayos procedentes de los centros de dos ranuras adyacentes, la cual está relacionada con la separación entre rendijas por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ sen } \theta$$

En la ecuación 35.23, I_0 es la intensidad a $\theta = 0$ debida a una sola rendija.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

35.6 ■ Difracción de Fraunhofer y de Fresnel

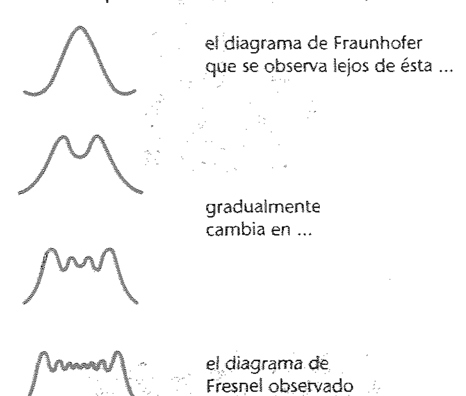
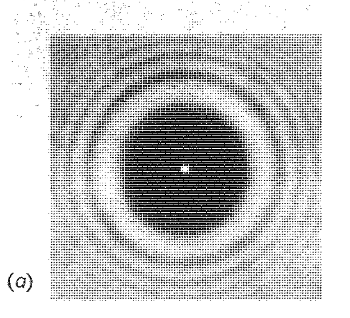


Figura 35.27 Diagrama de difracción correspondientes a una sola rendija a diversas distancias de la pantalla.

Los diagramas de difracción como el de una sola rendija de la figura 35.10, que se observan en puntos desde los cuales se ven casi paralelos los rayos procedentes de una abertura o de un obstáculo se denominan **diagramas de difracción de Fraunhofer**. Estos diagramas pueden observarse a grandes distancias del obstáculo o abertura, de modo que los rayos que alcancen un punto cualquiera sean aproximadamente paralelos, o bien pueden observarse utilizando una lente para enfocar rayos paralelos sobre una pantalla de observación situada en el plano focal de la lente.

Cuando el diagrama de difracción se observa cerca de una abertura o de un obstáculo, se denomina **diagrama de difracción de Fresnel**. Debido a que los rayos procedentes de una abertura o de un obstáculo próximos a una pantalla no pueden considerarse paralelos, la difracción de Fresnel es mucho más difícil de analizar. La figura 35.27 ilustra la diferencia existente entre los diagramas de Fresnel y de Fraunhofer en el caso de una sola rendija.[1]

En la figura 35.28*a* se muestra el diagrama de difracción de Fresnel de un disco opaco iluminado por luz procedente de un foco situado sobre su eje. Obsérvese el punto brillante en el centro del diagrama causado por la interferencia constructiva de las ondas luminosas difractadas desde el borde del disco. Este diagrama tiene cierto interés histórico. En un intento de desacreditar la teoría ondulatoria de Fresnel, Poisson señaló que esta teoría predecía la existencia de un punto brillante en el centro de la sombra undisco, hecho que consideraba una contradicción ridícula. Sin embargo, Fresnel inmediatamente demostró experimentalmente que dicho punto existe efectivamente. Esta demostración sirvió para convencer a muchos de los que dudaban de la validez de la teoría ondulatoria de la luz. El diagrama de difracción de Fresnel de una abertura circular se muestra en la figura 35.28*b*. Comparándolo con el diagrama del disco opaco de la figura 35.28*a*, puede verse que ambos diagramas son complementarios entre sí.



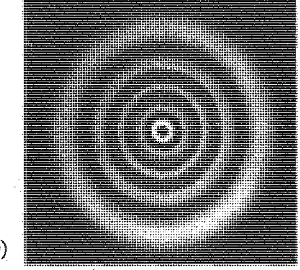


Figura 35.28 (*a*) Diagrama de difracción de Fresnel de un disco opaco. En el centro de la sombra, las ondas luminosas difractadas por el borde del disco están en fase y producen un punto brillante denominado *punto de Poisson*. (*b*) Diagrama de difracción de Fresnel de una abertura circular. Comparar este diagrama con el de la parte (*a*).

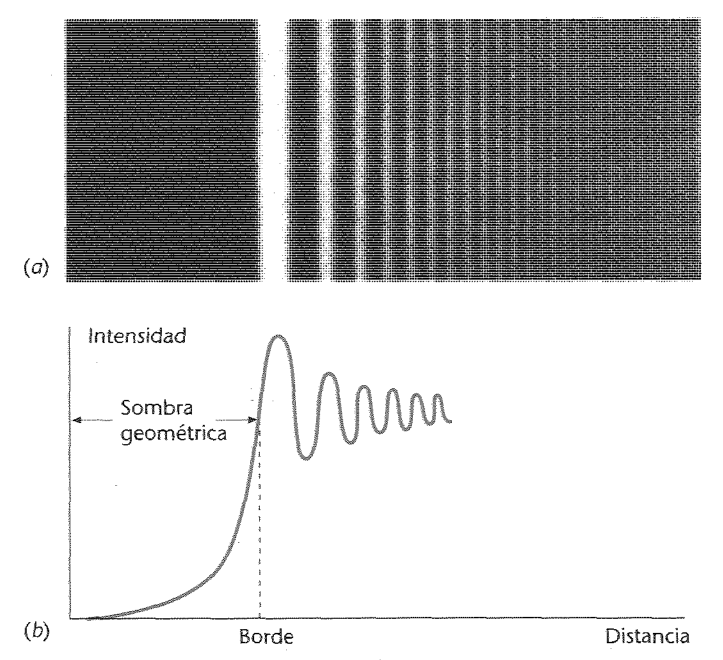


Figura 35.29 (*a*) Difracción de Fresnel de un borde recto. (*b*) Representación gráfica de la intensidad en función de la distancia a lo largo de una recta perpendicular a dicho borde.

[1] Ver Richard E. Haskel, "A Simple Experiment on Fresnel Diffraction", *American Journal of Physics*, vol. 38, 1970, pág. 1039.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La figura 35.29*a* muestra el diagrama de difracción de Fresnel de un borde rectilíneo iluminado por la luz procedente de un foco puntual. Se ve un gráfico de la intensidad en función de la distancia (medida a lo largo de una línea perpendicular al borde) en la figura 35.29*b*. La intensidad de la luz no cae abruptamente a cero en la sombra geométrica, sino que disminuye rápidamente y es despreciable al cabo de unas pocas longitudes de onda del borde. Puede verse el diagrama de difracción de Fresnel de una abertura rectangular en la figura 35.30. Estos diagramas no pueden verse con las fuentes luminosas extensas, como las lámparas incandescentes ordinarias, porque las franjas oscuras del diagrama producidas por la luz procedente de un punto de la fuente se solapan con las franjas brillantes del diagrama producido por la luz procedente de otro punto.

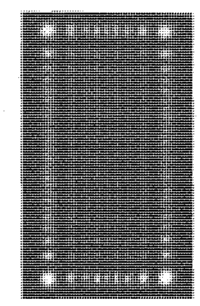


Figura 35.30 Difracción de Fresnel de una abertura rectangular.

Difracción y resolución ■ 35.7

La figura 35.31 muestra el diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular y tiene importantes aplicaciones para el estudio de la resolución de muchos instrumentos ópticos. El ángulo θ subtendido por el primer mínimo de difracción está relacionado con la longitud de onda y con el diámetro de la abertura D por

$$\text{sen}\ \theta = 1{,}22\ \frac{\lambda}{D} \qquad \textbf{(35.24)}$$

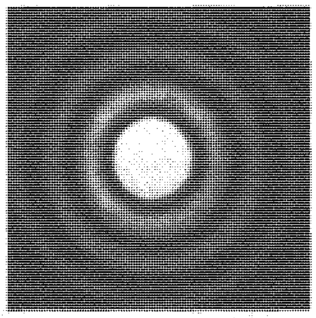


Figura 35.31 Diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular.

La ecuación 35.24 es semejante a la ecuación 35.9 excepto en el factor 1,22. Este factor aparece en el análisis matemático del problema, que es semejante al de una sola rendija pero más complicado debido a la geometría circular que posee. En muchas aplicaciones el ángulo θ es pequeño, de modo que sen θ puede reemplazarse por θ. El primer mínimo de difracción se produce entonces en un ángulo θ dado por

$$\theta \approx 1{,}22\ \frac{\lambda}{D} \qquad \textbf{(35.25)}$$

La figura 35.32 muestra dos focos puntuales que subtienden un ángulo α respecto a una abertura circular alejada de los focos. También se incluye en dicha figura la intensidad de los diagramas de difracción de Fraunhofer correspondientes. Si α es mucho mayor que 1,22 λ/D, se verán como dos focos. Sin embargo, al ir disminuyendo α, aumenta el solapamiento de los diagramas de difracción y resulta cada vez más difícil distinguir los dos focos de un solo foco. Para la separación angular crítica de α_c dada por

$$\alpha_c = 1{,}22\ \frac{\lambda}{D} \qquad \textbf{(35.26)}$$

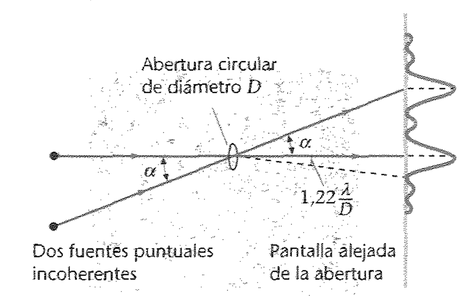
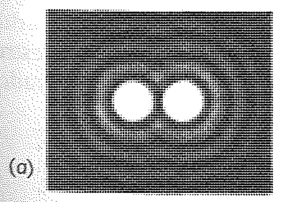


Figura 35.32 Dos focos distantes que subtienden un ángulo α. Si α es mucho mayor que 1,22 λ/D, siendo λ la longitud de onda de la luz y D el diámetro de la abertura, los diagramas de difracción apenas se solapan y los focos se ven fácilmente como dos focos separados. Si α no es mucho mayor que 1,22λ/D, el solapamiento de los diagramas de difracción hace que sea difícil distinguir dos fuentes de una.

el primer mínimo del diagrama de difracción de un foco cae en el máximo central del otro foco. Se dice entonces que estos objetos están en el límite justo de su resolución según el denominado **criterio de resolución de Rayleigh**. La figura 35.33 muestra los diagramas de difracción para dos fuentes cuando α es mayor que el ángulo crítico que permite la resolución y cuando α es exactamente igual al ángulo crítico mencionado.

La ecuación 35.26 tiene muchas aplicaciones. El *poder de resolución* de un instrumento óptico, como un microscopio o un telescopio, se refiere a la capacidad del mismo para resolver y distinguir dos objetos que están muy juntos. Las imágenes de los objetos

(*a*)


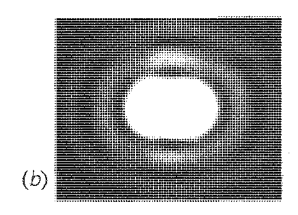
(*b*)


Figura 35.33 Diagramas de difracción correspondientes a una abertura circular y a dos fuentes puntuales incoherentes cuando (*a*) es mucho mayor que 1,22 λ/D y (*b*) cuando a corresponde al límite de resolución, $\alpha_c = 1{,}22\ \lambda/D$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

tienden a solaparse debido a los efectos de difracción de la abertura de entrada del instrumento. Podemos ver en la ecuación 35.26 que puede aumentarse el poder de resolución, bien aumentando el diámetro D de la lente (o espejo), o haciendo disminuir la longitud de onda λ. Los telescopios astronómicos utilizan grandes lentes o espejos objetivo para aumentar su resolución y además aumentar también su capacidad de recoger la luz que procede de objetos lejanos. En un microscopio se utiliza a veces una película de un aceite transparente con índice de refracción del orden de 1,55 colocada bajo el objetivo con objeto de que disminuya la longitud de onda de la luz ($\lambda' = \lambda/n$). Aún puede reducirse más la longitud de onda mediante la utilización de luz ultravioleta y una película fotográfica; sin embargo, como el vidrio ordinario es opaco a la luz ultravioleta, en este caso las lentes del microscopio ultravioleta deben ser de cuarzo o fluorita. Para obtener altas resoluciones se usan microscopios electrónicos que utilizan electrones en lugar de luz. Las longitudes de onda de los electrones varían con la raíz cuadrada de su energía cinética y pueden hacerse tan pequeñas como se desee.[1]

■ EJEMPLO 35.7

¿Qué separación angular mínima deben tener dos objetos puntuales si han de ser resueltos justamente por el ojo? ¿A qué distancia mutua deben estar si se encuentran alejados ambos a 100 m? Suponer que el diámetro de la pupila del ojo es 5 mm y que la longitud de onda de donde da la luz es de 600 nm.

Esquema del problema (a) El ángulo crítico se calcula a partir de $\alpha_c = 1{,}22\ \lambda/D$. (b) Si los objetos están separados por una distancia y y se encuentran a 100 m de distancia, podrán resolverse justamente si tg $\alpha_c = y/(100\ \text{m})$.

(a) Usar $\alpha_c = 1{,}22\ \lambda/D$ con $D = 5$ mm y $\lambda = 600$ nm:

$$\alpha_c = 1{,}22\,\frac{6\times10^{-7}\ \text{m}}{5\times10^{-3}\ \text{m}} = 1{,}46\times10^{-4}\ \text{rad}$$

(b) Hacer tg $\alpha_c = y/100$ m y despejar y:

$$\text{tg}\ \alpha_c = \frac{y}{100\ \text{m}}$$

$$y = (100\ \text{m})\,\text{tg}\ \alpha_c \approx (100\ \text{m})\alpha_c$$

$$= (100\ \text{m})(1{,}46\times10^{-4}) = 1{,}46\times10^{-2}\ \text{m} = 1{,}46\ \text{cm}$$

Ejercicio Dos objetos están separados 4 cm. ¿A qué distancia de ellos debemos estar de forma que todavía puedan resolverse por el ojo si $\lambda = 600$ nm y el diámetro de la pupila del mismo es 5 mm? (*Respuesta*: 274 m.)

Es instructivo comparar la limitación que marca la resolución del ojo debido a la difracción, como se ha visto en el ejemplo 35.7, con la originada por la separación de los receptores (conos) en la retina. Para que sean vistos como dos objetos distintos, sus imágenes deben caer sobre la retina en dos conos no adyacentes. (Véase el problema 70 en el capítulo 34.) Como la retina está a 2,5 cm aproximadamente de la lente del ojo o cristalino, se obtiene la distancia y sobre la retina que corresponde a una separación angular de $1{,}5\times10^{-4}$ rad mediante

$$\alpha_c = 1{,}5\times10^{-4}\ \text{rad} = \frac{y}{2{,}5\ \text{cm}}$$

o bien

$$y = 3{,}75\times10^{-4}\ \text{cm} = 3{,}75\times10^{-6}\ \text{m} = 3{,}75\ \mu\text{m}$$

La separación real de los conos en la fóvea (central), en donde los conos están muy estrechamente juntos, es del orden de 1 μm. Fuera de esta región se encuentran separados entre 3 y 5 μm.

[1] Las propiedades ondulatorias de los electrones se han estudiado en el capítulo 17.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Los discos compactos actúan como redes de reflexión

Redes de difracción ■ 35.8

OPCIONAL

Una herramienta útil para la medición de la longitud de onda de la luz es la **red de difracción**, que consiste en un gran número de rayas o rendijas igualmente espaciadas y grabadas sobre una superficie plana. Una red de este tipo puede fabricarse cortando surcos paralelos y con separación constante sobre una placa de vidrio o metal con una máquina de gran presión. Cuando se trata de una red de reflexión, la luz se refleja en los salientes entre las rayas marcadas. Los discos de gramófono y los discos compactos presentan algunas de las propiedades de una red de reflexión. En el caso de las redes de transmisión, la luz pasa a través de los espacios transparentes que existen entre las rayas grabadas. Existen redes baratas de plástico con 10 000 o más rayas por centímetro. El espaciado de la rayas en una red con 10 000 rayas por cm es $d = (1\text{ cm})/10\,000 = 10^{-4}$ cm.

Consideremos una onda luminosa plana que incide normalmente sobre una red de transmisión (figura 35.34) y supongamos que la anchura de cada rendija es muy pequeña, de forma que cada una de ellas produce un haz muy difractado. El diagrama de interferencia producido sobre una pantalla a gran distancia de la red es debido a un gran número de focos luminosos igualmente espaciados. Supongamos que tenemos N rendijas separadas la distancia d entre dos adyacentes. Para $\theta = 0$, la luz de cada rendija está en fase con la procedente de todas las demás de modo que la amplitud de la onda es NA_0, siendo A_0 la amplitud correspondiente de cada rendija y la intensidad es N^2I_0, siendo I_0 la correspondiente a cada rendija. Para un ángulo θ, tal que d sen $\theta = \lambda$, la diferencia de camino entre dos rendijas sucesivas es λ, de modo que también la luz procedente de cada rendija está en fase con la de todas las demás rendijas y la intensidad es N^2I_0. Los máximos de interferencia se encuentran en ángulos θ dados por

$$d \text{ sen } \theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{35.27}$$

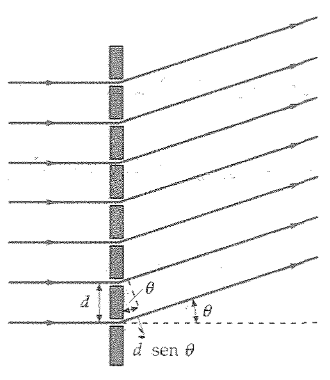


Figura 35.34 Luz que incide normalmente sobre una red de difracción. Para un ángulo θ, la diferencia de caminos entre rayos procedentes de rendijas adyacentes es d sen θ.

La posición de un máximo de interferencia no depende del número de focos, pero cuantos más focos existan, más nítidos e intensos serán dichos máximos.

Podemos ver que los máximos de interferencia serán más agudos cuando hay muchas ranuras, considerando el caso de N ranuras. La distancia entre la primera ranura y la N-ésima es $(N - 1)d \approx Nd$. Cuando la diferencia de camino recorrido por la luz entre la primera y la N-ésima es λ, la intensidad resultante es cero. (Ya se vio al estudiar la difracción con una sola rendija.) Como su separación aproximada es Nd, la intensidad será nula para el ángulo $\theta_{\min}$ dado por

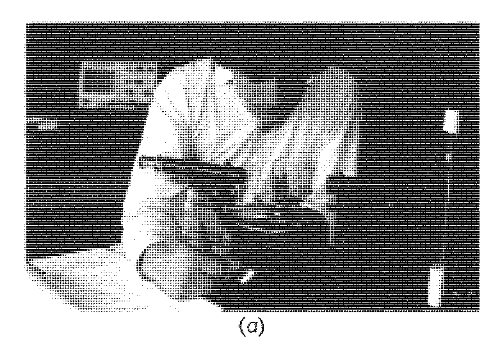
$$Nd \text{ sen } \theta_{\min} = \lambda$$

$$\text{sen } \theta_{\min} = \theta_{\min} = \frac{\lambda}{Nd}$$

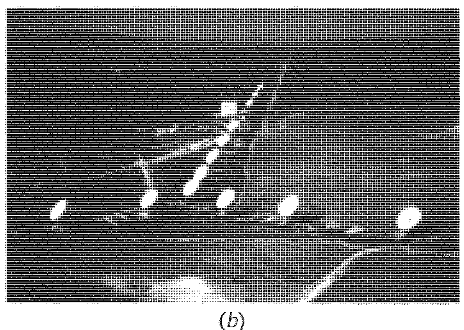
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL



(*a*)



(*b*)

Figura 35.35 (*a*) Espectroscopio para prácticas de alumnos. La luz procedente de la rendija colimadora cercana a la fuente se hace paralela mediante una lente e incide sobre una red. Se observa la luz difractada con un anteojo que forma un ángulo con el haz incidente que puede medirse con gran exactitud. (*b*) Vista aérea del radio telescopio (VLA) de Nuevo México. Las señales de radio procedentes de galaxias muy alejadas se suman constructivamente cuando se satisface la ecuación 35.27 en donde d es la distancia entre dos telescopios adyacentes.

La anchura del máximo de interferencia $2\theta_{min}$ es, por tanto, proporcional a $1/N$. Así pues, cuanto mayor sea el número de rendijas N, más agudo es el máximo. Como la intensidad en el máximo es proporcional a $N^2 I_0$, la cantidad de luz en el máximo es proporcional a NI_0.

En la figura 35.35*a* puede verse un espectroscopio para prácticas de laboratorio, que utiliza una red de difracción para analizar la luz procedente de un foco que en este caso es típicamente un tubo de vidrio que contiene átomos de gas, por ejemplo, helio o vapor de sodio. Los átomos de gas se excitan mediante el bombardeo por electrones que son acelerados por una alta tensión aplicada a través del tubo. La luz emitida por dicho tipo de fuentes contiene únicamente ciertas longitudes de onda que son características de los átomos contenidos en el tubo o foco. La luz emitida por éste pasa a través de una rendija estrecha de colimación y se hace paralela mediante una lente adecuada. La luz paralela incide entonces sobre la red, pero en vez de observarse sobre una pantalla muy alejada, la luz paralela que emerge de la red se enfoca mediante un anteojo y se observa directamente. El anteojo está montado sobre una plataforma rotatoria que ha sido calibrada de modo que pueda medirse el ángulo θ. En la dirección hacia delante ($\theta = 0$), se ve el máximo central correspondiente a todas las longitudes de onda. Si el foco emite luz de una longitud de onda particular λ, se verá el primer máximo de interferencia en el ángulo θ dado por la ecuación 35.27 con $m = 1$. Toda longitud de onda emitida por el foco produce una imagen separada de la rendija de colimación del espectroscopio denominada **línea** o **raya espectral**. El conjunto de líneas correspondiente a $m = 1$ se denomina **espectro de primer orden**. El **espectro de segundo orden** corresponde a $m = 2$ para cada longitud de onda. Pueden verse órdenes mayores si el ángulo θ dado por la ecuación 35.27 es menor de 90°. Dependiendo de las longitudes de onda y de la separación entre las rendijas de la red, los órdenes pueden aparecer mezclados; es decir, la línea de tercer orden correspondiente a una determinada longitud de onda puede aparecer antes que la línea de segundo orden correspondiente a otra longitud de onda. Si se conoce la separación de las rendijas de la red, pueden determinarse las longitudes de onda emitidas por el foco mediante la medición del ángulo θ.

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 35.8

Sobre una red de difracción de 12 000 rayas por centímetro incide luz de sodio, ¿A qué ángulos se verán las dos líneas amarillas de longitudes de onda de 589,00 nm y 589,59 nm en el primer orden?

Esquema del problema Aplicar d sen $\theta = m\lambda$ para cada longitud de onda, con $m = 1$ y $d = 1$ cm/12 000.

1. El ángulo θ viene dado por d sen $\theta = m\lambda$ con $m = 1$:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d}$$

2. Calcular θ para $\lambda = 589{,}00$ nm:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{589 \times 10^{-9}\ \text{m}}{(1\ \text{cm}/12\,000)} = 0{,}7068$$

$$\theta = \text{arcsen}\ 0{,}7068 = 44{,}98°$$

3. Repetir el cálculo para $\lambda = 589{,}59$ nm:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{589{,}59 \times 10^{-9}\ \text{m}}{(1\ \text{cm}/12\,000)} = 0{,}7075$$

$$\theta = \text{arcsen}\ 0{,}7075 = 45{,}03°$$

Observación La luz de mayor longitud de onda se difracta a través de ángulos mayores.

Ejercicio Determinar los ángulos correspondientes a las dos líneas amarillas del sodio si la red posee 15 000 líneas por centímetro. (*Respuestas*: 62,07° y 62,18°.)

www.elsolucionario.net

Una característica importante de un espectroscopio es su capacidad para medir la luz de dos longitudes de onda muy próximas λ_1 y λ_2. Por ejemplo, las dos líneas amarillas destacadas del espectro del sodio tienen longitudes de onda de 589,00 y 589,59 nm, que pueden observarse como dos longitudes de onda si no se solapan sus máximos de interferencia. De acuerdo con el criterio de Rayleigh para la resolución, estas longitudes de onda se resuelven si la separación angular de sus máximos de interferencia es mayor que la separación angular entre un máximo de interferencia y el primer mínimo de interferencia que aparece a cada lado. Se define el **poder de resolución** de una red de difracción como $\lambda/|\Delta\lambda|$, en donde $|\Delta\lambda|$ es la diferencia más pequeña entre dos longitudes de onda próximas, cada una de ellas aproximadamente igual a λ, que pueden ser resueltas. El poder de resolución es proporcional al número de rendijas iluminadas porque cuantas más rendijas estén iluminadas más nítido será el máximo de interferencia. Puede mostrarse que el poder de resolución R es

$$R = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN \qquad \textbf{(35.28)}$$

en donde N es el número de rendijas y m es el número de orden (véase problema 73.) Podemos ver a partir de la ecuación 35.28 que para resolver las dos rayas amarillas del espectro del sodio, el poder de resolución debe ser

$$R = \frac{589{,}00 \text{ nm}}{589{,}59 - 589{,}00 \text{ nm}} = 998$$

Así pues, para resolver las dos líneas amarillas del sodio en el primer orden ($m = 1$), necesitamos una red que contenga alrededor de 1000 rendijas en el área iluminada por la luz.

Hologramas

Una interesante aplicación de las redes de difracción consiste en la producción de una fotografía tridimensional denominada **holograma** (figura 35.36). En una fotografía ordinaria, se recibe y registra sobre una película la intensidad de la luz reflejada por un objeto. Cuando la película se mira con luz transmitida, se obtiene una imagen bidimensional. En un holograma, un haz procedente de un láser se descompone o divide en dos haces, un haz de referencia y un haz objeto. El haz objeto se refleja en el objeto a fotografiar, y el diagrama de interferencia entre él y el haz de referencia se registra sobre una película fotográfica. Esto puede hacerse porque el haz de láser es coherente, de modo que puede mantenerse constante la diferencia de fase relativa entre el haz de referencia y el haz objeto durante la exposición. Las franjas de interferencia en la película actúan como una red de difracción. Cuando se ilumina con un láser la película, se produce una réplica tridimensional del objeto.

Los hologramas utilizados en tarjetas de crédito o sellos de correos, llamados hologramas de arco iris, son más complejos. Una tira horizontal del holograma original se utiliza para hacer un segundo holograma. La imagen tridimensional puede verse cuando el observador se mueve de un lado a otro, pero si se observa con luz láser, la imagen des-

Divisor del haz
Haz de referencia
Láser
Objeto cuya imagen quiere obtenerse
Punto de interferencia constructiva
Haz del objeto
Placa fotográfica expuesta
(a)
Placa fotográfica revelada (holograma)
Observador
Imagen virtual
Imagen enfocada
(b)

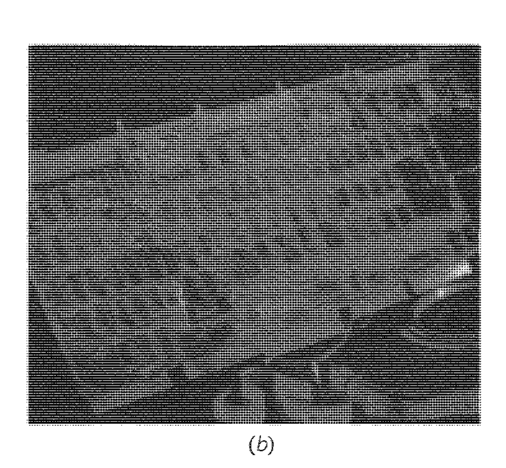
Figura 35.36 (a) Producción de un holograma. El diagrama de interferencia producido por el haz de referencia y el haz procedente del objeto se registra sobre una película fotográfica. (b) Cuando se revela la película y se ilumina con luz láser coherente, se ve una imagen tridimensional.

OPCIONAL

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(*a*)



(*b*)

Un holograma visto desde dos ángulos distintos. Obsérvese que aparecen partes diferentes del circuito detrás de la lupa situada en primer plano.

aparece cuando los ojos del observador se mueven por arriba o por abajo de la imagen de la rendija. Cuando se observa con luz blanca, la imagen se ve de diferentes colores si el observador se mueve en dirección vertical.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Interferencia	Dos rayos de luz interfieren constructivamente si su diferencia de fase es cero o un número entero de veces 360°. Interfieren destructivamente si su diferencia de fase es 180° o un número entero impar de veces 180°.
Diferencia de fase debida a la diferencia de camino	$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} 360°$ **(35.1)**
Diferencia de fase debida a la reflexión	Se introduce una diferencia de fase de 180° cuando una onda luminosa se refleja en un límite o frontera entre dos medio, cuando la velocidad de onda en el medio original es superior, tal como ocurre entre el aire y el vidrio.
Películas delgadas	La interferencia de rayos de luz reflejados en las superficies superior e inferior de una película delgada produce bandas o franjas coloreadas como las que se observan con frecuencia en películas de jabón o de aceite. La diferencia de fase entre los dos rayos es el resultado de la diferencia de caminos que en este caso es el doble del espesor de la película más cualquier cambio de fase adicional debido a la reflexión de uno o ambos rayos.
Dos rendijas	La diferencia de trayectos para un ángulo θ sobre una pantalla alejada procedente de dos rayos que emergen de dos rendijas estrechas separadas entre sí una distancia d, es d sen θ. Si es I_0 la intensidad debida a cada rendija por separado, la intensidad en los puntos de interferencia constructiva es $4I_0$ y la correspondiente a la interferencia destructiva es 0.
Máximos de interferencia	$d \text{ sen } \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$ **(35.2)**
Mínimos de interferencia	$d \text{ sen } \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$ **(35.3)**
2. Difracción	Se produce difracción siempre que una porción de un frente de onda se encuentra limitada por un obstáculo o abertura. La intensidad de la luz en un punto cualquiera del espacio puede calcularse mediante el empleo del principio de Huygens, considerando que cada punto del frente de onda es una fuente o foco puntual y calculando el diagrama de interferencia resultante.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Los diagramas de Fraunhofer se observan a distancias grandes del obstáculo o abertura de modo que los rayos que llegan a un punto cualquiera son aproximadamente paralelos o bien pueden observarse utilizando una lente para enfocar los rayos paralelos sobre una pantalla de observación situada en su plano focal.

Diagramas de Fraunhofer

Los diagramas de Fresnel se observan en puntos próximos a la fuente.

Diagramas de Fresnel

Cuando la luz está incidiendo sobre una sola rendija de anchura a, el diagrama de intensidad sobre una pantalla muy alejada muestra un máximo central de difracción ancho que disminuye a cero para un ángulo θ dado por

Una sola rendija

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} \tag{35.9}$$

La anchura del máximo central es inversamente proporcional a la anchura de la rendija. Se presentan otros ceros en el diagrama de difracción de una sola rendija en ángulos dados por

$$a\operatorname{sen}\theta = m\lambda, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{35.11}$$

A cada lado del máximo central existen máximos secundarios de mucho menos intensidad.

El diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas de tamaño finito es el diagrama de interferencia modulado por el diagrama de difracción de una sola rendija. Si $d/a = m$, el máximo de interferencia m-ésimo coincide con el primer mínimo de difracción y no aparecerán. Entonces existirán $2m - 1$ máximos de interferencia dentro del máximo central de difracción.

Dos rendijas

Cuando la luz procedente de dos fuentes o focos que están muy próximos pasan a través de una abertura, los diagramas de difracción de ambas pueden solaparse. Si el solapamiento es demasiado grande, *no pueden resolverse las dos fuentes como dos fuentes separadas*. Cuando el máximo central de difracción de un foco coincide con el mínimo de difracción del otro, se dice que las dos fuentes están en el límite de resolución según el criterio de Rayleigh. En el caso de una abertura circular de diámetro D, la separación angular crítica de dos fuentes mediante el criterio para la resolución de Rayleigh es

Resolución de dos fuentes

$$\alpha_c = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \tag{35.26}$$

Criterio de Rayleigh

Una red de difracción está formada por un gran número de rayas o rendijas muy juntas, y se utiliza para medir la longitud de onda de la luz emitida por una fuente. Las posiciones de los máximos de interferencia de una red vienen dadas por

Redes (opcional)

$$d\operatorname{sen}\theta = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{35.27}$$

en donde m es el número de orden. El poder de resolución de una red es

$$R = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN \tag{35.28}$$

siendo N el número de rendijas de la red que resultan iluminadas y m el número de orden.

Dos o más ondas armónicas pueden sumarse representando cada onda por un vector llamado fasor. La diferencia de fase entre las ondas se representa por el ángulo que forman entre sí los fasores.

3. **Fasores** (opcional)

Guía para la resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES		TIPO DE CÁLCULO
		1. Interferencia
Utilizar $\delta = \frac{\Delta r}{\lambda}2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda}360°$.	**Ejemplo 35.1**	Relacionar la diferencia de fase con la diferencia de camino.
Determinar la distancia x a la franja m-ésima. Después calcular m/x.	**Ejemplo 35.2**	Calcular el número de franjas de interferencia en *una película delgada*.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Localizar franjas en un diagrama de interferencia de dos rendijas.	El máximo m-ésimo se encuentra en $y_m = m\lambda L/d$.	Ejemplo 35.3
2. Difracción		
Localizar los puntos de intensidad cero para la difracción central en el diagrama de dos rendijas.	Utilizar a sen $\theta = m\lambda$, siendo $m = 1, 2, 3, ...$	Ejemplo 35.4
Determinar el número de máximos de interferencia en el máximo de difracción central en el diagrama de dos rendijas.	Utilizar $N = 2m - 1$, siendo $m = d/a$.	Ejemplo 35.5
Determinar el ángulo crítico de la resolución.	Utilizar $\alpha_c = 1{,}22\ \lambda/D$.	Ejemplo 35.7
Localizar los máximos de interferencia producidos por una red de difracción.	Utilizar d sen $\theta = m\lambda$, siendo $m = 0, 1, 2, ...$	Ejemplo 35.8
3. Fasores (opcional)		
Determinar la resultante de dos o más ondas armónicas.	Utilizar los fasores para representar las ondas y sumar vectorialmente.	Ejemplo 35.6

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
••• Desafiante, para alumnos avanzados

Diferencia de fase y coherencia

• **1** Cuando se produce interferencia destructiva, ¿qué le ocurre a la energía de las ondas luminosas?

• **2** ¿Cuál de los siguientes pares de fuentes o focos luminosos son coherentes?
(a) Dos velas.
(b) Una vela y su imagen en un espejo plano.
(c) Dos pequeños orificios iluminados por el mismo foco.
(d) Dos faros de un coche.
(e) Dos imágenes de un foco puntual debidas a la reflexión en las superficies delantera y trasera de una película de jabón.

• **3**
(a) ¿Qué diferencia de camino mínima se necesita para introducir un desplazamiento de fase de 180° en una luz de 600 nm de longitud de onda?
(b) ¿Qué desplazamiento de fase introducirá esta diferencia de camino en luz de 800 nm de longitud de onda?

• **4** Una luz de 500 nm de longitud de onda está incidiendo normalmente sobre una película de agua de 10^{-4} cm de espesor. El índice de refracción del agua es 1,33.
(a) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el agua?
(b) ¿Cuántas longitudes de onda están contenidas en la distancia $2t$, siendo t el espesor de la película?
(c) ¿Cuál es la diferencia de fase entre la onda reflejada en la parte superior de la película y la reflejada en la interface del fondo agua-aire después de que ha recorrido esta distancia?

•• **5** Dos fuentes coherentes de microondas que producen ondas de 1,5 cm de longitud de onda están en el plano xy, una de ellas en el eje y en $y = 15$ cm y la otra en $x = 3$ cm, $y = 14$ cm. Si las fuentes están en fase, hallar la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al origen de coordenadas.

Interferencias en películas delgadas

• **6** La separación entre los anillos de Newton disminuye rápidamente cuando el diámetro de los anillos aumenta. Explicar cualitativamente por qué ocurre esto.

•• **7** Si el ángulo de la película de aire en forma de cuña, como el del ejemplo 35.2, es demasiado grande, no se observan franjas. ¿Por qué?

•• **8** ¿Por qué debe ser delgada una película que se utiliza para observar colores de interferencia?

• **9** Un aro de alambre se introduce en agua jabonosa y se saca de modo que la película jabonosa sea vertical.
(a) Cuando se observa por reflexión con luz blanca, la parte superior de la película aparece negra. Explicar la razón.
(b) Debajo de la región negra existen bandas coloreadas. ¿La primera de ellas es roja o violeta?
(c) Describir la apariencia de la película cuando se observa por *transmisión* de la luz.

• **10** Se prepara una película de aire en forma de cuña colocando un trocito de papel entre los bordes de dos láminas de vidrio planas. Una luz de 700 m de longitud de onda incide normalmente sobre las láminas de vidrio y se observan bandas de interferencia por reflexión.
(a) La primera banda próxima al punto de contacto de las láminas, ¿es oscura o brillante? ¿Por qué?
(b) Existen cinco bandas oscuras por centímetro. ¿Cuál es el ángulo de la cuña?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 11 El diámetro de hilos finos puede medirse muy exactamente mediante diagramas de interferencia. Se disponen dos láminas exactamente planas de vidrio de longitud L junto con el hilo en la forma indicada en la figura 35.37. Este montaje se ilumina con luz monocromática y se detectan las franjas de interferencia resultante. Supóngase que L = 20 cm y se utiliza luz amarilla de sodio para su iluminación ($\lambda \approx 590$ nm). Si se ven 19 franjas brillantes a lo largo de la distancia de 20 cm, ¿cuáles son los límites del diámetro del hilo? *Indicación*: Puede que no esté justo en el extremo la franja 19, pero no se ven 20 franjas.

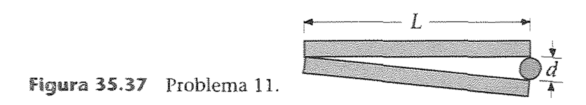


Figura 35.37 Problema 11.

•• 12 Se utiliza luz de 600 nm de longitud de onda para iluminar normalmente dos placas de vidrio de 22 cm de longitud que están en contacto por un extremo y están separadas en el otro por un hilo de 0,025 mm de diámetro. ¿Cuántas franjas aparecerán a lo largo de la longitud total de las placas?

•• 13 Una película delgada de índice de refracción 1,5 está rodeada por aire. Se ilumina normalmente con luz blanca y se observa por reflexión. El análisis de la luz reflejada resultante muestra que las únicas longitudes de onda que se han perdido cerca de la parte visible del espectro son las de 360, 450 y 602 nm. Es decir, en el caso de estas longitudes de onda existe interferencia destructiva.

(a) ¿Cuál es el espesor de la película?
(b) ¿Qué longitudes de onda visible serán las más brillantes en el diagrama de interferencia reflejado?
(c) Si esta película está depositada sobre vidrio cuyo índice de refracción es 1,6, ¿qué longitudes de onda del espectro visible se perderán en la luz reflejada?

•• 14 Una gota de aceite (n = 1,22) flota sobre agua (n = 1,33). Cuando se observa luz reflejada desde arriba como se ve en la figura 35.38, ¿cuál es el espesor de la gota en el punto en donde se observa la segunda franja roja, contando desde el borde de la gota? Suponer que dicha luz tiene una longitud de onda de 650 nm.

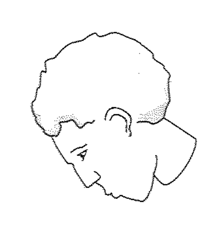


Figura 35.38 Problema 14.

•• 15 Una película de aceite de índice de refracción n = 1,45 reposa sobre una pieza de vidrio ópticamente plana de índice de refracción n = 1,6. Cuando se ilumina con luz blanca de incidencia normal, predominan en la luz reflejada las longitudes de onda de 690 nm y 460 nm. Determinar el espesor de la película de aceite.

•• 16 Una película de aceite de índice de refracción n = 1,45 flota sobre agua (n = 1,33). Iluminada con luz blanca de incidencia normal, predominan en la luz reflejada las longitudes de onda de 700 y 500 nm. Determinar el espesor de la película de aceite.

Anillos de Newton

•• 17 Un aparato de anillos de Newton se compone de una lente de vidrio de radio de curvatura R que descansa sobre una lámina de vidrio plana como se ve en la figura 35.39. La película delgada entre ambas es aire de espesor variable. El diagrama se observa por luz reflejada.

(a) Demostrar que en el caso de un espesor t la condición para una franja de interferencia brillante (constructiva) es

$$t = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de lados r, $R - t$, e hipotenusa R, demostrar que para $t \ll R$, el radio de una franja depende de t según la expresión

$$r = \sqrt{2tR} \qquad \textbf{35.29}$$

(c) ¿Qué aspecto tendrá el diagrama de la luz transmitida en comparación con el de la luz reflejada?
(d) Utilizar R = 10 m y un diámetro de 4 cm para la lente. ¿Cuántas franjas brillantes se verán si el aparato se ilumina con luz amarilla de sodio ($\lambda \approx 590$ nm) y se observa por reflexión?
(e) ¿Cuál será el diámetro de la sexta franja brillante?
(f) Si el vidrio utilizado en el aparato tiene un índice de refracción n = 1,5 y se coloca agua (n_a = 1,33) entre los dos trozos de vidrio, ¿qué variaciones tendrán lugar en las franjas brillantes?

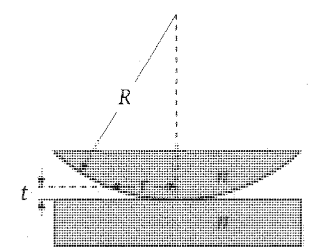


Figura 35.39 Problema 17.

•• 18 Una lente plano-convexa de radio de curvatura 2,0 m descansa sobre una placa de vidrio ópticamente plana. El sistema se ilumina por arriba con luz monocromática de 520 nm de longitud de onda. Los índices de refracción de la lente y la placa son 1,6. Determinar los radios de la primera y segunda franja brillante en la luz reflejada. (Utilizar la ecuación 35.29 del problema 17 para relacionar r con t.)

•• 19 Suponer que antes de colocar la lente del problema 18 sobre la placa, se deposita sobre ésta una película de aceite de índice de refracción 1,82. ¿Cuáles serán entonces los radios de la primera y segunda franjas brillantes en la luz reflejada? (Utilizar la ecuación 35.29 del problema 17 para relacionar r con t.)

Diagramas de interferencia de dos rendijas

• 20 En una cámara donde puede hacerse el vacío, se monta un experimento de interferencias de doble rendija. Utilizando luz monocromática, se observa un determinado diagrama de interferencia cuando la cámara está en contacto con el aire. Al hacer el vacío se observa que

(a) las franjas de interferencia permanecen fijas.
(b) las franjas de interferencia se aproximan entre sí.
(c) las franjas de interferencia se separan alejándose.
(d) las franjas de interferencia desaparecen completamente.

• 21 Dos rendijas estrechas separadas entre sí 1 mm se iluminan con luz de 600 nm de longitud de onda y se observa el diagrama de interferencia en una pantalla situada a 2 m. Calcular el número de franjas brillantes por centímetro que se verán en la pantalla.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **22** Utilizando un aparato convencional de dos rendijas con luz de 589 nm de longitud de onda se observan, sobre una pantalla a 3 m, 28 franjas brillantes por centímetro. ¿Cuál es la separación entre las rendijas?

• **23** Se hace incidir luz de 633 nm de longitud de onda procedente de un láser de helio-neón normalmente sobre un plano que contiene dos rendijas. El primer máximo de interferencia se encuentra a 82 cm del máximo central cuando se observa en una pantalla situada a 12 m.

(a) Calcular la separación de las rendijas.
(b) ¿Cuántos máximos de interferencia se observan?

• **24** Dos rendijas estrechas están separadas a una distancia d. Su diagrama de interferencia ha de observarse sobre una pantalla a gran distancia L.

(a) Calcular el espaciado y de los máximos sobre la pantalla para luz de 500 nm de longitud de onda cuando $L = 1$ m y $d = 1$ cm.
(b) ¿Es de esperar que se observe en la pantalla la interferencia de la luz en este caso?
(c) ¿A qué distancia deberán encontrarse las rendijas para que los máximos se encuentren separados en 1 mm para esta longitud de onda y distancia de la pantalla?

• **25** Sobre un plano vertical que contiene dos rendijas de separación δ (figura 35.40) incide luz con un ángulo ϕ respecto a la normal. Demostrar que los máximos de interferencia están situados en los ángulos θ dados por sen θ + sen $\phi = m\lambda/d$.

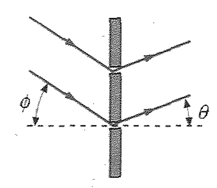


Figura 35.40 Problema 25 y 26.

•• **26** Luz blanca incide con un ángulo de 30° respecto a la normal sobre un plano que contiene un par de rendijas separadas en 2,5 μm. ¿Qué longitudes de onda de luz visible dan un máximo de interferencia brillante en la luz transmitida en la dirección normal al plano? (Véase problema 25.)

•• **27** Se hace incidir normalmente luz procedente de un láser sobre tres rendijas muy estrechas e igualmente espaciadas. Cuando se cubre una de las rendijas de los extremos, el máximo de primer orden se encuentra situado a 0,60° de la normal. Si se cubre la rendija central dejando las otras dos abiertas, calcular

(a) el ángulo del máximo de primer orden y
(b) el número de orden del máximo que en estas condiciones se produce con el mismo ángulo que lo hacía anteriormente el máximo de cuarto orden.

Diagrama de difracción de una sola rendija

• **28** Al ir reduciendo lentamente pero de forma continua la anchura de una rendija que produce un diagrama de difracción de una sola rendija, ¿cómo variará dicho diagrama?

• **29** Las ecuaciones 35.2, d sen $\theta = m\lambda$ y 35.11, a sen $\theta = m\lambda$, son fáciles de confundir. Definir para cada ecuación los símbolos que intervienen y razonar sus aplicaciones.

• **30** Se hace incidir luz de 600 nm sobre una rendija larga y estrecha. Calcular el ángulo del primer mínimo de difracción si la anchura de la rendija es

(a) $a = 1$ mm, **(b)** $a = 0{,}1$ mm, y **(c)** $a = 0{,}01$ mm.

• **31** Se observa el diagrama de difracción de una sola rendija de la luz en una pantalla situada a una gran distancia L de la rendija. Obsérvese en la ecuación 35.12 que la anchura $2y$ del máximo central varía inversamente con la anchura a de la rendija. Calcular la anchura $2y$ para $L = 2$ m, $\lambda = 500$ nm, y

(a) $a = 0{,}1$ mm, **(b)** $a = 0{,}01$ mm, y **(c)** $a = 0{,}001$ mm.

• **32** Se hacen incidir microondas planas sobre una rendija metálica larga y estrecha de 5 cm de longitud. El primer mínimo de difracción se observa a $\theta = 37°$. ¿Cuál es la longitud de onda de las microondas?

•• **33** En un láser de rubí de 694 nm de longitud de onda, el extremo del cristal de rubí constituye la abertura que determina el diámetro del haz de luz emitido. Si el diámetro es de 2 cm y se apunta el láser en dirección a la Luna, situada a 380 000 km de distancia, calcular aproximadamente el diámetro del haz de luz que alcanza la Luna, suponiendo que los efectos se deben sólo a la difracción.

Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas

• **34** ¿Cuántos máximos de interferencia estarán contenidos en el máximo central de difracción en el diagrama de difracción-interferencia de dos rendijas, si la separación d de las dos rendijas es 5 veces su anchura a? ¿Cuántos habrían si $d = Na$ para cualquier valor de N?

•• **35** Se observa un diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer producido por dos rendijas con una luz de longitud de onda 500 nm. Las rendijas tienen una separación de 0,1 mm y una anchura a.

(a) Hallar la anchura a si el quinto máximo de interferencia está en el mismo ángulo que el primer mínimo de difracción.
(b) En este caso, ¿cuántas franjas brillantes se verán en el máximo central de difracción?

•• **36** Se observa un diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer producido por dos rendijas con luz de 700 nm de longitud de onda. Las rendijas tienen una anchura de 0,01 mm y están separadas por 0,2 mm. ¿Cuántas franjas brillantes se verán en el máximo de difracción central?

•• **37** Supóngase que el máximo *central* de difracción correspondiente a dos rendijas contiene 17 franjas de interferencia para cierta longitud de onda de la luz. ¿Cuántas franjas de interferencia existirán en el primer máximo *secundario* de difracción?

•• **38** Luz de 550 nm de longitud de onda ilumina dos rendijas de anchura 0,03 mm y separación 0,15 mm.

(a) ¿Cuántos máximos de interferencia caen dentro de la anchura total del máximo central de difracción?
(b) ¿Cuál es el cociente entre la intensidad del tercer máximo de interferencia a un lado de la línea central (sin contar el máximo central de interferencia) y la intensidad del máximo de interferencia central?

Suma de ondas armónicas utilizando fasores (opcional)

• **39** Hallar la resultante de las dos ondas

$$E_1 = 2 \text{ sen } \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = 3 \text{ sen } (\omega t + 270°)$$

• **40** Hallar la resultante de las dos ondas

$$E_1 = 4 \text{ sen } \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = 3 \text{ sen } (\omega t + 60°)$$

•• **41** En el segundo máximo secundario del diagrama de difracción de una sola rendija, la diferencia de fase entre las ondas procedentes de la parte superior e inferior de la rendija es aproximadamente igual a 5π. Los fasores utilizados para calcular la amplitud en este punto completan 2,5 círculos. Si I_0 es la intensidad en el máximo central, calcular la intensidad I en este segundo máximo secundario.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 42

(a) Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla a una distancia grande L de tres fuentes igualmente separadas (separación d, siendo $d \gg \lambda$) vienen dadas aproximadamente por

$$y = \frac{n\lambda L}{3d} \qquad \text{donde } n = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots$$

es decir, n no es múltiplo de 3.

(b) Para $L = 1$ m, $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m y $d = 0{,}1$ mm, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (distancia entre mínimos sucesivos) para las tres fuentes.

•• 43

(a) Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla a una distancia grande L de cuatro fuentes igualmente espaciadas (espaciado $d \gg \lambda$) vienen dadas aproximadamente por

$$y = \frac{n\lambda L}{4d} \qquad \text{donde } n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, \ldots$$

es decir, n no es múltiplo de 4.

(b) Para $L = 2$ m, $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m y $d = 0{,}1$ mm, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (distancia entre mínimos sucesivos) para las cuatro fuentes. Comparar esta anchura con la de dos fuentes con el mismo espaciado.

•• 44 Se hace incidir luz de 480 nm de longitud de onda sobre cuatro rendijas; cada una de ellas de 2 μm de anchura y separada de la siguiente por 6 μm.

(a) Calcular el ángulo al centro del primer cero del diagrama de difracción de una sola rendija.
(b) Calcular los ángulos de cualquier máximo de interferencia brillante que se encuentre en el interior del máximo de difracción central.
(c) Calcular la dispersión angular entre el máximo de interferencia central y el primer mínimo de interferencia en ambos lados de éste.
(d) Representar la intensidad en función del ángulo en una pantalla distante.

••• 45 Tres rendijas, cada una de ellas separada de sus vecinas en 0,06 mm, se iluminan mediante una fuente de luz coherente de 550 nm de longitud de onda. Las rendijas son extremadamente estrechas, de modo que pueden ignorarse los efectos de la difracción. Se sitúa una pantalla a 2,5 m de las rendijas. La intensidad de la línea central es 0,05 W/m^2. Consideremos un lugar a 1,72 cm de la línea central.

(a) Dibujar los fasores, de acuerdo con el modelo para la suma de ondas armónicas, apropiado para este lugar.
(b) A partir del diagramas de fasores, calcular la intensidad luminosa en dicha posición.

••• 46 Cuatro fuentes coherentes están situadas sobre el eje y en $+3\lambda/4$, $+\lambda/4$, $-\lambda/4$ y $-3\lambda/4$. Emiten ondas de longitud de onda λ e intensidad I_0.

(a) Calcular la intensidad neta I en función del ángulo θ medido desde el eje $+x$.
(b) Hacer una representación polar de $I(\theta)$.

••• 47 En el caso de la difracción por una sola rendija, calcular los tres primeros valores de ϕ (que es la diferencia de fase total entre los rayos procedentes de cada borde de la rendija) que producen máximos subsidiarios mediante

(a) el empleo del modelo de fasores y
(b) haciendo $dI/d\phi = 0$, en donde I viene dada por la ecuación 35.20.

Difracción y resolución

• 48 Una luz de 700 nm de longitud de onda está incidiendo sobre un orificio de diámetro 0,1 mm.

(a) ¿Cuál es el ángulo que hay entre el máximo central y el primer mínimo de difracción correspondiente a una difracción de Fraunhofer?
(b) ¿Cuál es la distancia entre el máximo central y el primer mínimo de difracción en una pantalla situada a 8 m?

• 49 Dos fuentes de longitud de onda 700 nm están a 10 m del orificio del problema 48. ¿A qué distancia deben estar entre sí las fuentes para que sus diagramas de difracción sean resueltos por el criterio de Rayleigh?

• 50 Dos fuentes de 700 nm de longitud de onda están separadas por una distancia horizontal x. Están a 5 m de una rendija vertical de 0,5 mm de anchura. ¿Cuál es el menor valor de x que permite que el diagrama de difracción de las fuentes sea resuelto mediante el criterio de Rayleigh?

• 51 Los faros de un pequeño coche se encuentran separados por una distancia de 112 cm. ¿A qué distancia máxima pueden resolverse estos faros si el diámetro de las pupilas es de 5 mm y la longitud de onda efectiva de la luz es de 550 nm?

• 52 Los cazadores suelen decir que no se debe disparar hasta que se observa el blanco de los ojos del animal. Si los ojos se encuentran separados entre sí por una distancia de 6,5 cm y el diámetro de la pupila del observador es de 5 mm, ¿a qué distancia pueden resolverse los dos ojos utilizando luz de 550 mm?

•• 53

(a) ¿A qué distancia deben estar entre sí dos objetos en la Luna para que puedan ser resueltos por el ojo sin la ayuda de ningún instrumento? Considerar que el diámetro de la pupila del ojo es 5 mm, la longitud de onda de la luz es de 600 nm y la distancia a la Luna es de 380 000 km.
(b) ¿A qué distancia deben estar los objetos en la Luna para que sean resueltos mediante un telescopio que tiene un espejo de 5 m de diámetro?

•• 54 Normalmente el techo de las bibliotecas se recubre de un tipo de aislante acústico que posee pequeños orificios separados por una distancia de aproximadamente 6,0 mm.

(a) Utilizando luz con longitud de onda de 500 nm, ¿a qué distancia debería encontrarse una persona para poder resolver estos orificios? El diámetro de la pupila del ojo del observador es de aproximadamente 5 mm.
(b) ¿Podrían verse mejor estos orificios si se utilizara luz roja o luz violeta?

•• 55 El telescopio del Monte Palomar posee un diámetro aproximado de 5 m (200 pulgadas). Suponiendo que las condiciones fueran ideales, observamos una estrella viniera que se encuentra a 4 años luz. ¿Cuál debe ser la separación mínima de las dos estrellas del sistema para que sus imágenes puedan ser resueltas utilizando luz de longitud de onda 550 nm?

•• 56 La estrella Mizar de la Osa Mayor es un sistema binario formado por dos estrellas de magnitudes iguales. La separación angular entre las dos estrellas es de 14 segundos de arco. ¿Cuál es el diámetro mínimo de la pupila que permite la resolución de las dos estrellas utilizando luz de longitud de onda 550 nm?

Redes de difracción (opcional)

• 57 Cuando una red de difracción se ilumina con luz blanca, el máximo de luz verde de primer orden

(a) está más próximo al máximo central que el de la luz roja.
(b) está más próximo al máximo central que el de la luz azul.
(c) solapa el máximo de luz roja de segundo orden.
(d) solapa el máximo de luz azul de segundo orden.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **58** Una red de difracción con 2000 rendijas por centímetro se utiliza para medir las longitudes de onda emitidas por el gas hidrógeno. ¿Para que ángulos θ, en el espectro de primer orden, encontraremos las dos líneas violetas de 434 y 410 nm de longitud de onda?

• **59** Con la red utilizada en el problema 58 se encuentran otras dos líneas del espectro de hidrógeno de primer orden en los ángulos $\theta_1 = 9{,}72 \times 10^{-2}$ rad y $\theta_2 = 1{,}32 \times 10^{-1}$ rad. Hallar las longitudes de onda de estas líneas.

• **60** Repetir el problema 58 en el caso de una red con 15 000 líneas por centímetro.

• **61** ¿Cuál es la longitud de onda más larga que puede observarse en el espectro de quinto orden utilizando una red con 4000 rendijas por centímetro?

•• **62** Una red de 2000 rendijas por centímetro se utiliza para analizar el espectro del mercurio.

(a) Hallar la desviación angular de primer orden de las dos líneas de 579,0 y 577,0 nm de longitud de onda.
(b) ¿Cuál deberá ser la anchura del haz en la red para que puedan resolverse estas líneas?

•• **63** Una red de difracción que posee 4800 líneas por centímetro se ilumina con incidencia normal por luz blanca (longitudes de onda en el intervalo 400 a 700 nm). ¿Cuántos órdenes pueden observarse en el espectro completo de la luz transmitida? ¿Se solapan algunos de estos órdenes? En caso afirmativo, describir las regiones de solapamiento.

•• **64** Una red de difracción cuadrada con un área de 25 cm^2 tiene una resolución de 22 000 en el cuarto orden. ¿Con qué ángulo deberá realizarse una observación para ver una longitud de onda de 510 nm en el cuarto orden?

•• **65** Se hace incidir luz de sodio de 589 nm de longitud de onda normalmente sobre una red de difracción de 2 cm^2 con 4000 líneas por centímetro. Se proyecta el diagrama de difracción de Fraunhofer sobre una pantalla situada a 1,5 m mediante una lente de 1,5 m de distancia focal situada justo enfrente de la red. Calcular

(a) las posiciones de los dos primeros máximos de intensidad en uno de los lados del máximo central,
(b) la anchura del máximo central, y
(c) la resolución en el primer orden.

•• **66** El espectro del neón es excepcionalmente rico en la región visible. Entre las múltiples líneas hay dos que corresponden a las longitudes de onda 519,313 y 519,322 mm. Si la luz procedente de una descarga de un tubo de neón incide normalmente sobre una red de transmisión de 8400 líneas por centímetro y se observa el espectro en el segundo orden, ¿cuál debe ser la anchura de la red iluminada para que puedan resolverse estas dos líneas?

•• **67** El mercurio tiene varios isótopos estables, entre ellos ^{198}Hg y ^{202}Hg. La línea espectral intensa del mercurio de unos 546,07 nm está formada por varias líneas espectrales que corresponden a diversos isótopos del mercurio. Las longitudes de onda de esta línea para el ^{198}Hg y ^{202}Hg son 546,07532 y 546,07355 respectivamente. ¿Cuál debe ser el poder de resolución de una red capaz de resolver estas dos líneas isotópicas en el espectro de tercer orden? Si la red se ilumina en una región de 2 cm de anchura, ¿cuál debe ser el número de líneas por centímetro de la red?

•• **68** Una red de transmisión se utiliza para estudiar la región espectral de 480 a 500 nm. La dispersión angular de esta región es 12° en el tercer orden.

(a) Determinar el número de líneas por centímetro.
(b) ¿Cuántos órdenes son visibles?

•• **69** Una luz blanca incide normalmente sobre una red de transmisión y el espectro se observa sobre una pantalla situada a 8,0 m de la red. En el espectro de segundo orden la separación entre las longitudes de onda de 520 y 590 nm es de 8,4 cm.

(a) Determinar el número de líneas por centímetro de la red.
(b) ¿Cuál es la separación entre estas dos longitudes de onda en los espectros de primer y tercer orden?

••• **70** Una red de difracción posee n líneas por metro. Demostrar que la separación angular de dos líneas de longitudes de onda λ y $\lambda + \Delta\lambda$ metros es aproximadamente

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(1/\mathrm{nm})^2 - \lambda^2}}$$

••• **71** En el caso de una red de difracción estamos interesados no sólo en el poder de resolución R, que es la capacidad de la red para separar dos longitudes de onda próximas, sino también en la dispersión D de la red. Ésta se define por $D = \Delta\theta_m/\Delta\lambda$ en el orden m-ésimo.

(a) Demostrar que puede escribirse D como

$$D = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}$$

siendo d el espaciado de la red.

(b) Si se han de resolver las dos rayas amarillas del sodio (longitudes de onda 589,0 y 589,6 nm) mediante una red de difracción de segundo orden con 2000 rendijas por centímetro, ¿cuántas rendijas deben ser iluminadas mediante el haz?
(c) ¿Cuál será la separación entre estas líneas amarillas resueltas si se observa el diagrama en una pantalla situada a 4 m de la red?

••• **72** En el caso de una red de difracción en la que todas las superficies son normales a la radiación incidente, la mayoría de la energía se consume en el orden cero, que resulta inútil desde el punto de vista espectroscópico puesto que las diversas longitudes de onda corresponden al ángulo 0°. Por consiguiente, las redes modernas tienen los *surcos* con *forma* especial como se ve en la figura 35.41. Estos surcos así conformados desplazan la reflexión especular, que contiene la mayor parte de la energía, del orden cero a otro orden superior.

(a) Calcular el ángulo de inclinación ϕ en función de a (separación entre surcos), de λ (la longitud de onda) y de m (el orden en el que ha de producirse la reflexión especular).
(b) Calcular el ángulo adecuado para que la reflexión especular se produzca en el segundo orden para la luz de longitud de onda de 450 nm que incide sobre una red con 10 000 líneas por centímetro.

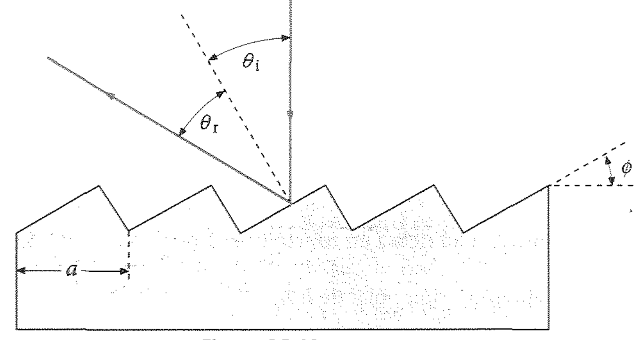


Figura 35.41 Problema 72.

••• **73** En este problema se deducirá la ecuación 35.28 que da el poder de resolución de una red de difracción que contiene N rendijas separadas entre sí una distancia d. Para ello, se calculará la separación angular entre el máximo y el mínimo para una cierta longitud de onda λ y la hare-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

mos igual a la separación angular del máximo de orden m-ésimo correspondiente a dos longitudes de onda próximas.

(a) Demostrar que la diferencia de fase ϕ entre la luz procedente de dos rendijas adyacentes viene dada por

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \text{ sen } \theta$$

(b) Derivar esta expresión para demostrar que una pequeña variación en el ángulo $d\theta$ da como resultado un cambio de fase $d\phi$ dado por

$$d\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta \, d\theta$$

(c) En el caso de N rendijas, la separación angular entre un máximo de interferencia y un mínimo de interferencia corresponde a un cambio de fase de $d\phi = 2\pi/N$. Utilizar este hecho para demostrar que la separación angular $d\theta$ entre el máximo y el mínimo para una cierta longitud de onda λ viene dada por

$$d\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \qquad \textbf{(35.30)}$$

(d) El ángulo del máximo de interferencia de orden m-ésimo para la longitud de onda λ viene dado por la ecuación 35.27. Calcular la diferencial de cada miembro de esta ecuación para demostrar que la separación angular del máximo de orden m-ésimo para dos longitudes de onda muy cercanas que difieren en $d\lambda$ viene dada por

$$d\theta \approx \frac{m \, d\lambda}{d \cos \theta} \qquad \textbf{(35.31)}$$

(e) De acuerdo con el criterio de Rayleigh, se resolverán en el orden m-ésimo dos longitudes de onda si la separación angular de las mismas dada por la ecuación 35.31 es igual a la separación angular del máximo y el mínimo de interferencia dados por la ecuación 35.30. Utilizarlo para deducir la ecuación 35.28 que nos da el poder de resolución de una red.

Problemas generales

• **74** Verdadero o falso:

(a) Cuando ocurre interferencia destructiva entre dos ondas, la energía se convierte en energía térmica.
(b) Sólo se observa interferencia en ondas procedentes de fuentes coherentes.
(c) En el diagrama de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola rendija, cuando más estrecha es ésta, más ancho es el máximo central del diagrama de difracción.
(d) Una abertura circular puede producir un diagrama de difracción de Fraunhofer y uno de Fresnel.
(e) La capacidad de resolver dos fuentes puntuales depende de la longitud de onda de la luz.

• **75** En una demostración en clase, se utiliza un rayo láser para iluminar dos rendijas separadas por 0,5 mm, y se observa el diagrama de interferencias producido sobre una pantalla situada a una distancia de 5 m. La distancia en la pantalla a la franja brillante número 37 es de 25,7 cm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

• **76** Una rendija larga, estrecha y horizontal está situada a 1 mm por encima de un espejo plano. El diagrama de interferencias producido por la rendija y su imagen se ven en una pantalla situada a una distancia de 1 m de la rendija. La longitud de onda de la luz es 600 nm.

(a) Hallar la distancia del espejo al primer máximo.
(b) ¿Cuántas bandas oscuras por centímetro se ven en la pantalla?

• **77** En una demostración en clase de la difracción, se hace pasar un haz láser de 700 nm de longitud de onda a través de una rendija vertical de 0,5 mm de anchura que luego incide sobre una pantalla distante 6 m. Hallar la longitud horizontal del máximo principal de difracción en la pantalla, es decir, hallar la distancia entre el primer mínimo a la izquierda y el primer mínimo a la derecha del máximo central.

• **78** ¿Cuál es la abertura necesaria (en milímetros) en unos prismáticos de ópera (binoculares) para que un observador pueda distinguir las pestañas de una soprano (separadas entre sí 0,5 mm) situada a una distancia de 25 m? Suponer que la longitud de onda efectiva de la luz es de 550 nm.

• **79** El diámetro de la abertura del radiotelescopio de Arecibo, Puerto Rico, es de 300 m. ¿Cuál es el poder de resolución del telescopio cuando se sintoniza para detectar microondas de longitud de onda 3,2 cm?

•• **80** Se utiliza una capa muy fina de un material transparente con un índice de refracción de 1,30 como un recubrimiento antirreflejante en la superficie de vidrio de índice de refracción 1,50. ¿Cuál deberá ser el espesor para que la película no refleje la luz de 600 nm de longitud de onda?

•• **81** Un *interferómetro Fabry-Perot* consta de dos espejos semiplateados paralelos, separados entre sí una pequeña distancia a. Demostrar que cuando la luz incide sobre el interferómetro con un ángulo de incidencia θ, la luz transmitida tendrá una intensidad máxima cuando $a = m\lambda/ 2 \cos \theta$.

•• **82** Una lámina de mica de 1,20 μm de espesor se encuentra suspendida en el aire. En el espectro de luz reflejada en la lámina se encuentran ventanas en el espectro visible a 421, 474, 542 y 633 nm. Calcular el índice de refracción de la mica.

•• **83** Una lente de una cámara fotográfica se construye de vidrio cuyo índice de refracción es 1,6. Esta lente se recubre con una película de fluoruro magnésico (n = 1,38) para mejorar su transmisión luminosa. Esta película ha de producir una reflexión cero para la luz de longitud de onda 540 nm. Considerar que la superficie de la lente es un plano liso y que la película tiene un espesor uniforme.

(a) ¿Cuál deberá ser el espesor de la película para realizar su objetivo en el primer orden?
(b) ¿Existirán interferencias destructivas para otras longitudes de onda visibles?
(c) En qué factor se reducirá la reflexión en esta película en el caso de longitudes de onda de 400 y 700 nm? Despreciar la variación de la luz reflejada procedente de las dos superficies.

•• **84** En una cámara de orificio pequeño se obtienen imágenes borrosas debido al tamaño finito del orificio (es decir, debido a los rayos que llegan al punto imagen procedentes de diferentes partes del orificio) y a los fenómenos de difracción. Cuanto más pequeño es el orificio, la imagen es más definida, pero el efecto borroso debido a la difracción se incrementa. El tamaño óptimo de la abertura para la imagen más definida es aquel para el cual la dispersión debida a la difracción iguala a la dispersión debida al tamaño. Estimar el tamaño óptimo de la abertura si la distancia desde el orificio a la pantalla es de 10 cm y la longitud de onda de la luz 550 nm.

•• **85** El pintor impresionista Georges Seurat utilizaba una técnica denomina "puntillismo", en la cual sus pinturas estaban compuestas por puntos pequeños cercanos de color puro, cada uno de ellos de unos 2 mm de diámetro. La ilusión de la mezcla de colores de forma suave se produce en el ojo del observador debido a efectos de difracción. Calcular la distancia mínima de visión para que este efecto actué adecuadamente. Utilizar la longitud de onda de la luz visible que requiere la *máxima* distancia, de modo que nos aseguremos que el efecto funciona para *todas* las longitudes de onda de la luz visible. Suponer que la pupila del ojo tiene un diámetro de 5 mm.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

••• **86** Un *refractómetro de Jamin* es un dispositivo para medir o comparar los índices de refracción de los fluidos. Este dispositivo divide un haz de luz monocromática en dos partes, cada una de las cuales es dirigida a lo largo del eje de un tubo cilíndrico para luego combinarse de nuevo en un solo haz que se hace pasar a través de un telescopio. Suponer que la longitud de cada tubo es de 0,4 m y que se utiliza luz de sodio de 589 nm de longitud de onda. Ambos tubos se someten inicialmente al vacío y se observa una interferencia constructiva en el centro del campo de visión. Según se permite entrar el aire lentamente en uno de los tubos, el campo de visión central varía alternativamente de oscuro a brillante un total de 198 veces.

(a) ¿Cuál es el índice de refracción del aire?
(b) Si se pueden contar las franjas con un error de ±0,25 franjas, en donde una de las franjas es equivalente a un ciclo completo de la variación de intensidad en el centro del campo de visión, ¿con qué precisión puede determinar este experimento el índice de refracción del aire?

••• **87** Luz de longitud de onda λ se difracta a través de una rendija única de anchura a y el diagrama resultante se observa en una pantalla situada a una distancia grande L de la rendija.

(a) Demostrar que la anchura del máximo principal en la pantalla viene dada aproximadamente por $2L\lambda/a$.
(b) Si se corta una rendija de anchura $2L\lambda/a$ en la pantalla y se ilumina, demostrar que la anchura de su máximo principal a la misma distancia L, es decir de nuevo sobre el plano de la rendija, es igual a a con la misma aproximación.

••• **88** Los telespectadores de zonas rurales observan frecuentemente que la imagen del televisor parpadea cuando un avión vuela en sus proximidades. El parpadeo es debido a la interferencia entre la señal recibida directamente desde el transmisor y la reflejada en la antena del avión. Supongamos que el receptor se encuentra a 36 km de la estación transmisora a una frecuencia de 86,0 MHz y un avión vuela a una altura de unos 600 m por encima del receptor y en dirección al transmisor. La frecuencia de oscilación de la imagen es 4 Hz.

(a) Determinar la velocidad del avión.
(b) Si la intensidad de la imagen pasa por un máximo cuando el avión está en la vertical del receptor, ¿cuál es la altura máxima del avión sobre la antena receptora?

••• **89** Para la situación descrita en el problema 88, demostrar que la frecuencia de oscilación de la intensidad de la imagen es un mínimo cuando el avión está justamente sobre el punto medio entre el transmisor y la antena receptora.

••• **90** Un experimento de doble rendija utiliza un láser helioneón con una longitud de onda de 633 nm y una separación entre rendijas de 0,12 mm. Cuando se coloca una lámina delgada de plástico delante de una de las rendijas, el diagrama de interferencia se desplaza en 5,5 franjas. Cuando se repite el experimento bajo el agua, el desplazamiento es de 3,5 franjas. Calcular

(a) el espesor de la lámina de plástico y
(b) el índice de refracción de la misma.

••• **91** Dos fuentes coherentes están situadas sobre el eje y en $\lambda/4$ y $-\lambda/4$. Ambas emiten ondas de longitud de onda λ e intensidad I_0.

(a) Calcular la intensidad neta I en función del ángulo θ medido desde el eje $+x$.
(b) Construir un diagrama polar de $I(\theta)$.

www.elsolucionario.net



En esta micrografía obtenida con un microscopio de barrido de efecto túnel puede observarse la [illegible] silicio, un ingrediente importante en muchos dispositivos semiconductores, con un aumento del orden de mil millones. Los átomos individuales parecen colinas. Un ordenador representa gráficamente la información digital recogida por el microscopio y asigna colores falsos al gráfico para acentuar la estructura cristalina.

www.elsolucionario.net

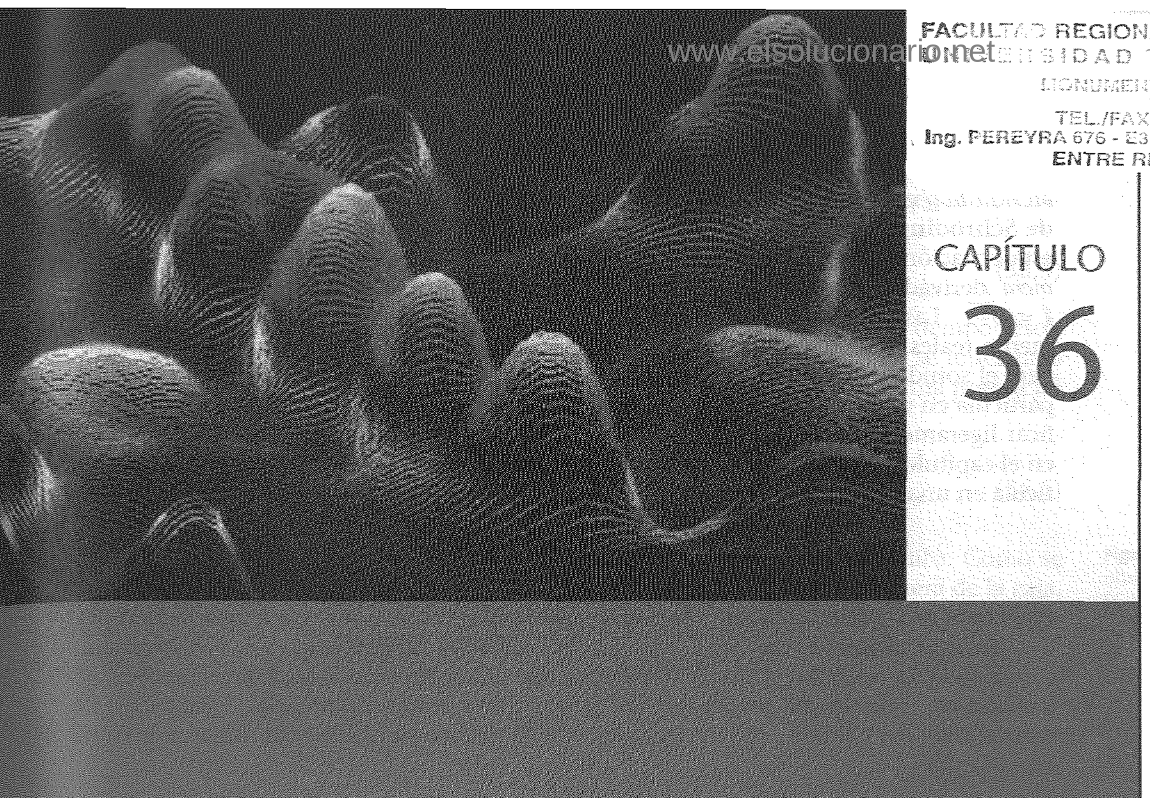
física moderna: mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 36

Aplicaciones de la ecuación de Schrödinger

Micrografía de barrido de efecto túnel en colores falsos de un segmento de una molécula de DNA aumentada 1,5 millones de veces. Una muestra de DNA con su doble hélice fue disuelta en una solución salina y depositada sobre grafito antes de obtener su imagen al aire mediante el microscopio. La fila de picos de color amarillo-naranja corresponde a los bordes de la doble hélice.

www.elsolucionario.net

En el capítulo 17 vimos que los electrones y otras "partículas" poseen propiedades ondulatorias que pueden describirse mediante una función de onda $\Psi(x, t)$. La probabilidad de encontrar la partícula en alguna región del espacio es proporcional al cuadrado de la función de onda. Ya mencionamos que la función de onda es una solución de la ecuación de Schrödinger y consideramos algunas soluciones cualitativamente sin referencia a la propia ecuación. En particular demostramos cómo las condiciones de la onda estacionaria conducen a la cuantización de la energía correspondiente a una partícula confinada en una caja unidimensional.

Este capítulo es una continuación de la materia introducida en el capítulo 17. Expondremos la ecuación de Schrödinger y la aplicaremos a la partícula en el problema de la caja y otras situaciones en las cuales la partícula está confinada en una región del espacio para ilustrar cómo las condiciones límites conducen a la cuantización de la energía. Después veremos cómo la ecuación de Schrödinger conduce a la penetración de una barrera y discutiremos la extensión de la ecuación de Schrödinger a varias dimensiones y varias partículas. Se recomienda al lector una revisión del capítulo 17 antes de continuar con la lectura de la siguiente exposición.

Ecuación de Schrödinger — 36.1

Análogamente a la ecuación de onda clásica (ecuación 15.9b), la ecuación de Schrödinger es una ecuación en derivadas parciales en el espacio y en el tiempo y lo mismo que las leyes del movimiento de Newton, carece de deducción. Su validez, como la de las leyes de Newton descansa en su acuerdo con la experiencia. En una dimensión, la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \qquad (36.1)$$

Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

www.elsolucionario.net

en donde U es la función de energía potencial.[1] La ecuación 36.1 se denomina **ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo**. A diferencia de la ecuación de onda clásica, esta ecuación relaciona la segunda derivada espacial de la función de onda con la *primera* derivada temporal de la función de onda y contiene el número imaginario $i = \sqrt{-1}$. Las funciones de onda que son soluciones de esta ecuación no son necesariamente reales. $\Psi\,(x,\,t)$ no es una función medible como las funciones de onda clásicas para el sonido o las ondas de las cuerdas. No obstante, la probabilidad de localizar una partícula en una región dx del espacio es ciertamente real, de modo que debemos modificar ligeramente la ecuación correspondiente a la densidad de probabilidad que vimos en el capítulo 17 (ecuación 17.14). Tomaremos para la probabilidad de localizar una partícula en una región dx la expresión

$$P(x,t)\;dx = |\Psi(x,t)|^2\;dx = \Psi^*\,\Psi\;dx \tag{36.2}$$

en donde Ψ^*, la función compleja conjugada de Ψ, se obtiene de Ψ reemplazando i por $-i$ allí donde aparece.[2]

Cuando la energía potencial U no depende del tiempo (por ejemplo, cuando una función de onda de una partícula corresponde a una onda estacionaria), la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo puede simplificarse escribiendo la función de onda en la forma

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t} \tag{36.3}$$

El segundo miembro de la ecuación 36.1 toma entonces la forma

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar(-i\omega)\,\psi(x)e^{-i\omega t} = \hbar\omega\psi(x)e^{-i\omega t} = E\psi(x)e^{-i\omega t}$$

en donde $E = \hbar\omega$ es la energía de la partícula. Sustituyendo $\psi(x)e^{-i\omega t}$ en la ecuación 36.1 y suprimiendo el factor $e^{-i\omega t}$ se obtiene una ecuación para $\psi(x)$ llamada **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\,\psi(x) = E\psi(x) \tag{36.4}$$

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

en donde hemos expresado U en la forma $U(x)$ para destacar el hecho de que no hay en la ecuación ninguna dependencia con el tiempo.

El cálculo de los niveles energéticos permitidos en un sistema afecta sólo a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, mientras que la determinación de las probabilidades de transición entre estos niveles requiere la solución de la ecuación dependiente del tiempo. En este texto nos referiremos siempre a la ecuación independiente del tiempo.

La solución de la ecuación 36.4 depende de la forma de la función de energía potencial $U(x)$. Cuando el valor de $U(x)$ es tal que la partícula está confinada en una determinada región del espacio, sólo ciertas energías discretas E_n dan soluciones ψ_n que satisfacen la condición de normalización (ecuación 17.15):

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\;dx = 1$$

[1] Aunque aquí simplemente establecemos la ecuación de Schrödinger, el propio Schrödinger tenía un amplio conocimiento de la teoría clásica de ondas, base de su ecuación.

[2] Todo número complejo puede escribirse en la forma $z = a + bi$, en donde a y b son números reales y $i = \sqrt{-1}$. El conjugado complejo de z es $z^* = a - bi$, de modo que $z^*z = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Los números complejos se tratan más ampliamente en el Apéndice D.

www.elsolucionario.net

Las funciones de onda completas dependientes del tiempo vienen dadas, según la ecuación 36.3 por

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)e^{-i\omega_n t} = \psi_n(x)e^{-i(E_n/\hbar)t} \tag{36.5}$$

Ilustraremos el uso de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo resolviéndola para el problema de una partícula en una caja. En la figura 36.1 se muestra la energía potencial para una caja unidimensional de $x = 0$ a $x = L$. Se denomina **potencial de pozo rectangular infinito** y matemáticamente se describe por

$$\begin{aligned} U(x) &= 0, \qquad 0 < x < L \\ U(x) &= \infty, \qquad x < 0 \quad \text{o} \quad x > L \end{aligned} \tag{36.6}$$

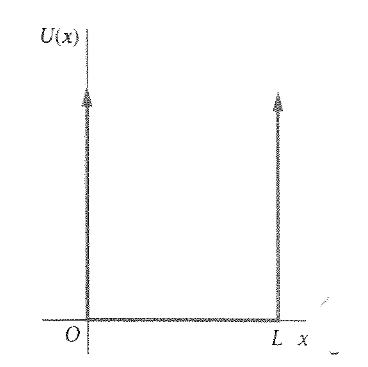


Figura 36.1 Energía potencial de pozo rectangular infinito. Para $x < 0$ y $x > L$, la energía potencial $U(x)$ es infinita. La partícula está confinada en la región $0 < x < L$.

Dentro de la caja, la energía potencial es cero y fuera de la caja, es infinito. Como se requiere que la partícula esté en la caja, tenemos $\psi(x) = 0$ en todo punto fuera de la caja. Como hemos de resolver la ecuación de Schrödinger dentro de la caja se cumple la condición de $\psi(x)$ igual a cero para $x = 0$ y $x = L$.

Dentro de la caja, la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

o sea,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x) \tag{36.7}$$

en donde,

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{36.8}$$

La solución general de la ecuación 36.7 se expresa del modo siguiente

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \tag{36.9}$$

en donde A y B son constantes. Para $x = 0$ tenemos

$$\psi(0) = A \operatorname{sen}(k0) + B\cos(k0) = 0 + B$$

La condición límite $\psi(x) = 0$ para $x = 0$ nos da $B = 0$ y la ecuación 36.9 se convierte en

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx \tag{36.10}$$

La función de onda es, por tanto, una función sinusoidal con una longitud de onda λ relacionada con el número de onda k en la forma usual $\lambda = 2\pi/k$. La condición límite $\psi(x) = 0$ para $x = L$ restringe los valores posibles de k y, por tanto, los valores de la longitud de onda λ y (según la ecuación 36.8), la energía $E = \hbar^2k^2/2m$. Por tanto,

$$\psi(L) = A \operatorname{sen} kL = 0 \tag{36.11}$$

Esta condición se satisface si kL es π o cualquier número entero de π, es decir, si k se restringe a los valores k_n dados por

$$k_n = n\frac{\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{36.12}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 36.8 y resolviendo para E tenemos los siguientes valores energéticos permitidos:

$$E_n = \frac{\hbar^2k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(n\frac{\pi}{L}\right)^2 = n^2\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) = n^2E_1 \tag{36.13}$$

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \tag{36.14}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

en donde hemos sustituido $\hbar = h/2\pi$. La ecuación 36.14 es la misma que la ecuación 17.19 que se obtuvo ajustando un número entero de medias longitudes de onda en la caja.

Para cada valor de n existe una función de onda $\psi_n(x)$ dada por

$$\psi_n(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (36.15)$$

que coincide con la ecuación 17.22 con la constante $A_n = \sqrt{2/L}$ determinada por normalización.[1]

36.2 ■ Una partícula en un pozo rectangular finito

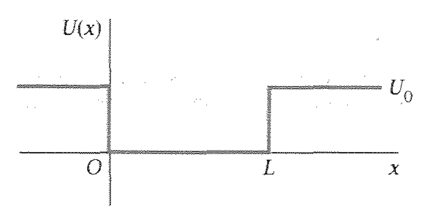


Figura 36.2 Energía potencial de pozo rectangular finito.

La cuantización de la energía que hemos determinado para una partícula en un pozo rectangular infinito puede deducirse de la solución general de la ecuación de Schrödinger para cualquier partícula confinada en una región del espacio. En efecto, consideremos el comportamiento cualitativo de la función de onda para una función de energía potencial algo más general, el pozo rectangular finito, que se muestra en la figura 36.2. Esta función de energía potencial viene descrita matemáticamente por

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0, \qquad x < 0 \\ U(x) &= 0, \qquad 0 < x < L \\ U(x) &= U_0, \qquad x > L \end{aligned} \qquad (36.16)$$

Esta energía potencial es discontinua en $x = 0$ y $x = L$, pero es finita en todas partes. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger para este tipo de función energía potencial varían según la energía total E sea mayor o menor que U_0. No trataremos el caso en que $E > U_0$, excepto para indicar que en dicho caso la partícula no está confinada y cualquier valor de la energía está permitido; es decir, no hay cuantización de la energía. Aquí supondremos siempre que $E < U_0$.

Dentro del pozo, $U(x) = 0$ y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es la misma que para el pozo infinito (ecuación 36.7):

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x)$$

en donde $U(x)$ es la energía potencial y E la energía total con

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

La solución general es de la forma

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$

En este caso, $\psi(x)$ no es necesariamente cero para $x = 0$, y, por tanto, B no es cero. Fuera del pozo, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)\psi(x) = \alpha^2\psi(x) \qquad (36.17)$$

en donde

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) > 0 \qquad (36.18)$$

[1] Véase ecuación 17.15.

www.elsolucionario.net

Las funciones de onda y las energías permitidas para la partícula pueden determinarse resolviendo la ecuación 36.17 para $\psi(x)$ fuera del pozo y exigiendo entonces que $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ sean funciones continuas en los límites $x = 0$ y $x = L$. La solución de la ecuación 36.17 no es difícil (para valores positivos de x es el de la forma $\psi(x) = Ce^{-\alpha x}$), pero la aplicación de las condiciones en los límites implica operaciones laboriosas de álgebra y no es importante para nuestro objetivo. La característica más importante de la ecuación 36.17 es que la segunda derivada de $\psi(x)$, relacionada con la curvatura de la función de onda, posee el mismo signo que la función de onda ψ. Si ψ es positiva, $d^2\psi/dx^2$ también es positiva y la función de onda se incurva alejándose del eje como indica la figura 36.3*a*. De igual modo, si ψ es negativa, $d^2\psi/dx^2$ es negativa y ψ se incurva de nuevo alejándose del eje como indica la figura 36.3*b*. Este comportamiento es muy distinto del que tiene lugar dentro del pozo, donde ψ y $d^2\psi/dx^2$ tienen signos opuestos y ψ se incurva siempre hacia el eje como una función seno o coseno. Debido a este comportamiento fuera del pozo, para la mayoría de los valores de la energía E en la ecuación 36.17, $\psi(x)$ se hace infinito cuando x se aproxima a $\pm\infty$; es decir, la mayor parte de las funciones de onda $\psi(x)$ no se comportan bien fuera del pozo. Aunque satisfacen la ecuación de Schrödinger, no son funciones de onda propias, ya que no pueden normalizarse. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger se comportan formalmente (es decir, se aproxima a 0 cuando $|x|$ se hace muy grande) sólo para ciertos valores de la energía. Estos valores de la energía se corresponden con las energías permitidas para el pozo rectangular finito.

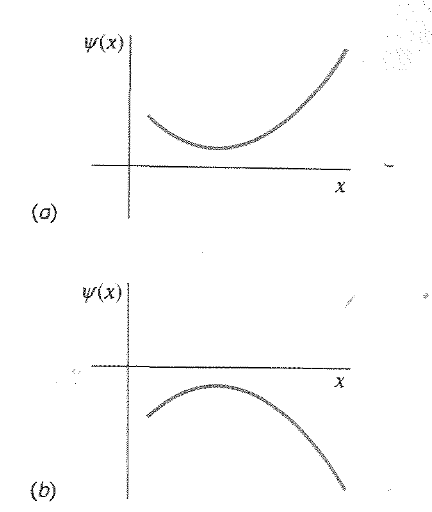


Figura 36.3 (*a*) Una función positiva con curvatura positiva. (*b*) Una función negativa con curvatura negativa.

La figura 36.4 muestra una función de onda que se comporta formalmente con una longitud de onda λ_1 dentro del pozo correspondiente a la energía del estado fundamental. El comportamiento de las funciones de onda correspondientes a longitudes de onda y energías próximas se muestra también en esta figura. Las funciones de onda y las distribuciones de probabilidad para el estado fundamental y los dos primeros estados excitados se representan en la figura 36.5. En esta figura podemos ver que las longitudes de onda dentro del pozo son ligeramente mayores que las correspondientes al pozo infinito (figura 17.14) de modo que las energías correspondientes son ligeramente menores que las del pozo infinito. Otra característica del problema del pozo finito es que existe sólo un número finito de energías permitidas. Para valores muy pequeños de U_0, existe sólo una energía permitida.

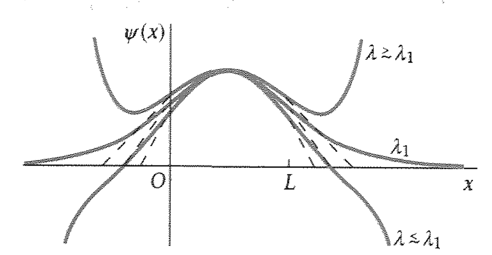


Figura 36.4 Funciones que satisfacen la ecuación de Schrödinger con longitudes de onda próximas a λ_1 que corresponde a la energía del estado fundamental $E_1 = \hbar^2/2m\lambda_1^2$ en el pozo finito. Si λ es ligeramente mayor que λ_1, la función y su pendiente tienden conjuntamente a cero. Si λ es ligeramente menor que λ_1, la función cruza el eje x mientras la pendiente es todavía negativa. La pendiente se hace entonces más negativa porque $d^2\psi/dx^2$ es ahora negativa. Esta función tiende a un infinito negativo cuando x tiende a infinito.

Obsérvese que la función de onda penetra más allá de los bordes del pozo para $x = L$ y $x = 0$, indicando que existe una pequeña probabilidad de encontrar la partícula en la región en la cual su energía total E es inferior a su energía potencial U_0. Esta región se denomina *clásicamente prohibida*, pues su energía cinética, $E - U_0$, sería negativa para $U_0 > E$. Como la energía cinética negativa no tiene significado en la física clásica, es interesante especular sobre el resultado de un intento de observar la partícula en la región clásicamente prohibida. Mediante el principio de incertidumbre se demuestra que si se realiza el intento de localizar la partícula en la región clásicamente prohibida, se introduce una incertidumbre en la medida de la cantidad de movimiento de la partícula correspon-

www.elsolucionario.net

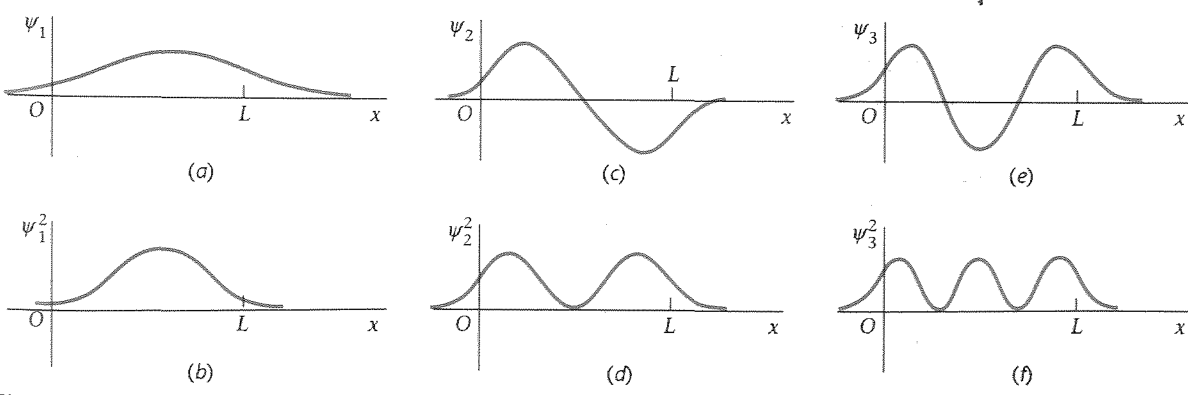


Figura 36.5 Representaciones gráficas de las funciones de onda $\psi_n(x)$ y distribuciones de probabilidad $\psi_n^2(x)$ para n = 1, 2 y 3 correspondientes a un pozo rectangular finito. Comparar estos gráficos con los de la figura 17.14 para el pozo rectangular infinito, en donde las funciones de onda son cero para $x = 0$ y $x = L$. Las longitudes de onda son aquí ligeramente mayores que las correspondientes al pozo infinito, de modo que las energías permitidas son algo menores.

 www.elsolucionario.net

diente a un mínimo de energía cinética que es superior a $U_0 - E$. Esto es justamente lo suficientemente grande para imposibilitar la medida de una energía cinética negativa. La penetración de la función de onda en una región clásicamente prohibida tiene consecuencias importantes en la penetración de barrera, que veremos en la sección 36.4.

Gran parte de nuestra discusión sobre el problema del pozo finito se aplica a cualquier problema en el cual $E > U(x)$ en cierta región y $E < U(x)$ fuera de la misma, como veremos en la sección siguiente.

36.3 ■ Oscilador armónico

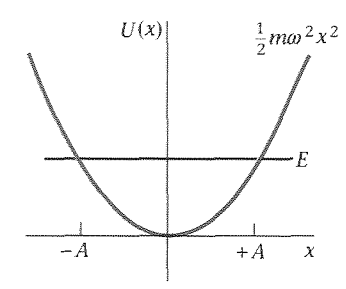


Figura 36.6 Potencial oscilador armónico.

La energía potencial de una partícula de masa m sujeta a un muelle de constante de fuerza K es

$$U(x) = \tfrac{1}{2}Kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \tag{36.19}$$

en donde $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ es la frecuencia natural del oscilador. Clásicamente, el objeto oscila entre $x = +A$ y $x = -A$. Su energía total es $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2$ que puede tener cualquier valor positivo, o cero.

Esta función de energía potencial, representada en la figura 36.6, se aplica a cualquier sistema que experimente pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable. Por ejemplo, puede aplicarse a las oscilaciones de los átomos de una molécula diatómica, tal como H_2 o HCl que oscile alrededor de su posición de equilibrio. En la región $-A \le x \le A$ entre los puntos clásicos de cambio de sentido, la energía total es mayor que la energía potencial y la ecuación de Schrödinger toma la forma

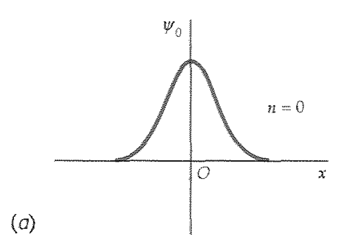
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x) \tag{36.20}$$

en donde $k^2 = 2m[E - U(x)]/\hbar^2$ depende ahora de x. Las soluciones de esta ecuación ya no son funciones seno o coseno simples, pues el número de onda $k = 2\pi/\lambda$ ahora varía con x; no obstante, como $d^2\psi/dx^2$ y ψ tienen signos opuestos, ψ se incurva siempre hacia el eje, y las soluciones son oscilantes.

Más allá de los puntos clásicos de cambio de sentido ($|x| > A$), la energía potencial supera a la energía total y la ecuación de Schrödinger es semejante a la ecuación 36.17:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = +\alpha^2\psi(x) \tag{36.21}$$

excepto en que ahora $\alpha^2 = (2m/\hbar^2)[U(x) - E] > 0$ depende de x. Para $|x| > A$, $d^2\psi/dx^2$ y ψ tienen el mismo signo, de modo que ψ se incurvará alejándose del eje, y existirán sólo ciertos valores de E para los cuales se encuentran soluciones que tienden a cero cuando x se aproxima al infinito.



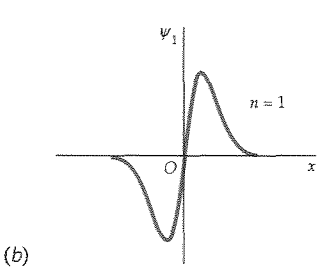


Figura 36.7 (*a*) Función de onda correspondiente al estado fundamental de la función energía potencial del oscilador armónico. (*b*) La misma función para el primer estado excitado.

Para la función de energía potencial del oscilador armónico, la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2\psi(x) = E\psi(x) \tag{36.22}$$

■ Funciones de onda y niveles energéticos

En lugar de buscar una solución general a la ecuación de Schrödinger para este sistema, nos limitaremos a exponer la solución para el estado fundamental y el primer estado excitado.

La función de onda del estado fundamental $\psi_0(x)$ resulta ser una función gaussiana centrada en el origen:

$$\psi_0(x) = A_0e^{-ax^2} \tag{36.23}$$

en donde A_0 y a son constantes. Esta función y la función de onda para el primer estado excitado se indican en la figura 36.7.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Comprobar que $\psi_0(x) = A_0e^{-ax^2}$ es una solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico.

EJEMPLO 36.1

Esquema del problema Calculamos la primera y segunda derivada de ψ respecto a x y sustituimos ambas en la ecuación 36.22. Como ésta es la función de onda del estado fundamental, sustituimos E por E_0.

1. Calcular $d\psi_0/dx$:
$$\frac{d\psi_0(x)}{dx} = -2axA_0e^{-ax^2}$$

2. Calcular $d^2\psi_0/dx^2$:
$$\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} = -2aA_0e^{-ax^2} + 4a^2x^2A_0e^{-ax^2}$$

3. Sustituir estas derivadas en la ecuación de Schrödinger:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2aA_0e^{-ax^2} + 4a^2x^2A_0e^{-ax^2}) + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2A_0e^{-ax^2} = E_0A_0e^{-ax^2}$$

4. Cancelar el factor común $A_0e^{-ax^2}$:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2a + 4a^2x^2) + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = E_0$$

5. La ecuación de la etapa 4 es válida para todo valor de x. Sustituyendo $x = 0$, resulta:
$$E_0 = \frac{\hbar^2a}{m}$$

6. Sustituir este resultado en la ecuación de la etapa 4:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}(4a^2x^2) + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = 0$$

7. Los coeficientes de los términos en x^2 deben igualarse a cero:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}(4a^2) + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 = 0$$

8. Despejar a:
$$a^2 = \frac{m^2\omega_0^2}{4\hbar^2}$$
$$a = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

9. Sustituir este resultado en la ecuación de E_0 en la etapa 5:
$$E_0 = \frac{\hbar^2a}{m} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0$$

Observación Hemos demostrado que la función dada satisface la ecuación de Schrödinger para cualquier valor de A_0 siempre que la energía E_0 tenga el valor $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. En general, cuando tenemos una ecuación que se cumple para *todos los valores de x*, cada uno de los coeficientes debe ser cero. Es decir $A = B = C = D = 0$.

Hemos visto en este ejemplo que la energía del estado viene dada por

$$E_0 = \frac{\hbar^2a}{m} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0 \qquad \textbf{(36.24)}$$

El primer estado excitado posee un nodo en el centro del pozo de potencial, lo mismo que ocurría en el caso de la partícula en una caja[1]. La función de onda $\psi_1(x)$ es

$$\psi_1(x) = A_1xe^{-ax^2} \qquad \textbf{(36.25)}$$

[1] Cada estado de energía superior posee un nodo adicional en la función de onda.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Figura 36.8 Niveles energéticos del potencial del oscilador armónico.

en donde $a = m\omega_0/2\hbar$ como en el ejemplo 36.1. Esta función se muestra también en la figura 36.7. Sustituyendo $\psi_1(x)$ en la ecuación de Schrödinger, como se hizo para $\psi_0(x)$ en el ejemplo 36.1, se obtiene la energía del primer estado excitado,

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

En general, la energía del n-ésimo estado excitado es

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})(\hbar\omega_0) \qquad (36.26)$$

como se indica en la figura 36.8. El hecho de que los niveles energéticos estén uniformemente espaciados por la magnitud $\hbar\omega_0$ es una propiedad peculiar del potencial oscilador armónico. Como vimos en el capítulo 17, los niveles energéticos de una partícula en una caja (o del átomo de hidrógeno) no están uniformemente espaciados. El espaciado preciso de los niveles energéticos está íntimamente ligado a la forma particular de la función de energía potencial.

36.4 ■ Reflexión y transmisión de las ondas electrónicas: penetración de barrera

En las secciones 36.2 y 36.3 hemos analizado problemas de estados ligados en los cuales la energía potencial es mayor que la energía total para valores grandes de $|x|$. En esta sección consideramos algunos ejemplos simples de estados no ligados en los cuales E es mayor que $U(x)$. En estos problemas $d^2\psi/dx^2$ y ψ tienen signos opuestos, de modo que $\psi(x)$ se incurva hacia el eje y no se hace infinito para valores grandes de $|x|$.

■ Potencial escalón

Consideramos una partícula de energía E que se mueve en una región donde la energía potencial es la función escalón

$$U(x) = 0, \qquad x < 0$$
$$U(x) = U_0, \qquad x > 0$$

Figura 36.9 Potencial escalón. Una partícula clásica incidente desde la izquierda, con energía total $E > U_0$, se transmite siempre. El cambio de energía potencial en $x = 0$ proporciona simplemente una fuerza impulsiva que reduce la velocidad de la partícula. Una onda incidente desde la izquierda se transmite parcialmente y se refleja en parte porque la longitud de onda cambia bruscamente en $x = 0$.

como se indica la figura 36.9. Veamos lo que ocurre cuando una partícula se mueve de izquierda a derecha y encuentra un escalón.

La respuesta clásica es simple. A la izquierda del escalón, la partícula se mueve con una velocidad $v = \sqrt{2E/m}$. En $x = 0$, una fuerza impulsiva actúa sobre la partícula. Si la energía E es menor que U_0, la partícula cambiará de sentido y se moverá hacia la izquierda con su velocidad original; es decir, la partícula se verá reflejada por el escalón. Si E es mayor que U_0, la partícula continuará moviéndose hacia la derecha pero con una velocidad reducida dada por $v = \sqrt{2(E - U_0)/m}$. Una analogía de este problema clásico es el de una bola que rueda sobre una superficie horizontal y se encuentra con una colina inclinada de altura h dada por $mgh = U_0$. Si la energía cinética de la bola es menor que mgh, la bola ascenderá sólo hasta una determinada altura y después descenderá y se moverá hacia la izquierda a su velocidad original. Si E es mayor que mgh, la bola ascenderá hasta lo alto de la colina y seguirá hacia la derecha con menor velocidad.

El resultado mecánico-cuántico es semejante cuando E es menor que U_0. La figura 36.10 muestra la función de onda para el caso $E < U_0$. Esta función se no anula para $x = 0$, pero decae exponencialmente, como la función de onda correspondiente a un estado ligado en un problema de pozo rectangular finito. La onda penetra ligeramente en la región prohibida clásicamente $x > 0$, pero eventualmente es completamente reflejada. Este problema es algo semejante al de la reflexión total interna en óptica.

Para $E > U_0$, el resultado mecánico-cuántico difiere notablemente del resultado clásico. En $x = 0$, la longitud de onda cambia bruscamente desde $\lambda_1 = h/p_1 = h/\sqrt{2mE}$ a $\lambda_2 = h/p_2 = h/\sqrt{2m(E - U_0)}$. Al estudiar las ondas vimos que cuando la longitud de onda cambia súbitamente, parte de la onda es reflejada y parte es transmitida. Como el movi-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

miento de un electrón (u otra partícula) es gobernado por una ecuación de onda, el electrón será en unos momentos transmitido y en otros reflejado. Las probabilidades de reflexión y transmisión pueden calcularse resolviendo la ecuación de Schrödinger en cada región del espacio y comparando las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada con la de la onda incidente. Este cálculo y su resultado son semejantes a la determinación de la fracción de luz reflejada en una interfase aire-vidrio. Si R es la probabilidad de reflexión, llamada **coeficiente de reflexión**, este cálculo no da

$$R = \frac{(k_1 - k_1)^2}{(k_1 + k_1)^2} \qquad \textbf{(36.27)}$$

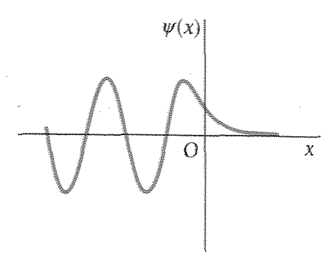


Figura 36.10 Cuando la energía total E, es menor que U_0, la función de onda penetra ligeramente en la región $x > 0$. Sin embargo, la probabilidad de reflexión para este caso es 1, de modo que no se transmite la energía.

en donde k_1 es el número de onda de la onda incidente y k_2 el de la onda transmitida. Este resultado es el mismo que el obtenido en óptica para la reflexión de la luz en incidencia normal sobre la frontera que separa dos medio con distintos índices de refracción n (ecuación 33.11). La probabilidad de transmisión T, llamada **coeficiente de transmisión** puede calcularse a partir del coeficiente de reflexión, ya que la suma de las probabilidad de transmisión y reflexión es igual a 1:

$$T + R = 1 \qquad \textbf{(36.28)}$$

EJEMPLO 36.2

Una partícula de energía E_0 se desplaza en una región de energía potencial nula e incide sobre una barrera de potencial de altura $U_0 = 0{,}2E_0$. Determinar la probabilidad que tiene la partícula de reflejarse en dicha barrera.

Esquema del problema Necesitamos calcular los números de onda k_1 y k_2 para determinar el coeficiente de reflexión R según la ecuación 36.27. Los números de onda están relacionados con la energía cinética E_c por $E_c = p^2/2m = \hbar^2k^2/2m$.

1. La probabilidad de reflexión es el coeficiente de reflexión: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$

2. Calcular k_1 a partir de la energía cinética inicial E_0: $\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} = E_0$

   $k_1 = \sqrt{2mE_0/\hbar^2} = 1{,}41\sqrt{mE_0/\hbar^2}$

3. Relacionar k_2 con la energía cinética final E_{c_2}: $\frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = E_{c_2} = E_0 - U_0 = E_0 - 0{,}2E_0 = 0{,}8E_0$

4. Despejar k_2: $k_2 = \sqrt{2m(0{,}8E_0)/\hbar^2} = 1{,}26\sqrt{mE_0/\hbar^2}$

5. Sustituir estos valores para calcular R: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(1{,}41 - 1{,}26)^2}{(1{,}41 + 1{,}26)^2} = 0{,}00316$

Observación La probabilidad de reflexión es sólo del 0,3%. Esta probabilidad es pequeña porque la altura de la barrera reduce la energía cinética en sólo el 20%. Como k es proporcional a la raíz cuadrada de la energía cinética, el número de onda y, por tanto, la longitud de onda, cambia sólo en un 10%.

Ejercicio Expresar el índice de refracción n de la luz en función del número de onda k y demostrar que la ecuación 33.11 correspondiente a la reflexión de la luz bajo incidencia normal equivale a la ecuación 36.27.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Figura 36.11 Desarrollo en función del tiempo de un paquete de ondas unidimensional que representa una partícula incidente sobre un potencial escalón en el caso que $E > U_0$. La posición de una partícula clásica viene indicada por el punto. Obsérvese que parte del paquete se transmite y parte se refleja.

En mecánica cuántica, una partícula localizada se representa mediante un paquete de ondas, que posee un máximo en la posición más probable de la partícula. La figura 36.11 muestra un paquete de ondas que representa una partícula de energía E incidente sobre un potencial escalón de altura U_0, menor que E. Después del encuentro, existen dos paquetes de ondas. Las alturas relativas del paquete transmitido y del paquete reflejado indican las probabilidades relativas de la transmisión y la reflexión. Para la situación indicada en este caso, E es mucho mayor que U_0 y la probabilidad de transmisión es muy superior a la de reflexión

■ Penetración de barrera

La figura 36.12*a* muestra una barrera de potencial rectangular de altura U_0 y anchura a dada por

$$U(x) = 0, \qquad x < 0$$
$$U(x) = U_0, \qquad 0 < x < a$$
$$U(x) = 0, \qquad x > a$$

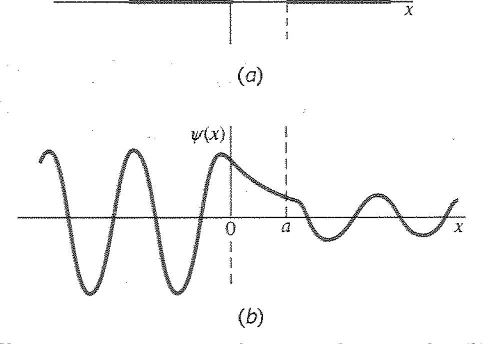


Figura 36.12 (*a*) Barrera de potencial rectangular. (*b*) Penetración de la barrera por una onda con energía total inferior a la energía de la barrera. Una parte de la onda es transmitida por la barrera, incluso en el caso de que, clásicamente, la partícula no pueda penetrar en la región $0 < x < a$, en donde la energía potencial es superior a la energía total.

Consideremos una partícula de energía E, ligeramente menor que U_0, que incide sobre la barrera desde la izquierda. Clásicamente, la partícula sería siempre reflejada. Sin embargo, una onda incidente en estas condiciones no decrece inmediatamente a cero en la barrera, sino que decae exponencialmente en la región clásicamente prohibida $0 < x < a$. Una vez alcanzada la pared más alejada de la barrera ($x = a$) la función de onda toma la forma de una función sinusoidal que continúa a la derecha de la barrera como se indica en la figura 36.12*b*. Esto implica que hay cierta probabilidad de que la partícula (representada por la función de onda) se encuentre en el lado alejado de la barrera, a pesar de que clásicamente nunca atravesaría esta barrera. Para el caso en que la magnitud $\alpha a = \sqrt{2ma^2(U_0 - E)/\hbar^2}$ sea mucho mayor que 1, el coeficiente de transmisión es proporcional a $e^{-2\alpha a}$:

$$T \propto e^{-2\alpha a} \qquad (36.29)$$

Transmisión a través de una barrera

con $\alpha = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}$. La probabilidad de penetración de la barrera disminuye, por tanto, exponencialmente con el espesor de la barrera, a, y con la raíz cuadrada de la altura relativa de la barrera $(U_0 - E)$.

En la figura 36.13*b* se muestra un paquete de ondas que incide sobre una barrera potencial de altura U_0 considerablemente mayor que la energía de la partícula. La probabilidad de penetración es muy pequeña, como indican los tamaños relativos de los paquetes reflejado y transmitido. En la figura 36.13*a* la barrera es ligeramente mayor que

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

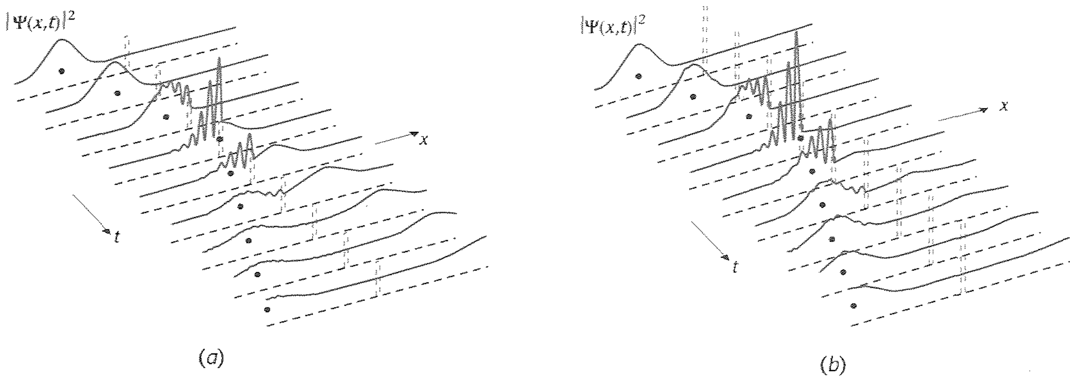


Figura 36.13 Penetración de barrera. (*a*) Paquete de ondas que representa una partícula incidente sobre una barrera de altura ligeramente superior a la energía de la partícula. En este caso particular, la probabilidad de transmisión es aproximadamente igual a la probabilidad de reflexión, como indican los tamaños relativos de los paquetes transmitido y reflejado. (*b*) La misma partícula incidente sobre una barrera de altura mucho mayor que la energía de la partícula. Una parte muy pequeña del paquete penetra como en un túnel a través de la barrera. En ambos dibujos la posición de una partícula clásica viene indicada por un punto.

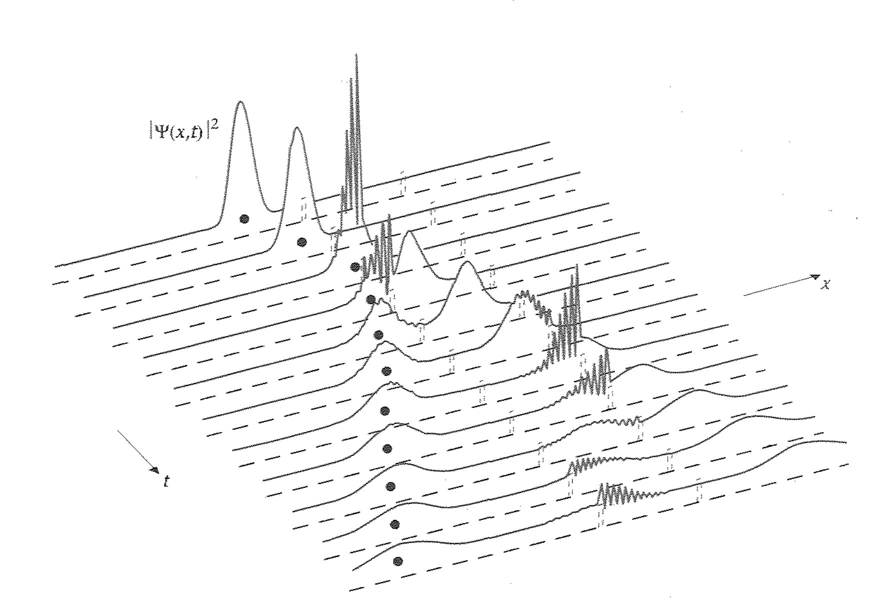


Figura 36.14 Paquete de ondas que representa una partícula incidente sobre dos barreras. En cada encuentro, una parte del paquete se transmite y otra se refleja, dando lugar a que una fracción del paquete quede atrapada cierto tiempo entre las barreras.

www.elsolucionario.net

la energía de la partícula. En este caso la probabilidad de penetración es aproximadamente igual a la probabilidad de reflexión. La figura 36.14 muestra una partícula que incide sobre dos barreras de potencial de altura ligeramente mayor que la energía de la partícula.

Como ya hemos mencionado, la penetración de una barrera no es exclusiva de la mecánica cuántica. Cuando la luz se refleja totalmente en una interfase vidrio-aire, la onda luminosa puede penetrar la barrera de aire si una segunda pieza se sitúa a pocas longitudes de onda de la primera. Este efecto puede demostrarse con un haz de láser y dos prismas de 45° (figura 36.15). De igual modo, las ondas de agua que se forman en una cubeta experimental, pueden transmitirse a través de una zona de agua profunda (figura 36.16).

La teoría de la penetración de barrera fue utilizada por George Gamow en 1928 para explicar la enorme variación que presentaban los periodos de semidesintegración de los núcleos radiactivos con emisión α. (Las partículas alfa son núcleos de helio emitidos por ciertos átomos en la desintegración radiactiva; constan de dos protones y dos neutrones

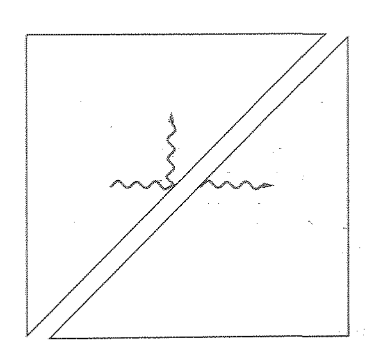


Figura 36.15 Penetración de una barrera óptica. Si el segundo prisma está suficientemente próximo al primero, una parte de la onda penetra a través de la barrera de aire, incluso en el caso en que el ángulo de incidencia sobre el primer prisma sea mayor que el ángulo crítico.

www.elsolucionario.net

explorando la naturaleza

El microscopio de barrido por efecto túnel

Ellen Williams[1]
Universidad de Maryland

Aunque actualmente todos los científicos aceptan que la materia está formada por átomos, la evidencia de que los átomos existen es fundamentalmente indirecta. Hoy se conocen tres métodos que ponen de manifiesto realmente la imagen de los átomos individuales: el microscopio electrónico de transmisión, el microscopio de campo iónico y el microscopio de barrido por efecto túnel. Este último es el desarrollado más recientemente y el más versátil. Gert Binnig y Heinrich Rohrer recibieron en 1986 el Premio Nobel de Física (que compartieron con un tercer científico) por el desarrollo de esta técnica.

Para entender la microscopía de barrido por efecto túnel debemos recordar algunas propiedades de los electrones en los metales. Clásicamente, los electrones ligados más débilmente —los que poseen la energía de Fermi— nunca abandonan el metal, a menos que reciban la energía necesaria para vencer la energía potencial representada por su función trabajo ϕ. Sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, los electrones próximos a la energía de Fermi pueden atravesar la barrera de potencial por efecto túnel. Si como indica la figura E36.1 colocamos dos piezas metálicas, una junto a la otra, puede crearse una barrera de pozo rectangular finito. La probabilidad de que los electrones que posean la energía de Fermi pasen a través de la barrera por efecto túnel es proporcional a $e^{-\alpha a}$, en donde a es la distancia de separación de las dos piezas de metal y α depende de la altura de la barrera, que en este caso es la función trabajo. Esta dependencia exponencial de la probabilidad de transmisión con la separación es el fundamento del microscopio de barrido por efecto túnel.

El mecanismo de estos microscopios viene ilustrado en la figura E36.2. Si una sonda metálica puntiaguda se sitúa suficientemente próxima a una muestra y se aplica un pequeño voltaje entre ambas, puede ocurrir el efecto túnel electrónico. El flujo neto de electrones puede medirse como una corriente túnel proporcional a la probabilidad de transmisión. Si la sonda barre la superficie de la muestra, cualquier resalte o bache de la misma modificará la separación. Debido a la relación exponencial entre la

Figura E36.1 Diagrama de niveles energéticos de los electrones de conducción en dos metales separados por una distancia a. Los electrones se mueven dentro del metal como si se fueran partículas libres. La mayor parte de los electrones débilmente ligados poseen la energía más elevada (la energía de Fermi, E_F) y se mantienen dentro del sólido gracias a una barrera de energía potencial llamada función trabajo ϕ. Para inducir una corriente electrónica de túnel que pueda medirse se aplica una diferencia pequeña de potencial ΔV entre los dos metales. Esto separa sus niveles energéticos del modo indicado: los electrones fluyen desde los estados ocupados próximos a E_f sobre el metal más negativo (a la izquierda de la figura) hasta los estados más desocupados, justo por encima de E_F sobre el metal más positivo (a la derecha de la figura).

[1] Ellen Williams obtuvo su título de Bachelor of Chemistry en la Universidad de Michigan y realizó su doctorado en el Instituto de Tecnología de California, estudiando las propiedades de capas delgadas de moléculas superficiales. Desde entonces, pertenece al Departamento de Física y Astronomía de la Universidad de Maryland.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

separación y la probabilidad de transmisión, variaciones muy pequeñas, del orden de 0,01 nm dan lugar a cambios medibles en la corriente túnel. La medida de la corriente túnel durante el barrido proporciona así un mapa topográfico de la superficie. En principio, es posible observar la imagen de los átomos individuales de la superficie de la muestra.

Para conseguir este objetivo tuvieron que vencerse tres importantes problemas. La vibración fue un desafío importante, pues la separación entre la muestra y la sonda debe ser muy pequeña —típicamente de sólo unos pocos nanómetros (comparable al tamaño de los átomos)— y la menor perturbación puede hacer que la sonda choque con la muestra echando a perder el experimento. El problema más frecuente es la vibración del suelo, típicamente con una amplitud de 1 μm más mil veces mayor que la separación permisible entre la punta de la sonda y la muestra. Ello requiere una técnica muy cuidadosa.

El segundo problema es la finura de la sonda, lo cual determina la pequeñez de la estructura a observar. Mediante técnicas electroquímicas puede agudizarse el extremo de un alambre metálico hasta conseguir que su radio sea del orden de 1μm (1000 nm). Una sonda con un área superficial tan grande daría lugar a que el efecto túnel se extendiera excesivamente sobre la muestra. Para resolver estructuras de dimensiones atómicas, la sonda debe ser comparable en tamaño a estas estructuras. Al tratar de fabricar una sonda de estas características tropezamos con nuestros defectos tecnológicos. Nuestros alambres más pulidos alcanzan la escala atómica con mini-puntas del tipo ilustrado en la figura E36.2. El extremo de estas mini-puntas contiene uno o muy pocos átomos frente a la superficie. La dependencia exponencial de la probabilidad de transmisión con la separación garantiza entonces que la corriente túnel tenga lugar preferentemente a través del extremo de la mini-punta.

El tercer problema es el control de la posición. ¿Cómo puede moverse la sonda con una exactitud inferior a 0,1 nm? La respuesta reside en un material de cerámica piezoeléctrica que se expansiona y se contrae cuando un voltaje externo se aplica en unos electrodos situados en caras opuestas. Estas expansiones son clásicamente del orden de unas pocas décimas de nanómetro por voltio. Una sonda conectada a una pieza de cerámica piezoeléctrica puede desplazarse con gran precisión.

La potencia del microscopio de barrido por efecto túnel se ilustra en la figura E36.3, en donde un modelo atómico de una superficie de silicio se compara con la imagen de la superficie real vista por el microscopio. Los datos procedentes de un barrido microscópico consisten en valores de la altura superficial en función de la posición y pueden presentarse como un barrido lineal (la línea de puntos de la figura E36.2). La imagen de barrido lineal de la figura E36.3*b* es más fácil de visualizar si los datos se representan mediante una escala de grises (figura E36.3*c*): La altura se representa por la intensidad del calor variable desde el blanco para los puntos más altos hasta el negro para los más bajos. Obsérvese la sorprendente correspondencia con el modelo de la figura E36.3*a*. Los agujeros profundos corresponden a las posiciones de átomos ausentes en el modelo y los puntos brillantes son debidos a los átomos que sobresalen por encima del plano superficial medio. En esta imagen aparecen también dos cambios bruscos en altura; estas superficies escalonadas son importantes en procesos como el crecimiento y microfabricación de cristales.

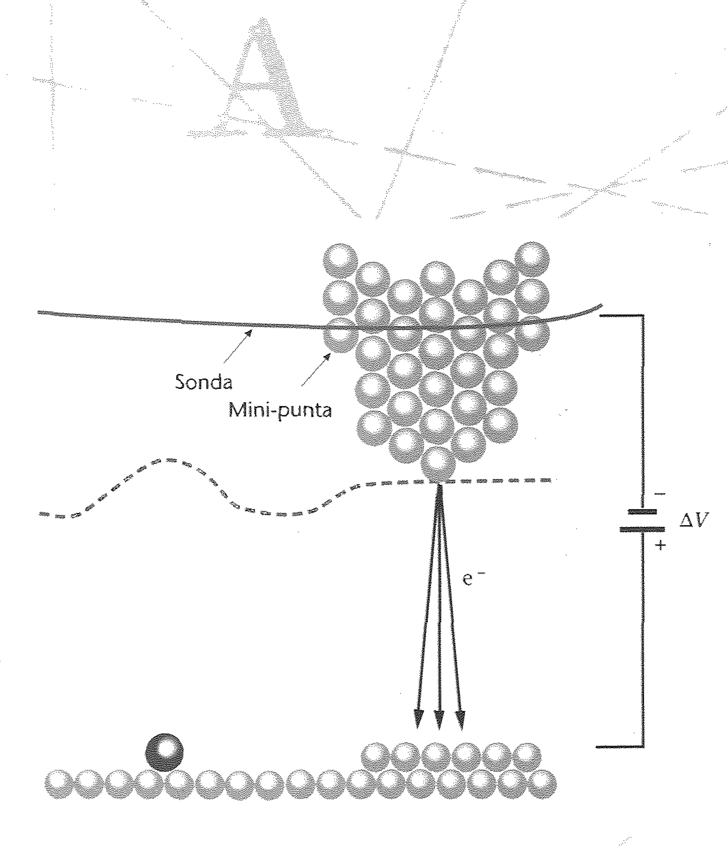


Figura E36.2 Ilustración esquemática de la trayectoria de una sonda (línea de trazos) al barrer una superficie mientras se mantiene constante la corriente túnel. Si la sonda es muy grande (como ilustra la línea continua), el efecto túnel tiene lugar en una área amplia y las características atómicas no pueden resolverse. Sin embargo, si la sonda posee una mini-punta de dimensiones atómicas, la corriente túnel tiene lugar en una superficie pequeña, lo que permite observar características muy pequeñas (incluso átomos individuales).

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Además del estudio de los átomos superficiales, este microscopio posee otras aplicaciones prácticas, en parte porque es totalmente insensible a sus alrededores microscópicos. Puede operar al vacío, en aire, helio líquido, petróleo e incluso soluciones electrolíticas. Así es útil, por ejemplo, para obtener imágenes de DNA en un ambiente biológico y observar las superficies de los electrodos de una batería mientras están funcionando. Se han desarrollado variaciones del microscopio de efecto túnel que permiten observar las imágenes de muestras no conductoras (microscopía de fuerza atómica) o propiedades magnéticas superficiales. Más asombrosa es la capacidad del microscopio para escribir con resolución atómica. Ultimamente la sonda se ha utilizado para mover *átomos individuales* de xenón alrededor de una superficie (figura E36.4)

La microscopía de barrido por efecto túnel es una demostración práctica de la mecánica cuántica y una ilustración de que la comprensión de los conceptos básicos de la física pueden dar lugar a grandes avances de la tecnología. Es también una lección objetiva a largo plazo y frecuentemente de beneficios imprevisibles que proceden del desarrollo de ideas fundamentales.

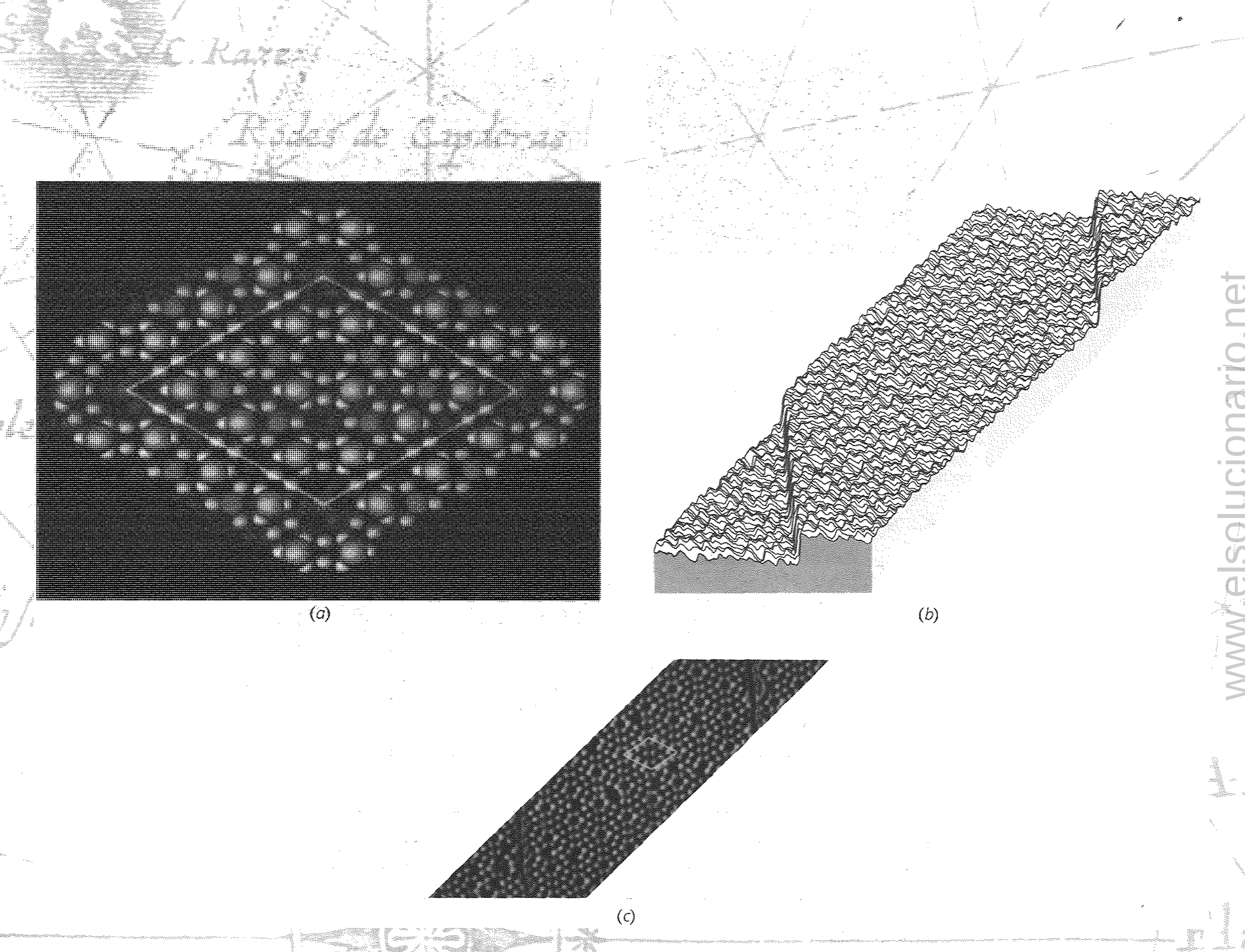


Figura E36.3 Imágenes de átomos y escalones en una superficie de silicio barrida por un microscopio de efecto túnel. (*a*) Modelo de los átomos sobre una superficie de silicio. Los círculos rojos representan los átomos que sobresalen a mayor altura por encima de la superficie, los círculos azules son átomos de una capa de menor altura y los círculos grises son átomos de una capa todavía más baja. El rombo blanco muestra la unidad repetitiva de la estructura. La longitud de cada lado de esta celda unitaria es 2,7 nm. (*b*) Trazos de altura en función de la posición (barridos lineales) obtenidas por un microscopio de efecto túnel en un área aproximada de 10 por 35 nm. (*c*) Los mismos datos de la figura (*b*), representados en una escala de grises, permiten que la imagen de la capa más alta de los átomos en el modelo atómico de (*a*) sea inmediatamente reconocida. La celda unitaria de la estructura se indica para su comparación con el rombo de (*a*).

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(a) (b)

(c) (d)

Figura E36.4 Secuencia de imágenes del microscopio de barrido por efecto túnel durante la construcción de una distribución ordenada de átomos de xenón sobre una superficie de níquel a una temperatura de 4 K. Los átomos de xenón se fijan aleatoriamente sobre la superficie de la fase gaseosa (superior izquierda). La punta de la sonda del microscopio fue utilizada para "empujar" suavemente los átomos uno a uno a través de la superficie para deletrear el nombre de la compañía que patrocinó el desarrollo de este microscopio.

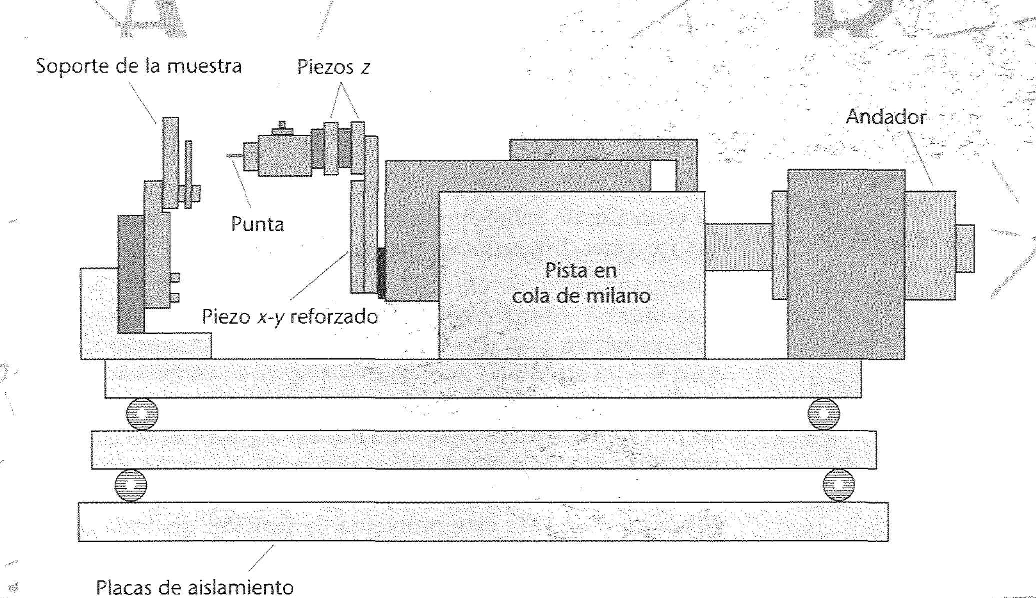
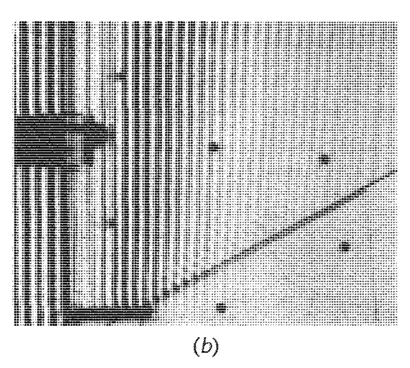


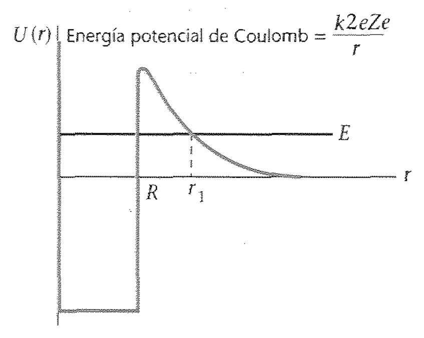
Figura E36.5 Diagrama esquemático de un microscopio de barrido por efecto túnel. El soporte de la muestra está montado rígidamente en la placa más alta de una serie de placas aislantes. La punta está fija sobre piezas de material piezoeléctrico de barrido x, y, z. Para situar la posición de la punta de modo que tenga lugar el efecto túnel, estos elementos piezoeléctricos se montan sobre un bloque pesado que puede deslizar sobre una pista con un ensamblaje de cola de milano. El bloque es empujado por un dispositivo "andador" que se desplaza atrás y adelante a saltos de 4 nm.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

Figura 36.16 Penetración de una barrera por ondas de agua en una cubeta experimental. En (*a*) las ondas se reflejan totalmente en una zona de agua más profunda. Cuando la zona es muy estrecha (*b*), aparece una onda transmitida.

fuertemente ligados entre sí.) En general, cuanto menor es la energía de la partícula α emitida, mayor es el período de semidesintegración. Las energías de las partículas α procedentes de las fuentes radiactivas naturales varían aproximadamente de 4 a 7 MeV, mientras que el intervalo de los períodos se extiende entre unos 10^{-5} segundos y 10^{10} años. Gamow representó un núcleo radiactivo mediante un pozo de potencial que contiene una partícula α del modo indicado en la figura 36.17. Sin conocer gran cosa sobre la fuerza nuclear que se ejerce sobre la partícula α dentro del núcleo, Gamow la representó mediante un pozo rectangular. Justamente fuera del pozo, la partícula α con su carga de $+2e$ es repelida por el núcleo de carga $+Ze$, en donde Ze es la carga nuclear restante. Esta fuerza viene representada por la energía potencial de Coulomb $+k(2e)(Ze)/r$. La energía E es la energía cinética de la partícula α emitida, pues cuando está lejos del núcleo radiactivo, comienza a oscilar atrás y adelante y choca contra la barrera situada a la distancia del radio nuclear R. Cada vez que choca contra la barrera, existe una pequeña probabilidad de penetración y aparición fuera del núcleo. En la figura 36.17 puede verse cómo un pequeño incremento en E reduce la altura relativa de la barrera $U - E$ y también su espesor. Como la probabilidad de penetración es muy sensible al espesor de la barrera y a la altura relativa, un pequeño incremento de E ocasiona un gran aumento en la probabilidad de transmisión y, por tanto, da lugar a una vida media más corta. Gamow dedujo una expresión para el período de semidesintegración en función de E en excelente acuerdo con los resultados experimentales.

En el **microscopio electrónico de barrido por efecto túnel**, desarrollado en la década de 1980, el pequeño espacio que existe entre la muestra y la diminuta sonda utilizada en el barrido actúa como una barrera a los electrones ligados de la muestra que se examina. Un pequeño voltaje aplicado entre la sonda y la muestra hace que los electrones por *efecto túnel* atraviesen el vacío que separa las dos superficies cuando éstas se encuentran muy próximas una de otra. La "corriente de túnel" es extraordinariamente sensible al tamaño del hueco que existe entre la sonda y la muestra. Si se mantienen constante la "corriente de túnel" cuando la sonda barre la superficie de la muestra, ésta será cartografiada por los movimientos de la sonda. De este modo, las características superficiales de una muestra pueden medirse con una resolución del orden del tamaño de un átomo.

www.elsolucionario.net

36.5 La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones

Figura 36.17 Modelo de una función de energía potencial para una partícula α en un núcleo radiactivo. Cuando r es menor que el radio nuclear R, la fuerza nuclear atractiva fuerte puede describirse aproximadamente por este pozo de potencial. Fuera del núcleo, la fuerza nuclear es despreciable, y el potencial viene dado por la ley de Coulomb, $U(r) = +k(2e(Ze)/r$, en donde Ze es la carga nuclear y $2e$ la carga de partícula α.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo unidimensional se extiende fácilmente a tres dimensiones. En coordenadas rectangulares vale

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+U\psi = E\psi \qquad (36.30)$$

en donde la función de onda ψ y la energía potencial U son generalmente funciones de las tres coordenadas x, y, z. Para ilustrar algunas de las características de los problemas en tres dimensiones, consideremos una partícula en un pozo rectangular infinito tridimensional dado por $U(x, y, z) = 0$ para $0 < x < L$, $0 < y < L$ y $0 < z < L$. Mas allá de esta región $U(x, y, z) = \infty$. Para este problema, la función de onda debe ser cero en los bordes del pozo.

Existen métodos patrones de las ecuaciones en derivadas parciales para resolver la ecuación 36.30. Podemos intentar la forma de la solución a partir del cálculo conocido de probabilidades. Ya vimos que para una caja unidimensional a lo largo del eje x, la probabilidad de que una partícula se encuentre en x dentro de la región dx era $A_1^2 \text{ sen}^2\, k_1x\, dx$ (ecuación 36.10), en donde A_1 es una constante de normalización y $k_1 = n\pi/L$ es el número de onda. Del mismo modo, para una caja a lo largo del eje y, la probabilidad de que una partícula se encuentre en y dentro de la región dy es $A_2^2 \text{ sen}^2\, k_2y\, dy$. La probabilidad de que dos sucesos independientes ocurran simultáneamente es igual al producto de las probabilidades de cada suceso por separado.[1] Así la probabilidad de que una partícula se encuentre en x en la región dx y en y en la región dy es $A_2^2 \text{ sen}^2\, k_1x\, dx\, A_2^2 \text{ sen}^2\, k_2y\, dy = A_1^2 \text{ sen}^2\, k_1x\, A_2^2 \text{ sen}^2\, k_2y\, dx\, dy$. La probabilidad de

que una partícula se encuentre en la región dx, dy, y dz es $\psi(x, y, z)\ dx\ dy\ dz$ en donde $\psi(x, y, z)$ es la solución de la ecuación 36.30. Esta solución es de la forma

$$\psi(x, y, z) = A \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z \qquad (36.31)$$

en donde la constante A se determina por normalización. Introduciendo esta solución en la ecuación 36.30 se obtiene para la energía el valor

$$E = \frac{\hbar}{2m}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

que es equivalente a $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$, con $p_x = \hbar k_1$, etc. La función de onda será cero en $x = L$ si $k_1 = n_1\pi/L$, en donde n_1 es un número entero. De igual modo, la función de onda será cero en $y = L$ si $k_2 = n_2\pi/L$ y será cero en $z = L$ si $k_3 = n_3\pi/L$. La energía está por tanto cuantizada en los valores

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{h^2\pi^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = E_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \qquad (36.32)$$

en donde n_1, n_2, y n_3 son números enteros y E_1 es la energía del estado fundamental del pozo unidimensional. Obsérvese que la energía y la función de onda viene caracterizada por tres números cuánticos, cada uno de los cuales surge de una condición límite para una de las coordenadas.

El estado energético más bajo (el estado fundamental) para el pozo cúbico tiene lugar cuando $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ y su valor es

$$E_{1,1,1} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = 3E_1$$

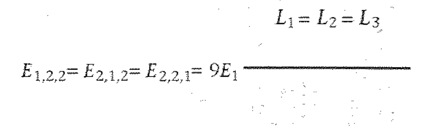
El primer nivel energético excitado puede obtenerse de tres formas distintas: $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$; $n_2 = 2$, $n_1 = n_3 = 1$; o $n_3 = 2$, $n_1 = n_2 = 1$. Cada forma tiene una función de onda distinta. Por ejemplo, la función de onda, para $n_1 = 2$ y $n_2 = n_3 = 1$ es

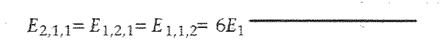
$$\psi_{2,1,1} = A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L} \qquad (36.33)$$

Existen, por tanto, tres diferentes estados cuánticos descritos por tres diferentes funciones de onda correspondientes al mismo nivel energético. Cuando un nivel energético posee más de una función de onda asociada se dice que está **degenerado**. En este caso hay una degeneración triple. La degeneración está relacionada con la simetría espacial del problema. Si, por ejemplo, consideramos un pozo no cúbico, en donde $U_0 = 0$ para $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ y $0 < z < L_3$, las condiciones límites en los bordes imponen las condiciones cuánticas $k_1L_1 = n_1\pi$, $k_2L_2 = n_2\pi$ y $k_3L_3 = n_3\pi$, y la energía total sería

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}\right) \qquad (36.34)$$

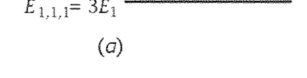
Estos niveles energéticos no están degenerados si L_1, L_2 y L_3 no son iguales. La figura 36.18 muestra los niveles energéticos para el estado fundamental y los dos primeros estados excitados para un pozo cúbico infinito en el cual los estados excitados están degenerados y para un pozo infinito no cúbico en el cual L_1, L_2 y L_3 son ligeramente distintos, de modo que los niveles excitados están un poco separados y la degeneración ha desaparecido.

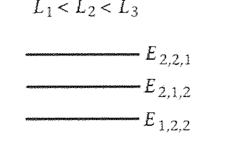


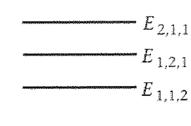


$E_{1,1,1} = 3E_1$

(*a*)







(*b*)

Figura 36.18 Diagramas de niveles energéticos para (*a*) un pozo infinito cúbico y (*b*) un pozo infinito no cúbico. En (*a*) los niveles energéticos están degenerados; es decir, hay dos o más funciones de onda que tienen la misma energía. La degeneración desaparece cuando la simetría del potencial se elimina (*b*).

[1] Por ejemplo, si lanzamos dos dados, la probabilidad de que al tirar el primer dado salga un 6 es 1/6 y la probabilidad de que al tirar el segundo salga un número impar es 1/2. Por tanto, la probabilidad de que al echar simultáneamente los dos dados el primero dé un 6 y el segundo un número impar es (1/6)(1/2) = 1/12.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net




EJEMPLO 36.3 **Una partícula se encuentra en una caja tridimensional con $L_3 = L_2 = 2L_1$. Indicar los números cuánticos n_1, n_2, n_3 que corresponden a los diez estados cuánticos más bajos de esta caja.**

Esquema del problema Utilizamos la ecuación 36.34 para escribir las energías en función de las relaciones $L_2/L_1 = 2$ y $L_3/L_1 = 2$ y después determinamos por inspección los valores de los números cuánticos que correspondan a las energías más bajas.

1. La energía de un nivel viene dada por la ecuación 36.34:
$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{L_1^2}+\frac{n_2^2}{L_2^2}+\frac{n_3^2}{L_3^2}\right)$$

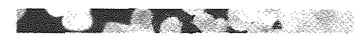
2. Sacar factor común $1/L_1^2$:
$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_1^2}\left(n_1^2+n_2^2\frac{L_1^2}{L_2^2}+n_3^2\frac{L_1^2}{L_3^2}\right)$$
$$= E_1(n_1^2+n_2^2/4+n_3^2/4)$$

3. La energía más baja es $E_{1,1,1}$:
$$E_{1,1,1} = E_1(1^2+1^2/4+1^2/4) = 1{,}5E_1 \qquad (1°)$$

4. La energía crece al mínimo cuando aumentamos n_2 o n_3. Ensayar diversos valores de los números cuánticos:
$$E_{1,2,1} = E_{1,1,2} = E_1(1^2+2^2/4+1/4) = 2{,}25E_1 \quad (2° \text{ y } 3°)$$
$$E_{1,2,2} = E_1(1^2+2^2/4+2^2/4) = 3{,}0E_1 \quad (4°)$$
$$E_{1,3,1} = E_{1,1,3} = E_1(1^2+3^2/4+1^2/4) = 3{,}50E_1 \quad (5° \text{ y } 6°)$$
$$E_{1,3,2} = E_{1,2,3} = E_1(1^2+3^2/4+2^2/4) = 4{,}25E_1 \quad (7° \text{ y } 8°)$$
$$E_{2,1,1} = E_1(2^2+1^2/4+1^2/4) = 4{,}5E_1 \quad (9°)$$
$$\left.\begin{aligned}E_{2,2,1} = E_{2,1,2} &= E_1(2^2+2^2/4+1^2/4) = 5{,}25E_1\\ E_{1,4,1} = E_{1,1,4} &= E_1(1^2+4^2/4+1^2/4) = 5{,}25E_1\end{aligned}\right\} \quad (10°, 11°, 12°, \text{ y } 13°)$$

Observación Nótese la degeneración de los niveles

Ejercicio Determinar los números cuánticos y las energías de los cuatro niveles siguientes de la etapa 4. (*Respuesta*: $E_{1,2,3} = 5{,}5E_1$, $E_{1,4,2} = E_{1,2,4} = E_{2,2,2} = 6{,}0E_1$.)

EJEMPLO 36.4 **¡Inténtelo!** **Escribir las funciones de onda degeneradas para los estados excitados 4° y 5° (niveles 5 y 6) del ejemplo 36.3**

Esquema del problema Utilizar la ecuación 36.33 con $k_i = n_i\pi/L$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Escribir las funciones de onda correspondientes a las energías $E_{1,3,1}$ y $E_{1,1,3}$.	$\psi_{1,3,1} = A \text{ sen } \frac{\pi x}{L} \text{ sen } \frac{3\pi y}{L} \text{ sen } \frac{\pi z}{L}$ $\psi_{1,1,3} = A \text{ sen } \frac{\pi x}{L} \text{ sen } \frac{\pi y}{L} \text{ sen } \frac{3\pi z}{L}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La ecuación de Schrödinger para dos partículas idénticas ■ 36.6

Nuestra exposición de mecánica cuántica ha sido limitada hasta ahora a situaciones en las cuales una sola partícula se mueve en un campo de fuerzas caracterizado por una función de energía potencial U. El problema físico más importante de este tipo es el átomo de hidrógeno, en el cual un solo electrón se mueve en el potencial de Coulomb del núcleo formado por un protón. Este problema es realmente un problema de dos cuerpos, ya que el protón también se mueve en el campo del electrón. Sin embargo, el movimiento del protón mucho más masivo requiere sólo una corrección muy pequeña de la energía del átomo, lo cual se hace fácilmente, tanto en mecánica clásica como cuántica. Si consideramos problemas más complicados, tales como el átomo de helio, debemos aplicar la mecánica cuántica a dos o más electrones que se mueven en un campo externo. Estos problemas tiene más dificultades por la interacción de los electrones entre sí y por el hecho de que los electrones son idénticos.

La interacción de dos electrones entre sí es electromagnética y esencialmente coincide con la interacción clásica de dos partículas cargadas. La ecuación de Schrödinger para un átomo con dos o más electrones no puede resolverse exactamente y por ello, deben utilizarse métodos aproximados. Esta situación no es muy diferente de la que se presenta en problemas clásicos con tres o más partículas. Sin embargo, las complicaciones que surgen por la identidad de los electrones son puramente mecánico-cuánticas y no tienen su contrapartida clásica. Son debidas al hecho de que es imposible distinguir de qué electrón se trata una vez se separan. Clásicamente, las partículas idénticas pueden identificarse por sus posiciones, que pueden determinarse con exactitud ilimitada. En mecánica cuántica esto es imposible por causa del principio de incertidumbre. La figura 36.19 ofrece una ilustración esquemática del problema.

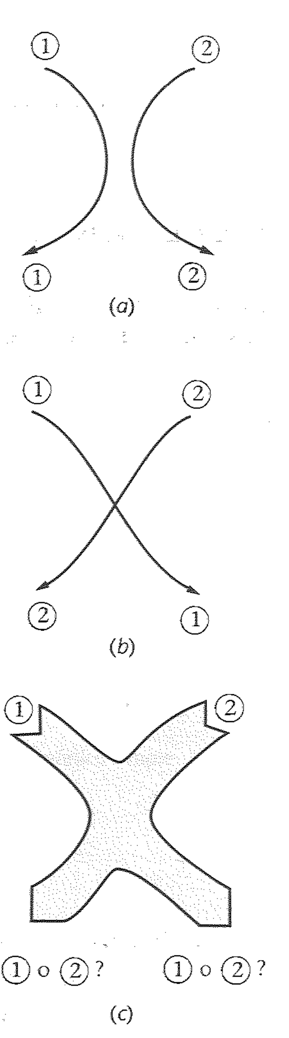


Figura 36.19 Dos trayectorias de electrones clásicas (*a* y *b*). Si los electrones fueran partículas clásicas podrían distinguirse por la trayectoria seguida. Sin embargo, debido a las propiedades ondulatorias mecánico-cuánticas de los electrones, las trayectorias se dispersan del modo indicado por la región sombreada en (*c*). Es imposible distinguir de qué electrón se trata una vez que ambos se separan.

La indiscernibilidad de partículas idénticas tiene consecuencias importantes. Por ejemplo, consideremos el caso muy simple de dos partículas idénticas no interactivas en un pozo rectangular infinito unidimensional. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para dos partículas, cada una de masa m, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+U\psi(x_1,x_2) = E\psi(x_1,x_2) \tag{36.35}$$

en donde x_1 y x_2 son las coordenadas de las dos partículas. Si las partículas interaccionan, la energía potencial U contiene términos con tanto x_1 como x_2 que no pueden separarse en términos que contienen solo x_1 o x_2. Por ejemplo, la repulsión electrostática de dos electrones en una dimensión viene representada por la energía potencial $ke^2/|x_2 - x_1|$. Sin embargo, si las partículas no interaccionan (como estamos suponiendo en este caso), podemos escribir $U = U_1(x_1) + U_2(x_2)$. Para el pozo rectangular infinito, necesitamos resolver sólo la ecuación de Schrödinger dentro del mismo, donde $U = 0$ e imponer la condición de que la función de onda sea cero en las paredes. Con $U = 0$, la ecuación 36.35 nos recuerda la expresión de una partícula en un pozo bidimensional (ecuación 36.30 sin z y reemplazando y por x_2).

Las soluciones de esta ecuación pueden escribirse en la forma[1]

$$\psi_{n,m} = \psi_n(x_1)\psi_m(x_2) \tag{36.36}$$

en donde ψ_n y ψ_m son las funciones de onda para una sola partícula en un pozo infinito y n y m son los números cuánticos de las partículas 1 y 2, respectivamente. Por ejemplo, para $n = 1$ y $m = 2$, la función de onda es

$$\psi_{1,2} = A \text{ sen } \frac{\pi x_1}{L} \text{ sen } \frac{\pi x_2}{L} \tag{36.37}$$

[1] De nuevo, este resultado puede obtenerse resolviendo la ecuación 36.35, pero puede también entenderse en función del cálculo de probabilidades. La probabilidad de que el electrón 1 se encuentre en la región dx_1 y el electrón 2 en la región dx_2 es el producto de las probabilidades individuales.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La probabilidad de encontrar la partícula 1 en dx_1 y la partícula 2 en dx_2 es $\psi^2_{n,m}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$, que es justamente el producto de las probabilidades por separado $\psi^2_n(x_1)\, dx_1$ y $\psi^2_m(x_2)\, dx_2$. Sin embargo, aunque hemos etiquetado las partículas 1 y 2, no podemos distinguir cuál se encuentra en dx_1 y cuál en dx_2 si son idénticas. Las descripciones matemáticas de partículas idénticas deben ser las mismas si intercambiamos las etiquetas. La densidad de probabilidad $\psi^2(x_1, x_2)$, por tanto, debe ser igual a $\psi^2(x_2, x_1)$:

$$\psi^2(x_2, x_1) = \psi^2(x_1, x_2) \qquad \textbf{(36.38)}$$

La ecuación 36.38 se satisface si $\psi(x_2, x_1)$ es simétrica o antisimétrica respecto al intercambio de partículas, es decir, se cumple

$$\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2) \quad \text{simétrica} \qquad \textbf{(36.39)}$$

o

$$\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2) \quad \text{antisimétrica} \qquad \textbf{(36.40)}$$

Obsérvese que las funciones de onda dadas por las ecuaciones 36.36 y 36.37 no son simétricas ni antisimétricas. Si intercambiamos x_1 y x_2 en estas funciones de onda, obtenemos una función de onda diferente, lo cual implica que las partículas pueden distinguirse.

Es posible determinar las funciones de onda simétrica y antisimétrica que son soluciones de la ecuación de Schrödinger sumando o restando $\psi_{n,m}$ y $\psi_{m,n}$. Sumándolas tenemos

$$\psi_S = A'[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] \qquad \text{simétrica} \qquad \textbf{(36.41)}$$

y restándolas

$$\psi_A = A'[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] \qquad \text{antisimétrica} \qquad \textbf{(36.42)}$$

Por ejemplo, las funciones de onda simétrica y antisimétrica para el primer estado excitado de dos partículas idénticas en un pozo rectangular infinito sería:

$$\psi_S = A'\left(\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x_2}{L} + \text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x_1}{L}\right) \qquad \textbf{(36.43)}$$

y

$$\psi_A = A'\left(\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x_2}{L} - \text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x_1}{L}\right) \qquad \textbf{(36.44)}$$

Existe una diferencia importante entre funciones de onda simétrica y antisimétrica. Si $n = m$, la función de onda antisimétrica es idénticamente cero para todos los valores de x_1 y x_2 mientras que la función de onda simétrica no lo es. Así, si la función de onda que describe dos partículas idénticas es antisimétrica, los números cuánticos n y m de las dos partículas no pueden ser iguales. Este es un ejemplo del **principio de exclusión de Pauli**, que fue establecido por vez primera por Wolfgang Pauli para los electrones de un átomo:

Dos electrones de un átomo no pueden tener los mismos números cuánticos

Principio de exclusión de Pauli

Hoy sabemos que los electrones, protones, neutrones y algunas otras partículas poseen funciones de onda antisimétricas y obedecen el principio de exclusión de Pauli. Estas partículas se llaman **fermiones**. Otras partículas, como las partículas α, deuterones, fotones y mesones, poseen funciones de onda simétricas y no obedecen el principio de exclusión de Pauli. Estas partículas se llaman **bosones**.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Resumen

1. La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial que relaciona la segunda derivada espacial de una función de onda con su primera derivada temporal. Las funciones de onda que describen situaciones físicas son soluciones de esta ecuación diferencial.
2. Como una función de onda debe ser normalizable, debe comportarse formalmente; es decir, debe tender a cero cuando x se aproxima a infinito. Para sistemas ligados tales como una partícula en una caja, un oscilador armónico simple, o un electrón en un átomo, este requisito conduce a la cuantización de la energía.
3. Las funciones de onda de comportamiento formal en sistemas ligados describen ondas estacionarias.



OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$	36.4	**1. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**
Además de satisfacer la ecuación de Schrödinger, una función de onda $\psi(x)$ debe ser continua y (si U no es infinito) tener también continua su primera derivada $d\psi/dx$. Como la probabilidad de encontrar un electrón en algún lugar debe ser 1, la función de onda debe obedecer la condición de normalización $\int_{-\infty}^{\infty} \|\psi\|^2\, dx = 1$. Esta expresión implica la condición límite de aproximarse ψ a 0 cuando x tiende a $\pm\infty$. Estas condiciones límite conducen a la cuantización de la energía.		Soluciones admisibles
Cuando la energía total E es mayor que la energía potencial $U(x)$ en alguna región (la región permitida clásicamente) y menor que $U(x)$ fuera de dicha región, la función de onda oscila dentro de la región clásicamente permitida y crece o decrece exponencialmente fuera de la misma. La función de onda se aproxima a cero cuando x tiende a ∞ sólo para ciertos valores de la energía total E. La energía está así cuantizada.		**2. Partículas confinadas**
En un pozo finito de altura U_0 existen sólo un número finito de energías permitidas y éstas son ligeramente menores que las correspondientes en un pozo infinito.		Pozo rectangular finito
En la función de energía potencial del oscilador $U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$, las energías permitidas están igualmente espaciadas y viene dadas por		Oscilador armónico simple
$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$	36.26	
La función de onda del estado fundamental viene expresada por		
$\psi_0(x) = A_0e^{-ax^2}$	36.23	
en donde A_0 es la constante de normalización y $a = m\omega_0/2\hbar$.		
Cuando el potencial cambia bruscamente en una pequeña distancia, una partícula puede reflejarse, incluso aunque $E > U(x)$. Una partícula puede penetrar en una región en el cual $E < U(x)$. La reflexión y penetración de las ondas electrónicas son semejantes a las de otros tipos de ondas.		**3. Reflexión y penetración de barrera**
La función de onda de una partícula en una caja tridimensional puede escribirse en la forma $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ en donde ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son funciones de onda en una caja unidimensional.		**4. Ecuación de ondas en tres dimensiones**
Cuando más de una función de onda está asociada al mismo nivel energético, se dice que éste se encuentra degenerado. La degeneración tiene su origen en la simetría espacial.		Degeneración

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

5. Ecuación de Schrödinger para dos partículas idénticas Una función de onda que describe dos partículas idénticas debe ser simétrica o antisimétrica cuando se intercambian las coordenadas de las partículas. Los fermiones que incluyen electrones, protones y neutrones se describen mediante funciones de onda antisimétrica y obedecen el principio de exclusión de Pauli, según el cual, dos partículas no pueden tener los mismos números cuánticos. Los bosones, que incluyen partículas α, deutrones, y mesones tiene funciones de onda simétricas y no obedecen el principio de exclusión de Pauli.

Guía de resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Oscilador armónico	
Comprobar que una función determinada satisface la ecuación de Schrödinger	Determinar la primera y segunda derivada respecto a x y sustituir en la ecuación de Schrödinger **Ejemplo 36.1**
2. Transmisión y reflexión	
Calcular la probabilidad de reflexión o transmisión cuando $E > U_0$.	Calcular el coeficiente de reflexión dado por la ecuación 36.27. Para la transmisión utilizar la relación $R + T = 1$ **Ejemplo 36.2**
3. Ecuación de Schrödinger en tres dimensiones	
Determinar los números cuánticos, energías y funciones de onda de los estados inferiores de un pozo rectangular tridimensional	Expresar las energías en función de los números cuánticos y ensayar las diversas combinaciones de los números cuánticos más pequeños. Las funciones de onda viene determinadas por los números cuánticos. **Ejemplo 36.3, 36.4**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Una partícula en un pozo rectangular finito

• 1 Verdadero o falso: Las condiciones límites de la función de onda conducen a la cuantización de la energía.

• 2 Esquematizar
(a) la función de onda y
(b) la distribución de probabilidades del estado $n = 4$ para el potencial del pozo rectangular finito.

• 3 Esquematizar
(a) la función de onda y
(b) la distribución de probabilidades del estado $n = 5$ para el potencial del pozo rectangular finito.

El oscilador armónico

•• 4 Demostrar que el valor $\langle x\rangle = \int x|\psi|^2\,dx$ es cero, tanto para el estado fundamental como para los primeros estados excitados del oscilador armónico.

•• 5 Utilizar el procedimiento del ejemplo 36.1 para comprobar que la energía del primer estado excitado del oscilador armónico es $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$. (*Nota*: Utilizar el resultado $a = m\omega_0/2\hbar$ obtenido en el ejemplo 36.1).

••• 6 Demostrar que la constante de normalización A_0 de la ecuación 36.23 es $A_0 = (2m\omega_0/h)^{1/4}$.

••• 7 Determinar la constante de normalización A_1 para la función de onda del primer estado excitado del oscilador armónico, ecuación 36.25.

••• 8 Determinar el valor $\langle x^2\rangle = \int x^2|\psi|^2\,dx$ para el estado fundamental del oscilador armónico. Utilizarlo para demostrar que la energía potencial media es igual a la mitad de la energía total.

••• 9 Comprobar que $\psi_1(x) = A_1xe^{-ax^2}$ es la función de onda correspondiente al primer estado excitado de un oscilador armónico sustituyéndole en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y despejando a y E.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

••• 10 Determinar el valor $\langle x^2 \rangle = \int x^2 |\psi|^2 \, dx$ para el primer estado excitado del oscilador armónico.

••• 11 Clásicamente, la energía cinética media del oscilador armónico es igual a la energía potencial media. Podemos suponer que éste es también cierto para el oscilador armónico mecánico cuántico. Utilizar esta condición para determinar el valor de esperanza de p^2 para el estado fundamental del oscilador armónico.

••• 12 Sabemos que para el oscilador armónico clásico, $P_m = 0$. Puede demostrarse que para el oscilador armónico mecánico cuántico $\langle p \rangle = 0$. Utilizar los resultados de los problemas 4, 6 y 11 para determinar el producto de incertidumbre $\Delta x \, \Delta p$ correspondiente al estado fundamental del oscilador armónico.

Reflexión y transmisión de ondas electrónicas: penetración de barrera

•• 13 Una partícula libre de masa m con número de onda k_1 se propaga hacia la derecha. En $x = 0$, el potencial salta de cero a U_0 y permanece en este valor para x positivo.
(a) Si la energía total es $E = \hbar^2 k_1^2 / 2m = 2U_0$, ¿cuál es el número de onda k_2 en la región $x > 0$? Expresar la respuesta en función de k_1 y en función de U_0.
(b) Calcular el coeficiente de reflexión R en el escalón del potencial.
(c) ¿Cuál es el coeficiente de transmisión T?
(d) Si un millón de partículas con el número de onda k_1 inciden sobre el escalón del potencial, ¿cuántas partículas continuarán a lo largo de la dirección x positiva? Comparar este resultado con la predicción clásica.

•• 14 Suponer que el potencial salta de cero a $-U_0$ en $x = 0$, de modo que la partícula libre acelera en lugar de frenar. El número de onda de la partícula incidente es de nuevo k_1 y la energía total es $2U_0$.
(a) ¿Cuál es el número de onda de la partícula en la región de x positiva?
(b) Calcular el coeficiente de reflexión R en $x = 0$.
(c) ¿Cuál es el coeficiente de transmisión T?
(d) Si un millón de partículas con número de onda k_1 inciden con el escalón de potencial, ¿cuántas partículas continuarán a lo largo de la dirección x positiva?

•• 15 Resolver el problema 13 para el caso en que la energía de la partícula incidente es $1{,}01 U_0$ en lugar de $2U_0$.

•• 16 Una partícula de energía E se aproxima a una barrera escalonada de altura U. ¿Cuál debe ser la relación E/U para el coeficiente de reflexión sea 1/2?

•• 17 Utilizar la ecuación 36.29 para calcular el orden de magnitud de la probabilidad de que un protón salga de un núcleo por efecto túnel en una colisión con la barrera nuclear si su energía es 6 MeV por debajo del valor más alto de la barrera potencial y el espesor de ésta es 10^{-15} m.

•• 18 Un electrón de 10 eV incide sobre una barrera de potencial de altura 25 eV y anchura 1nm.
(a) Utilizar la ecuación 36.29 para calcular el orden de magnitud de la probabilidad de que el electrón atraviese la barrera por efecto túnel.
(b) Repetir el cálculo para una anchura de 0,1 nm.

La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones

• 19 Una partícula está confinada en una caja tridimensional de lados L_1, $L_2 = 2L_1$ y $L_3 = 3L_1$. Determinar los números cuánticos n_1, n_2, n_3 que corresponden a los diez estados cuánticos más bajos de esta caja.

• 20 Determinar las funciones de onda para los diez estados cuánticos más bajos de la partícula del problema 19.

• 21
(a) Repetir el problema 19 para el caso $L_2 = 2L_1$ y $L_3 = 4L_1$
(b) ¿Qué números cuánticos corresponden a los niveles energéticos degenerados?

• 22 Determinar las funciones de onda para los diez estados cuánticos más bajos de la partícula del problema 21.

• 23 Una partícula se mueve en un pozo potencial dado por $U(x, y, z) = 0$ para $-L/2 < x < L/2$, $0 < y < L$, y $0 < z < L$; y $U = \infty$ fuera de estos intervalos.
(a) Expresar la función de onda del estado fundamental de esta partícula.
(b) Comparar las energías permitidas con las de una caja en la cual $U = 0$ para $0 < x < L$ en lugar de $-L/2 < x < L/2$.

•• 24 Una partícula se mueve libremente en una región bidimensional definida por $0 \le x \le L$ y $0 \le y \le L$.
(a) Determinar la función de onda que satisface la ecuación de Schrödinger.
(b) Determinar las energías correspondientes.
(c) Determinar los dos estados más bajos que están degenerados. Determinar los números cuánticos en este caso.
(d) Determinar los tres estados más bajos que poseen la misma energía y sus respectivos números cuánticos.

•• 25 ¿Cuál es el siguiente nivel energético por encima de los determinados en el problema 24c para una partícula en una caja rectangular bidimensional para la cual la degeneración es superior a 2?

Partículas idénticas

• 26 Demostrar que la ecuación 36.37 satisface la ecuación 36.35 con $U = 0$, y determinar la energía de este estado.

• 27 ¿Cuál es la energía del estado fundamental de diez bosones sin interaccciones en una caja unidimensional de longitud L?

• 28 ¿Cuál es la energía del estado fundamental de diez fermiones sin interacciones, tales como neutrones, en una caja unidimensional de longitud L? (Como el número cuántico asociado al espín puede tener dos valores, cada estado espacial puede alojar dos neutrones.)

Ortoganilidad de funciones de onda

La integral de dos funciones extendida en cierto intervalo espacial es algo análoga al producto escalar de dos vectores. Si esta integral es cero, las funciones se llaman ortogonales, caso análogo a dos vectores perpendiculares. Los problemas siguientes ilustran el principio general según el cual dos funciones de onda correspondientes a diferentes niveles energéticos en el mismo potencial son ortogonales.

•• 29 Demostrar que la función de onda del estado fundamental y la función de onda del primer estado excitado del oscilador armónico son ortogonales; es decir, demostrar que $\int \psi_0(x)\psi_1(x)\, dx = 0$.

•• 30 La función de onda para el estado $n = 2$ del oscilador armónico es $\psi_2(x) = A_2(2ax^2 - \frac{1}{2})e^{-ax^2}$, en donde A_2 es la constante de normalización para esta función de onda. Demostrar que las funciones de onda para los estados $n = 1$ y $n = 2$ del oscilador son ortogonales.

••• 31 Para las funciones de onda $\psi_n(x) = \sqrt{2/L}$ sen $(n \pi x/L)$ correspondientes a una partícula en un potencial de pozo rectangular de 0 a L, demostrar que $\int \psi_n(x)\psi_m(x)\, dx = 0$, es decir, ψ_n y ψ_m son ortogonales.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Problemas generales

•• **32** Considerar una partícula en una caja unidimensional de longitud L que está centrada en el origen.

(a) ¿Cuáles son los valores de $\psi_1(0)$ y $\psi_2(0)$?
(b) ¿Cuáles son los valores de $\langle x \rangle$ para los estados $n = 1$ y $n = 2$.
(c) Calcular $\langle x^2 \rangle$ para los estados $n = 1$ y $n = 2$. (Véase problema 59 en el capítulo 17.)

•• **33** Ocho fermiones idénticos son interacciones (neutrones, por ejemplo) están confinados en una caja rectangular bidimensional de lado L. Determinar las energías de los tres estados más bajos. (Véase problema 26.)

•• **34** Una partícula esta confinada en una caja bidimensional definida por las siguientes condiciones límites: $U(x, y) = 0$ para $-L/2 \leq x \leq L/2$ y $-3L/2 \leq y \leq 3L/2$; y $U(x, y) = \infty$ fuera de estos intervalos.

(a) Determinar las energías de los tres estados ligado más bajos. ¿Están degenerados algunos de estos estados?
(b) Identificar el estado ligado más bajo doblemente degenerado mediante los números cuánticos apropiados y determinar su energía.

•• **35** Una partícula se mueve en un potencial dado por $U(x) = A|x|$. Sin intentar resolver la ecuación de Schrödinger, describir la función de onda para

(a) la energía del estado fundamental de una partícula dentro de este potencial y
(b) el primer estado excitado para este potencial

••• **36** La función de distribución de probabilidad clásica para una partícula en una caja unidimensional de longitud L es $P = 1/L$. (Véase ejemplo 17.5.)

(a) Demostrar que el valor esperado clásico de x^2 para una partícula en una caja unidimensional de longitud L centrada en el origen (problema 32) es $L^2/12$.
(b) Determinar el valor esperado cuántico de x^2 para el estado n-ésimo de una partícula en la caja unidimensional del problema 32 y demostrar que se aproxima al límite clásico $L^2/12$ para $n \gg 1$.

••• **37** Demostrar que las ecuaciones 36.27 y 36.28 exigen que el coeficiente de transmisión para partículas de energía E incidentes en una barrera $U_0 < E$ viene dada por

$$T = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4r}{(1 + r)^2}$$

donde $r = k_2/k_1$.

••• **38**

(a) Demostrar que para el caso de una partícula de energía E incidente en una barrera $U_0 < E$, los números de onda k_1 y k_2 están relacionados por

$$\frac{k_2}{k_1} = r = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}$$

Utilizar esta expresión y los resultados del problema 37 para calcular el coeficiente de transmisión T y el coeficiente de reflexión R para el caso
(b) $E = 1{,}2U_0$, **(c)** $E = 2{,}0U_0$ y **(d)** $E = 10{,}0U_0$.

••• **39** Determinar la constante de normalización A_2 del problema 30.

••• **40** Considerar la ecuación de Schrödinger unidimensional independiente del tiempo cuando la función potencial es simétrica respecto al origen, es decir, cuando $U(x) = U(-x)$.

(a) Demostrar que si $\psi(x)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger con energía E, entonces $\psi(-x)$ es también una solución de la misma energía E y que, por tanto $\psi(x)$ y $\psi(-x)$ pueden diferir sólo en una constante multiplicativa.
(b) Escribir $\psi(x) = C\psi(-x)$ y demostrar que $C = \pm 1$. Obsérvese que $C = +1$ significa que $\psi(x)$ es una función par de x y $C = -1$ una función impar de x.

••• **41** En este problema deduciremos la energía del estado de energía del estado fundamental del oscilador armónico utilizando la forma precisa del principio de incertidumbre $\Delta x\, \Delta p \geq \hbar/2$, en donde Δx y Δp vienen definidos por las desviaciones estándares $(\Delta x)^2 = [(x - x_m)^2]_m$ y $(\Delta p)^2 = [(p - p_m)^2]_m$ (véase ecuación 18.35). Procederemos del modo siguiente:

1. Expresar la energía clásica total en función de la posición x y la cantidad de movimiento p utilizando $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ y $K = p^2/2m$.
2. Utilizar el resultado de la ecuación 18.35 para escribir $(\Delta x)^2 = [(x - x_m)^2]_m = (x^2)_m - x_m^2$ y $(\Delta p)^2 = [(p - p_m)^2]_m = (p^2)_m - p_m^2$.
3. Utilizar la simetría de la función energía potencial para argumentar que x_m y p_m deben ser cero, de modo que $(\Delta x)^2 = (x^2)_m$ y $(\Delta p)^2 = (p^2)_m$.
4. Suponer que $\Delta p = \hbar/2\,\Delta x$ para eliminar $(p^2)_m$ de la energía media $E_m = (p^2)_m/2m + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2)_m$ y expresar E_m en la forma $E_m = \hbar^2/8mZ + \frac{1}{2}m\omega^2Z$, en donde $Z = (x^2)_m$.
5. Hacer $dE/dZ = 0$ para determinar el valor de Z para el cual E es mínima.
6. Demostrar que la energía mínima viene dada por $(E_m)_{min} = +\frac{1}{2}\hbar\omega$.

••• **42** Una partícula de masa m próxima a la superficie de la tierra en $z = 0$ puede describirse por la energía potencial

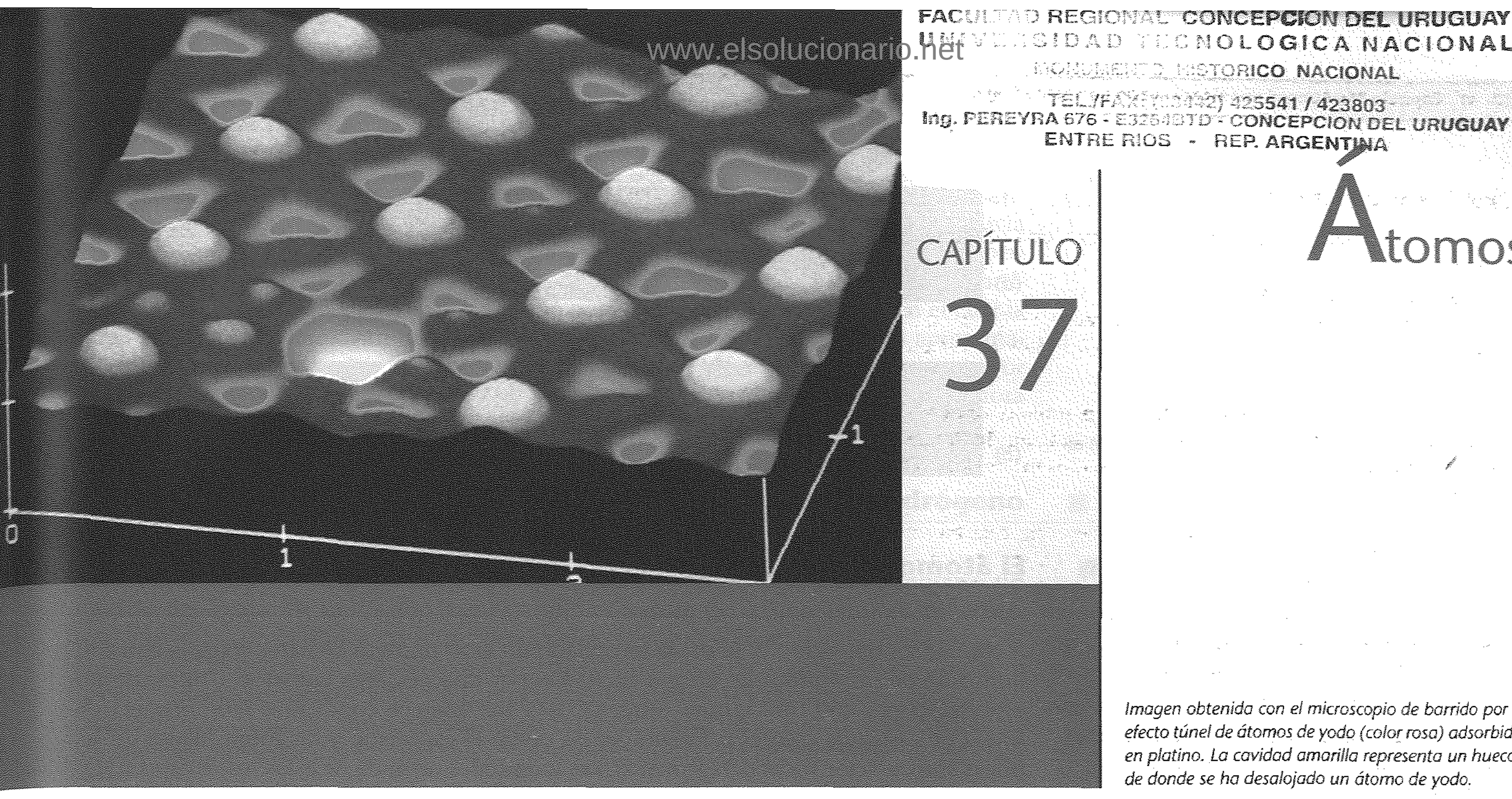
$$U = mgz, \quad z > 0$$
$$U = \infty, \quad z < 0$$

Para cierto valor positivo de la energía total E, indicar cuál es la región permitida clásicamente en un esquema de $U(z)$ en función de z. Representar también la energía cinética clásica en función de z. La ecuación de Schrödinger para este problema es muy difícil de resolver. Utilizar argumentos semejantes a los de la sección 36.2 respecto a la curvatura de la función de onda dada por la ecuación de Schrödinger, y hacer un esquema de "supuestos" sobre la forma de la función de onda para el estado fundamental y los dos primeros estados excitados.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO 37 Átomos

Imagen obtenida con el microscopio de barrido por efecto túnel de átomos de yodo (color rosa) adsorbidos en platino. La cavidad amarilla representa un hueco de donde se ha desalojado un átomo de yodo.

www.elsolucionario.net

Se han descubierto aproximadamente algo más de 100 elementos distintos. Cada uno de ellos está caracterizado por un átomo que contiene un número de protones Z, un *número igual de electrones y un número de neutrones* N. El número de protones Z se llama **número atómico**. El átomo más ligero, hidrógeno (H), tiene $Z = 1$; el siguiente, helio (He), tiene $Z = 2$; el siguiente, litio (Li), tiene $Z = 3$; y así sucesivamente. Casi toda la masa del átomo está concentrada en un núcleo diminuto, que contiene los protones y los neutrones. El radio nuclear está comprendido típicamente entre 1 y 10 fm (1 fm = 10^{-15} m). La distancia entre el núcleo y los electrones es aproximadamente 0,1 nm = 100 000 fm. Esta distancia determina el "tamaño" del átomo.

Las propiedades químicas y físicas de un elemento vienen determinadas por el número y distribución de los electrones en el átomo. Como cada protón tiene una carga positiva $+e$, el núcleo tiene una carga positiva total $+Ze$. Los electrones están cargados negativamente ($-e$), de modo que son atraídos por el núcleo y se repelen entre sí. Como los electrones y protones poseen cargas iguales, pero de signo opuesto y en un átomo existe un número igual de electrones y protones, los átomos son eléctricamente neutros. Los átomos que pierden o ganan uno o más electrones están eléctricamente cargados y se llaman *iones*.

Comenzaremos el estudio de los átomos exponiendo el modelo de Bohr, un modelo semiclásico desarrollado por Niels Bohr en 1913 para explicar los espectros emitidos por átomos de hidrógeno. Aunque este modelo de "mecánica precuántica" tiene muchos defectos, proporciona una estructura útil para tratar los fenómenos atómicos. Por ejemplo, aunque hoy sabemos que el electrón no gira alrededor del núcleo en órbitas circulares bien definidas como en el modelo de Bohr, sino que su movimiento viene descrito por una función de onda que satisface la ecuación de Schrödinger, las distribuciones de probabilidad que resultan de la teoría cuántica moderna poseen máximos en las posiciones de las órbitas de Bohr. Después de estudiar el modelo de Bohr, aplicaremos nuestro conocimiento de mecánica cuántica expuesto en el capítulo 36 para ofrecer una descripción cualitativa del átomo de hidrógeno. Por último, veremos la estructura de otros átomos y la tabla periódica de los elementos.

 www.elsolucionario.net

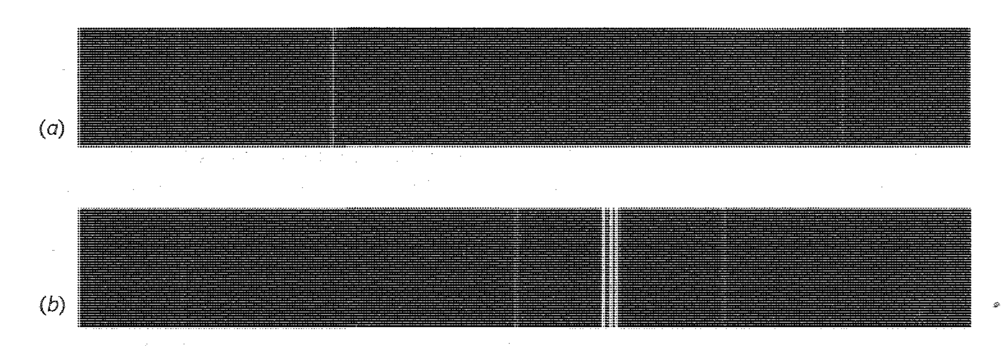


Figura 37.1 (*a*) Espectro de rayas del hidrógeno; (*b*) espectro lineal del mercurio.

37.1 ■ El átomo nuclear

Espectros atómicos

A comienzos del siglo XX se había recopilado un gran número de datos sobre la emisión luminosa de los átomos de un gas excitados por una descarga eléctrica. Utilizando un espectroscopio con una ranura estrecha, esta luz aparece como una serie discreta de líneas de distintos colores o longitudes de onda; el espaciado y las intensidades de las líneas son características del elemento. Las longitudes de onda de estas líneas espectrales podían determinarse exactamente y se realizó un gran esfuerzo en la búsqueda de regularidades de los espectros. La figura 37.1 muestra los espectros de rayas del hidrógeno y el mercurio.

En 1884 un maestro de escuela suizo, Johann Balmer, encontró que las longitudes de onda de las rayas del espectro visible del hidrógeno pueden representarse por la fórmula

$$\lambda = (364{,}6\ \text{nm})\frac{m^2}{m^2-4}, \qquad m = 3, 4, 5, \ldots \tag{37.1}$$

Balmer sugirió que esto podía ser un caso especial de una expresión más general aplicable a los espectros de otros elementos. Tal expresión, deducida por Johannes R. Rydberg y Walter Ritz, y llamada **fórmula de Rydberg–Ritz** especifica el valor recíproco de la longitud de onda:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \tag{37.2}$$

en donde n_1 y n_2 son números enteros con $n_1 > n_2$ y R es la **constante de Rydberg** que es la misma para todas las series espectrales del mismo elemento y varía sólo ligeramente en forma regular de elemento en elemento. Para el hidrógeno, R tiene el valor

$$R_{\text{H}} = 1{,}096776 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$$

La fórmula de Rydberg–Ritz expresa las longitudes de onda para todas las líneas del espectro del hidrógeno, así como las de los elementos alcalinos, tales como el litio y el sodio.

Se han realizado muchos intentos para construir un modelo del átomo que fuera compatible con estas fórmulas para su espectro de radiación. El modelo más popular, debido a J. J. Thomson, consideraba diversas distribuciones de electrones incluidos en algún tipo de fluido que contenía la mayor parte de la masa del átomo y la carga suficiente para que el átomo fuera eléctricamente neutro. El modelo de Thomson llamado "pudding de ciruelas" se ilustra en la figura 37.2. Como la teoría clásica electromagnética predecía que una carga oscilante de frecuencia f irradiaba energía electromagnética de esta frecuencia, Thomson intentó determinar configuraciones estables con modos normales de vibración de frecuencias iguales a las del espectro del átomo. Una dificultad de este modelo y de todos los que se intentaron fue que de acuerdo con la física clásica, las fuerzas eléctricas solas no pueden producir equilibrio estable. Thomson fue incapaz de descubrir un modelo que predijera las frecuencias observadas de cualquier átomo.

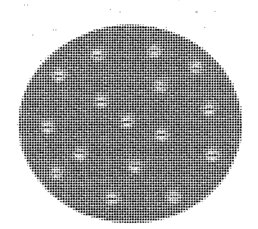


Figura 37.2 Modelo del "pudding de ciruelas" del átomo de J. J. Thomson. En este modelo los electrones negativos están incluidos en un fluido de carga positiva. Para una determinada configuración de tal sistema, pueden calcularse las frecuencias de resonancia de las oscilaciones de los electrones. De acuerdo con la teoría clásica, el átomo debía irradiar luz de frecuencia igual a la frecuencia de oscilación de los electrones. Thomson no pudo determinar ninguna configuración cuyas frecuencias estuvieran de acuerdo con las frecuencias medidas del espectro de cualquier átomo.

www.elsolucionario.net

El modelo de Thomson fue esencialmente descalificado por una serie de experimentos realizados por H. W. Geiger y E. Marsden bajo la supervisión de E. Rutherford hacia 1910, en los cuales un haz de partículas alfa emitidas por el radio radiactivo se dispersaba por los átomos de una lámina de oro. Rutherford demostró que el número de partículas alfa dispersas bajo ángulos grandes no podía explicarse por un átomo en el cual la carga positiva estuviera distribuida en toda su dimensión atómica (conocida aproximadamente de 0,1 nm de diámetro), sino que requería que la carga positiva y la mayor parte de la masa del átomo estuviera concentrada en una región muy pequeña, ahora llamada núcleo con un diámetro del orden de 10^{-6} nm = 1 fm.

Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno ■ 37.2

Niels Bohr, en 1913, cuando trabajaba en el laboratorio de Rutherford, propuso un modelo del átomo de hidrógeno que extendió el trabajo de Planck, Einstein y Rutherford y predijo con éxito los espectros observados. De acuerdo con el modelo de Bohr, el electrón del átomo de hidrógeno se mueve bajo la influencia de la atracción de Coulomb hacia el núcleo positivo de acuerdo con la mecánica clásica, la cual predice órbitas circulares o elípticas con el centro de fuerzas en un foco, como ocurre en el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Por simplicidad eligió una órbita circular como la indicada en la figura 37.3.

La energía en una órbita circular ■

Consideremos un electrón de carga $-e$ que se mueve en una órbita circular de radio r alrededor de una carga positiva Ze, tal como el núcleo de un átomo de hidrógeno ($Z = 1$) o el de un átomo de helio simplemente ionizado ($Z = 2$). La energía total del electrón puede relacionarse con el radio de la órbita. La energía potencial del electrón de carga $-e$ a una distancia r de una carga positiva Ze es

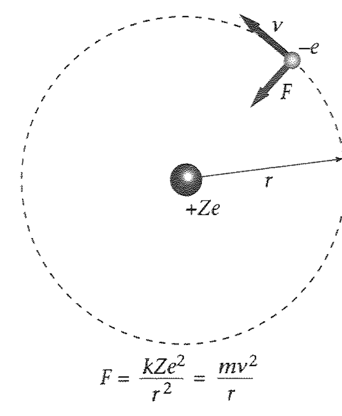
$$U = \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{k(Ze)(-e)}{r} = -\frac{kZe^2}{r} \qquad (37.3)$$

en donde k es la constante de Coulomb. La energía cinética E_c puede obtenerse en función de r utilizando la segunda ley de Newton, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Igualando la fuerza atractiva de Coulomb con el producto de la masa por la aceleración centrípeta resulta

$$\frac{kZe^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad (37.4a)$$

Por tanto,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} \qquad (37.4b)$$



$$F = \frac{kZe^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Figura 37.3 El electrón de carga $-e$ se mueve en una órbita circular de radio r alrededor de la carga nuclear $+Ze$. La fuerza eléctrica atractiva kZe^2/r^2 proporciona la fuerza centrípeta que mantiene el electrón en su órbita.

Por tanto, la energía cinética varía en razón inversa con r, lo mismo que la energía potencial. Obsérvese que la magnitud de la energía potencial es doble que la correspondiente a la energía cinética,

$$U = -2K \qquad (37.5)$$

Este resultado es general para todos los campos de fuerza del tipo $1/r^2$. También se cumple en órbitas circulares en un campo gravitatorio (véase ejemplo 11.6 en la sección 11.3). La energía total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} - \frac{kZe^2}{r}$$

o sea,

$$E = -\frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} \qquad (37.6)$$

Energía en una órbita circular para una fuerza del tipo $1/r^2$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Aunque se cumple la estabilidad mecánica, dado que la fuerza atractiva de Coulomb proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que el electrón permanezca en órbita, la teoría *electromagnética* clásica exige que un átomo en estas condiciones debería ser eléctricamente inestable, ya que el electrón acelera cuando se mueve circularmente y por tanto, irradia energía electromagnética de frecuencia igual a la de su movimiento. De acuerdo con la teoría clásica, este átomo se colapsaría rápidamente y el electrón se movería en espiral hasta chocar contra el núcleo irradiando al exterior su energía.

Postulados de Bohr

Bohr "resolvió" la dificultad del colapso del átomo *postulando* que sólo son permitidas ciertas órbitas, llamadas estados estacionarios, y en estas órbitas el electrón no irradia energía. La radiación se verifica sólo cuando el electrón verifica una transición de una órbita (estado estacionario) a otra.

El electrón en el átomo de hidrógeno sólo se mueve en ciertas órbitas circulares, no radiantes, llamadas estados estacionarios.

Primer postulado de Bohr: órbitas no radiantes

El segundo postulado relaciona la frecuencia de radiación con las energías de los estados estacionarios. Si E_i y E_f son las energías inicial y final del átomo, la frecuencia de la radiación emitida durante una transición viene dada por

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} \qquad \textbf{(37.7)}$$

Segundo postulado de Bohr: frecuencia del fotón según la conservación de la energía

en donde h es la constante de Planck. Este postulado es equivalente a la hipótesis de conservación de la energía con la emisión de un fotón de energía hf. Combinando las ecuaciones 37.6 y 37.7 se obtiene para la frecuencia

$$f = \frac{E_1 - E_2}{h} = \frac{1}{2}\,\frac{kZe^2}{h}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad \textbf{(37.8)}$$

en donde r_1 y r_2 son los radios de las órbitas inicial y final.

Para obtener las frecuencias sugeridas por la fórmula de Rydberg–Ritz, $f = c/\lambda = cR(1/n_2^2 - 1/n_1^2)$, es evidente que los radios de las órbitas estables deben ser proporcionales a los cuadrados de números enteros. Bohr buscó una condición cuántica para los radios de las órbitas estables que justificaran este resultado. Después de muchos ensayos, encontró la solución postulando que el momento angular del electrón en una órbita estable es igual a un número entero de $\hbar$ ("h barrada", es decir la constante de Planck dividida por 2π). Como el momento angular de una órbita circular es justamente mvr, este postulado es

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.9)}$$

Tercer postulado de Bohr: momento angular cuantizado

en donde $\hbar = h/2\pi = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s $= 6{,}582 \times 10^{-16}$ eV·s.

La ecuación 37.9 relaciona la velocidad v con el radio r. La ecuación 37.4a deducida de la segunda ley de Newton nos da otra ecuación que relaciona la velocidad con el radio:

$$\frac{kZe^2}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r}$$

o sea,

$$v^2 = \frac{kZe^2}{mr} \qquad \textbf{(37.10)}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Podemos determinar r eliminando v entre las ecuaciones 37.9 y 37.10. Despejando v de la ecuación 37.9 y elevando al cuadrado resulta

$$v^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r^2}$$

Comparando este resultado con la ecuación 37.10, resulta

$$n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r^2} = \frac{kZe^2}{mr}$$

Despejando r resulta

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z} \qquad \textbf{(37.11)}$$

Radio de las órbitas de Bohr

en donde a_0 es el **primer radio de Bohr**:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} \approx 0{,}0529 \text{ nm} \qquad \textbf{(37.12)}$$

Primer radio de Bohr

Sustituyendo las expresiones de r de la ecuación 37.11 en la ecuación 37.8 correspondiente a la frecuencia resulta

$$f = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{h}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = Z^2 \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \qquad \textbf{(37.13)}$$

Si comparamos esta expresión con $Z = 1$ para $f = c/\lambda$ con la fórmula empírica de Rydberg–Ritz (ecuación 37.2), se obtiene la constante de Rydberg:

$$R = \frac{mk^2e^4}{4\pi c\hbar^3} \qquad \textbf{(37.14)}$$

Utilizando los valores m, e y $\hbar$ conocidos en 1913, Bohr calculó R y encontró que su resultado estaba de acuerdo (dentro de los límites de las incertidumbres de las constantes) con el valor obtenido por espectroscopía.

EJEMPLO 37.1 ■

La condición de onda estacionaria para las ondas en un círculo es $n\lambda = 2\pi r$. Demostrar que esta condición para las ondas electrónicas implica la cuantización del momento angular.

1. Expresar la condición de onda estacionaria: $n\lambda = 2\pi r$
2. Utilizar la expresión de De Broglie para relacionar la cantidad de movimiento con λ: $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi r/n} = n\frac{h}{2\pi r} = n\frac{\hbar}{r}$
3. El momento angular de un electrón en una órbita circular es mvr: $L = mvr = pr = n\hbar$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



■ Niveles energéticos

La energía total del electrón en el átomo de hidrógeno está relacionada con el radio de la órbita circular por la ecuación 37.6. Si sustituimos los valores cuantizados de r dados por la ecuación 37.11 resulta

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{kZe^2}{n^2a_0/Z} = -\frac{1}{2}\frac{kZe^2}{n^2\hbar^2/mkZe^2}$$

o sea,

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -Z^2\frac{E_0}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.15)}$$

Niveles energéticos

en donde

$$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{a_0} \approx 13{,}6 \text{ eV} \qquad \textbf{(37.16)}$$

Las energías E_n con $Z = 1$ coinciden con las energías permitidas cuantizadas del átomo de hidrógeno.

Las transiciones entre estas energías permitidas dan lugar a la emisión o absorción de un fotón cuya frecuencia viene dada por $f = (E_i - E_f)/h$ y cuya longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_i - E_f} \qquad \textbf{(37.17)}$$

Como vimos en el capítulo 17, es conveniente conocer el valor de hc en electrón-voltios nanómetros:

$$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm} \qquad \textbf{(37.18)}$$

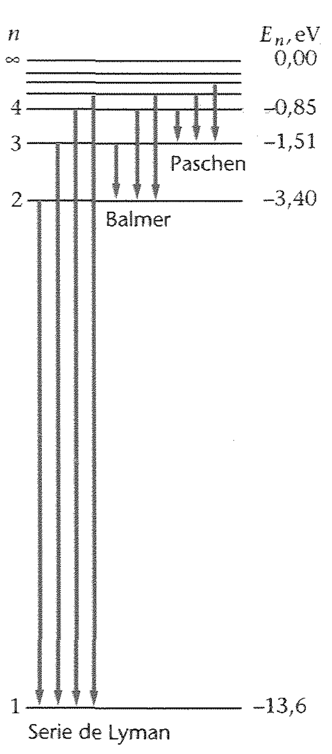


Figura 37.4 Diagrama de niveles energéticos del hidrógeno que muestra las primeras transiciones en cada una de las series de Lyman, Balmer y Paschen. Las energías de los niveles vienen dadas por la ecuación 37.15.

Como las energías están cuantizadas, las frecuencias y longitudes de onda de la radiación emitida por el átomo de hidrógeno están también cuantizadas de acuerdo con el espectro de rayas observado.

La figura 37.4 muestra el diagrama de niveles energéticos del hidrógeno. La energía del átomo de hidrógeno en el estado fundamental es $E_1 = -13{,}6$ eV. Cuando n tiende a infinito la energía se aproxima a cero, el estado energético más alto. El proceso de extracción de un electrón de un átomo se denomina ionización y la energía necesaria para extraer el electrón se llama **energía de ionización**. Para el átomo de hidrógeno, la energía de ionización que es también la energía de enlace del átomo, vale 13,6 eV. En la figura 37.4 se muestran unas pocas transiciones de estado de un nivel más alto a otro más bajo. Cuando Bohr publicó su modelo del átomo de hidrógeno ya se conocían la serie de Balmer, correspondiente a $n_2 = 2$ y $n_1 = 3, 4, 5, \ldots$, y la serie de Paschen, correspondiente a $n_2 = 3$ y $n_1 = 4, 5, 6, \ldots$ En 1916, T. Lyman descubrió la serie correspondiente a $n_2 = 1$ y en 1922 y 1924, F. Brackett y H. A. Pfund, respectivamente, determinaron las series correspondientes a $n_2 = 4$ y $n_2 = 5$. Sólo la serie de Balmer corresponde a la porción visible del espectro electromagnético.



■ EJEMPLO 37.2

Determinar (a) la energía y (b) la longitud de onda más larga de todas las rayas de la serie de Lyman.

Esquema del problema En la figura 37.4 podemos ver que la serie de Lyman corresponde a transiciones que terminan en el estado fundamental, $E_f = E_1 = -13{,}6$ eV. Como λ varía en razón inversa con la energía, la transición con la máxima longitud de onda corresponde a la energía mínima, es decir a la emitida del primer estado excitado $n = 2$ al estado fundamental $n = 1$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

(a) La energía del fotón es la diferencia entre las energías del estado inicial y final del átomo:

$$E = E_i - E_f = E_2 - E_1 = \frac{-13,6\text{ eV}}{2^2} - \frac{-13,6\text{ eV}}{1^2} = -3,40\text{ eV} + 13,6\text{ eV} = 10,2\text{ eV}$$

(b) La longitud de onda del fotón es:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{10,2\text{ eV}} = 121,6\text{ nm}$$

Observación Este fotón está fuera del espectro visible, en la región ultravioleta. Como las restantes líneas de la serie Lyman tienen energías mayores y longitudes de onda más cortas, la serie de Lyman está incluida completamente en la región ultravioleta.

Ejercicio Determinar la longitud de onda más corta de una raya de la serie Lyman. (*Respuesta*: 91,2 nm.)

A pesar de sus éxitos espectaculares, el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno tenía muchos defectos. No había más justificación para los postulados de los estados estacionarios y para la cuantización del momento angular que la coincidencia de los niveles energéticos con los datos espectroscópicos. Además, los intentos de aplicar el modelo a átomos más complicados tuvo poco éxito. La teoría mecánico-cuántica resuelve estas dificultades. Los estados estacionarios del modelo de Bohr corresponden a las soluciones de la onda estacionaria de la ecuación de Schrödinger, análoga a las ondas electrónicas estacionarias de una partícula en una caja (estudiada en los capítulos 17 y 36). La cuantización energética es una consecuencia directa de las soluciones de las ondas estacionarias de la ecuación de Schrödinger. Para el hidrógeno estas energías cuantizadas están de acuerdo con las obtenidas mediante el modelo de Bohr y con los resultados experimentales. La cuantización del momento angular que tuvo que ser postulada en el modelo de Bohr resulta ser predicción de la teoría cuántica.

www.elsolucionario.net

Teoría cuántica atómica 37.3

La ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas

En la teoría cuántica, el electrón se describe por su función de onda ψ. El cuadrado del valor absoluto de la función de onda del electrón $|\psi|^2$ representa la probabilidad de encontrar el electrón en alguna región del espacio. Las condiciones límites de la función de onda conducen a la cuantización de las longitudes de onda y frecuencias y, por tanto, a la cuantización de la energía del electrón.

Consideremos un solo electrón de masa m que se mueve en tres dimensiones en una región en la cual la energía potencial es U. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para esta partícula es (ecuación 36.30):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + U\psi = E\psi \qquad (37.19)$$

Para un átomo aislado, la energía potencial U depende sólo de la distancia radial $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El problema es, por ello, más conveniente de tratar utilizando las coordenadas esféricas r, θ y ϕ, que están relacionadas con las coordenadas rectangulares x, y, z, por

$$z = r\cos\theta$$
$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \qquad (37.20)$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$$

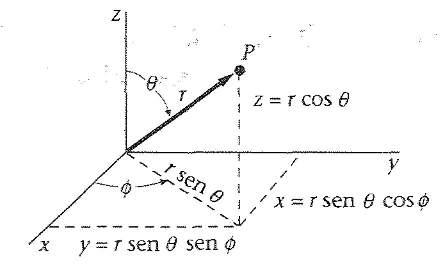


Figura 37.5 Relaciones geométricas entre coordenadas esféricas y rectangulares.

Estas relaciones se muestran en la figura 37.5. La transformación de la ecuación de Schrödinger tridimensional en coordenadas esféricas es directa, pero lleva consigo un cálculo tedioso que omitiremos. El resultado es

www.elsolucionario.net

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+U(r)\psi = E\psi \qquad \textbf{(37.21)}$$

A pesar de la apariencia formidable de esta ecuación, su solución no resultó difícil para Schrödinger, pues es semejante a otras ecuaciones en derivadas parciales de la física clásica que habían sido perfectamente estudiadas. Nos limitaremos simplemente a discutir en forma cualitativa algunas de las características interesantes de las funciones de onda que satisfacen esta ecuación.

La primera etapa en la solución de una ecuación en derivadas parciales como la 37.21 es separar las variables expresando la función de ondas $\psi(r, \theta, \phi)$ como un producto de funciones de cada una de las variables:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)f(\theta)g(\phi) \qquad \textbf{(37.22)}$$

en donde R depende sólo de la coordenada radial r, f depende sólo de θ y g depende sólo de ϕ. Al sustituir esta forma de $\psi(r, \theta, \phi)$ en la ecuación 37.21, la ecuación en derivadas parciales puede transformarse en tres ecuaciones diferenciales ordinarias, una para $R(r)$, otra para $f(\theta)$ y una tercera para $g(\phi)$. La energía potencial $U(r)$ aparece sólo en la ecuación para $R(r)$ que se denomina **ecuación radial**. La forma particular de $U(r)$ dada en la ecuación 37.19, no tiene, por tanto, efecto sobre las soluciones de las ecuaciones para $f(\theta)$ y $g(\phi)$ y tampoco sobre la dependencia angular de la función de onda $\psi(r, \theta, \phi)$. Estas soluciones son aplicables a cualquier problema en el cual la energía potencial depende sólo de r.

Números cuánticos en coordenadas esféricas

En tres dimensiones, el requisito de que la función de onda sea continua y normalizable introduce tres números cuánticos, uno asociado a cada dimensión. En coordenadas esféricas el número cuántico asociado a r se designa con la letra n, el asociado con θ se designa ℓ y el asociado con ϕ se designa m. Los números cuánticos n_1, n_2 y n_3 que vimos en el capítulo 36 para una partícula en un pozo rectangular tridimensional en coordenadas rectangulares x, y, z eran independientes uno de otro, pero los números cuánticos asociados con las funciones de onda en coordenadas esféricas son interdependientes. Los valores posibles de estos números cuánticos son

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \ldots \\ \ell &= 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ m &= -\ell, (-\ell+1), \ldots 0, 1, 2, \ldots \ell \end{aligned} \qquad \textbf{(37.23)}$$

Números cuánticos en coordenadas esféricas

Es decir, n puede ser cualquier entero positivo; ℓ puede ser 0 ó cualquier entero positivo hasta $n - 1$; y m puede tener $2\ell + 1$ valores posibles que varían de $-\ell$ a $+\ell$ por saltos de números enteros.

El número n se denomina **número cuántico principal**. Está asociado con la dependencia de la función de onda con la distancia r y, por tanto, con la probabilidad de localizar el electrón a diferentes distancias del núcleo. Los números cuánticos ℓ y m están asociados al momento angular del electrón y a la dependencia angular de la función de onda del electrón. El número cuántico ℓ se denomina **número cuántico orbital**. La magnitud del momento angular orbital L del electrón está relacionado con ℓ por

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad \textbf{(37.24)}$$

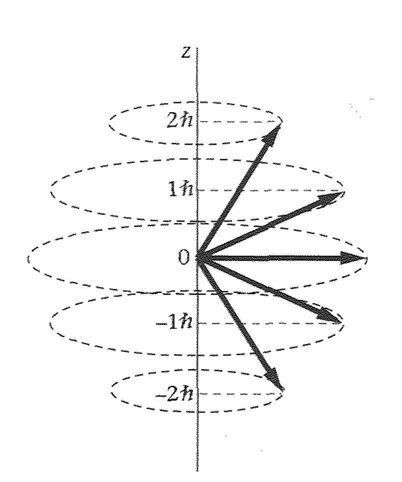


Figura 37.6 Diagrama de un modelo vectorial que ilustra los valores posibles del componente z del vector momento angular para el caso $\ell = 2$. La magnitud del momento angular es $L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} = \hbar\sqrt{2(2+1)} = \hbar\sqrt{6}$.

El número cuántico m se denomina **número cuántico magnético**. Está relacionado con la componente del momento angular en alguna dirección. Ordinariamente, todas las direcciones son equivalentes, pero una dirección particular puede especificarse situando el átomo en un campo magnético. Si se elige la dirección z para el campo magnético, el componente z del momento angular del electrón viene dado por la condición cuántica

$$L_z = m\hbar \qquad \textbf{(37.25)}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Esta condición cuántica surge de la condición límite respecto a la coordenada ϕ, según la cual la probabilidad de localizar el electrón bajo un ángulo ϕ_1 debe ser la misma que la correspondiente al ángulo $\phi_1 + 2\pi$, pues se trata de los mismos puntos en el espacio.

Si medimos el momento angular del electrón en unidades de $\hbar$, resulta que el momento angular está cuantizado según el valor $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ unidades y que su componente a lo largo de cualquier dirección puede tener sólo los $2\ell + 1$ valores que varían de $-\ell$ a $+\ell$ unidades. La figura 37.6 muestra un diagrama de un modelo vectorial que ilustra las orientaciones posibles del vector momento angular para $\ell = 2$. Obsérvese que sólo son permitidos valores específicos de θ; es decir, las direcciones en el espacio están cuantizadas.

EJEMPLO 37.3

Si el momento angular está caracterizado por el número cuántico $\ell = 2$, ¿cuáles son los valores posibles de L_z y cuál es el ángulo posible más pequeño entre L y el eje z?

Esquema del problema Las orientaciones posibles de **L** y un eje z arbitrario se indican en la figura 37.6.

1. Expresar los valores posibles de L_z: $L_z = m\hbar$, donde $m = -2, -1, 0, +1$, o $+2$

2. Expresar el ángulo θ que forman **L** y el eje z en función de L y L_z: $\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m\hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar} = \frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$

3. El ángulo más pequeño tiene lugar cuando $m = +\ell$ o $-\ell$. Calcular este ángulo para $\ell = 2$: $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2(2+1)}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0{,}816$

   $\theta = 35{,}3°$

Observación Nótese el resultado algo extraño de que el vector momento angular no puede encontrarse a lo largo del eje z.

Ejercicio Un átomo tiene un momento angular caracterizado por el número cuántico $\ell = 4$. ¿Cuáles son los valores posibles de m? (*Respuesta*: −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4.)

Teoría cuántica del átomo de hidrógeno ■ 37.4

Podemos tratar el átomo más simple, el átomo de hidrógeno, como un núcleo estacionario, el protón, que posee una sola partícula, un electrón, moviéndose con energía cinética $p^2/2m$ y energía potencial $U(r)$ debida a la atracción electrostática del protón:[1]

$$U(r) = -\frac{kZe^2}{r} \tag{37.26}$$

Para esta energía potencial, la ecuación de Schrödinger puede resolverse con exactitud. En el estado de energía más bajo o estado fundamental, el número cuántico principal n tiene el valor 1, ℓ es 0 y m es 0.

[1] Incluimos el factor Z, que es 1 para el hidrógeno, de modo que podemos aplicar nuestros resultados a otros átomos que contienen un solo electrón, tales como el helio ionizado He^+, para el cual $Z = 2$.

www.elsolucionario.net

Niveles energéticos

Las energías permitidas del átomo de hidrógeno que resultan de la solución de la ecuación de Schrödinger son

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -Z^2\frac{E_0}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{37.27}$$

Niveles energéticos del hidrógeno

en donde

$$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} \approx 13{,}6 \text{ eV} \tag{37.28}$$

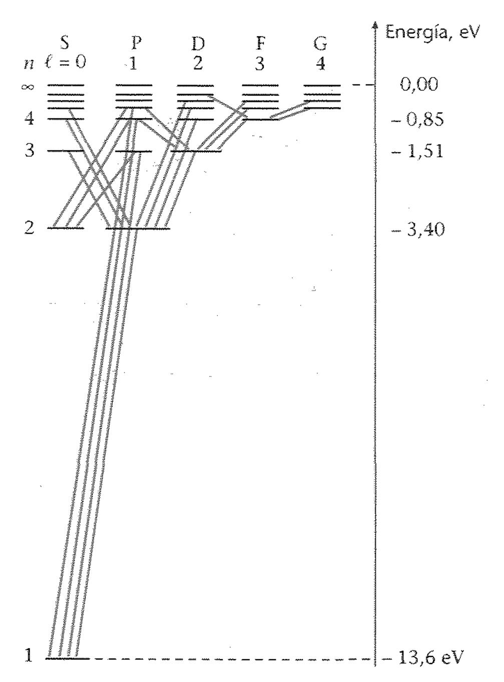


Figura 37.7 Diagrama de niveles energéticos para el hidrógeno. Las líneas diagonales corresponden a transiciones que implican la emisión o absorción de radiación y obedecen la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$. Los estados con el mismo valor de n, pero con valores distintos de ℓ, poseen la misma energía $-E_0/n^2$, en donde $E_0 = 13{,}6$ eV como en el modelo de Bohr.

Estas energías son las mismas que resultan del modelo de Bohr. Obsérvese que la energía es negativa, indicando que el electrón está ligado al núcleo (de aquí el término *estado ligado*), y que la energía depende sólo del número cuántico principal n. El hecho de que la energía no dependa del número cuántico orbital ℓ es una peculiaridad de la fuerza inversa con el cuadrado y se cumple sólo para un potencial inverso con r, tal como indica la ecuación 37.26. Para átomos más complicados que contienen varios electrones, las interacciones de éstos dan lugar a una dependencia de la energía con ℓ. En general, cuanto más bajo es el valor de ℓ, menor es la energía para estos átomos. Como usualmente no hay dirección espacial preferente, la energía de cualquier átomo no depende ordinariamente del número cuántico magnético m, el cual está relacionado con el componente z del momento angular. La energía depende de m si el átomo se encuentra en un campo magnético.

La figura 37.7 muestra un diagrama de niveles energéticos para el hidrógeno. Este diagrama es semejante al de la figura 37.4, exceptuando que los estados de igual valor que n, pero distintos valores de ℓ se muestran por separado. Estos estados (llamados *términos*) se especifican con el valor de n junto a una letra código: S para $\ell = 0$, P para $\ell = 1$, D para $\ell = 2$, y F para $\ell = 3$.[1] Cuando un átomo verifica una transición de un estado energético permitido a otro, se emite o absorbe una radiación electromagnética en forma de un fotón. Estas transiciones dan lugar a líneas espectrales que son características del átomo. Las transiciones obedecen las **reglas de selección**

$$\Delta m = 0 \quad \text{o} \quad \pm 1$$
$$\Delta\ell = \pm 1 \tag{37.29}$$

Estas reglas de selección están relacionadas con la conservación del momento angular y con la existencia de un momento angular intrínseco en el fotón que posee un componente máximo a lo largo de cualquier eje igual a $1\hbar$. Las longitudes de onda de las líneas espectrales emitidas por el hidrógeno (y por otros átomos) están relacionadas con los niveles energéticos por

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \tag{37.30}$$

en donde E_i y E_f son las energías de los estados inicial y final.

Funciones de onda y densidades de probabilidad

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas están caracterizadas por los números cuánticos n, ℓ y m y se escriben en la forma $\psi_{n\ell m}$. Para cualquier valor determinado de n existen n valores posibles de ℓ ($\ell = 0, 1, \ldots, n - 1$) y para cada valor de ℓ hay $2\ell + 1$ valores posibles de m. Para el hidrógeno, la energía depende sólo de n y por tanto, existen generalmente múltiples funciones de onda distintas que corresponden a la misma energía (excepto en el nivel de energía mínima, para el cual $n = 1$ y

[1] Esta nomenclatura procede de las antiguas descripciones de los espectroscopistas sobre diversas líneas espectrales, *sharp* (aguda), *principal*, *difusa* y *fundamental*. Para valores superiores a 3, las letras se sucedían alfabéticamente; así, G se usaba para $\ell = 4$, y así sucesivamente.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

por tanto ℓ y m deben ser 0). Estos niveles energéticos son, por tanto, degenerados (véase sección 36.5). Los orígenes de esta degeneración son la dependencia $1/r$ de la energía potencial y el hecho de que en ausencia de cualquier campo externo, no existe dirección preferente en el espacio.

Estado fundamental En el estado de energía mínima o estado fundamental, el número cuántico principal n posee el valor 1, ℓ es 0 y m es 0. La energía es $-13,6$ eV y el momento angular es cero. Obsérvese que éste difiere del modelo de Bohr, en el cual el momento angular correspondiente al estado fundamental es $1\hbar$. La función de onda para el estado fundamental es

$$\psi_{1,0,0} = C_{1,0,0}e^{-Zr/a_0} \quad \textbf{(37.31)}$$

en donde

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0{,}0529 \text{ nm}$$

es el primer radio de Bohr y $C_{1,0,0}$ es una constante que se determina por normalización. En tres dimensiones, la condición de normalización es

$$\int |\psi|^2 dV = 1$$

en donde dV es un elemento de volumen y la integración se extiende a todo el espacio. En coordenadas esféricas, el elemento de volumen es (figura 37.8):

$$dV = (r \text{ sen } \theta\, d\phi)(r\, d\theta)dr = r^2 \text{ sen } \theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

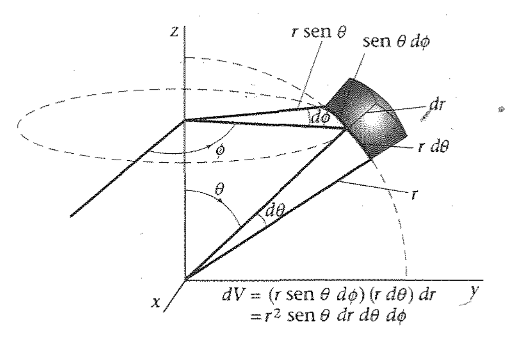


Figura 37.8 Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

Para extender la integral a todo el espacio, integraremos ϕ desde $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$, θ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ y r desde $r = 0$ a $r = \infty$. La condición de normalización es, por tanto,

$$\begin{aligned}\int |\psi|^2 dV &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\psi|^2 r^2 \text{ sen } \theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \text{sen } \theta\, d\theta \int_0^\infty |\psi|^2 r^2\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \text{sen } \theta\, d\theta \int_0^\infty C_{1,0,0}^2 e^{-2Zr/a_0} r^2\, dr = 1\end{aligned}$$

Como $\psi_{1,0,0}$ no depende de θ o ϕ, la integración extendida a todos los ángulos es 4π. Mediante una tabla de integrales, obtenemos

$$\int_0^\theta e^{-2Zr/a_0} r^2\, dr = \frac{a_0^3}{4Z^3}$$

Por tanto,

$$4\pi C_{1,0,0}^2 \left(\frac{a_0^3}{4Z^3}\right) = 1$$

y

$$C_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \quad \textbf{(37.32)}$$

La función de onda del estado fundamental normalizada es, por consiguiente,

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \quad \textbf{(37.33)}$$

La probabilidad de localizar el electrón en un volumen dV es $|\psi|^2\, dV$. La densidad de probabilidad $|\psi|^2$ viene ilustrada en la figura 37.9. Obsérvese que esta densidad es esféricamente simétrica; es decir, depende sólo de r y no de θ o ϕ. La densidad de probabilidad es máxima en el origen.

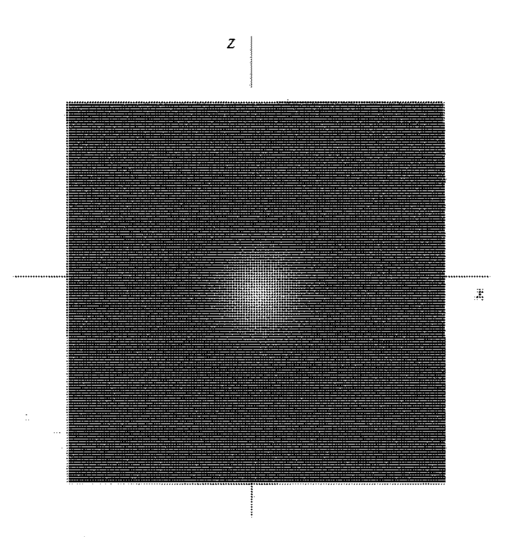


Figura 37.9 Imagen generada por ordenador de la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ para el estado fundamental del hidrógeno. La magnitud $e|\psi|^2$ puede considerarse como la densidad de carga electrónica en el átomo. La densidad es esféricamente simétrica, es máxima en el origen y decrece exponencialmente con r.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

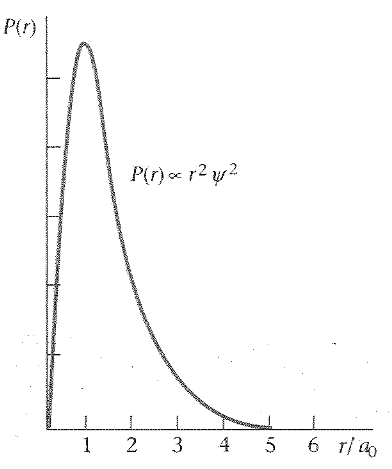


Figura 37.10 Densidad de probabilidad radial $P(r)$ en función de r/a_0 para el estado fundamental del átomo de hidrógeno. $P(r)$ es proporcional a $r^2\psi^2$. El valor de r para el cual $P(r)$ es máximo es la distancia más probable $r = a_0$

Frecuentemente estamos más interesados en la probabilidad de determinar la posición del electrón a cierta distancia radial r comprendida entre r y $r + dr$. Esta probabilidad radial $P(r)\,dr$ es el producto de la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ por el volumen de la corteza esférica de espesor dr, de valor $dV = 4\pi r^2\,dr$. La probabilidad de localizar el electrón en el intervalo de r a $r + dr$, es por tanto, $P(r)\,dr = |\psi|^2 4\pi r^2\,dr$ y la **densidad de probabilidad radial** es

$$P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2 \tag{37.34}$$

Densidad de probabilidad radial

Para el átomo de hidrógeno en el estado fundamental, la densidad de probabilidad radial es

$$P(r) = 4\pi r^2|\psi|^2 = 4\pi C_{1,0,0}^2 r^2 e^{-2Zr/a_0} = 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-2Zr/a_0} \tag{37.35}$$

La figura 37.10 muestra la densidad de probabilidad radial $P(r)$ en función de r. El valor máximo de $P(r)$ tiene lugar para $r = a_0/Z$, que para $Z = 1$ es el primer radio de Bohr. En contraste con el modelo de Bohr, en el cual el electrón se encuentra en una órbita bien definida, $r = a_0$, resulta que es posible que el electrón se encuentre a cualquier distancia del núcleo. Sin embargo, la distancia más probable es a_0 (suponiendo $Z = 1$), y la probabilidad de encontrar el electrón a una distancia muy diferente de ésta es muy pequeña. Con frecuencia es útil imaginar el electrón de un átomo como una nube cargada de densidad $e|\psi|^2$, pero sin olvidar que cuando interacciona con la materia, el electrón se observa siempre como una carga individual.

EJEMPLO 37.4

Determinar la probabilidad de localizar el electrón en el intervalo $\Delta r = 0{,}06a_0$ en (a) $r = a_0$ y (b) $r = 2a_0$ para el estado fundamental del átomo de hidrógeno.

Esquema del problema Como el intervalo Δr es tan pequeño, la variación en la densidad de la probabilidad real $P(r)$ puede despreciarse. La probabilidad de determinar el electrón en un pequeño intervalo Δr es, por tanto, $P(r)\,\Delta r$:

(a) Utilizar la ecuación 37.35 con $Z = 1$ y $r = a_0$:

$$P(r)\Delta r = \left[4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-2r/a_0}\right]\Delta r$$

$$= \left[4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 a_0^2 e^{-2}\right](0{,}06a_0) = 0{,}0325$$

(b) Utilizar la ecuación 37.35 con $Z = 1$ y $r = 2a_0$:

$$P(r)\Delta r = \left[4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-2r/a_0}\right]\Delta r$$

$$= \left[4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 4a_0^2 e^{-4}\right](0{,}06a_0) = 0{,}0176$$

Observación Existe una probabilidad del 3% de localizar el electrón en este intervalo en $r = a_0$, mientras que la probabilidad es sólo del 0,2% en $r = 2a_0$.

El primer estado excitado

En el primer estado excitado, $n = 2$ y ℓ puede ser 0 ó 1. Para $\ell = 0$, $m = 0$, y de nuevo tenemos una función de onda simétricamente esférica, que ahora viene expresada por

$$\psi_{2,0,0} = C_{2,0,0}\left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0} \tag{37.36}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

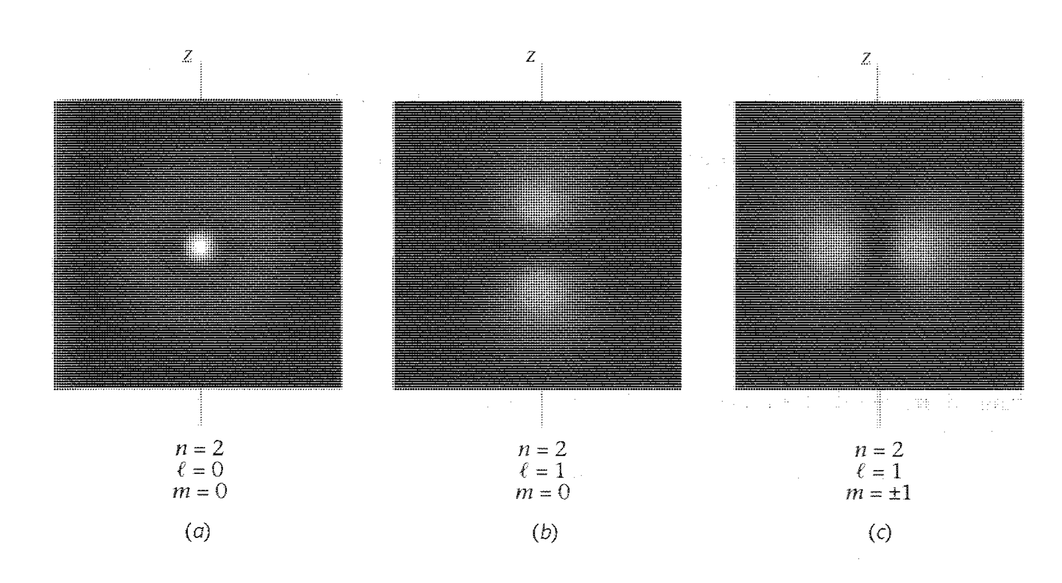


Figura 37.11 Imagen generada por ordenador de las densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para el electrón en los estados $n = 2$ del hidrógeno. (a) Para $\ell = 0$, $|\psi|^2$ es esféricamente simétrica. (b) Para $\ell = 1$ y $m = 0$, $|\psi|^2$ es proporcional a $\cos^2 \theta$. (c) Para $\ell = 1$ y $m = +1$ ó -1, $|\psi|^2$ es proporcional a $\operatorname{sen}^2 \theta$.

Para $\ell = 1$, m puede ser +1, 0, −1. Las funciones de onda correspondientes son

$$\psi_{2,1,0} = C_{2,1,0}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\theta \qquad \textbf{(37.37)}$$

$$\psi_{2,1\pm 1} = C_{2,1,1}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\operatorname{sen}\,\theta e^{\pm i\phi} \qquad \textbf{(37.38)}$$

en donde $C_{2,0,0}$, $C_{2,1,0}$ y $C_{2,1,1}$ son constantes de normalización. Las densidades de probabilidad vienen dadas por

$$\psi^2_{2,0,0} = C^2_{2,0,0}\left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right)^2 e^{-Zr/a_0} \qquad \textbf{(37.39)}$$

$$\psi^2_{2,1,0} = C^2_{2,1,0}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 e^{-Zr/a_0}\cos^2\theta \qquad \textbf{(37.40)}$$

$$|\psi_{2,1\pm 1}|^2 = C^2_{2,1,1}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 e^{-Zr/a_0}\operatorname{sen}^2\theta \qquad \textbf{(37.41)}$$

Las funciones de onda y las densidades de probabilidad para $\ell \neq 0$ no son esféricas simétricas, sino que dependen del ángulo θ. Las densidades de probabilidad no dependen del ángulo ϕ. La figura 37.11 muestra la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ para $n = 2$, $\ell = 0$, $m = 0$ (figura 37.11*a*); para $n = 2$, $\ell = 1$, $m = 0$ (figura 37.11*b*); y para $n = 2$, $\ell = 1$, $m = \pm 1$ (figura 37.11*c*). Una característica importante de estos gráficos es que la nube electrónica es esféricamente simétrica para $\ell = 0$ y no es esféricamente simétrica para $\ell \neq 0$. Estas distribuciones angulares de la densidad de carga eléctrica dependen sólo de los valores de ℓ y m y no de la parte radial de la función de onda. En la química del enlace molecular desempeñan un papel importante las distribuciones de carga semejantes, correspondientes a los electrones de valencia de átomos más complicados.

La figura 37.12 muestra la probabilidad de localizar el electrón a una distancia r para $n = 2$ cuando $\ell = 1$ y cuando $\ell = 0$. Puede verse que la distribución de probabilidad depende de ℓ así como de n.

Para $n = 1$, vimos que la distancia más probable entre el electrón y el núcleo es a_0, el primer radio de Bohr, mientras que para $n = 2$, $\ell = 1$, es $4a_0$. Estos son los radios orbitales para la primera y segunda órbita de Bohr (ecuación 37.11). Para $n = 3$ (y $\ell = 2$),[1] la distancia más probable entre el electrón y el núcleo es $9a_0$, el radio de la tercera órbita de Bohr.

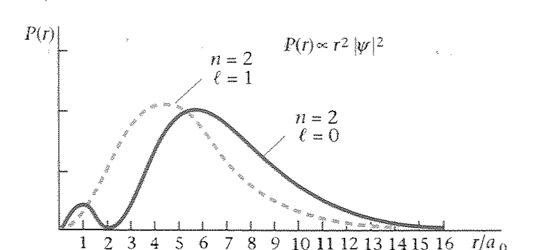


Figura 37.12 Densidad de probabilidad radial $P(r)$ en función de r/a_0 para los estados $n = 2$ del hidrógeno. Para $\ell = 1$, $P(r)$ es máximo en el valor de Bohr $r = 2^2a_0$. Para $\ell = 0$ hay un máximo cerca de este valor y un submáximo cerca del origen.

[1] La correspondencia con el modelo de Bohr es mayor para el valor máximo de ℓ que es $n - 1$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

37.5 ■ Efecto espín–órbita y estructura fina

(a) $j = \frac{3}{2}$ (b) $j = \frac{1}{2}$

Figura 37.13 Diagramas vectoriales que ilustran la adición de los momentos angulares orbital y de espín para el caso $\ell = 1$ y $s = 1/2$. Existen dos valores posibles del número cuántico para el momento angular total: $j = \ell + s = 3/2$ y $j = \ell - s = 1/2$.

En general, un electrón en un átomo posee simultáneamente momento angular orbital caracterizado por el número cuántico ℓ y momento angular de espín caracterizado por el número cuántico s. Ejemplos de sistemas clásicos análogos que poseen dos tipos de momento angular son la Tierra, que gira alrededor de su eje de rotación además de girar alrededor del Sol y el giróscopo, que tiene un momento angular de precesión además de su espín. El momento angular **J** es la suma de su momento angular orbital **L** y el momento angular de espín **S**

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{37.42}$$

Clásicamente **J** es una magnitud importante porque el momento resultante sobre un sistema es igual a la variación con el tiempo del momento angular total y en el caso de fuerzas centrales, el momento angular total se conserva. Para un sistema clásico, la magnitud del momento angular total J puede tener cualquier valor comprendido entre $L + S$ y $L - S$. En la mecánica cuántica, el momento angular es más complicado. Tanto L como S están cuantizados y sus direcciones están restringidas. Además, la mecánica cuántica también limita los valores posibles del momento angular total J. Para un electrón con momento angular orbital caracterizado por el número cuántico ℓ y espín $s = \frac{1}{2}$, el momento angular total J tiene la magnitud $\sqrt{j(j+1)}\hbar$, en donde el número cuántico j puede ser

$$j = \ell + \tfrac{1}{2} \quad \text{o} \quad j = \ell - \tfrac{1}{2} \quad \ell \neq 0 \tag{37.43}$$

(Para $\ell = 0$, el momento angular total es simplemente el espín y $j = \frac{1}{2}$.) La figura 37.13 es un modelo vectorial que ilustra las dos combinaciones $j = \frac{3}{2}$ y $j = \frac{1}{2}$ para el caso de $\ell = 1$. Las longitudes de los vectores son proporcionales a $\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$, $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ y $\sqrt{j(j+1)}\hbar$. El espín y el momento angular orbital se dice que son "paralelos" cuando $j = \ell + s$ y "antiparalelos" cuando $j = \ell - s$.

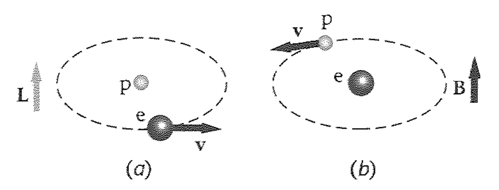


Figura 37.14 (*a*) Un electrón se mueve alrededor de un protón en una órbita circular en el plano horizontal con un momento angular **L** dirigido hacia arriba. (*b*) El campo magnético **B** visto desde el electrón debido al movimiento aparente (relativo) del protón está también dirigido hacia arriba. Cuando el espín electrónico es paralelo a **L**, el momento magnético es antiparalelo a **L** y **B**, de modo que la energía espín–órbita pasa por su valor más grande.

Los estados atómicos con iguales valores de n y ℓ, pero diferentes valores de j poseen energía ligeramente diferentes debido a la interacción del espín del electrón con su movimiento orbital. Este efecto se denomina **efecto espín–órbita**. El desdoblamiento resultante de las líneas espectrales se denomina **desdoblamiento de estructura fina**.

En la notación espectroscópica, el número cuántico del momento angular total de un estado atómico se escribe en forma de subíndice después de la letra código que describe el momento angular orbital. Por ejemplo, el estado fundamental del hidrógeno se escribe en la forma $1S_{1/2}$, en donde el 1 indica el valor de n. Los estados $n = 2$ pueden tener $\ell = 0$ ó $\ell = 1$ y el estado $\ell = 1$ puede tener $j = 3/2$ ó $j = 1/2$. Estos estados se expresan por $2S_{1/2}$, $2P_{3/2}$ y $2P_{1/2}$. Debido al efecto espín–órbita, los estados $2P_{3/2}$ y $2P_{1/2}$ tienen energías ligeramente distintas que resultan del desdoblamiento de estructura fina de las transiciones $2P_{3/2} \rightarrow 2S_{1/2}$ y $2P_{1/2} \rightarrow 2S_{1/2}$.

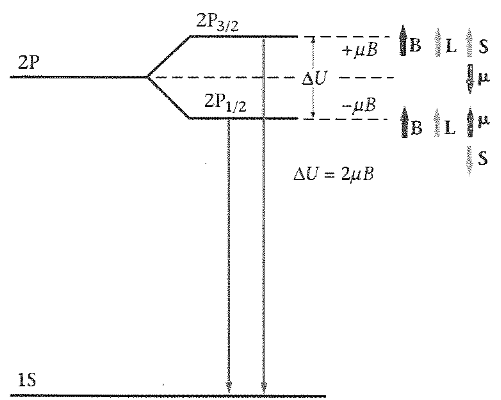


Figura 37.15 Diagrama de niveles energéticos de estructura fina. A la izquierda se muestran los niveles en ausencia de un campo magnético. A la derecha se muestra el efecto de un campo magnético aplicado. Debido a la interacción espín–órbita, el campo magnético divide el nivel 2P en dos niveles energéticos, con el nivel $j = 3/2$ de energía ligeramente mayor que el $j = 1/2$. La línea espectral debida a la transición $2P \rightarrow 1S$ está, por tanto, dividida en dos líneas de longitudes de onda ligeramente distintas.

Podemos entender el efecto espín–órbita cualitativamente mediante una imagen simple del modelo de Bohr como se indica en la figura 37.14. En esta imagen el electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón fijo. En (*a*) el momento angular orbital **L** está dirigido hacia arriba. En el sistema de referencia del electrón (*b*) el protón se mueve circularmente alrededor del electrón constituyendo un bucle circular de corriente que produce un campo magnético **B** en la posición del electrón. El sentido de **B** es hacia arriba y paralelo a **L**. La energía del electrón depende de su espín debido al momento magnético asociado $\boldsymbol{\mu}_s$. La energía es la más baja cuando $\boldsymbol{\mu}_s$ es paralelo a **B** y la más alta cuando es antiparalelo. Esta energía viene dada por (ecuación 28.16)

$$U = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} \tag{37.44}$$

Como $\boldsymbol{\mu}_s$ tiene el sentido opuesto a su espín (porque el electrón tiene una carga negativa), la energía es más baja cuando el espín es antiparalelo a **B** y, por tanto, a **L**. La energía del estado $2P_{1/2}$ en el hidrógeno, en el cual **L** y **S** son antiparalelos (figura 37.15) es, por tanto, menor que la del estado $2P_{3/2}$, en la cual **L** y **S** son paralelos.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 37.5

Como una consecuencia del desdoblamiento de estructura fina, las energías de los niveles $2P_{3/2}$ y $2P_{1/2}$ en el hidrógeno difieren en 4,5 × 10^{-5} eV. Si el electrón 2p "ve" un campo magnético interno *B*, el desdoblamiento de energía espín-órbita será del orden de $\Delta E = 2\mu_B B$, en donde μ_B es el magnetón de Bohr.[1] Con estos datos, estimar el campo magnético que actúa sobre el electrón 2p del hidrógeno.

1. Expresar el desdoblamiento energético en función del momento magnético: $\Delta E = 2\mu_B B = 4{,}5 \times 10^{-5}$ eV

2. Despejar el campo magnético *B*: $B = \frac{4{,}5 \times 10^{-5}\text{ eV}}{2\mu_B} = \frac{4{,}5 \times 10^{-5}\text{ eV}}{2(5{,}79 \times 10^{-5}\text{ eV/T})} = 0{,}389\text{ T}$

El sistema periódico 37.6

La ecuación de Schrödinger no puede resolverse exactamente para los átomos que poseen más de un electrón. No obstante, existen métodos aproximativos de gran potencia que permiten determinar los niveles energéticos de los átomos y funciones de onda de los electrones con un alto grado de exactitud. En una primera aproximación, los electrones *Z* de un átomo se supone que no son interactivos. Se resuelve entonces la ecuación de Schrödinger y las funciones de onda resultantes se utilizan para calcular la interacción de los electrones, la cual se utiliza a su vez para una mejor aproximación de las funciones de onda.[2] Como el espín de un electrón puede tener dos componentes posibles a lo largo de un eje, se introduce un número cuántico adicional m_s con dos valores posibles $+\frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{2}$. El estado de cada electrón viene así descrito por los cuatro números cuánticos n, ℓ, m y m_s. La energía del electrón se determina fundamentalmente por el número cuántico principal n (el cual está relacionado con la dependencia radial de la función de onda) y por el número cuántico del momento angular ℓ. En general, cuanto más bajos son los valores de n y ℓ, menor es la energía. La dependencia de la energía con ℓ es debida a la interacción de los electrones del átomo entre sí. Naturalmente, como en el hidrógeno hay un solo electrón, la energía es independiente de ℓ. La especificación de n y ℓ para cada electrón en un átomo se denomina **configuración electrónica**. Por costumbre, ℓ se especifica de acuerdo con el mismo código utilizado para designar los estados del átomo de hidrógeno en lugar de usar su valor numérico. El código es:

	s	p	d	f	g	h
valor ℓ	0	1	2	3	4	5

Los valores n se refieren a veces a las capas electrónicas, que se identifican por otro código de letras: $n = 1$ denota la capa K; $n = 2$, la capa L; y así sucesivamente.

La configuración electrónica de los átomos se rige por el principio de exclusión de Pauli, según el cual dos electrones de un átomo no pueden encontrarse en el mismo estado cuántico; es decir, dos electrones no pueden tener la misma serie de valores para los números cuánticos, n, ℓ, m y m_s. Mediante el principio de exclusión y las restricciones de los números cuánticos expuestos en las secciones previas (n es un número entero, ℓ es un entero que varía de 0 a $n - 1$, m puede tener $2\ell + 1$ valores de $-\ell$ a $+\ell$ por saltos de

[1] La unidad magnetón de Bohr se trato en la sección 29.5.

[2] Este método de aproximación, llamado teoría de perturbaciones, es semejante al utilizado para determinar las órbitas de los planetas alrededor del Sol. Las órbitas se determinan primeramente despreciando cualquier interacción entre ellas; después estas órbitas se utilizan para calcular la perturbación orbital debida a las fuerzas ejercidas por un planeta sobre otro.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

números enteros y m_s puede valer +1/2 ó −1/2), podemos entender fundamentalmente la estructura de la tabla periódica.

Hemos visto anteriormente el elemento más ligero, el hidrógeno, que posee sólo un electrón. En el estado fundamental (energía más baja), el electrón posee $n = 1$ y $\ell = 0$, con $m = 0$ y $m_s = +1/2$ ó $-1/2$. Este electrón se designa 1s. El 1 significa que $n = 1$ y la s indica que $\ell = 0$.

Como en la formación de los átomos más pesados van agregándose nuevos electrones, éstos se disponen en aquellos estados que poseen la energía total más baja compatible con el principio de exclusión de Pauli.

Helio ($Z = 2$)

El siguiente elemento después del hidrógeno es el helio ($Z = 2$), que tiene dos electrones. En el estado fundamental, ambos electrones se encuentran en la capa K con $n = 1$, $\ell = 0$ y $m = 0$; para un electrón $m_s = +\frac{1}{2}$ y para el otro $m_s = -\frac{1}{2}$. Esta configuración es de energía menor que cualquier otra configuración de dos electrones. El espín resultante de los dos electrones es cero. Como el momento angular orbital es también cero, el momento angular total es cero. La configuración electrónica del helio se escribe $1s^2$. El 1 significa que $n = 1$, la s significa que $\ell = 0$ y el superíndice 2 significa que hay dos electrones en este estado. Como ℓ puede ser sólo 0 para $n = 1$, estos dos electrones completan la capa K ($n = 1$). La energía requerida para extraer el electrón más débilmente ligado en el estado fundamental de un átomo se llama **energía de ionización.** Esta energía es la energía de enlace del último electrón situado en el átomo. Para el helio, la energía de ionización es 24,6 eV, que es un valor relativamente grande. El helio es, por tanto, básicamente inerte.

EJEMPLO 37.6

(a) Utilizar la energía de ionización para calcular la energía de interacción de los dos electrones en el estado fundamental del átomo de helio. (b) Utilizar el resultado obtenido para estimar la separación media de los dos electrones.

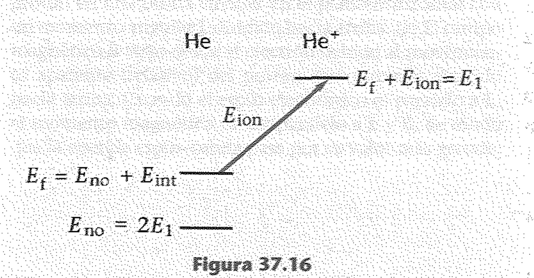


Figura 37.16

Esquema del problema La energía de un electrón en el estado fundamental del helio es E_1 (el cual es negativo) dado por la ecuación 37.27 con $n = 1$ y $Z = 2$. Si los electrones no interaccionasen, la energía del segundo electrón también sería E_1, la misma que la del primer electrón, y la energía del estado fundamental sería $E_{no} = 2E_1$. Ésta viene representada por el nivel más bajo de la figura 37.16. Debido a la energía de interacción, la energía del estado fundamental es mayor que E_{no} como se representa en la figura por el nivel superior E_f. Si a este valor le sumamos la energía de ionización del helio, $E_{ion} = 24,6$ eV, obtenemos helio ionizado, He^+, que sólo tiene un electrón y por tanto la energía E_1.

(a) 1. La energía de interacción más la energía de dos electrones no interactivos es igual a la energía del estado fundamental del helio:

$$E_{int} + E_{no} = E_f$$

2. Despejar E_{int} y sustituir $E_{no} = 2E_1$:

$$E_{int} = E_f - E_{no} = E_f - 2E_1$$

3. Utilizar la ecuación 37.27 para calcular la energía E_1 de un electrón en el estado fundamental:

$$E_1 = -Z^2\frac{E_0}{n^2} = -(2)^2\frac{13,6\text{ eV}}{1^2} = -54,4\text{ eV}$$

4. Sustituir este valor para E_1:

$$E_{int} = E_f - 2E_1 = E_f - (2)(-54,4\text{ eV})$$
$$= E_f + 108,8\text{ eV}$$

5. La energía del estado fundamental del He, E_f, más la energía de ionización es igual a la energía del He^+, es decir, E_1:

$$E_f + E_{ion} = E_1 = -54,4\text{ eV}$$

6. Sustituir $E_{ion} = 24,6$ eV para calcular E_f:

$$E_f = -54,4\text{ eV} - E_{ion} = -54,4\text{ eV} - 24,6\text{ eV}$$
$$= -79\text{ eV}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

7. Sustituir este resultado de E_f para obtener E_{int}:

$$E_{int} = E_f + 108{,}8 \text{ eV} = -79 \text{ eV} + 108{,}8 \text{ eV} = 29{,}8 \text{ eV}$$

(b) 1. La energía de interacción de dos electrones separados una distancia r es la energía potencial:

$$U = +\frac{ke^2}{r}$$

2. Hacer U igual a 29,8 eV y despejar r. Es conveniente expresar r en función de a_0, el radio de la primera órbita de Bohr en el hidrógeno:

$$r = \frac{ke^2}{U} = \frac{ke^2/a_0}{U}a_0 = \frac{13{,}6 \text{ eV}}{29{,}8 \text{ eV}}a_0 = 0{,}456a_0$$

Comprobación del resultado Esta separación es aproximadamente igual al radio de la primera órbita de Bohr para un electrón en el helio, el cual es $r_1 = a_0/Z = 0{,}50a_0$.

Litio ($Z = 3$)

El siguiente elemento, litio, tiene tres electrones. Como la capa K está totalmente llena con dos electrones, el tercer electrón debe pasar a una capa de energía superior. La siguiente capa energética después de $n = 1$ es la $n = 2$ ó capa L. El electrón externo está mucho más lejos del núcleo que los dos más internos o electrones de $n = 1$. Este tercer electrón tiene la máxima probabilidad de ser encontrado en la segunda órbita de Bohr, que es cuatro veces el radio de la primera órbita de Bohr.

La carga nuclear está parcialmente apantallada del electrón externo por los dos electrones más internos. Recordemos que el campo eléctrico más allá de una densidad de carga esféricamente simétrica es el mismo que si toda la carga estuviera en el centro de la esfera. Si el electrón externo estuviera completamente fuera de la nube de carga de los dos electrones más internos, el campo eléctrico sería el de una carga $+e$ en el centro debido a la carga nuclear de $+3e$ y la carga $-2e$ de la nube de los electrones más internos. Sin embargo, el electrón externo no tiene una órbita bien definida; en su lugar, se trata de una nube de carga que penetra en la nube correspondiente a los electrones más internos. Debido a esta penetración, la carga nuclear $Z'e$ es algo mayor que $+1e$. La energía del electrón externo a una distancia r de una carga puntual $+Z'e$ viene dado por la ecuación 37.6 con la carga nuclear +Ze reemplazada por $+Z'e$:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{kZ'e^2}{r} \tag{37.45}$$

Cuanto mayor es la penetración de la nube de electrones más internos, mayor es la carga nuclear efectiva $Z'e$ y más baja la energía. Como la penetración es mayor para los valores más bajos de ℓ (véase figura 37.12), la energía del electrón más externo en el litio es menor para el estado s ($\ell = 0$) que para el estado p ($\ell = 1$). La configuración electrónica del litio en el estado fundamental es, por tanto, $1s^22s$. La energía de ionización del litio es sólo 5,39 eV. Como su electrón más externo está muy débilmente ligado al átomo, el litio es químicamente muy activo. Se comporta como "un átomo de un solo electrón", semejante al hidrógeno.

EJEMPLO 37.7

Si el electrón más externo del litio se mueve en la órbita de Bohr $n = 2$, la carga nuclear estará blindada por los dos electrones más internos y la carga nuclear sería $Z'e = 1e$. Por tanto, la energía del electrón sería $13{,}6 \text{ eV}/2^2 = -3{,}4$ eV. Sin embargo, la energía de ionización del litio es 5,39 eV, y no 3,4 eV. Utilizar este hecho para calcular la carga efectiva nuclear Z' "vista" desde el electrón externo del litio.

Esquema del problema Como el electrón más externo se mueve en la capa $n = 2$, tomaremos para su distancia media al núcleo el valor $r = 4a_0$. Podemos calcular

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

entonces Z' de la ecuación 37.45. Como r viene dado en función de a_0, será conveniente utilizar la ecuación 37.16, $E_0 = ke^2/2a_0 = 13{,}6$ eV.

1. La ecuación 37.45 relaciona la energía del electrón más externo con su distancia media r y la carga nuclear efectiva Z':

$$E = \frac{1}{2}\frac{kZ'e^2}{r}$$

2. Sustituir los valores dados $r = 4a_0$ y $E = -5{,}39$ eV:

$$-5{,}39 \text{ eV} = -\frac{1}{2}\frac{kZ'e^2}{4a_0} = -\frac{Z'}{4}\left(\frac{ke^2}{2a_0}\right)$$

3. Utilizar $ke^2/2a_0 = 13{,}6$ eV y despejar Z':

$$-5{,}39 \text{ eV} = -\frac{Z'}{4}\left(\frac{ke^2}{2a_0}\right) = -\frac{Z'}{4}(13{,}6 \text{ eV})$$

$$Z' = 4\,\frac{5{,}39 \text{ eV}}{13{,}6 \text{ eV}} = 1{,}59$$

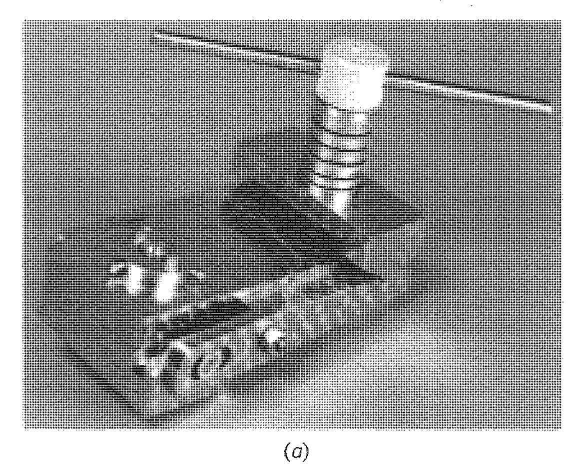
Observación Este cálculo es interesante, pero no es riguroso. Esencialmente hemos utilizado la órbita circular que resulta del modelo de Bohr semiclásico y la energía de ionización medida para calcular la carga interna efectiva "vista" desde el electrón más externo. Naturalmente, sabemos que este electrón más externo no se mueve en una órbita circular de radio constante, sino que se representa mejor por una nube cargada estacionaria de densidad de carga $|\psi|^2$ que penetra en las nubes cargadas de los electrones más internos.

Berilio ($Z = 4$)

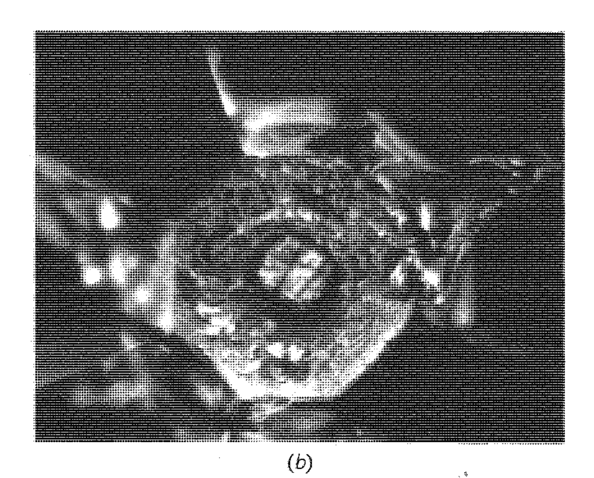
El cuarto electrón tiene una energía mínima en el estado 2s. Existen dos electrones con $n = 2$, $\ell = 0$ y $m = 0$ gracias a los dos valores posibles del número cuántico de espín, m_s. La configuración del berilio es por tanto, $1s^22s^2$.

Del boro al neón ($Z = 5$ a $Z = 10$)

Como la subcapa 2s está completa, el quinto electrón debe situarse en la siguiente subcapa (de menor energía) que es la 2p, con $n = 2$ y $\ell = 1$. Como existen tres valores posibles de m (+1, 0 y −1) y dos valores de m_s para cada valor de m, pueden existir seis electrones en esta subcapa. La configuración electrónica del boro es $1s^22s^22p$. Las configuraciones electrónicas de los elementos carbono ($Z = 6$) al neón ($Z = 10$) difieren de la



(*a*)

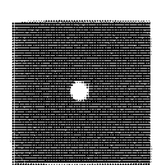


(*b*)

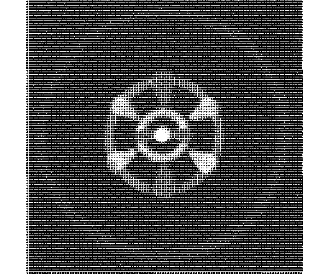
(*a*) Mordaza que utiliza las facetas de dos diamantes (aproximadamente de 1 mm^2 cada una) para comprimir una muestra con una presión muy elevada. (*b*) El monosulfuro de samario (SmS) es normalmente un semiconductor negro. Cuando se somete a una presión superior a 7000 atm, un electrón del estado 4f se disloca y pasa al estado 5d. El compuesto resultante resplandece como el oro y se comporta como un metal.

www.elsolucionario.net

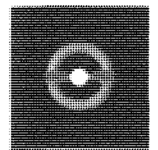
www.elsolucionario.net



Hidrógeno

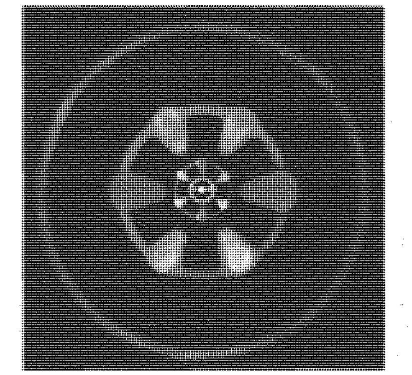


Hierro

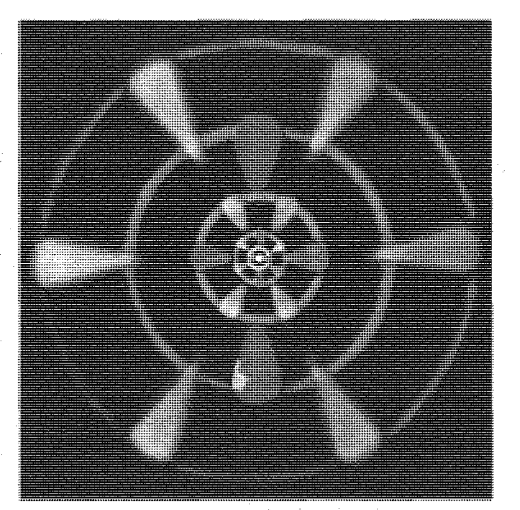


Carbono

Silicio



Plata



Europio

Descripción esquemática de las configuraciones electrónicas de los átomos. Los estados s simétricamente esféricos pueden contener 2 electrones y están coloreados en blanco y azul. Los estados p en forma de peonzas pueden contener hasta 6 electrones y están pintados de color naranja. Los estados d pueden contener hasta 10 electrones y aparecen de color verde-amarillento. Los estados f pueden contener hasta 14 electrones y están coloreados de púrpura.

www.elsolucionario.net

correspondiente al boro sólo en el número de electrones de la subcapa 2p. La energía de ionización crece con Z para estos elementos, alcanzando el valor de 21,6 eV para el último elemento del grupo, el neón. Éste posee el máximo número de electrones permitidos en la capa $n = 2$. Su configuración electrónica es $1s^2 2s^2 2p^6$. Debido a su altísima energía de ionización, el neón, como el helio es básicamente inerte desde el punto de vista químico. El elemento inmediatamente anterior al neón, el flúor, tiene una vacante en la subcapa 2p; es decir, tiene sitio para un electrón más. Por ello, fácilmente se combina con elementos tales como el litio que poseen un electrón externo. El litio, por ejemplo, cedería su electrón más externo y aislado al flúor para formar un ion F^- y un ion Li^+. Estos iones se unirán entre sí para formar una molécula de fluoruro de litio.

Del sodio al argón ($Z = 11$ a $Z = 18$)

El electrón undécimo debe situarse en la capa $n = 3$. Como este electrón está muy alejado del núcleo y de los electrones más internos, se encuentra débilmente ligado al átomo de sodio ($Z = 11$). La energía de ionización del sodio es sólo 5,14 eV. El sodio, por tanto, se combina fácilmente con átomos tales como el flúor. Con $n = 3$, el valor de ℓ puede ser 0, 1, 2. Debido a la disminución de energía que se produce por la penetración al blindaje electrónico producido por los otros diez electrones (de un modo semejante al caso del litio), el estado 3s es inferior al 3p o al 3d. Esta diferencia de energía entre subcapas de igual valor de n se hace mayor a medida que el número de electrones crece. La configuración electrónica del sodio es $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. A medida que avanzamos hacia valores más altos de Z, la subcapa 3s, y después la 3p, se van llenando. Estas dos subcapas pueden acomodar 2 + 6 = 8 electrones. La configuración del argón ($Z = 18$) es $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Parece lógico que el decimonoveno electrón debía situarse en la tercera subcapa (subcapa d con $\ell = 2$), pero el efecto de penetración es ahora tan intenso que la energía del siguiente electrón es menor en la subcapa 4s que en la subcapa 3d. Existe, por tanto, otra gran diferencia de energía entre los electrones décimo octavo y decimonoveno y por ello, el argón con su subcapa 3p completa es básicamente estable e inerte.

Elementos con $Z > 18$

El decimonoveno electrón del potasio ($Z = 19$) y el vigésimo del calcio ($Z = 20$) pasan a la subcapa 4s en lugar de la 3d. Las configuraciones electrónicas de los siguientes diez elementos, del escandio ($Z = 21$) al zinc ($Z = 30$) difieren sólo en el número de electrones de

 www.elsolucionario.net

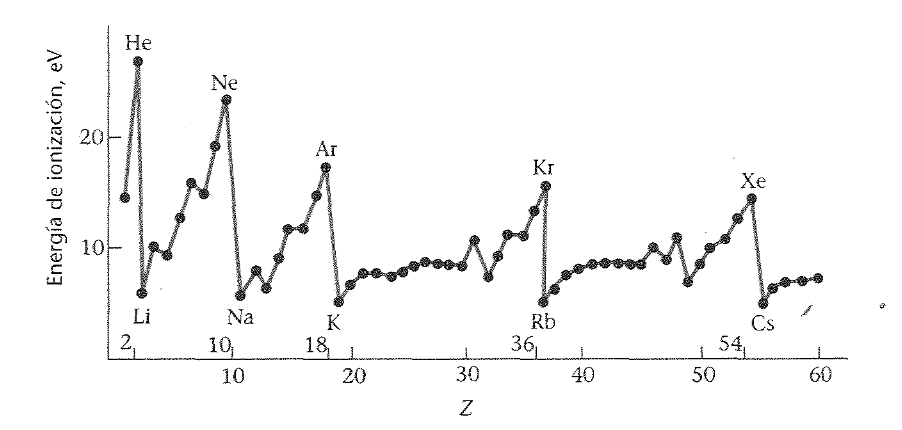


Figura 37.17 Energía de ionización en función de Z desde $Z = 1$ a $Z = 60$. Es la energía de enlace del último electrón del átomo. La energía de enlace crece con Z hasta que una capa se cierra para $Z = 2, 10, 18, 36$ y 54. Los elementos con una capa cerrada, más un electrón externo, tal como el sodio ($Z = 11$), poseen energías de enlace muy bajas, pues el electrón externo está muy lejos del núcleo y está blindado por los electrones más internos.

la capa 3d, excepto en el cromo ($Z = 24$) y el cobre ($Z = 29$), en los cuales existe solamente un electrón 4s. Estos diez elementos se llaman **elementos de transición**. Como sus propiedades químicas se deben principalmente a sus electrones 4s, son muy semejantes químicamente.

La figura 37.17 muestra un gráfico de la energía de ionización en función de Z desde $Z = 1$ a $Z = 60$. Los picos de la energía de ionización para $Z = 2, 10, 18, 36$ y 54 indican el cierre de una capa o subcapa. La tabla 37.1 incluye las configuraciones electrónicas de todos los elementos.

Tabla 37.1 Configuración electrónica de los átomos en sus estados fundamentales.
Para algunos elementos de las tierras raras (Z = 57 a 71) y para los elementos pesados (Z > 89), las configuraciones no están firmemente establecidas.

			Capa (n):	K (1)	L(2)		M(3)			N(4)				O(5)				P(6)			Q(7)
Z		Elemento	Subcapa (ℓ):	s (0)	s (0)	p (1)	s (0)	p (1)	d (2)	s (0)	p (1)	d (2)	f (3)	s (0)	p (1)	d (2)	f (3)	s (0)	p (1)	d (2)	s (1)
1	H	hidrógeno		1																	
2	He	helio		2																	
3	Li	litio		2	1																
4	Be	berilio		2	2																
5	B	boro		2	2	1															
6	C	carbono		2	2	2															
7	N	nitrógeno		2	2	3															
8	O	oxígeno		2	2	4															
9	F	flúor		2	2	5															
10	Ne	neón		2	2	6															
11	Na	sodio		2	2	6	1														
12	Mg	magnesio		2	2	6	2														
13	Al	aluminio		2	2	6	2	1													
14	Si	silicio		2	2	6	2	2													
15	P	fósforo		2	2	6	2	3													
16	S	azufre		2	2	6	2	4													
17	Cl	cloro		2	2	6	2	5													
18	Ar	argón		2	2	6	2	6													
19	K	potasio		2	2	6	2	6	·	1											
20	Ca	calcio		2	2	6	2	6	·	2											
21	Sc	escandio		2	2	6	2	6	1	2											
22	Ti	titanio		2	2	6	2	6	2	2											
23	V	vanadio		2	2	6	2	6	3	2											
24	Cr	cromo		2	2	6	2	6	5	1											
25	Mn	manganeso		2	2	6	2	6	5	2											
26	Fe	hierro		2	2	6	2	6	6	2											
27	Co	cobalto		2	2	6	2	6	7	2											
28	Ni	níquel		2	2	6	2	6	8	2											

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 37.1 (*Continuación*)

Z		Elemento	Capa (n):	K (1)	L (2)		M (3)			N (4)				O (5)				P (6)			Q (7)
			Subcapa (l):	s (0)	s (0)	p (1)	s (0)	p (1)	d (2)	s (0)	p (1)	d (2)	f (3)	s (0)	p (1)	d (2)	f (3)	s (0)	p (1)	d (2)	s (1)
29	Cu	cobre		2	2	6	2	6	10	1											
30	Zn	zinc		2	2	6	2	6	10	2											
31	Ga	galio		2	2	6	2	6	10	2	1										
32	Ge	germanio		2	2	6	2	6	10	2	2										
33	As	arsénico		2	2	6	2	6	10	2	3										
34	Se	selenio		2	2	6	2	6	10	2	4										
35	Br	bromo		2	2	6	2	6	10	2	5										
36	Kr	kriptón		2	2	6	2	6	10	2	6										
37	Rb	rubidio		2	2	6	2	6	10	2	6	·	·	1							
38	Sr	estroncio		2	2	6	2	6	10	2	6	·	·	2							
39	Y	itrio		2	2	6	2	6	10	2	6	1	·	2							
40	Zr	circonio		2	2	6	2	6	10	2	6	2	·	2							
41	Nb	niobio		2	2	6	2	6	10	2	6	4	·	1							
42	Mo	molibdeno		2	2	6	2	6	10	2	6	5	·	1							
43	Tc	tecnecio		2	2	6	2	6	10	2	6	6	·	1							
44	Ru	rutenio		2	2	6	2	6	10	2	6	7	·	1							
45	Rh	rodio		2	2	6	2	6	10	2	6	8	·	1							
46	Pd	paladio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	·							
47	Ag	plata		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	1							
48	Cd	cadmio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2							
49	In	indio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	1						
50	Sn	estaño		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	2						
51	Sb	antimonio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	3						
52	Te	teluro		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	4						
53	I	iodo		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	5						
54	Xe	xenón		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	6						
55	Cs	cesio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	6	·	·	1			
56	Ba	bario		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	6	·	·	2			
57	La	lantano		2	2	6	2	6	10	2	6	10	·	2	6	1	·	2			
58	Ce	cerio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	2	6	1	·	2			
59	Pr	praseodimio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	3	2	6	·	·	2			
60	Nd	neodimio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	4	2	6	·	·	2			
61	Pm	prometio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	5	2	6	·	·	2			
62	Sm	samario		2	2	6	2	6	10	2	6	10	6	2	6	·	·	2			
63	Eu	europio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	7		6	·	·	2			
64	Gd	gadolinio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	1	·	2			
65	Tb	terbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	9	2	6	·	·	2			
66	Dy	disprosio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	10	2	6	·	·	2			
67	Ho	holmio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6	·	·	2			
68	Er	erbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	12	2	6	·	·	2			
69	Tm	tulio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	13	2	6	·	·	2			
70	Yb	iterbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	·	·	2			
71	Lu	lutecio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1	·	2			
72	Hf	hafnio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2	·	2			
73	Ta	tántalo		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3	·	2			
74	W	tungsteno (o wolframio)		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4	·	2			
75	Re	renio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5	·	2			
76	Os	osmio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6	·	2			
77	Ir	iridio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7	·	2			
78	Pt	platino		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	9	·	1			
79	Au	oro		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	·	1			
80	Hg	mercurio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	·	2			
81	Tl	talio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	·	2	1		
82	Pb	plomo		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	·	2	2		
83	Bi	bismuto		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	·	2	3		
84	Po	polonio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	·	2	4		
85	At	astato		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	5		
86	Rn	radón		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		
87	Fr	francio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	·	1
88	Ra	radio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	·	2
89	Ac	actinio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	1	2
90	Th	torio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	2	2

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Tabla 37.1 (*Continuación*)

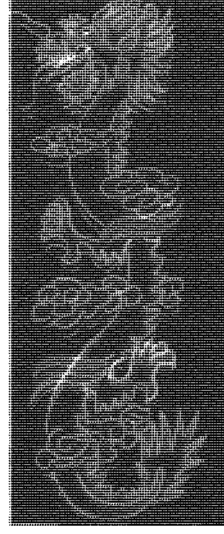
		Capa (*n*):	K(1)	L(2)		M(3)			N(4)				O(5)				P(6)			Q(7)
Z		Elemento Subcapa (ℓ):	s (0)	s (0)	p (1)	s (0)	p (1)	d (2)	s (0)	p (1)	d (2)	f (3)	s (0)	p (1)	d (2)	f (3)	s (0)	p (1)	d (2)	s (1)
91	Pa	protactinio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	1	2	6	2	2
92	U	uranio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3	2	6	1	2
93	Np	neptunio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1	2
94	Pu	plutonio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	6	2	6	·	2
95	Am	americio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	·	2
96	Cm	curio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1	2
97	Bk	berquelio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	1	2
98	Cf	californio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	10	2	6	·	2
99	Es	einstenio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	11	2	6	·	2
100	Fm	fermio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	12	2	6	·	2
101	Md	mendelevio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	13	2	6	·	2
102	No	nobelio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	·	2
103	Lw	laurencio	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	1	2

37.7 Espectros ópticos y espectros de rayos X

Cuando un átomo se encuentra en un estado excitado (es decir, en un estado energético por encima del estado fundamental), verifica transiciones a estados de menor energía emitiendo radiación electromagnética. La longitud de onda de esta radiación emitida está relacionada con los estados inicial y final por la fórmula de Bohr (ecuación 37.17), $\lambda = hc/(E_i - E_f)$, en donde E_i y E_f son las energías inicial y final y h es la constante de Planck. El átomo puede ser excitado a un estado energético más elevado bombardeándole con un haz de electrones, por ejemplo, en un tubo espectral sometido a un alto voltaje entre sus extremos. Como los estados energéticos excitados de un átomo forman una serie discreta (en lugar de continua), sólo se emiten ciertas longitudes de onda. Estas longitudes de onda de la radiación emitida constituyen el espectro de emisión del átomo.

Espectros ópticos

Para entender la formación de los espectros ópticos, es necesario comprender la naturaleza de los estados excitados. La situación de un átomo con múltiples electrones es, en general, mucho más complicada que en la caso del hidrógeno con sólo un electrón. Un estado excitado puede implicar un cambio en el estado de cualquiera de los electrones, o incluso de dos o más electrones. Afortunadamente, en la mayor parte de los casos, un estado excitado de un átomo procede de la excitación de solamente uno de los electrones del átomo. Las energías de excitación de los electrones externos de valencia de un átomo son del orden de unos pocos electrón-voltios. Las transiciones que proceden de estos electrones dan lugar a fotones que corresponden o están muy próximos al **espectro visible** u **óptico**. (Recuérdese que la energía de los fotones visibles se encuentran dentro del intervalo 1,5 a 3 eV.) Las energías de excitación pueden calcularse frecuentemente a partir de un modelo simple, en el cual el átomo se representa como un solo electrón más un núcleo estable formado por el núcleo y los otros electrones más internos. Este modelo funciona perfectamente bien para los metales alcalinos: Li, Na, K, Rb y Cs. Estos elementos se encuentran en la primera columna del sistema periódico. Los espectros ópticos de estos elementos son semejantes a los del hidrógeno.



Un anuncio luminosos de neón en un restaurante del barrio chino de París. Los átomos de neón del tubo están excitados por una corriente electrónica que cruza el tubo y emiten luz en el intervalo visible al decaer a sus estados fundamentales. Los colores del anuncio resultan del espectro rojo-naranja del neón más el color del propio tubo de vidrio.

La figura 37.18 muestra un diagrama de niveles energéticos para las transiciones ópticas del sodio, cuyos electrones se disponen como si se tratara de un núcleo de neón más un electrón externo. Como el momento angular de espín del núcleo es globalmente cero, el espín de cada estado del sodio es 1/2. Debido al *efecto espín–órbita*, los estados con $j = \ell - 1/2$ poseen una energía ligeramente más baja que los correspondientes a $j = \ell + 1/2$. Cada estado (excepto los estados S) se divide, por tanto, en dos estados, lo que constituye un doblete. La división del doblete es muy pequeña y no se aprecia en la escala energética de este diagrama. Los estados se designan según la notación espectroscópica usual con el superíndice 2 que precede a la letra para indicar que el estado es un doblete. Así $^2P_{3/2}$, que se lee "P doblete, tres medios", denota un estado en el cual $\ell = 1$ y

www.elsolucionario.net

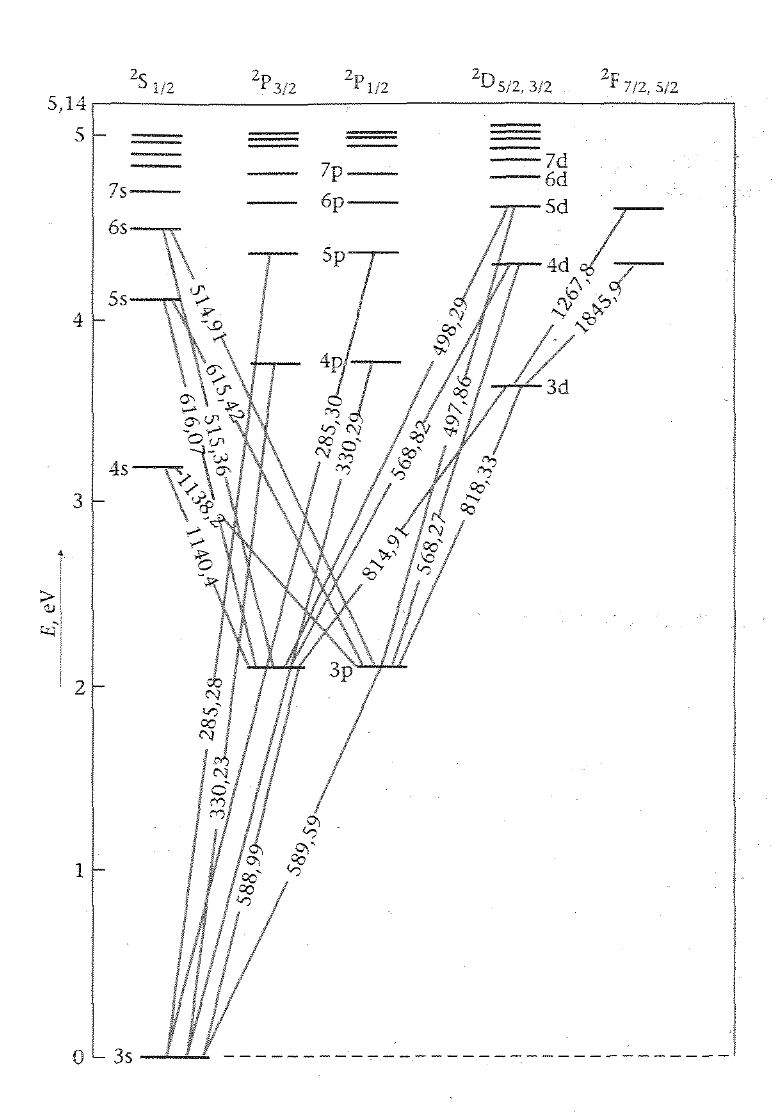


Figura 37.18 Diagrama de niveles energéticos del sodio. Las líneas diagonales muestran las transiciones ópticas observadas con las longitudes de onda expresadas en nanómetros. La energía del estado fundamental ha sido elegida como punto cero en la escala vertical izquierda.

www.elsolucionario.net

$j = 3/2$. (Los estados S se designan habitualmente como si fueran dobletes, aunque no lo sean.) En el primer estado excitado, el electrón más externo está excitado desde el nivel 3s al nivel 3p, el cual se encuentra a 2,1 eV por encima del estado fundamental. La diferencia de energía entre los estados $P_{3/2}$ y $P_{1/2}$ debidos al efecto espín–órbita es aproximadamente 0,002 eV. Las transiciones de estos estados al estado fundamental corresponden al familiar doblete amarillo del sodio:

$$3p(^2P_{1/2}) \rightarrow 3s(^2S_{1/2}), \qquad \lambda = 598{,}6 \text{ nm}$$
$$3p(^2P_{3/2}) \rightarrow 3s(^2S_{1/2}), \qquad \lambda = 589{,}0 \text{ nm}$$

Los niveles energéticos y los espectros de otros metales alcalinos son semejantes a los del sodio. El espectro óptico de los átomos como el helio, berilio y magnesio que poseen dos electrones externos es considerablemente más complejo debido a la intervención de ambos electrones.

Espectros de rayos X

Los rayos X se producen usualmente bombardeando un elemento diana o blanco con un haz de electrones de alta energía en un tubo de rayos X. El resultado (figura 37.19) es un espectro continuo que depende sólo de la energía de los electrones bombardeantes y un espectro de líneas característico del elemento diana. El espectro característico resulta de la excitación de los electrones más internos del elemento que constituye la diana bombardeada.

 www.elsolucionario.net

La energía necesaria para excitar un electrón del núcleo más interno —por ejemplo, un electrón del estado $n = 1$ (capa K)— es mucho mayor que la requerida para excitar un electrón de valencia externo. Un electrón interno no puede excitarse a cualquiera de los estados completos (por ejemplo, los estados $n = 2$ del sodio) debido al principio de exclusión. La energía requerida para excitar uno de estos electrones a un estado desocupado es típicamente del orden de varios keV. Si un electrón es extraído del estado $n = 1$ (capa K), deja una vacante en esta capa. Esta vacante puede ocuparse si un electrón de la capa L (o de una capa superior) efectúa una transición a la capa K. Los fotones emitidos por electrones que realizan estas transiciones poseen también energías del orden de keV y producen los picos agudos del espectro de rayos X como indica la figura 37.19. La línea K_α procede de transiciones de la capa $n = 2$ (L) a la capa $n = 1$ (K). La línea K_β procede de transiciones de la capa $n = 3$ a la $n = 1$. Éstas y otras líneas procedentes de transiciones que finalizan en la capa $n = 1$ constituyen la serie K del espectro característico de rayos X del elemento que forma la diana bombardeada. De igual modo, una segunda serie, la L, se produce por transiciones de estados energéticos elevados a una plaza vacante en la capa $n = 2$ (L).

Es posible utilizar la teoría de Bohr para calcular aproximadamente las frecuencias de los espectros característicos de rayos X. De acuerdo con el modelo de Bohr, la energía de un electrón aislado en un estado n viene dada por

$$E_n = -Z^2 \frac{13{,}6 \text{ eV}}{n^2}$$

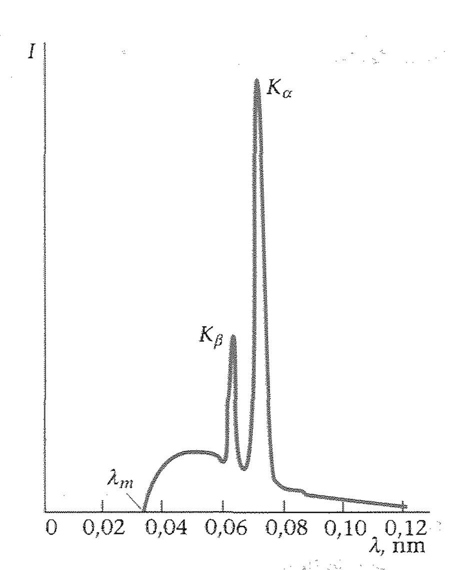


Figura 37.19 Espectro de rayos X del molibdeno. Los picos agudos designados K_α y K_β son característicos del elemento. La longitud de onda de corte λ_m es independiente del elemento diana y está relacionada con el voltaje V del tubo de rayos X por $\lambda_m = hc/eV$.

Como todo átomo excepto el hidrógeno posee dos elementos en su capa más interna, (capa K), la carga efectiva vista por uno de los electrones es menor que Ze debido al blindaje producido por el otro electrón. Suponiendo que la carga efectiva es $(Z - 1)e$, la energía de un electrón en la capa K viene dada por la ecuación anterior para $n = 1$ y reemplazando Z por $Z - 1$:

$$E_1 = -(Z-1)^2(13{,}6 \text{ eV})$$

La energía de un electrón en el estado n (suponiendo la misma carga efectiva) viene dada por

$$E_n = -(Z-1)^2 \frac{13{,}6 \text{ eV}}{n^2}$$

Cuando un electrón del estado n pasa al estado vacante de la capa $n = 1$, se emite un fotón de energía $E_n - E_1$. La longitud de onda de este fotón es

$$\lambda = \frac{hc}{E_n - E_1} = \frac{hc}{(Z-1)^2\,(13{,}6 \text{ eV})(1 - 1/n^2)} \tag{37.46}$$

En 1913 el físico inglés H. Moseley midió las longitudes de onda de los espectros característicos de unos 40 elementos. A partir de estos datos determinó con exactitud el número atómico Z de cada elemento.

www.elsolucionario.net

■ EJEMPLO 37.8

La longitud de onda de la línea K_α del espectro de rayos X de cierto elemento es $\lambda = 0{,}0721$ nm. ¿De qué elemento se trata?

Esquema del problema La línea K_α corresponde a una transición de $n = 2$ a $n = 1$. La longitud de onda está relacionada con el número atómico Z por la ecuación 37.46 con $n = 2$.

www.elsolucionario.net

1. Resolver la ecuación 37.46 para $(Z-1)^2$:

$$\lambda = \frac{hc}{(Z-1)^2\,(13{,}6\text{ eV})(1-1/n^2)}$$

$$(Z-1)^2 = \frac{hc}{\lambda(13{,}6\text{ eV})(1-1/n^2)}$$

2. Sustituir los datos conocidos y despejar Z:

$$(Z-1)^2 = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{(0{,}0721\text{ nm})(13{,}6\text{ eV})(1-1/4)} = 1686$$

$$Z-1 = \sqrt{1686} = 41{,}06$$

$$Z = 42$$

Observación Como Z es un número entero, se ha redondeado el valor entero más próximo. El elemento es molibdeno.

Resumen

1. El modelo de Bohr es históricamente importante, pues fue el primero que explicó con éxito el espectro óptico discreto de los átomos en función de la cuantización de la energía.
2. La teoría cuántica de los átomos resulta de la aplicación de la ecuación de Schrödinger a un sistema ligado formado por un núcleo de carga $+Ze$ y Z electrones de carga $-e$.
3. Para el átomo más simple, el hidrógeno, formado por un protón y un electrón, la ecuación de Schrödinger puede resolverse exactamente, obteniéndose las funciones de onda ψ que dependen de los números cuánticos n, ℓ, m y m_s.
4. La configuración electrónica de los átomos está gobernada por el principio de exclusión de Pauli, según el cual, dos electrones de un átomo no pueden tener la misma serie de valores de los números cuánticos n, ℓ, m y m_s. Mediante el principio de exclusión y las restricciones de los números cuánticos, es posible comprender básicamente la estructura de la tabla periódica.

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES		TEMA
		1. **Modelo de Bohr**
		Postulados para el átomo de hidrógeno
El electrón se mueve en una órbita circular alrededor del protón sin emitir radiación.		Órbitas estables
$f = \frac{E_i - E_f}{h}$	(37.7)	Frecuencia de radiación relacionada con los estados energéticos
$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$	(37.9)	Cuantización del momento angular
$r = n^2 \frac{\hbar^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z}$	(37.11)	Radio de las órbitas permitidas
$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} \approx 0{,}0529\text{ nm}$	(37.12)	Radio de Bohr
$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -Z^2\frac{E_0}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$	(37.15)	Niveles energéticos del átomo de H
$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{a_0} \approx 13{,}6\text{ eV}$	(37.16)	
$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_i - E_f} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{E_i - E_f}$	(37.17, 37.18)	Longitudes de onda emitidas por el átomo de H

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

2. Teoría cuántica de los átomos

El electrón está descrito por una función de onda ψ que obedece la ecuación de Schrödinger. La cuantización de la energía se debe a las condiciones de la onda estacionaria. ψ viene descrita por los números cuánticos n, ℓ, m y el número cuántico de espín, $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas

$$-\frac{h^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{h^2}{2mr^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+U(r)\psi = E\psi \qquad (37.21)$$

Las soluciones pueden expresarse como productos de las funciones de r, θ y ϕ separadamente

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)f(\theta)g(\phi) \qquad (37.22)$$

Números cuánticos

Número cuántico principal $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Número cuántico orbital $\quad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

Número cuántico magnético

$$m = -\ell, (-\ell+1), \ldots, 0, 1, 2, \ldots, \ell \qquad (37.23)$$

Momento angular orbital

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \qquad (37.24)$$

Componente z del momento angular

$$L_z = m\hbar \qquad (37.25)$$

3. Teoría cuántica del átomo de hidrógeno

Niveles energéticos (los mismos que en el modelo de Bohr)

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -Z^2\frac{E_0}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (37.27)$$

$$\text{en donde } E_0 = mk^2e^4/2\hbar^2 \approx 13{,}6\text{ eV} \qquad (37.28)$$

Longitudes de onda emitidas por el átomo de H (las mismas que en el modelo de Bohr)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_i - E_f} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{E_i - E_f} \qquad (37.17, 37.18)$$

Funciones de onda

Estado fundamental

$$\psi_{1,0,0} = C_{1,0,0}e^{-Zr/a_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-Zr/a_0} \qquad (37.31, 37.33)$$

Primer estado excitado

$$\psi_{2,0,0} = C_{2,0,0}\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0} \qquad (37.36)$$

$$\psi_{2,1,0} = C_{2,1,0}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\theta \qquad (37.37)$$

$$\psi_{2,1,\pm1} = C_{2,1,1}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad (37.38)$$

Densidades de probabilidad

Para $\ell = 0$, $|\psi|^2$ es simétricamente esférica. Para $\ell \neq 0$, $|\psi|^2$ depende del ángulo θ.

Densidad de probabilidad radial

$$P(r) = 4\pi r^2|\psi|^2 \qquad (37.34)$$

La densidad de probabilidad radial es máxima aproximadamente a las distancias correspondientes a las órbitas de Bohr.

4. Efecto espín órbita y estructura fina

El momento angular total de un electrón en un átomo es una combinación del momento orbital y el momento angular de espín. Se caracteriza por el número cuántico j, que puede ser $\ell - 1/2$ o $\ell + 1/2$. Debido a la interacción de los momentos magnéticos orbital y de espín, el estado $j = \ell - 1/2$ tiene menor energía que el estado $j = \ell + 1/2$. Este pequeño desdoblamiento de los estados energéticos da lugar a un pequeño desdoblamiento de las líneas espectrales llamado estructura fina.

5. Sistema periódico

A partir del hidrógeno, los átomos neutros sucesivos adicionan un electrón, que se dispone en el estado que ofrece la energía más baja compatible con el principio de exclusión de Pauli.

El estado de un átomo viene descrito por su configuración electrónica, que expresa los valores de n y ℓ para cada electrón. Los valores de ℓ vienen especificados por un código:

	s	p	d	f	g	h
valores de ℓ	0	1	2	3	4	5

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Dos electrones de un átomo no pueden tener la misma serie de valores de los números cuánticos n, ℓ, m y m_s.

Principio de exclusión de Pauli

6. Espectros atómicos

Los espectros atómicos incluyen espectros ópticos y espectros de rayos X. Los espectros ópticos resultan de transiciones entre los niveles energéticos de un solo electrón externo que se mueve en el campo del núcleo y los electrones más internos del átomo. Los espectros característicos de los rayos X resultan de la excitación de un electrón interno y de la subsiguiente ocupación por otro electrón del átomo.

Reglas de selección

Las transiciones entre estados energéticos con emisión de un fotón vienen gobernadas por las siguientes reglas de selección:

$$\Delta m = 0 \quad \text{o} \quad \pm 1$$
$$\Delta \ell = \pm 1 \qquad (37.29)$$

Guía de resolución de problemas

Dibujar ante todo un diagrama claro que incluya las características importantes del problema.

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Calcular las longitudes de onda de la radiación emitida	
Determinar la longitud de onda de la radiación emitida por un átomo.	Utilizar $\lambda = hc/(E_i - E_f)$, en donde $hc = 1240$ eV · nm y E_i y E_f son las energías de los estados inicial y final. **Ejemplo 37.2**
2. Momento angular	
Determinar los valores posibles de L_z, conocido ℓ.	Los valores posibles son $m\hbar$, en donde m toma valores enteros comprendidos entre $-\ell$ y $+\ell$. **Ejemplo 37.3**
Determinar el ángulo comprendido entre **L** y el eje z.	Utilizar $\cos\theta = L_z/L$, en donde $L_z = m\hbar$ y $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$. **Ejemplo 37.3**
3. Funciones de onda del átomo de hidrógeno	
Determinar la probabilidad de localizar el electrón en un intervalo Δr del átomo de hidrógeno.	Para valores pequeños de Δr, la probabilidad viene dada por $P(r)\,\Delta r = 4\pi r^2 \lvert\psi\rvert^2\,\Delta r$, en donde ψ es la función de onda apropiada. **Ejemplo 37.4**
4. Efecto órbita–espín	
Estimar el campo magnético "visto" por un electrón, conocido el desdoblamiento de estructura fina de los niveles energéticos.	Utilizar $\Delta E = 2\mu_B B$. **Ejemplo 37.5**
5. Sistema periódico	
Estimar la energía de interacción de dos electrones en un átomo.	Comparar la energía de ionización con la energía total de los electrones despreciando su interacción. **Ejemplo 37.6**
Determinar la carga nuclear "vista" por un electrón externo.	Escoger el radio de la órbita del modelo de Bohr y calcular la energía a partir de $E = -kZ'e^2/2r$ utilizando el valor de E determinado mediante la energía de ionización. **Ejemplo 37.7**
6. Espectros de rayos X	
Determinar el elemento emisor conocida la longitud de onda de una línea de la serie K.	Utilizar $\lambda = \dfrac{hc}{E_n - E_1} = \dfrac{hc}{(Z-1)^2(13{,}6\text{ eV})(1-1/n^2)}$ **Ejemplo 37.8**

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

El modelo de Bohr

• **1** Cuando n se incrementa, ¿el espaciado de los niveles de energía adyacente crece o disminuye?

• **2** La energía del estado fundamental del litio doblemente ionizado ($Z = 3$) es ________, en donde $E_0 = 13{,}6$ eV.

(a) $-9E_0$ **(b)** $-3E_0$ **(c)** $-E_0/3$ **(d)** $-E_0/9$

• **3** La condición cuántica de Bohr sobre las órbitas electrónicas requiere

(a) que el momento angular del electrón respecto al núcleo de hidrógeno sea igual a $n\hbar$.
(b) que a lo sumo un electrón ocupe un estado estacionario determinado.
(c) que los electrones giren en espiral alrededor del núcleo mientras irradian ondas electromagnéticas.
(d) que las energías de un electrón en un átomo de hidrógeno sean iguales a nE_0, en donde E_0 es una energía constante y n es un número entero.
(e) ninguna de las afirmaciones anteriores.

•• **4** Si un electrón se desplaza a una órbita mayor, ¿su energía total crece o decrece? ¿Y su energía cinética, crece o decrece?

•• **5** La energía cinética del electrón en el estado fundamental del hidrógeno es 13,6 eV = E_0. La energía cinética del electrón en el estado $n = 2$ es ________.

(a) $4E_0$ **(b)** $2E_0$ **(c)** $E_0/2$ **(d)** $E_0/4$

• **6** El radio de la órbita $n = 1$ en el átomo de hidrógeno es $a_0 =$ 0,053 nm. ¿Cuál es el radio de la órbita $n = 5$?

(a) $5a_0$ **(b)** $25a_0$ **(c)** a_0
(d) $1/5a_0$ **(e)** $1/25a_0$

• **7** Utilizar los valores conocidos de las constantes de la ecuación 37.11 para demostrar que a_0 vale aproximadamente 0,0529 nm.

• **8** La longitud de onda más larga de la serie de Lyman fue calculada en el ejemplo 37.2. Determinar las longitudes de onda para las transiciones

(a) $n_1 = 3$ a $n_2 = 1$ y **(b)** $n_1 = 4$ a $n_2 = 1$.

• **9** Determinar la energía del fotón para las tres longitudes de onda más largas de la serie de Balmer y calcular las longitudes de onda.

• **10**

(a) Determinar la energía del fotón y la longitud de onda correspondiente al límite de la serie (longitud de onda más corta) de la serie de Paschen ($n_2 = 3$).
(b) Calcular las 3 longitudes de onda más cortas de esta serie e indicar sus posiciones en una escala lineal horizontal.

• **11** Repetir el problema 10 para la serie de Brackett ($n_2 = 4$).

• **12** Un átomo de hidrógeno se encuentra en su décimo estado excitado de acuerdo con el modelo de Bohr ($n = 11$).

(a) ¿Cuál es el radio de la órbita de Bohr?
(b) ¿Cuál es el momento angular del electrón?
(c) ¿Cuál es la energía cinética del electrón?
(d) ¿Cuál es la energía potencial del electrón?
(e) ¿Cuál es la energía total del electrón?

•• **13** La energía de enlace de un electrón es la energía mínima requerida para extraer el electrón de su estado fundamental y llevarle a una gran distancia del núcleo.

(a) ¿Cuál es la energía de enlace del átomo de hidrógeno?
(b) ¿Cuál es la energía de enlace del He^+?
(c) ¿Cuál es la energía de enlace del Li^{2+}? (El helio ionizado (He^+) y el litio doblemente ionizado (Li^{2+}) son "hidrogenoides", ya que su sistema está formado por un núcleo positivamente cargado y un solo electrón ligado.)

•• **14** El electrón de un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $n = 2$. Este electrón realiza una transición al estado fundamental.

(a) ¿Cuál es la energía del fotón de acuerdo con el modelo de Bohr?
(b) El momento lineal del fotón emitido está relacionado con su energía por la expresión $p = E/c$. Considerando la conservación del momento lineal, ¿cuál es la velocidad de retroceso del átomo?
(c) Determinar la energía cinética del retroceso del átomo en electrón-voltios. ¿En qué porcentaje debe corregirse la energía del fotón calculado en la parte (a) para explicar esta energía de retroceso?

•• **15** Demostrar que la velocidad de un electrón en la órbita n-ésima viene dada por $v_n = e^2/2\epsilon_0 hn$.

•• **16** En este problema debe estimarse el radio y la energía del estado estacionario más bajo del átomo de hidrógeno mediante el principio de incertidumbre. La energía total del electrón de momento lineal p y masa m a una distancia r del protón en el átomo de hidrógeno viene dada por $E = p^2/2m - ke^2/r$, en donde k es la constante de Coulomb. Supongamos que el valor mínimo de p^2 es $p^2 \approx (\Delta p)^2 = \hbar^2/r^2$, en donde Δp es el valor de la incertidumbre en p y tomamos $\Delta r \sim r$ para el orden de magnitud de la incertidumbre en la posición; la energía es, por tanto, $E = \hbar^2/2mr^2 - ke^2/r$. Determinar el radio r_m para el cual esta energía es un mínimo y calcular el valor mínimo de E en electrón-voltios.

•• **17** En un sistema de referencia cuyo origen se encuentra en el centro de masas de un electrón y el núcleo de un átomo, el electrón y el núcleo poseen cantidades de movimiento iguales y opuestas de magnitud p.

(a) Demostrar que la energía cinética total del electrón y el núcleo pueden escribirse en la forma $K = p^2/2m_r$, en donde $m_r = m_e M/(M + m_e)$ se llama masa reducida, m_e es la masa del electrón y M la masa del núcleo. Puede demostrarse que el movimiento del núcleo es explicable reemplazando la masa del electrón por la masa reducida. En general, la masa reducida en un problema de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 viene dada por

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (37.47)$$

(b) Utilizar la ecuación 37.14 reemplazando m por m_r para calcular la constante de Rydberg para el hidrógeno ($M = m_p$) y para un núcleo muy masivo ($M = \infty$).
(c) Determinar el porcentaje de corrección para la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno debido al movimiento del protón.

www.elsolucionario.net

Números cuánticos en coordenadas esféricas

• **18** Para el número cuántico principal $n = 4$, ¿cuántos valores distintos puede tener el número cuántico orbital ℓ?
(a) 4 (b) 3 (c) 7 (d) 16 (e) 6

• **19** Para el número cuántico principal $n = 4$, ¿cuántos valores distintos puede tener el número cuántico magnético m?
(a) 4 (b) 3 (c) 7 (d) 16 (e) 6

• **20** Para $\ell = 1$, determinar
(a) la magnitud del momento angular L y
(b) los valores posibles de m.
(c) Dibujar a escala un diagrama vectorial que muestre las orientaciones posibles de **L** con el eje z.

• **21** Resolver el problema 20 para $\ell = 3$.

• **22** Un disco compacto posee un momento de inercia de $2{,}3 \times 10^{-5}$ kg·m^2.
(a) Determinar su momento angular L cuando gira a 500 rev/min.
(b) Determinar el valor aproximado del número cuántico ℓ para este momento angular.

• **23** Si $n = 3$,
(a) ¿cuáles son los valores posibles de ℓ?
(b) Relacionar los valores posibles de m para cada valor de ℓ en (a).
(c) Teniendo en cuenta que existen dos estados cuánticos por cada valor de ℓ y m (a causa del espín electrónico), determinar el número de estados electrónicos con $n = 3$.

• **24** Determinar el número total de estados electrónicos con
(a) $n = 2$ y (b) $n = 4$. (Véase problema 23.)

• **25** Determinar el valor mínimo del ángulo θ que forman **L** y el eje z para
(a) $\ell = 1$, (b) $\ell = 4$ y (c) $\ell = 50$.

26 ¿Cuáles son los valores posibles de n y m si
(a) $\ell = 3$, (b) $\ell = 4$ y (c) $\ell = 0$?

27 ¿Cuáles son los valores posibles de n y ℓ si
(a) $m = 0$, (b) $m = -1$ y (c) $m = 2$?

Teoría cuántica del átomo de hidrógeno

• **28** Para el estado fundamental del átomo de hidrógeno, determinar los valores de
(a) ψ, (b) ψ^2 y
(c) la densidad de probabilidad radial $P(r)$ para $r = a_0$.
Dar las respuestas en función de a_0.

• **29**
(a) Si no se incluye el espín, ¿cuántas funciones de onda distintas existen correspondientes al primer nivel energético excitado $n = 2$ para el hidrógeno?
(b) Hacer una relación de estas funciones con los números cuánticos de cada estado.

• **30** Para el estado fundamental del átomo de hidrógeno, calcular la probabilidad de localizar el electrón en el intervalo $\Delta r = 0{,}03a_0$ en
(a) $r = a_0$ y (b) $r = 2a_0$.

• **31** El valor de la constante $C_{2,0,0}$ en la ecuación 37.36 es

$$C_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$$

Determinar los valores de
(a) ψ, (b) ψ^2 y
(c) la densidad de probabilidad radial $P(r)$ para $r = a_0$ en el estado $n = 2$, $\ell = 0$, $m = 0$ en el hidrógeno.
Dar las respuestas en función de a_0.

•• **32** Demostrar que la densidad de probabilidad radial del estado $n = 2$, $\ell = 1$, $m = 0$ de un átomo de un solo electrón puede escribirse en la forma $P(r) = A\cos^2\theta r^4 e^{-Zr/a_0}$, en donde A es una constante.

•• **33** Calcular la probabilidad de localizar el electrón en el intervalo $\Delta r = 0{,}02a_0$, en
(a) $r = a_0$ y
(b) $r = 2a_0$ para el estado $n = 2$, $\ell = 0$, $m = 0$ en el hidrógeno. (Véase problema 31 para el valor de $C_{2,0,0}$.)

•• **34** La función de distribución de probabilidad radial para un átomo con un electrón en su estado fundamental puede escribirse en la forma $P(r) = Cr^2e^{-2Zr/a_0}$, en donde C es una constante. Demostrar que $P(r)$ tiene su valor máximo en $r = a_0/Z$.

•• **35** Determinar el valor esperado de r, $\langle r\rangle = \int_0^\infty rP(r)\,dr$ para el hidrógeno en su estado fundamental.

••• **36** Demostrar que el número de estados en el átomo de hidrógeno para un valor determinado de n es $2n^2$.

••• **37** Calcular la probabilidad de que el electrón en el estado fundamental de un átomo de hidrógeno se encuentre en la región $0 < r < a_0$.

El efecto espín-órbita

• **38** La energía potencial del momento magnético de un campo magnético externo viene dada por $U = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}$.
(a) Calcular las diferencias de energía que existe entre las dos posibles orientaciones de un electrón en un campo magnético $\mathbf{B} = 0{,}600$ T **k**.
(b) Si estos electrones se bombardean con fotones de energía igual a esta diferencia de energía, pueden inducirse transiciones de "espín flip". Determinar la longitud de onda de los fotones necesarios para tales transiciones. Este fenómeno se denomina *resonancia del espín electrónico.*

• **39** El momento angular total de un átomo de hidrógeno en cierto estado excitado tiene el número cuántico $j = \frac{1}{2}$. ¿Qué puede decirse respecto al número cuántico de momento angular orbital ℓ?

• **40** El momento angular total de un átomo de hidrógeno en cierto estado excitado tiene el número cuántico $j = 1\frac{1}{2}$. ¿Qué puede decirse respecto al número cuántico de momento angular orbital ℓ?

• **41** Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $n = 3$, $\ell = 2$. ¿Cuáles son los valores posibles de j?

El sistema periódico

• **42** El estado p de una configuración electrónica corresponde a
(a) $n = 2$. (b) $\ell = 2$. (c) $\ell = 1$.
(d) $n = 0$. (e) $\ell = 0$.

•• **43** ¿Por qué la energía del estado 3s es considerablemente inferior que la del estado 3p para el sodio, mientras que en el hidrógeno estos estados poseen esencialmente la misma energía.

•• **44** Analizar la evidencia de la necesidad de un cuarto número cuántico mediante el sistema periódico. ¿Cómo se modificarían las propiedades del He si existieran *sólo* tres números cuánticos, n, ℓ y m?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• **45** Las propiedades del hierro ($Z = 26$) y cobalto ($Z = 27$), que tienen números cuánticos adyacentes, son semejantes, mientras que el neón ($Z = 10$) y el sodio ($Z = 11$) que también son adyacentes, poseen propiedades muy distintas. Explicar por qué.

•• **46** Clasificar los siguientes seis elementos —potasio, calcio, titanio, cromo, manganeso y cobre— en dos grupos de tres cada uno, de acuerdo con sus propiedades semejantes.

• **47** ¿Qué elemento posee la configuración electrónica
(a) $1s^22s^22p^63s^23p^2$ y (b) $1s^22s^22p^63s^23p^64s^2$?

• **48** El número total de estados cuánticos del hidrógeno con número cuántico $n = 4$ es
(a) 4 (b) 16 (c) 32 (d) 36

• **49** De los ocho electrones del oxígeno, ¿cuántos se encuentran en el estado p?
(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

• **50** Escribir la configuración electrónica del
(a) carbono y (b) oxígeno.

• **51** Escribir la configuración electrónica del
(a) aluminio y (b) cromo.

• **52** Expresar los valores posibles del componente z del momento angular orbital de
(a) un electrón d y (b) un electrón *f*.

•• **53** Si el electrón externo del sodio se desplaza a la órbita de Bohr $n = 3$, la carga nuclear efectiva será $Z'e = 1e$ y la energía del electrón $-13{,}6\ \text{eV}/3^2 = -1{,}51$ eV. Sin embargo, la energía de ionización del sodio es 5,14 eV y no 1,51 eV. Utilizar este hecho y la ecuación 37.45 para calcular la carga efectiva nuclear Z' "vista" por el electrón más externo del sodio. Suponer que $r = 9a_0$ para el electrón más externo.

Espectros ópticos y espectros de rayos X

• **54** Los espectros ópticos de átomos con dos electrones en la misma capa externa son semejantes, pero son muy distintos de los espectros de átomos que sólo poseen un electrón externo, debido a la interacción entre ambos electrones. Separar los elementos siguientes en dos grupos de modo que los de cada grupo tengan espectros semejantes: litio, berilio, sodio, magnesio, potasio, calcio, cromo, níquel, cesio, bario.

• **55** Especificar las posibles configuraciones electrónicas del primer estado excitado del
(a) hidrógeno, (b) sodio y (c) helio.

• **56** Indicar cuáles de los siguientes elementos deben tener espectros atómicos semejantes al hidrógeno y cuáles deben ser semejantes al helio: Li, Ca, Ti, Rb, Hg, Ag, Cd, Ba, Fr, Ra.

• **57**
(a) Calcular las dos siguientes longitudes de onda de la serie K, después de la K_α, del molibdeno.
(b) ¿Cuál es la longitud de onda más corta de esta serie?

• **58** La longitud de onda de la línea K_α para un cierto elemento es 0,3368 nm. ¿Cuál es el elemento?

• **59** La longitud de onda de la línea K_α de cierto elemento es 0,0794 nm. ¿Cuál es el elemento?

• **60** ¿Cuál es la longitud de onda de la línea K_α del rodio?

• **61** Calcular la longitud de onda de la línea K_α del
(a) magnesio ($Z = 12$) y (b) cobre ($Z = 29$).

Problemas grandes

• **62** Para el número cuántico principal $n = 3$, ¿cuáles son los valores posibles de los números cuánticos ℓ y m?

• **63** Un electrón de la capa L significa que
(a) $\ell = 0$. (b) $\ell = 1$. (c) $n = 1$. (d) $n = 2$. (e) $m = 2$.
(f) ninguno de los anteriores es cierto.

•• **64** La teoría de Bohr y la teoría de Schrödinger del átomo de hidrógeno dan los mismos resultados para los niveles energéticos. Analizar las ventajas y desventajas de cada modelo.

•• **65** En la figura 37.17 aparecen pequeñas depresiones de la energía de ionización en $Z = 31$ (galio) y $Z = 49$ (indio) que no están señalizados. Explicar las razones de estas depresiones mediante las configuraciones electrónicas de estos átomos que se dan en la tabla 37.1.

• **66** ¿Cuál es la energía del fotón de longitud de onda más corta emitido por el átomo de hidrógeno?

• **67** La longitud de onda de una línea espectral del hidrógeno es 97,254 nm. Identificar la transición que da lugar a esta línea.

• **68** La longitud de onda de una línea espectral del hidrógeno es 1093,8 nm. Identificar la transición que da lugar a esta línea.

• **69** Las líneas espectrales de las siguientes longitudes de onda están emitidas por helio ionizado con una sola carga: 164 nm, 230,6 nm y 541 nm. Identificar las transiciones que dan lugar a estas líneas espectrales.

•• **70** Con frecuencia hemos de determinar la magnitud ke^2/r en electrón-voltios cuando r se expresa en nanómetros. Demostrar que $ke^2 = 1{,}44$ eV·nm.

•• **71** Las longitudes de onda de los fotones emitidos por el potasio correspondientes a transiciones desde los estados $4P_{3/2}$ y $4P_{1/2}$ al estado fundamental son 766,41 y 769,90 nm.
(a) Calcular las energías de estos fotones en electrón-voltios.
(b) La diferencia en las energías de estos fotones es igual a la diferencia energética ΔE entre los estados $4P_{3/2}$ y $4P_{1/2}$ del potasio. Calcular ΔE.
(c) Estimar el campo magnético que experimenta el electrón 4p del potasio.

•• **72** Para observar las líneas características K del espectro de rayos X, uno de los electrones $n = 1$ debe ser expulsado del átomo. Esto se cumple generalmente bombardeando el material diana con electrones de energía suficiente. ¿Cuál es la energía mínima requerida para observar las líneas K del
(a) tungsteno, (b) molibdeno y (c) cobre?

•• **73** La combinación de las constantes físicas $\alpha = e^2k/\hbar c$, en donde k es la constante de Coulomb, se denomina *constante de estructura fina*. Aparece en numerosas expresiones de física atómica.
(a) Demostrar que α es un número adimensional.
(b) Demostrar que en modelo del hidrógeno de Bohr, $v_n = c\alpha/n$, en donde v_n es la velocidad del electrón en el estado estacionario de número cuántico n.

•• **74** El *positrón* es una partícula idéntica al electrón, excepto que posee una carga positiva *e*. El *positronio* es el estado ligado de un electrón y un positrón.
(a) Calcular las energías de los cinco estados energéticos más bajos del positronio utilizando la masa reducida dada por la ecuación 37.47 en el problema 17.
(b) Las transiciones entre cualesquiera de los niveles deducidos en (*a*), ¿corresponden al intervalo visible de las longitudes de onda? Si es así, ¿de qué transiciones se trata?

www.elsolucionario.net

•• **75** El deuterón o núcleo del deuterio ("hidrógeno pesado") fue reconocido por vez primera en el espectro del hidrógeno. El deuterón tiene una masa doble que la del protón.

(a) Calcular la constante de Rydberg para el hidrógeno y para el deuterio utilizando la masa reducida dada por la ecuación 37.47 del problema 17.

(b) Mediante el resultado obtenido en (a), calcular la diferencia de longitud de onda entre las líneas de Balmer de mayor longitud de onda del hidrógeno y el deuterio.

•• **76** Se llama *muonio* al átomo de hidrógeno en donde el electrón se ha sustituido por una partícula μ^-. El muón μ^- es i idéntico al electrón pero su masa es 207 veces mayor.

(a) Calcular las energías de los cinco niveles energéticos del muonio utilizando la masa reducida dada por la ecuación 37.47 del problema 17.

(b) Las transiciones entre cualesquiera de los niveles deducidos en (*a*), ¿corresponden al intervalo visible de longitudes de onda, es decir, entre $\lambda = 700$ nm y 400 nm? Si es así, ¿de qué transiciones se trata?

•• **77** El tritón, núcleo formado por un protón y dos neutrones, es inestable con un período de semidesintegración bastante largo, aproximadamente 12 años. El *tritio* es el estado ligado de un electrón y un tritón.

(a) Calcular la constante de Rydberg del tritio a partir de la masa reducida dada por la ecuación 37.47 en el problema 17.

(b) Utilizar el resultado obtenido en (a) y en la parte (a) del problema 75 para determinar la diferencia de longitud de onda que existe entre las longitudes de onda de las líneas de Balmer del tritio y el deuterio y entre el tritio y el hidrógeno.

••• **78** Supongamos que la interacción entre un electrón y un protón es del tipo $F = -Kr$, siendo K una constante, en lugar de $1/r^2$. Si las órbitas del estado estacionario están limitadas de nuevo por la condición del momento angular $L = n\hbar$, ¿cuáles son los radios de estas órbitas? Demostrar que en este caso, las energías totales de los estados estacionarios vienen dadas por $E = n\hbar\,\omega$, en donde ω es la frecuencia angular del electrón respecto al protón.

••• **79** La frecuencia de revolución de un electrón en una órbita circular de radio r es $f_{rev} = v/2\pi r$, en donde v es la velocidad lineal.

(a) Demostrar que en el estado estacionario n-ésimo

$$f_{rev} = \frac{k^2 Z^2 e^4 m}{2\pi h^3}\,\frac{1}{n^3}$$

(b) Demostrar que cuando $n_1 = n$, $n_2 = n - 1$, y n es mucho mayor que 1,

$$\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \approx \frac{2}{n^3}$$

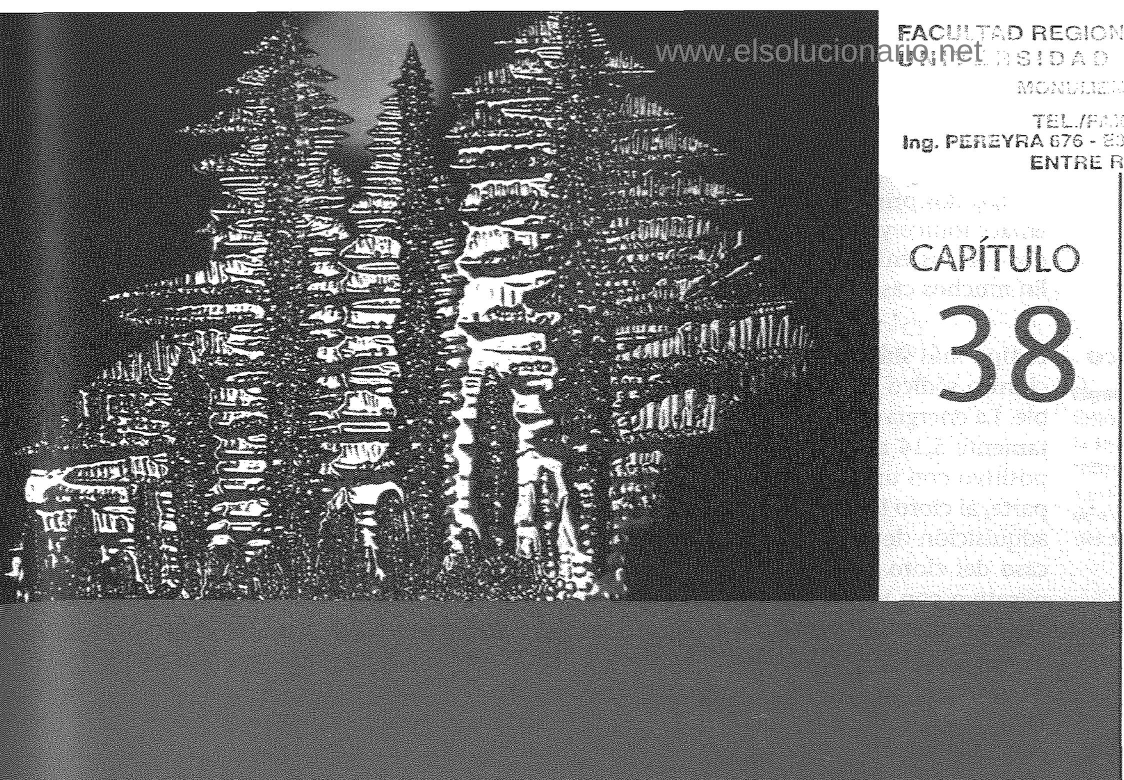
(c) Utilizar el resultado de la parte (b) y la ecuación 37.13 para demostrar que en este caso la frecuencia de radiación emitida es igual a la frecuencia del movimiento. Este resultado es un ejemplo del principio de correspondencia de Bohr: Cuando n es grande, de tal modo que la diferencia de energía entre los estados adyacentes es una pequeña fracción de la energía total, la física clásica y la física cuántica deben dar los mismos resultados.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net



CAPÍTULO 38

Moléculas y sólidos

El estaño fundido solidifica en un diagrama de cristales arborescentes llamados dendritas cuando se enfría en condiciones controladas.

www.elsolucionario.net

La mayor parte de los átomos se unen entre sí para formar moléculas o sólidos. Las moléculas pueden existir en forma de entidades separadas como en los gases O_2 o N_2, o también pueden unirse para formar sustancias líquidas o sólidas. Una molécula es el constituyente más pequeño de una sustancia que retiene sus propiedades químicas.

En este capítulo utilizaremos nuestros conocimientos sobre mecánica cuántica para analizar el enlace molecular, los niveles energéticos y los espectros de las moléculas diatómicas, la estructura de los sólidos y los dispositivos semiconductores de estado sólido. La mayor parte de nuestra exposición será cualitativa, pues como en la física atómica, los cálculos mecánico-cuánticos son muy difíciles. Antes de estudiar los dispositivos semiconductores es conveniente revisar la materia del capítulo 27 relacionada con la teoría microscópica de la conducción eléctrica.

Enlace molecular 38.1

Existen dos puntos de vista extremos que podemos considerar respecto a una molécula. Sea, por ejemplo, el H_2. Podemos pensar que se trata de dos átomos de H unidos entre sí o que es un sistema mecánico-cuántico de dos protones y dos electrones. La segunda hipótesis es más fructífera en este caso, pues ninguno de los electrones de la molécula de H_2 puede identificarse como perteneciente a uno u otro protón. En su lugar, la función de onda de cada electrón está dispersa en el espacio a través de toda la molécula. Sin embargo, para moléculas más complejas es útil una imagen intermedia. Por ejemplo, la molécula de nitrógeno N_2 está formada por 14 protones y 14 electrones, pero sólo dos de los electrones toman parte en el enlace. Por tanto, esta molécula puede considerarse como dos iones N^+ y dos electrones que pertenecen a la molécula como un conjunto. Las funciones de onda moleculares para estos electrones de enlace se denominan **orbitales moleculares**. En muchos casos estas funciones de onda moleculares pueden construirse a partir de combinaciones de las funciones de onda atómicas con las cuales estamos familiarizados.

 www.elsolucionario.net

Los dos principales tipos de onda responsables de la formación de moléculas son el enlace iónico y el enlace covalente. Otros tipos de enlace importantes en líquidos y sólidos son los enlaces de van der Waals, los enlaces metálicos y los enlaces de hidrógeno. En muchos casos, el enlace es una mezcla de estos mecanismos.

Enlace iónico

El tipo más simple de enlace es el **enlace iónico**, el cual se encuentra en sales como el cloruro sódico (NaCl). El átomo de sodio posee un electrón 3s fuera de un núcleo estable. La energía necesaria para extraer este electrón, llamada energía de ionización es justamente 5,14 eV (véase figura 37.15). La extracción de este electrón da lugar a un ion positivo con un núcleo electrónico de capas cerradas, simétricamente esférico. Por otra parte, al cloro le falta un electrón para tener una capa completa. La energía liberada en la adquisición de un electrón por un átomo se denomina **afinidad electrónica**, que en el caso del cloro es 3,62 eV. La adquisición de un electrón por el cloro produce un ion negativo con un núcleo electrónico de capas cerradas, simétricamente esférico. Así, la formación de un ion Na^+ y un ion Cl^- por donación de un electrón del sodio al cloro requiere sólo 5,14 eV-3,62 eV = 1,52 eV a separación infinita. La energía potencial electrostática de los dos iones separados una distancia r es $-ke^2/r$. Cuando la separación de los iones es menor que unos 0,95 nm, la energía potencial negativa de atracción es de magnitud superior a los 1,52 eV necesarios para crear los iones. Por tanto, a distancias de separación inferiores a 0,95 nm es energéticamente favorable (es decir, la energía total del sistema se reduce) para el átomo de sodio el hecho de ceder un electrón al átomo de cloro y formar NaCl.

Como la atracción electrostática se incrementa cuando los iones se aproximan, podíamos pensar que el equilibrio es imposible. Sin embargo, cuando la separación entre los iones es muy pequeña, se produce una fuerte repulsión de naturaleza mecánico-cuántica que está relacionada con el **principio de exclusión**. Este principio es responsable de la repulsión de los átomos en todas las moléculas (excepto el H_2)[1] en cualquier mecanismo de enlace. Cualitativamente se puede entender del modo siguiente. Cuando los iones están muy separados, la función de onda de un electrón cortical de uno de los iones no se solapa con la de cualquier electrón del otro ion. En esas condiciones es posible distinguir los electrones por el ion al que pertenecen. Esto significa que los electrones en los dos iones pueden tener los mismos números cuánticos porque ocupan regiones distintas del espacio. Sin embargo, cuando la distancia entre los iones decrece, las funciones de onda de los electrones corticales comienzan a solaparse; es decir, los electrones de ambos iones comienzan a ocupar la misma región del espacio. Debido al principio de exclusión, algunos de estos electrones deben pasar a estados cuánticos de energía superior.[2] Sin embargo, para desplazar los electrones a estados de mayor energía cuántica se requiere energía. Este incremento de energía cuando los iones son impulsados a reunirse es equivalente a una repulsión de los mismos. No es un proceso súbito. Los estados energéticos de los electrones cambian gradualmente cuando los iones se aproximan entre sí. En la figura 38.1 puede verse un esquema de la energía potencial de los iones Na^+ y Cl^- en función de su separación. La energía es mínima para una separación de equilibrio de unos 0,236 nm. A separaciones menores, la energía crece rápidamente como consecuencia del principio de exclusión. La energía necesaria para separar los iones y formar átomos de cloro y sodio neutros se denomina **energía de disociación**, la cual es aproximadamente 4,27 eV para el NaCl.

La distancia de separación de equilibrio, 0,236 nm, corresponde al NaCl diatómico gaseoso, el cual puede obtenerse evaporando NaCl sólido. Normalmente, el NaCl se presenta según una estructura cristalina cúbica, con los iones Na^+ y Cl^- en los vértices alternos de un cubo. La separación de los iones en el cristal es algo mayor, aproximadamente 0,28 nm. Debido a la presencia de iones vecinos de carga opuesta, la energía electrostática por par de iones es algo menor cuando los iones forman parte de un cristal.

[1] En el H_2, la repulsión es simplemente la de los dos protones cargados positivamente.

[2] Como vimos en el capítulo 36, el principio de exclusión está relacionado con el hecho de que la función de onda para dos electrones idénticos es antisimétrica respecto al intercambio de los electrones y que una función de onda antisimétrica para dos electrones con los mismos números cuánticos es cero si las coordenadas espaciales de los electrones son las mismas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

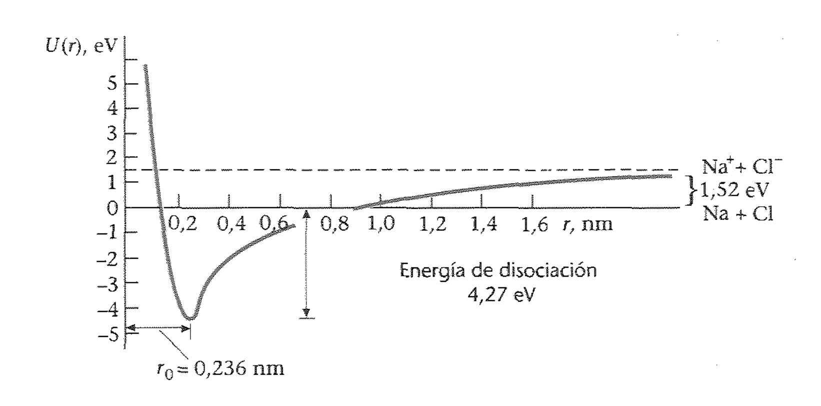


Figura 38.1 Energía potencial de los iones Na^+ y Cl^- en función de la distancia de separación r. La energía cuando la separación es infinita se eligió a 1,52 eV, que es la correspondiente a la energía necesaria para formar los iones a partir de átomos neutros. La energía mínima corresponde a la separación de equilibrio $r_0 = 0{,}236$ nm para los iones de la molécula.

EJEMPLO 38.1

La afinidad electrónica del flúor es 3,40 eV y la separación de equilibrio del fluoruro sódico (NaF) es 0,193 nm. (a) ¿Cuánta energía se necesita para formar iones Na^+ y F^- a partir de los átomos neutros sodio y flúor? (b) ¿Cuál es la energía potencial electrostática de los iones Na^+ y F^- en su separación de equilibrio? (c) La energía de disociación del NaF es 5,38 eV. ¿Cuál es la energía debida a la repulsión de los iones en la separación de equilibrio?

Esquema del problema (a) La energía ΔE necesaria para formar iones Na^+ y F^- a partir de los átomos neutros sodio y flúor es la diferencia entre la energía de ionización del sodio (5,14 eV) y la afinidad electrónica del flúor. (b) La energía potencial electrostática con $U = 0$ en el infinito es $U_e = -ke^2/r$. (c) Si llamamos ΔE a la energía potencial en el infinito, la energía potencial total será $U_{tot} = U_e + \Delta E + U_{rep}$, en donde U_{rep} es la energía de repulsión que se obtiene igualando la energía de disociación con la energía potencial total cambiada de signo.

(a) Calcular la energía necesaria para formar iones Na^+ y F^- a partir de los átomos neutros de sodio y fluor:

$$\Delta E = 5{,}14\text{ eV} - 3{,}40\text{ eV} = 1{,}74\text{ eV}$$

(b) 1. Calcular la energía potencial electrostática en la separación de equilibrio, $r = 0{,}193$ nm:

$$U_e = -\frac{ke^2}{r} = -\frac{(8{,}99\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60\times10^{-19}\text{ C})^2}{1{,}93\times10^{-10}\text{ m}}$$
$$= -1{,}19\times10^{-18}\text{ J}$$

2. Convertir los julios en electrón-voltios:

$$U_e = -1{,}19\times10^{-18}\text{ J}\;\frac{1\text{ eV}}{1{,}60\times10^{-19}\text{ J}} = -7{,}45\text{ eV}$$

(c) 1. La energía de disociación es igual al valor negativo de la energía potencial total:

$$E_d = -U_{tot} = -(U_e + \Delta E + U_{rep})$$
$$= -(-7{,}45\text{ eV} + 1{,}74\text{ eV} + U_{rep}) = 5{,}38\text{ eV}$$

2. Despejar U_{rep}:

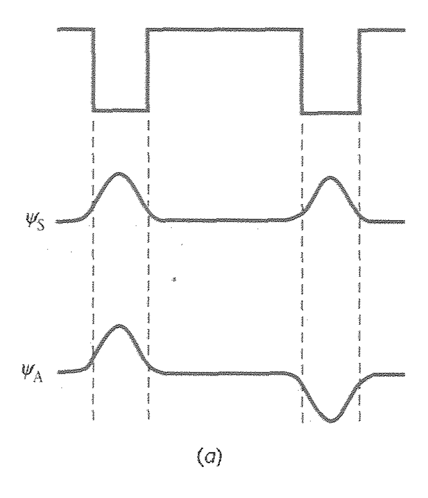
$$U_{rep} = 7{,}45\text{ eV} - 1{,}74\text{ eV} - 5{,}38\text{ eV} = 0{,}33\text{ eV}$$

Enlace covalente

Un mecanismo completamente distinto, el **enlace covalente** es el responsable del enlace de átomos idénticos o semejantes para formar moléculas como el hidrógeno (H_2), el nitrógeno (N_2) y el monóxido de carbono (CO) al estado gaseoso. Si calculamos la energía necesaria para formar iones H^+ y H^- por transferencia de un electrón de un átomo a otro y después sumamos esta energía a la energía potencial electrostática, resulta que no hay una distancia de separación para la cual la energía total sea negativa. Por tanto, el enlace no puede ser iónico. En su lugar, la atracción de los dos átomos de hidrógeno es un efecto totalmente mecánico-cuántico. La disminución de energía al aproximarse los dos átomos de energía entre sí es debida a la compartición de los dos

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



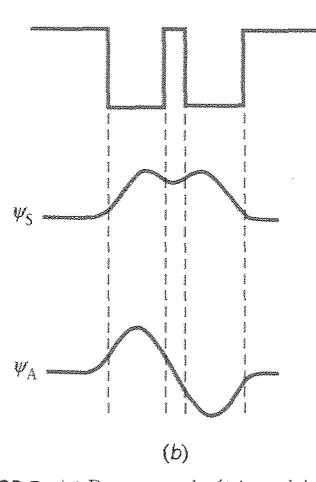


Figura 38.2 (*a*) Dos pozos simétricos alejados. La función de onda electrónica puede ser simétrica (ψ_S) o antisimétrica (ψ_A) en el espacio. Las distribuciones de probabilidad y las energías son iguales para las dos funciones de onda cuando los pozos están alejados entre sí. (*b*) Dos pozos rectangulares próximos. Entre los pozos la función de onda espacial simétrica es mayor que la correspondiente antisimétrica.

electrones por ambos átomos. Este proceso está íntimamente asociado a las propiedades simétricas de las funciones de onda de los electrones.

Podemos hacernos una idea del enlace covalente considerando un problema simple de mecánica cuántica monodimensional formado por dos pozos rectangulares finitos. Consideremos en primer lugar un solo electrón que posee la misma probabilidad de estar en uno cualquiera de los dos pozos. Como los pozos son idénticos, la distribución de probabilidad, que es proporcional a $|\psi^2|$, debe ser simétrica respecto al punto medio entre los pozos. Por tanto, ψ debe ser simétrica o antisimétrica respecto a los dos pozos. Las dos posibilidades correspondientes al estado fundamental se indican en la figura 38.2*a* para el caso en que los pozos estén alejados uno del otro y en la figura 38.2*b* para el caso en que los pozos se encuentren próximos entre sí. Una característica importante de la figura 38.2*b* es que en la región comprendida entre los pozos, la función de onda simétrica es grande y la antisimétrica es pequeña.

Consideremos ahora la adición de un segundo electrón a los dos pozos. En el capítulo 36 vimos que las funciones de onda para las partículas que obedecen el principio de exclusión son antisimétricas respecto al intercambio de las partículas. Así, la función de onda total para los dos electrones debe ser antisimétrica respecto al intercambio de los electrones. Obsérvese que en este caso, el intercambio de los electrones en los pozos es lo mismo que el intercambio de los pozos. La función de onda total de los dos electrones puede escribirse como el producto de un factor espacial y un factor de espín. Por tanto, una función de onda antisimétrica puede ser el producto de un factor espacial simétrico y un factor de espín antisimétrico o bien, de un factor de espín simétrico y un factor espacial antisimétrico.

Para comprender la simetría de la función de onda total, debemos entender, por tanto, la simetría del factor de espín de la función de onda. El espín de un solo electrón puede tener dos valores posibles de su número cuántico m_s: $m_s = +\frac{1}{2}$, hacia arriba y $m_s = -\frac{1}{2}$, hacia abajo. Utilizaremos flechas para designar la función de onda de espín de un solo electrón: $\uparrow_1$ o $\uparrow_2$ para el electrón 1 o el electrón 2 con espín arriba y $\downarrow_1$ o $\downarrow_2$ para el electrón 1 o el electrón 2 con espín abajo. El número cuántico de espín total para los dos electrones puede ser $S = 1$, con $m_S = +1$, 0, o -1, o $S = 0$, con $m_S = 0$. Utilizaremos $\phi_{S,\,m_S}$ para denotar la función de onda de espín de los dos electrones. El estado de espín $\phi_{1,+1}$, corresponde a $S = 1$ y $m_S = +1$ y puede escribirse en la forma

$$\phi_{1,+1} = \uparrow_1\uparrow_2 \qquad S = 1, m_S = +1 \tag{38.1}$$

De igual modo, el estado de espín para $S = 1$, $m_S = -1$ es

$$\phi_{1,-1} = \downarrow_1\downarrow_2 \qquad S = 1, m_S = -1 \tag{38.2}$$

Obsérvese que ambos estados son simétricos respecto al intercambio de los electrones. El estado de espín correspondiente a $S = 1$ y $m_S = 0$ no es tan obvio. Resulta ser proporcional a

$$\phi_{1,0} = \uparrow_1\downarrow_2 + \uparrow_2\downarrow_1, \qquad S = 1, m_S = 0 \tag{38.3}$$

Este estado de espín es también simétrico respecto al intercambio de los electrones. El estado de espín para dos electrones con espines antiparalelos ($S = 0$) es

$$\phi_{0,0} = \uparrow_1\downarrow_2 - \uparrow_2\downarrow_1, \qquad S = 0, m_S = 0 \tag{38.4}$$

Este estado de espín es antisimétrico respecto al intercambio de electrones.

Llegamos así al importante resultado de que el factor de *espín* de la función de onda es simétrico para los espines paralelos ($S = 1$) y antisimétrico para los espines antiparalelos ($S = 0$). Como la función de onda total es el producto de las funciones espacial y de espín, resulta:

Para que la función de onda total de los dos electrones sea antisimétrica, el factor espacial de la función de onda debe ser antisimétrico para los espines paralelos ($S = 1$) y simétrico para los espines antiparalelos ($S = 0$).

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

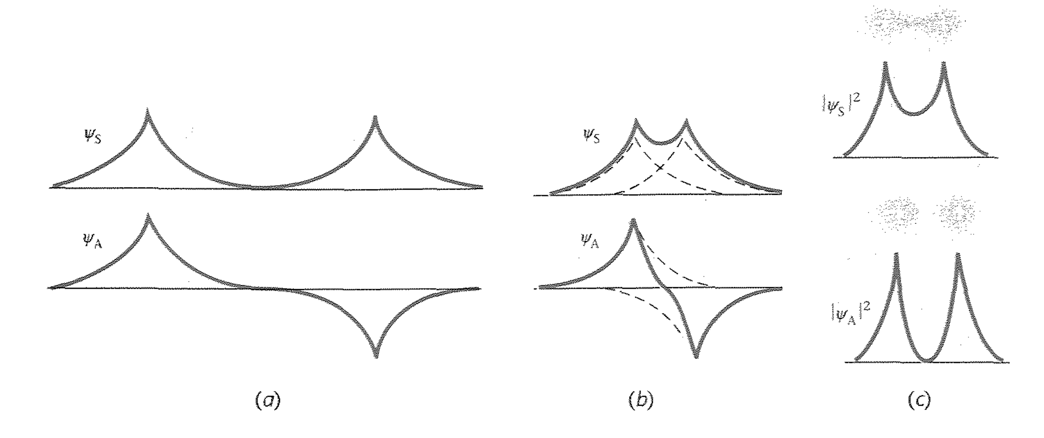


Figura 38.3 Funciones de onda unidimensionales, simétrica y antisimétrica, para dos átomos de hidrógeno (*a*) alejados y (*b*) próximos entre sí. (*c*) Distribuciones de probabilidad electrónica ($|\psi|^2$) para las funciones de onda en (*b*). Para la función de onda simétrica, la densidad de carga electrónica es grande entre los protones. Esta densidad de carga negativa mantiene los protones unidos en la molécula de hidrógeno H_2. Para la función de onda antisimétrica la densidad de carga electrónica es más reducida entre los protones.

Consideremos ahora el problema de los dos átomos de hidrógeno. La figura 38.3*a* muestra una función de onda ψ_S espacialmente simétrica y otra función de onda ψ_A espacialmente antisimétrica para dos átomos de hidrógeno que están alejados entre sí. La figura 38.3*b* muestra las mismas dos funciones de onda para dos átomos de hidrógeno próximos entre sí. Los cuadrados de estas dos funciones de onda se muestran en la figura 38.3*c*. Obsérvese que la distribución de probabilidad $|\psi|^2$ en la región comprendida entre los protones es grande para la función de onda simétrica y pequeña para la antisimétrica. Así, cuando el factor espacial de la función de onda es simétrica ($S = 0$) los electrones se encuentran frecuentemente en la región comprendida entre los protones. La nube electrónica cargada negativamente que representa a estos electrones se concentra en el espacio comprendido entre los protones, como indica la parte superior de la figura 38.3*c* y los protones están enlazados entre sí por esta nube cargada negativamente. Al contrario, cuando el factor espacial de la función de onda es antisimétrico ($S = 1$), los electrones pasan poco tiempo entre los protones, y los átomos no se asocian entre sí para formar una molécula. En este caso, la nube electrónica no está concentrada en el espacio entre los protones, como se muestra en la parte inferior de la figura 38.3c.

La energía potencial electrostática de la molécula H_2 consta de la energía positiva de repulsión de los dos electrones y la energía potencial negativa de atracción entre cada electrón y cada protón. La figura 38.4 muestra la energía potencial electrostática correspondiente a dos átomos de hidrógeno en función de la separación para el caso en que el factor espacial de la función de onda electrónica sea simétrico (U_S) y para el caso en que éste sea antisimétrico (U_A). Puede verse que la energía potencial del estado simétrico es inferior a la del estado antisimétrico y es semejante a la del enlace iónico. La separación de equilibrio del H_2 es $r_0 = 0{,}074$ nm y la energía de enlace es 4,52 eV. Para el estado antisimétrico, la energía potencial nunca es negativa y no hay enlace.

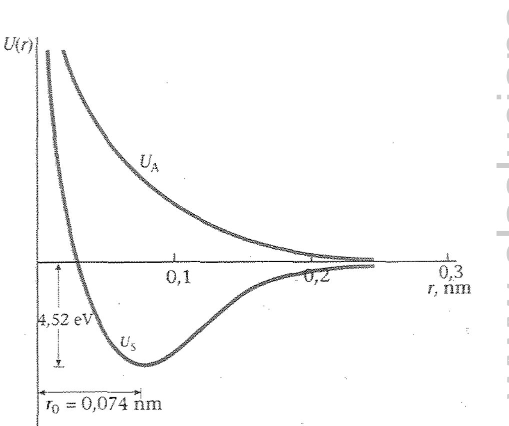


Figura 38.4 Energía potencial en función de la separación para dos átomos de hidrógeno. La curva U_S corresponde a una función de onda con un factor espacial simétrico y la curva U_A corresponde a una función de onda con un factor espacial antisimétrico.

Veamos a continuación por qué tres átomos de hidrógeno no se enlazan para formar H_3. Si un tercer átomo de hidrógeno se aproxima a una molécula H_2, el tercer electrón no puede encontrarse en el estado 1*s* y tiene su espín antiparalelo al espín de los otros dos electrones. Si este electrón está en un estado espacial antisimétrico respecto al intercambio con uno de los otros electrones, la repulsión de este átomo es mayor que la atracción del otro. Como los tres átomos se empujan mutuamente, el tercer electrón está forzado hacia un estado energético cuánticamente superior por el principio de exclusión. El enlace entre dos átomos de hidrógeno se dice que está **saturado**, ya que no hay lugar para otro electrón. Los dos electrones compartidos completan los estados 1*s* de ambos átomos.

También podemos ver por qué dos átomos de helio no pueden normalmente enlazarse para formar la molécula He_2. No existen electrones de valencia que puedan compartirse. Los electrones de las capas completas son forzados a pasar a estados de mayor energía cuando los dos átomos se aproximan entre sí. A bajas temperaturas o altas presiones, los átomos de helio se enlazan conjuntamente debido a las fuerzas de van der Waals que veremos a continuación. Este enlace es tan débil que a la presión atmosférica

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

el helio hierve a 4 K y no solidifica a ninguna temperatura, a menos que la presión sea mayor de 20 atm.

Cuando dos átomos idénticos se enlazan, como el O_2 y el N_2, el enlace es puramente covalente. Sin embargo, el enlace de dos átomos distintos normalmente es una mezcla de enlaces covalente y iónico. Incluso en el NaCl, el electrón entregado por el sodio al cloro tiene cierta probabilidad de seguir en el átomo de sodio porque su función de onda no cae súbitamente a cero. Así, este electrón está compartido parcialmente en un enlace covalente, aunque este enlace sea sólo una pequeña parte del enlace total, el cual es principalmente iónico.

Una medida del grado con que un enlace es iónico o covalente puede obtenerse a partir del momento dipolar eléctrico de la molécula. Por ejemplo, si el enlace del NaCl fuera puramente iónico, el centro de la carga positiva estaría en el ion Na^+ y el centro de la carga negativa en el ion Cl^-. El momento dipolar eléctrico sería

$$p_{\text{iónico}} = er_0 \tag{38.5}$$

en donde r_0 es la separación de equilibrio de los iones. Así, el momento dipolar del NaCl sería (según la figura 38.1)

$$\begin{aligned} p_{\text{iónico}} &= er_0 \\ &= (1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}) = 3{,}78 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Realmente, el momento dipolar eléctrico medido experimentalmente del NaCl es

$$p_{\text{medido}} = 3{,}00 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

La relación p_{medido} a $p_{\text{iónico}}$ puede definirse como el porcentaje de enlace iónico. Para el NaCl esta relación es 3,00/3,78 = 0,79. Es decir, el enlace en el NaCl es aproximadamente 79% iónico.

Ejercicio La separación de equilibrio del HCl es 0,128 nm y su momento dipolar eléctrico es $3{,}60 \times 10^{-30}$ C·m. ¿Cuál es el porcentaje de enlace iónico en el HCl? (*Respuesta:* 18%.)

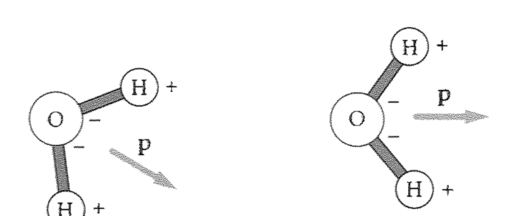


Figura 38.5 Enlace de las moléculas H_2O debido a la atracción de los dipolos eléctricos. El momento dipolar de cada molécula viene indicado por **p**. El campo de un dipolo orienta al otro dipolo, de modo que los momentos tienden a ser paralelos. Cuando los momentos dipolares son aproximadamente paralelos, el centro de la carga negativa de una molécula está próximo al centro de la carga negativa de la otra molécula y las moléculas se atraen.

Otros tipos de enlace

El enlace de van der Waals Dos moléculas separadas, de cualquier tipo, se atraen una a la otra por fuerzas electrostáticas llamadas fuerzas de van der Waals. Los **enlaces de van der Waals** debidos a estas fuerzas son mucho más débiles que los enlaces tratados anteriormente. A temperaturas suficientemente altas, estas fuerzas no son bastante intensas para vencer la agitación térmica ordinaria de átomos o moléculas, pero a temperaturas suficientemente bajas, la agitación térmica se hace despreciable y las fuerzas de van der Waals son la causa de que virtualmente todas las sustancias se condensen en forma líquida y después sólida.[1] Las fuerzas de van der Waals surgen de la interacción de los momentos dipolares eléctricos instantáneos de las moléculas.

La figura 38.5 muestra cómo dos moléculas polares —moléculas con momentos dipolares eléctricos *permanentes*, tales como H_2O— pueden enlazarse. El campo eléctrico debido al momento dipolar de una molécula orienta a la otra molécula de tal modo que los dos momentos dipolares se atraen. Las moléculas no polares también atraen a otras moléculas no polares por medio de las fuerzas de van der Waals. Aunque las moléculas no polares poseen momentos dipolares eléctricos nulos por término medio, sin embargo, tienen momentos dipolares instantáneos que son generalmente no nulos, debido a fluctuaciones en las posiciones de las cargas. Cuando dos moléculas no polares están próximas una a la otra, las fluctuaciones de los momentos dipolares instantáneos tienden a correlacionarse de modo que se produce una atracción. Este fenómeno se ilustra en la figura 38.6.

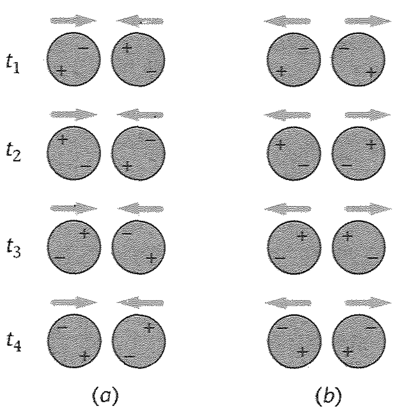


Figura 38.6 Atracción de van der Waals de moléculas con momentos dipolares medios nulos. (*a*) Orientaciones de momentos dipolares instantáneos posibles en instantes distintos que conducen a la atracción. (*b*) Orientaciones posibles que favorecen la repulsión. El campo eléctrico del momento dipolar instantáneo de una molécula tiende a polarizar a la otra; así, las orientaciones que favorecen la atracción (*a*) son mucho más probables que las que favorecen la repulsión (*b*).

El enlace de hidrógeno Otro mecanismo de enlace de gran importancia es el enlace o puente de hidrógeno, formado por la compartición de un protón (el núcleo del átomo de hidrógeno) entre dos átomos, frecuentemente dos átomos de oxígeno. Esta comparti-

[1] El helio es el único elemento que no se solidifica a ninguna temperatura a la presión atmosférica.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

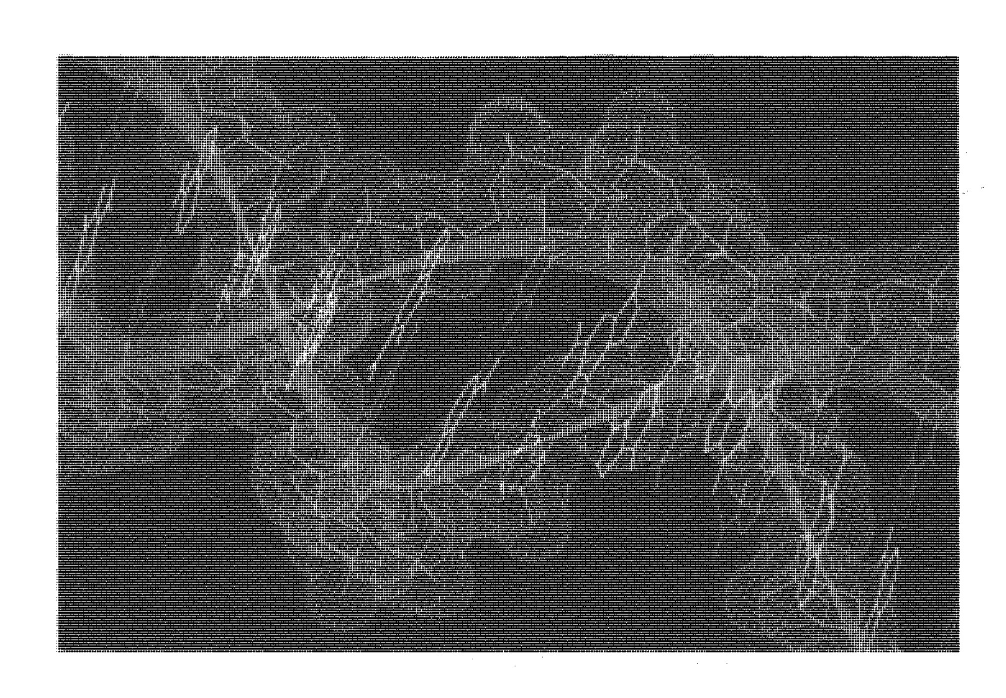


Figura 38.7 Molécula de DNA.

ción de un protón es semejante a la compartición de electrones responsables del enlace covalente ya estudiado. Viene facilitado por la pequeña masa del protón y por la ausencia de electrones internos en el hidrógeno. El enlace de hidrógeno frecuentemente mantiene reunidos grupos de moléculas y es el responsable de las conexiones cruzadas, características de las moléculas biológicas gigantes y polímeros, manteniendo fijas sus formas. La estructura helicoidal bien conocida del DNA se mantiene gracias a las conexiones de los enlaces de hidrógeno a través de las múltiples vueltas de la hélice (figura 38.7).

El enlace metálico En un metal, dos átomos no se asocian entre sí por intercambio o compartición de un electrón para formar una molécula. En su lugar, cada electrón de valencia es compartido por muchos átomos. El enlace se distribuye así por todo el metal. Por tanto, un metal puede considerarse como una red de iones positivos mantenidos conjuntamente por un "gas" de electrones esencialmente libres que se desplazan erráticamente a través del sólido. En la imagen mecánico-cuántica, estos electrones libres forman una nube de densidad de carga negativa entre los iones de la red cargados positivamente y mantiene a éstos ensamblados. En este aspecto, el enlace metálico es algo semejante al enlace covalente. Sin embargo, en el enlace metálico se implican un gran número de átomos, y la carga negativa se distribuye uniformemente por todo el volumen del metal. El número de electrones libres varía de un metal a otro, pero es del orden de un electrón por cada átomo.

www.elsolucionario.net

Moléculas poliatómicas  38.2

OPCIONAL

Las moléculas con más de dos átomos abarcan desde aquellas relativamente simples como el agua, de masa molecular 18, a otras gigantes como las proteínas y el DNA, que pueden tener masas moleculares de cientos de miles hasta muchos millones. Lo mismo que las moléculas diatómicas, la estructura de las moléculas poliatómicas puede entenderse aplicando la mecánica cuántica básica al enlace de átomos individuales. Los mecanismos de enlace en la mayor parte de las moléculas poliatómicas son el enlace covalente y el enlace de hidrógeno. Abordaremos sólo algunas de las moléculas más simples —H_2O, NH_3 y CH_4— para ilustrar tanto la simplicidad como la complejidad de la aplicación de la mecánica cuántica al enlace molecular.

 www.elsolucionario.net

OPCIONAL

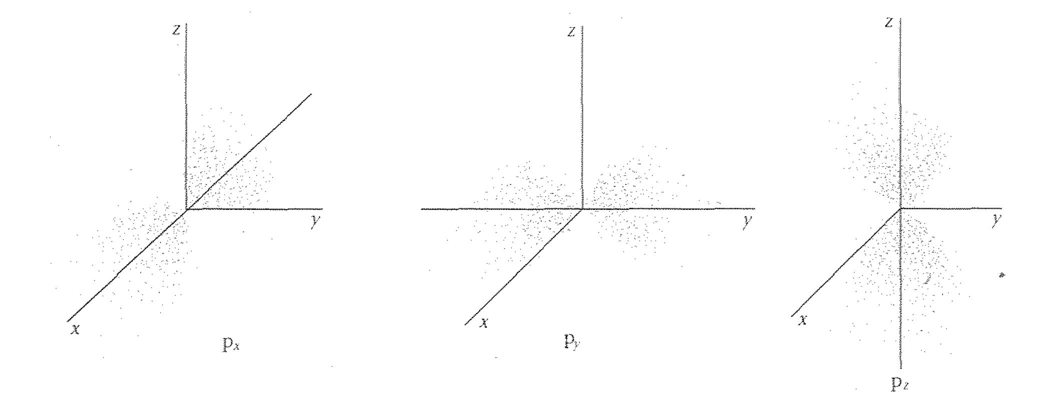


Figura 38.8 Ilustración gráfica de puntos obtenidos por ordenador respecto a la dependencia espacial de la distribución de carga electrónica en los orbitales atómicos p_x, p_y y p_z.

El requisito básico para la compartición de electrones en un enlace covalente es que las funciones de onda de los electrones de valencia en los átomos individuales deben solaparse lo máximo posible. Como primer ejemplo, consideraremos la molécula de agua. La configuración del estado fundamental del átomo de oxígeno es $1s^22s^22p^4$. Los electrones 1s y 2s corresponden a estados de capas completas y no contribuyen al enlace. La capa 2p tiene alojamiento para seis electrones, dos en cada uno de los tres estados espaciales correspondientes a $\ell = 1$. En un átomo aislado, estos estados espaciales se describen por las funciones de onda hidrogenoides correspondientes a $\ell = 1$ y $m = +1$, 0, -1. Como la energía es la misma para estos tres estados espaciales, podríamos igualmente bien utilizar cualquier combinación lineal de estas funciones de onda. Cuando un átomo participa en el enlace molecular, resultan ser importantes ciertas combinaciones de estas funciones de onda atómicas. Estas combinaciones se llaman **orbitales atómicos** p_x, p_y y p_z. La dependencia angular de estos orbitales es

$$p_x \propto \operatorname{sen}\theta \cos\phi \tag{38.6}$$

$$p_y \propto \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \tag{38.7}$$

$$p_z \propto \cos\theta \tag{38.8}$$

Como se muestra en la figura 38.8, la distribución de carga electrónica para estos orbitales es máxima, respectivamente, a lo largo de los ejes x, y o z. Para el oxígeno en una molécula H_2O, el máximo solapamiento de las funciones de onda electrónicas tienen lugar cuando dos de los cuatro electrones están apareados con sus espines antiparalelos en uno de los orbitales atómicos (para este ejemplo, suponer el orbital p_z), uno de los otros electrones está en el segundo orbital (orbital p_x), y el electrón restante se encuentra en el tercer orbital (orbital p_y). Cada uno de los electrones no apareados (en esta ilustración, en los orbitales p_x y p_y) forma un enlace con el electrón de un átomo de hidrógeno como se indica en la figura 38.9. Debido a la repulsión de los dos átomos de hidrógeno, el ángulo que forman los enlaces O–H es realmente mayor de 90°. El efecto de esta repulsión puede calcularse y el resultado está de acuerdo con el ángulo medido de 104.5°.

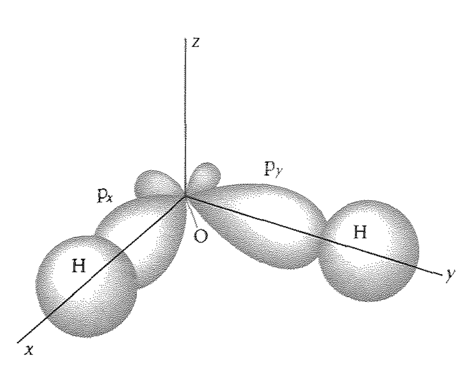


Figura 38.9 Distribución de carga electrónica en la molécula H_2O.

Un razonamiento semejante nos permite comprender el enlace NH_3. En el estado fundamental, el nitrógeno posee tres electrones en el estado 2p. Cuando estos tres electrones se encuentran en los orbitales atómicos p_x, p_y y p_z, se enlazan con los electrones de los átomos de hidrógeno. Debido a la repulsión de los átomos de hidrógeno, los ángulos entre los enlaces son también algo superiores a 90°.

El enlace de los átomos de carbono es algo más complicado. El carbono forma una amplia variedad de tipos distintos de enlaces moleculares que dan lugar a una gran diversidad en los tipos de moléculas orgánicas. La configuración del estado fundamental del carbono es $1s^22s^22p^2$. Según muestra discusión anterior, parece lógico que el carbono debe ser divalente —es decir, con enlaces sólo a través de sus dos electrones 2p— con dos enlaces que formarían un ángulo de 90° aproximadamente. Sin embargo, una de las características más importantes de la química del carbono es que los compuestos de carbono tetravalente, tal como el CH_4, son de una mayoría aplastante.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La valencia 4 observada en el carbono surge de un modo interesante. Uno de los primeros estados excitados del carbono ocurre cuando un electrón 2s se excita a un estado 2p, dando una configuración de $1s^22s^12p^3$. En este estado excitado podemos tener cuatro electrones no apareados, cada uno en los orbitales atómicos 2s, $2p_x$, $2p_y$ y $2p_z$. Lógicamente existirían tres enlaces semejantes correspondientes a los tres orbitales p y un enlace distinto correspondiente al orbital s. Sin embargo, cuando el carbono forma enlaces tetravalentes, estos cuatro orbitales atómicos se mezclan y forman cuatro nuevos orbitales moleculares *equivalentes* llamados **orbitales híbridos**. Esta mezcla de orbitales atómicos llamada **hibridación** es una de las más importantes características de la física de enlaces moleculares complejos. La figura 38.10 muestra la estructura tetraédrica de la molécula de metano (CH_4) y la figura 38.11 muestra la estructura de la molécula de etano (CH_3–CH_3), que es semejante a dos moléculas de metano, en donde uno de los enlaces C–H se ha reemplazado por un enlace C–C.

Los orbitales de carbono pueden también hibridarse con los orbitales s, p_x y p_y combinándose para formar tres orbitales híbridos en el plano *xy* con enlaces de 120° y el orbital p_z permanece sin mezclar. Un ejemplo de esta configuración es el grafito, en el cual los enlaces del plano *xy* proporcionan la estructura sólida en capas característica de este material.

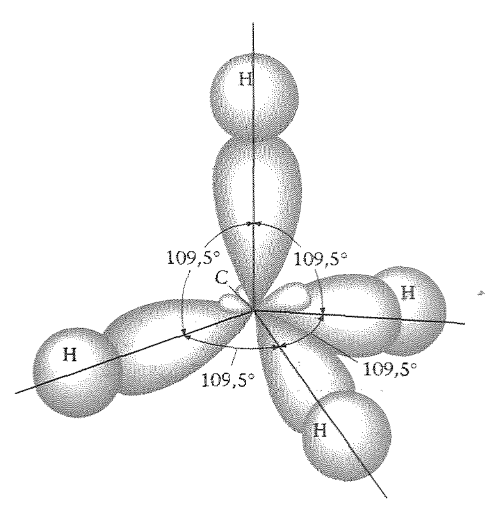


Figura 38.10 Distribución de carga electrónica en la molécula CH_4 (metano).

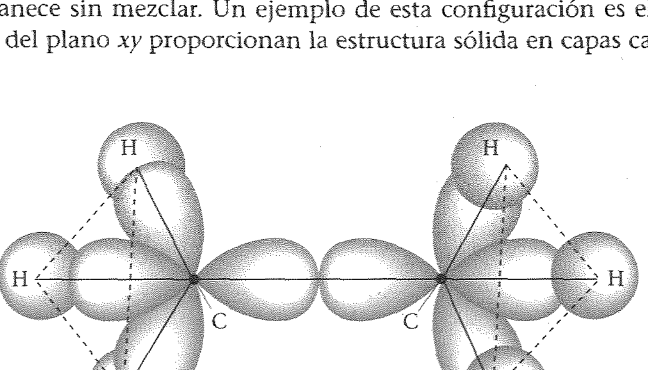


Figura 38.11 Distribución de carga electrónica en la molécula CH_3–CH_3 (etano).

OPCIONAL

Niveles energéticos y espectros de moléculas diatómicas ■ 38.3

Como en el caso de un átomo, una molécula emite frecuentemente radiación electromagnética cuando realiza una transición de un estado energético excitado a otro estado de menor energía. Inversamente, una molécula puede absorber radiación y verificar una transición de un estado de menor energía a otro estado de mayor energía. El estudio de los espectros de emisión y absorción nos proporciona, por tanto, información respecto a los estados energéticos de las moléculas. Por simplicidad consideraremos sólo las moléculas diatómicas.

La energía de una molécula puede separarse convenientemente en tres partes: electrónica, producida por la excitación de los electrones de la molécula; vibratoria, debida a las oscilaciones de los átomos de la molécula; y rotacional, debida a la rotación de la molécula alrededor de su centro de masas. Las magnitudes de estas energías son suficientemente distintas, de modo que deben tratarse por separado. Las energías debidas a las excitaciones electrónicas de una molécula son del orden de magnitud de 1 eV, lo mismo que en el caso de la excitación de un átomo. Las energías de vibración y rotación son muy inferiores.

Niveles energéticos de rotación ■

La figura 38.12 muestra un modelo esquemático simple de una molécula diatómica formada por las masas m_1 y m_2, separadas por una distancia *r* y girando alrededor de su centro de masas. Clásicamente, la energía cinética de rotación (véase sección 9.5) es

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{38.9}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

en donde I es el momento de inercia y ω la frecuencia angular de rotación. Si tenemos en cuenta el valor del momento angular $L = I\omega$, resulta

$$E = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I} \quad (38.10)$$

La solución de la ecuación de Schrödinger para la rotación conduce a la cuantización del momento angular con valores dados por

$$L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \quad (38.11)$$

en donde ℓ es el **número cuántico rotacional**. Esta es la misma condición cuántica del momento angular que se aplica al momento angular orbital de un electrón en un átomo. Obsérvese, sin embargo, que L en la ecuación 38.10 se refiere al momento angular de la molécula entera girando alrededor de su centro de masas. Los niveles energéticos de una molécula en rotación vienen, por tanto, dados por

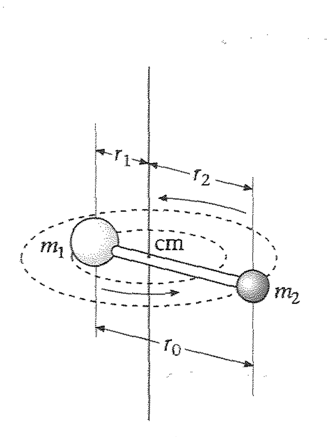


Figura 38.12 Molécula diatómica girando alrededor de un eje que pasa por su centro de masas.

$$E = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell+1)E_{0r} \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \quad (38.12)$$

Niveles energéticos rotacionales

en donde E_{0r} es la energía rotacional característica de una molécula determinada, la cual es inversamente proporcional a su momento de inercia:

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \quad (38.13)$$

Energía rotacional característica

Una medida de la energía rotacional de una molécula a partir de su espectro rotacional puede utilizarse para determinar el momento de inercia de la molécula y con éste determinar la separación de los átomos en la molécula. El momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masas de una molécula diatómica (véase figura 38.12) es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Teniendo en cuenta que $m_1 r_1 = m_2 r_2$, expresión que relaciona las distancias r_1 y r_2 de los átomos al centro de masas y llamando $r_0 = r_1 + r_2$ a la distancia de separación de los átomos, el momento de inercia resulta ser (véase problema 26):

$$I = \mu r_0^2 \quad (38.14)$$

en donde μ se llama **masa reducida**, es decir,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (38.15)$$

Definición - Masa reducida

Si las masas son iguales ($m_1 = m_2 = m$) como ocurre en H_2 y O_2, la masa reducida es $\mu = \frac{1}{2}m$ e

$$I = \tfrac{1}{2} m r_0^2 \quad (38.16)$$

Una unidad de masa conveniente para hablar de masas atómicas y moleculares es la **unidad de masa unificada** que se define como un doceavo de la masa del átomo de carbono 12 (^{12}C) neutro. La masa de un átomo ^{12}C es, por tanto, 12 u. La masa de un

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

átomo en unidades unificadas es, por tanto, numéricamente igual a la masa molar del átomo en gramos. La unidad de masa unificada está relacionada con el gramo y el kilogramo por

$$1\ \text{u} = \frac{1\ \text{g}}{N_A} = \frac{10^{-3}\ \text{kg}}{6{,}0221 \times 10^{23}} = 1{,}6606 \times 10^{-27}\ \text{kg} \qquad (38.17)$$

en donde N_A es el número de Avogadro.

EJEMPLO 38.2

Determinar la masa reducida de la molécula HCl.

Esquema del problema Se toman de la tabla periódica[1] del Apéndice C las masas del hidrógeno y del cloro y utilizamos la definición de masa reducida expresada por la ecuación 38.15.

1. La masa reducida μ está relacionada con las masas individuales m_H y m_{Cl}:
$$\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}}$$

2. Tomar las masas de la tabla periódica:
$$m_H = 1{,}01\ \text{u}, \qquad m_{Cl} = 35{,}5\ \text{u}$$

3. Sustituir estos datos para calcular la masa reducida:
$$\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = \frac{(1{,}01\ \text{u})(35{,}5\ \text{u})}{1{,}01\ \text{u} + 35{,}5\ \text{u}} = 0{,}982\ \text{u}$$

Observación Nótese que la masa reducida es menor que la masa de cualquiera de los átomos de la molécula y es aproximadamente igual a la masa del átomo de hidrógeno. Cuando un átomo de una molécula diatómica tiene una masa mucho mayor que el otro, el centro de masas de la molécula está aproximadamente en el centro del átomo de mayor masa y la masa reducida es prácticamente igual a la masa del átomo más ligero.

EJEMPLO 38.3

Estimar la energía rotacional característica de una molécula O_2, suponiendo que la separación de los átomos es de 0,1 nm.

1. La energía rotacional característica es inversamente proporcional al momento de inercia:
$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I}$$

2. Calcular el momento de inercia:
$$I = \mu r_0^2 = \tfrac{1}{2} m r_0^2$$

3. Sustituir esta expresión de I en la correspondiente a E_{0r}:
$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{m r_0^2}$$

4. Utilizar $m = 16$ u para la masa del oxígeno y los valores conocidos de las constantes para calcular E_{0r}:
$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{m r_0^2} = \frac{(1{,}05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(16\ \text{u})(10^{-10}\ \text{m})^2} \times \frac{1\ \text{u}}{1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$
$$= 4{,}15 \times 10^{-23}\ \text{J} = 2{,}59 \times 10^{-4}\ \text{eV}$$

[1] Las masas indicadas en la tabla están ponderadas de acuerdo con la distribución isotópica natural. Así, la masa del carbono en la tabla es 12,011 en lugar de 12,000 porque el carbono natural está compuesto aproximadamente del 98,9% de ^{12}C y 1,1% de ^{13}C. De igual modo, la composición del cloro natural es 75% de ^{35}Cl y 24% de ^{37}Cl.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

En el ejemplo 38.3 podemos ver que los niveles de energía rotacional poseen órdenes de magnitud muy inferiores a los niveles energéticos debidos a la excitación electrónica (del orden de 1 eV o mayores). Las transiciones dentro de una serie determinada de niveles energéticos de rotación dan lugar a fotones cuya energía corresponde a la región de microondas del espectro electromagnético. Las energías rotacionales son también pequeñas cuando se comparan con la energía térmica típica kT a las temperaturas normales. Para $T = 300$ K, por ejemplo, kT vale aproximadamente $2{,}6 \times 10^{-2}$ eV, que es unas 100 veces mayor que la energía rotacional característica calculada en el ejemplo 38.3 y aproximadamente el 1% de la energía electrónica típica. Así, a las temperaturas ordinarias, una molécula puede excitarse fácilmente a los niveles energéticos rotacionales más bajos, simplemente por choque con otras moléculas. Sin embargo, tales choques no pueden excitar la molécula a sus niveles energéticos electrónicos por encima del estado fundamental.

Niveles energéticos de vibración

La cuantización de la energía en un simple oscilador armónico fue uno de los primeros problemas resueltos por Schrödinger al proponer su famosa ecuación de onda. Aplicando la ecuación de onda a un simple oscilador armónico resulta

$$E_v = (\upsilon + \tfrac{1}{2})hf, \qquad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots \tag{38.18}$$

Niveles energéticos de vibración

en donde f es la frecuencia del oscilador y υ el **número cuántico de vibración.**[1] Una característica importante de este resultado es que los niveles energéticos están igualmente espaciados con intervalos iguales a hf. La frecuencia de vibración de una molécula diatómica puede estar relacionada con la fuerza ejercida por un átomo sobre el otro. Consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 conectados por un muelle de constante de fuerza K. Se demuestra que la frecuencia de oscilación de este sistema (véase problema 30) es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}} \tag{38.19}$$

siendo μ la masa reducida dada por la ecuación 38.15. La constante de fuerza efectiva de una molécula diatómica puede, por tanto, determinarse a partir de una medida de la frecuencia de oscilación de la molécula.

Una regla de selección sobre las transiciones entre estados vibratorios (del mismo estado electrónico) requiere que υ sólo puede variar en ± 1, de tal modo que la energía de un fotón emitida por una transición de este tipo es hf y la frecuencia es f, la misma que la frecuencia de vibración. Hay una regla de selección semejante, según la cual ℓ debe variar en ± 1 para transiciones entre estados de rotación.

Una frecuencia típica correspondiente a una transición medida entre estados de vibración es 5×10^{13} Hz, es decir, el orden de magnitud de las energías de vibración es

$$E \sim hf = (4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(5 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1}) = 0{,}2\ \text{eV}$$

Esta energía típica de vibración es unas 1000 veces mayor que la energía rotacional típica E_{0r} de la molécula de O_2 que encontramos en el ejemplo 38.3 y aproximadamente 8 veces mayor que la energía térmica típica $kT = 0{,}026$ eV a $T = 300$ K. Por ello, los niveles de vibración no pueden excitarse por colisiones moleculares a las temperaturas ordinarias.

[1] Utilizamos υ (letra griega nu) en lugar de n para evitar confusiones entre el número cuántico de vibración y el número cuántico principal n de los niveles energéticos electrónicos.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 38.4

La frecuencia de vibración de la molécula CO es $6{,}42 \times 10^{13}$ Hz. ¿Cuál es la constante de fuerza efectiva de esta molécula?

Esquema del problema Utilizamos la ecuación 38.19 para relacionar K con la frecuencia y la masa reducida, y calculamos μ por su fórmula de definición

1. La constante de fuerza efectiva está relacionada con la frecuencia y la masa reducida por la ecuación 38.19:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

$$K = (2\pi f)^2\mu$$

2. Calcular la masa reducida utilizando 12 u para la masa del átomo de carbono y 16 u para la masa del átomo de oxígeno:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(12\text{ u})(16\text{ u})}{12\text{ u} + 16\text{ u}} = 6{,}86\text{ u}$$

3. Sustituir este valor de μ en la ecuación de K (etapa 1) y utilizar unidades SI:

$$K = (2\pi f)^2\mu = 4\pi^2(6{,}42\times 10^{13}\text{ Hz})^2(6{,}86\text{ u})\,\frac{1{,}66\times 10^{-27}\text{ kg}}{1\text{ u}}$$

$$= 1{,}85\times 10^3\text{ N/m}$$

Espectros de emisión

La figura 38.13 muestra esquemáticamente algunos niveles energéticos electrónicos, vibratorios y rotacionales de una molécula diatómica. Los niveles de vibración se especifican con el número cuántico υ y los rotacionales con la letra ℓ. Los niveles de vibración más bajos están uniformemente espaciados, con $\Delta E = hf$. Para niveles de vibración más altos, la aproximación de armonicidad simple para la vibración no es válida y los niveles pierden en parte la uniformidad espacial. Obsérvese que las curvas de energía potencial que representan la fuerza entre los dos átomos de la molécula no son exactamente iguales para los estados electrónicos fundamental y excitado. Esto implica que la frecuencia fundamental de vibración f es diferente para distintos estados electrónicos. Para transiciones entre estados vibratorios de diferentes estados electrónicos, la regla de selección $\Delta\upsilon = \pm 1$ no es válida. Estas transiciones tienen lugar en la emisión de fotones de longitudes de onda en el espectro visible o en sus proximidades, y por ello, el espectro de emisión de una molécula por transiciones electrónicas se denomina a veces espectro óptico.

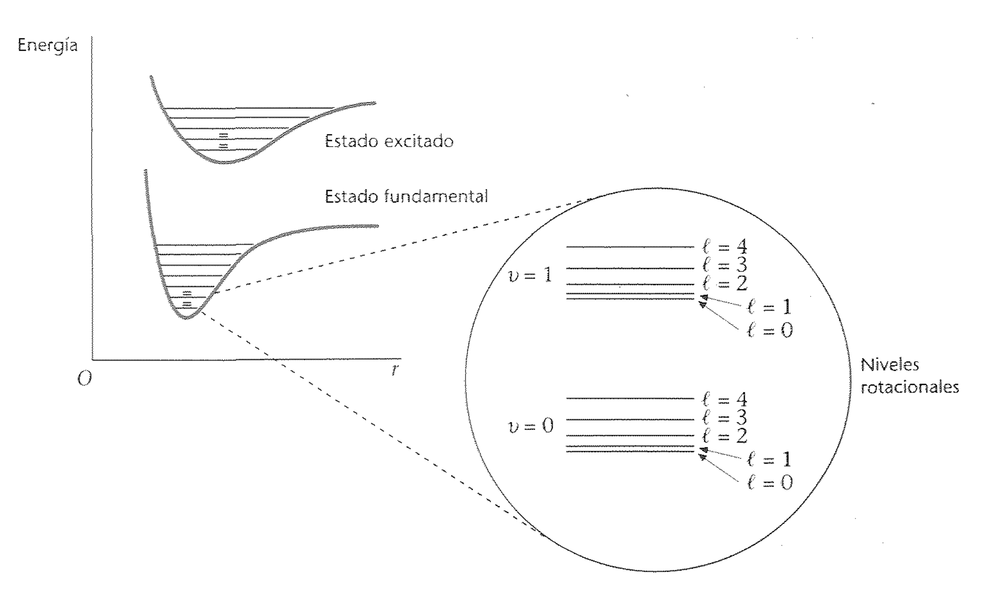


Figura 38.13 Niveles energéticos electrónicos, vibratorios y rotacionales de una molécula diatómica. Los niveles rotacionales se muestran en una ampliación de los niveles de vibración $\upsilon = 0$ y $\upsilon = 1$ del estado fundamental electrónico.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Figura 38.14 (*a*) Parte del espectro de emisión del N_2. Las líneas espectrales son debidas a las transiciones entre los niveles de vibración de dos estados electrónicos, como se indica en el diagrama de niveles energéticos (*b*). (*c*) Ampliación de una parte de la figura (*a*), donde se muestra que las líneas aparentes de (*a*) son realmente bandas con estructura causadas por los niveles rotacionales.

www.elsolucionario.net

El espaciado de los niveles rotacionales se incrementa con los valores crecientes de ℓ. Como las energías de rotación son mucho más pequeñas que las correspondientes a la excitación electrónica o vibratoria de una molécula, la rotación molecular aparece en los espectros ópticos como un desdoblamiento fino de las líneas espectrales. Cuando la estructura fina no está resuelta, el espectro aparece en forma de bandas como se indica en la figura 38.14*a*. Una inspección más detallada de estas bandas revela que poseen una estructura fina debida a los niveles energéticos rotacionales, como se muestra en la ampliación de la figura *a* en la figura 38.14*c*.

Espectros de absorción

Una gran parte de la espectroscopía molecular se realiza utilizando técnicas de absorción infrarroja, mediante la cual sólo se excitan los niveles energéticos de vibración y rotación del nivel electrónico en su estado fundamental. A temperaturas ordinarias las energías de vibración son suficientemente grandes en comparación con la energía térmica kT para que la mayor parte de las moléculas se encuentren en el estado de vibración más bajo $v = 0$, para el cual la energía es $E_0 = \frac{1}{2}hf$. La transición de $v = 0$ a $v = 1$ es la transición predominante en la absorción. Sin embargo, las energías rotacionales son suficientemente menores que kT, de modo que las moléculas se distribuyen entre varios estados energéticos de rotación. Si la molécula se encuentra originalmente en un estado vibratorio caracterizado por $v = 0$ y un estado rotacional caracterizado por el número cuántico ℓ, su energía inicial es

$$E_\ell = \frac{1}{2}hf + \ell(\ell + 1)E_{0r} \tag{38.20}$$

en donde E_{0r} viene dada por la ecuación 38.13. A partir de este estado, dos transiciones son permitidas por las reglas de selección. Para una transición al siguiente estado de vibración más alto, $v = 1$ y un estado rotacional caracterizado por $\ell + 1$, la energía final es

$$E_{\ell+1} = \tfrac{3}{2}hf + (\ell + 1)(\ell + 2)E_{0r} \tag{38.21}$$

Para una transición al siguiente estado vibracional más alto y un estado rotacional caracterizado por $\ell - 1$, la energía final es

$$E_{\ell-1} = \tfrac{3}{2}hf + (\ell - 1)\ell E_{0r} \tag{38.22}$$

Las diferencias energéticas son

$$\Delta E_{\ell \to \ell+1} = E_{\ell+1} - E_{\ell} = hf + 2(\ell + 1)E_{0r} \tag{38.23}$$

en donde $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ y

$$\Delta E_{\ell \to \ell-1} = E_{\ell-1} - E_{\ell} = hf - 2\ell E_{0r} \tag{38.24}$$

en donde $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ (En la ecuación 38.24 ℓ comienza en $\ell = 1$, pues desde $\ell = 0$ sólo la transición $\ell \to \ell + 1$ es posible.) La figura 38.15 ilustra estas transiciones. Las frecuencias de las mismas vienen dadas por

$$\begin{aligned} f_{\ell \to \ell+1} &= \frac{\Delta E_{\ell \to \ell+1}}{h} \\ &= f + \frac{2(\ell + 1)E_{0r}}{h}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{38.25}$$

y

$$\begin{aligned} f_{\ell \to \ell-1} &= \frac{\Delta E_{\ell \to \ell-1}}{h} \\ &= f - \frac{2\ell E_{0r}}{h}, \qquad \ell = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{38.26}$$

Las frecuencias de las transiciones $\ell \to \ell + 1$ son, por tanto, $f + 2(E_{0r}/h)$, $f + 4(E_{0r}/h)$, $f + 6(E_{0r} + h)$, y así sucesivamente; las correspondientes a la transición $\ell \to \ell - 1$ son $f - 2\ (E_{0r}/h)$, $f - 4(E_{0r}/h)$, $f - 6(E_{0r}/h)$, etc. Es de esperar, por tanto, que el espectro de absorción contenga frecuencias igualmente espaciadas por $2E_{0r}/h$, excepto un hueco igual a $4E_{0r}/h$ a la frecuencia de vibración f como indica la figura 38.16. Una medida de la posición del hueco nos permite conocer f, y una medida del espaciado de los picos de absorción nos da el valor de E_{0r}, que es inversamente proporcional al momento de inercia de la molécula.

La figura 38.17 muestra el espectro de absorción del HCl. La estructura en doble pico del espectro es debida a la presencia natural de los dos isótopos ^{35}Cl y ^{37}Cl que poseen diferentes momentos de inercia. Si inicialmente todos los niveles rotacionales fueran igualmente poblados, lógicamente las intensidades de cada línea de absorción serían iguales. Sin embargo, la población de un nivel rotacional ℓ es proporcional a la degeneración del nivel, es decir, al número de estados con igual valor de ℓ, o sea $2\ell + 1$, y al factor de Boltzmann $e^{-E/kT}$, en donde E es la energía del estado. Para pequeños valores de ℓ, la población crece ligeramente debido al factor de degeneración, mientras que para valores altos de ℓ la población decrece por causa del factor de Boltzmann. Las intensidades de las líneas de absorción crecen, por tanto, con ℓ para valores bajos de ℓ y disminuyen con ℓ para valores altos de ℓ, como puede verse en la figura.

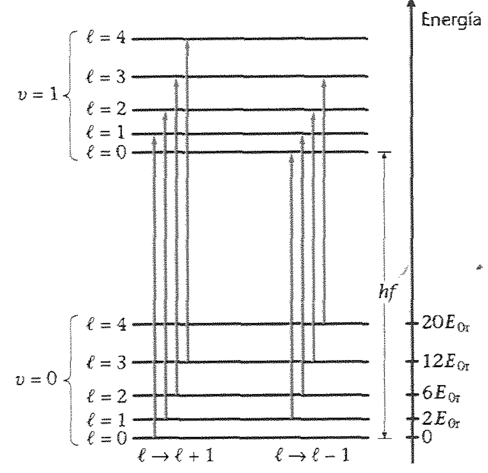


Figura 38.15 Transiciones de absorción entre los estados vibratorios más bajos $v = 0$ y $v = 1$ en una molécula diatómica. Estas transiciones obedecen la regla de selección $\Delta\ell = \pm1$ y se disponen en dos bandas. Las energías de la banda $\ell \to \ell + 1$ son $hf + 2E_{0r}$, $hf + 4E_{0r}$, $hf + 6\,E_{0r}$, etc., mientras que las energías de la banda $\ell \to \ell - 1$ son $hf - 2E_{0r}$, $hf - 4E_{0r}$, $hf - 6E_{0r}$, etc.

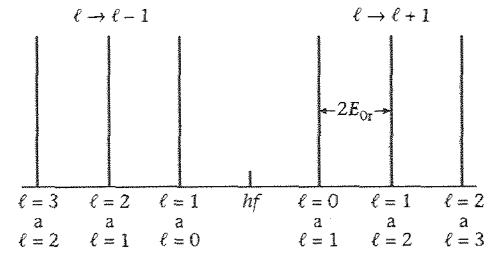


Figura 38.16 Espectro de absorción típico de una molécula diatómica. La parte derecha corresponde a las transiciones $\ell \to \ell + 1$ y la izquierda a $\ell \to \ell - 1$. Las líneas están igualmente espaciadas por la magnitud $2E_{0r}$. El hueco energético entre ambas ramas es hf, en donde f es la frecuencia de vibración de la molécula.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

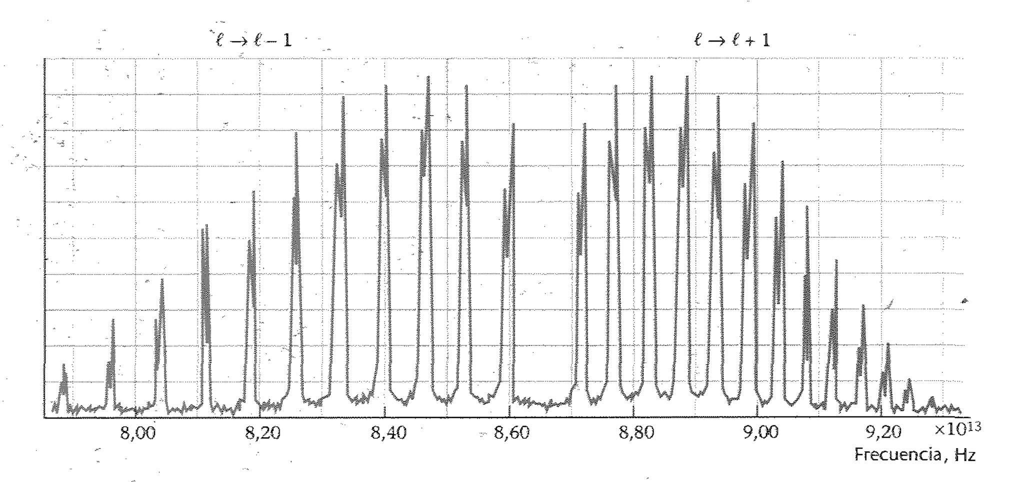


Figura 38.17 Espectro de absorción de la molécula diatómica HCl. La estructura en doble pico es debida a los dos isótopos del cloro ^{35}Cl (abundancia 75,5%) y ^{37}Cl (abundancia 24,5%). Las intensidades de los picos varían porque la población del estado inicial depende de ℓ.

38.4 La estructura de los sólidos

Las tres fases de la materia —gas, líquido y sólido— son debidas a las intensidades relativas de las fuerzas atractivas entre moléculas y a la energía térmica molecular. Las moléculas en la fase gaseosa poseen una elevada energía cinética térmica y ejercen escasa influencia entre sí, excepto durante sus frecuentes pero breves colisiones. A temperaturas suficientemente bajas (según el tipo de molécula), las fuerzas de van der Waals son la causa de que prácticamente todas las sustancias se condensen en forma líquida y después en forma sólida. En los líquidos las moléculas están lo bastante próximas —y su energía cinética bastante baja— para que desarrollen un **orden de corto alcance** temporal. Si la energía cinética térmica se reduce todavía más, las moléculas forman sólidos, caracterizados por un orden permanente.

Si un líquido se enfría lentamente, de modo que la energía cinética de sus moléculas se reduce poco a poco, las moléculas (o átomos o iones) pueden distribuirse por sí mismas en una red cristalina regular, produciendo el número máximo de enlaces y alcanzando una energía potencial mínima. Sin embargo, si el líquido se enfría rápidamente de modo que su energía interna se extrae antes de que las moléculas tengan la posibilidad de distribuirse ordenadamente, el sólido formado no es cristalino, sino que recuerda a una fotografía instantánea del líquido. Tal sólido se denomina **amorfo**. Posee un orden de corto alcance, pero no el **orden de largo alcance** (a lo largo de muchos diámetros moleculares), característico de un cristal. El vidrio es un sólido amorfo típico. Un resultado característico del ordenamiento de largo alcance de un cristal es su punto de fusión bien definido, mientras que un sólido amorfo simplemente se reblandece a medida que su temperatura crece. Muchos materiales pueden solidificar, bien en forma amorfa o en forma cristalina, según el método utilizado; otros existen sólo en una de las dos formas.

La mayor parte de los sólidos comunes son policristalinos; es decir, están formados por múltiples cristales aislados que alcanzan límites granulares. El tamaño de un monocristal es típicamente del orden de una fracción de milímetro. Sin embargo, en la naturaleza se producen grandes monocristales y también pueden obtenerse artificialmente. La propiedad más importante de un monocristal es la simetría y regularidad de su estructura. Puede considerarse que se trata de una sola estructura unitaria que se repite por todo el cristal. La unidad más pequeña de un cristal se llama célula o **celda unitaria**; su estructura depende del tipo de enlace —iónico, covalente, metálico, hidrógeno, van der Waals— entre los átomos, iones o moléculas. Si existe más de un tipo de átomo, la estructura también depende de los tamaños relativos de los átomos.

La figura 38.18 muestra la estructura del cristal iónico cloruro sódico (NaCl). Los iones Na^+ y Cl^- son esféricamente simétricos y el ion Cl^- es aproximadamente el doble de grande que el ion Na^+. La energía potencial mínima de este cristal tiene lugar cuando uno cualquiera de los dos iones tiene seis vecinos más próximos del otro tipo de ion. Esta estructura se denomina *cúbica centrada en las caras* (ccc). Obsérvese que los iones Na^+ y Cl^- del NaCl sólido *no* están apareados en las moléculas de NaCl.

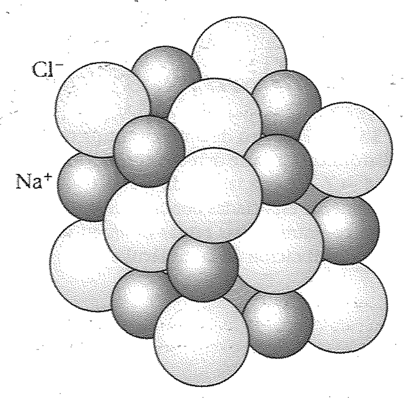
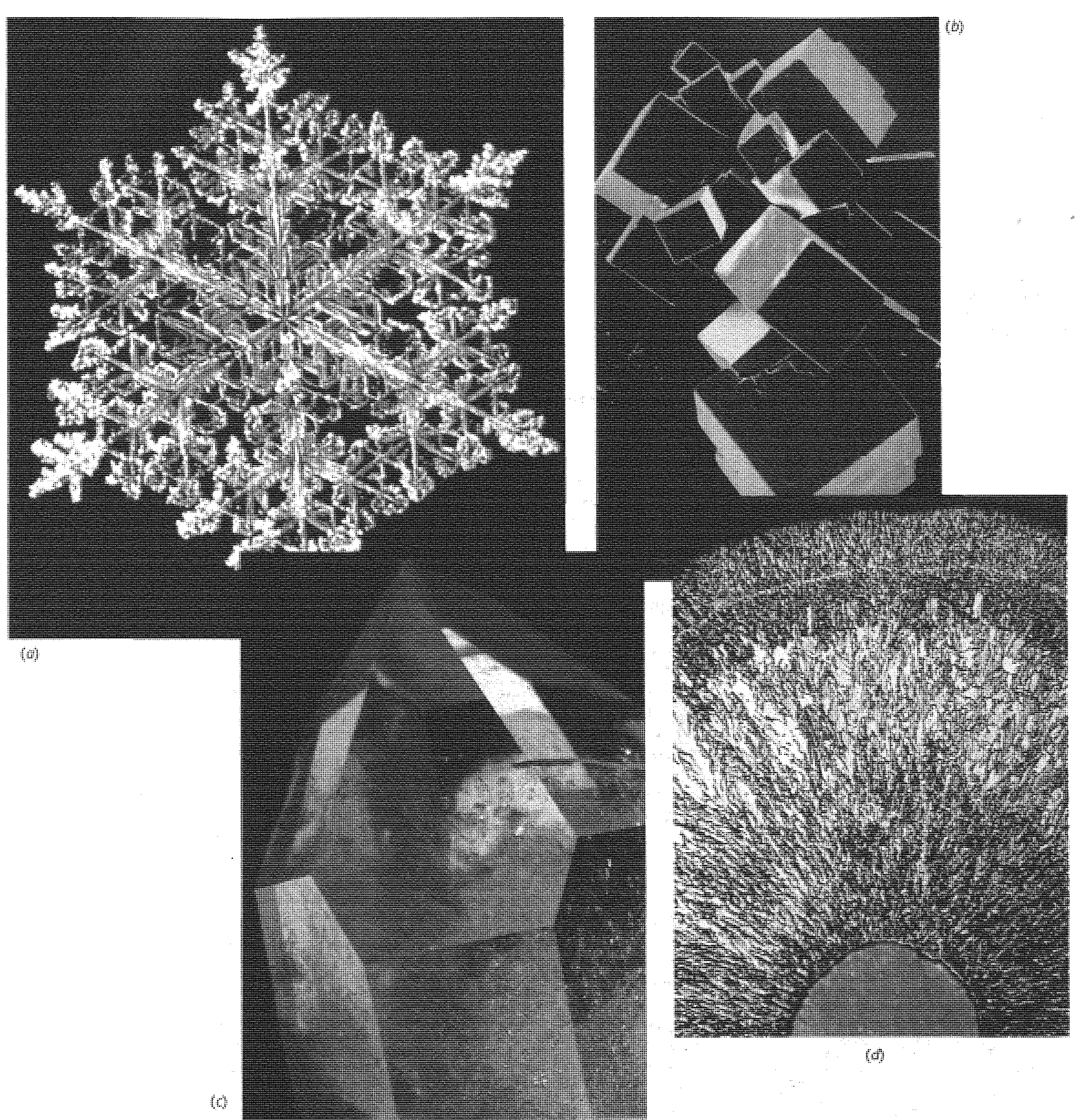


Figura 38.18 Estructura cúbica centrada en las caras del cristal NaCl.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Estructura cristalina

(*a*) La estructura hexagonal de un copo de nieve procede de la simetría hexagonal de la red formada por los átomos de hidrógeno y oxígeno.
(*b*) Cristales de NaCl (sal), con un aumento de unas 30 veces. Los cristales se formaron a partir de una red cúbica de iones de sodio y cloro. En ausencia de impurezas se obtiene un cristal cúbico exacto. Esta micrografía obtenida mediante un microscopio electrónico de barrido muestra que, en realidad, el cubo básico experimenta dislocaciones que dan lugar a cristales con una amplia variedad de formas. Sin embargo, la simetría cúbica subyacente permanece evidente.
(*c*) Cristal de cuarzo (SiO_2, dióxido de silicio), el mineral más abundante y extendido de la Tierra. Cuando el cuarzo fundido solidifica sin cristalizar, forma un vidrio.
(*d*) Una punta de hierro de soldadura. Obsérvese el núcleo de cobre dentro de la funda de hierro. La estructura microcristalina subyace claramente en el hierro.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

La parte atractiva neta de la energía potencial de un ion en un cristal puede escribirse en la forma

$$U_{\text{atr}} = -\alpha \frac{ke^2}{r} \tag{38.27}$$

en donde r es la distancia de separación entre los iones vecinos (0,281 nm para el Na^+ y el Cl^- en el NaCl cristalino) y α es la llamada **constante de Madelung** que depende de la geometría del cristal. Si sólo los 6 vecinos de cada ion fueran esenciales, α sería igual a 6. Sin embargo, además de los 6 vecinos de carga opuesta a una distancia r, existen 12 iones de la misma carga a una distancia $\sqrt{2}r$, 8 iones de carga opuesta a una distancia $\sqrt{3}r$ y así sucesivamente. La constante de Madelung es, por tanto, una suma infinita:

$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \ldots \tag{38.28}$$

El resultado correspondiente a la estructura cúbica centrada en las caras es $\alpha = 1{,}7476$.[1]

Cuando los iones Na^+ y Cl^- están muy próximos entre sí, se repelen debido al solapamiento de sus electrones y a la repulsión debida al principio de exclusión expuesto en la sección 38.1. La energía potencial asociada a esta repulsión puede expresarse aproximadamente por la siguiente expresión empírica:

$$U_{\text{rep}} = \frac{A}{r^n}$$

en donde A y n son constantes. La energía potencial total de un ion será, por tanto,

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r} + \frac{A}{r^n} \tag{38.29}$$

La separación de equilibrio $r = r_0$ es aquella para la cual la fuerza $F = -dU/dr$ es cero. Diferenciando y haciendo $dU/dr = 0$ para $r = r_0$ se obtiene

$$A = \frac{\alpha k e^2 r_0^{n-1}}{n} \tag{38.30}$$

La energía potencial, por tanto, puede expresarse en la forma

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r_0}\left[\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\right] \tag{38.31}$$

Para $r = r_0$, tenemos

$$U(r_0) = -\alpha \frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{38.32}$$

Si conocemos la separación de equilibrio r_0, el valor de n puede deducirse aproximadamente a partir de la *energía de disociación* del cristal, es decir, la energía necesaria para separar el cristal en sus átomos componentes.

■ **EJEMPLO 38.5** **Calcular el espaciado de equilibrio r_0 del NaCl a partir de la densidad de la sal, $\rho = 2{,}16$ g/cm^3.**

Esquema del problema Consideremos que cada ion ocupa un volumen cúbico de lado r_0. La masa de 1 mol de NaCl es 58,4 g, que es la suma de las masas atómicas del sodio y el cloro. Los iones ocupan un volumen de $2N_A r_0^3$, en donde $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ es el número de Avogadro.

[1] Como la constante de Madelung converge muy lentamente, su cálculo exacto exige el cálculo de un gran número de términos de la serie.

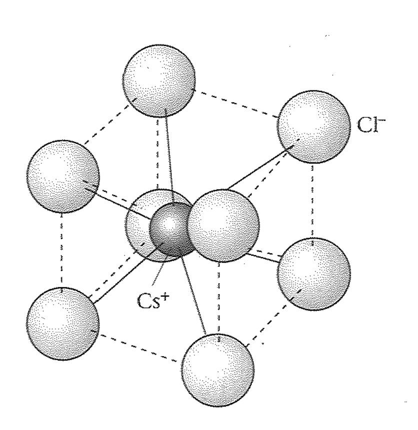
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

1. Relacionar r_0 con la densidad ρ: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2N_A r_0^3}$

2. Despejar r_0^3 y sustituir los valores conocidos: $r_0^3 = \frac{m}{2N_A\rho} = \frac{58,4\ \text{g}}{2(6,02 \times 10^{23})(2,16\ \text{g/cm}^3)}$
$= 2,25 \times 10^{-23}\ \text{cm}^3$

3. Despejar r_0: $r_0 = 2,82 \times 10^{-8}\ \text{cm} = 0,282\ \text{nm}$



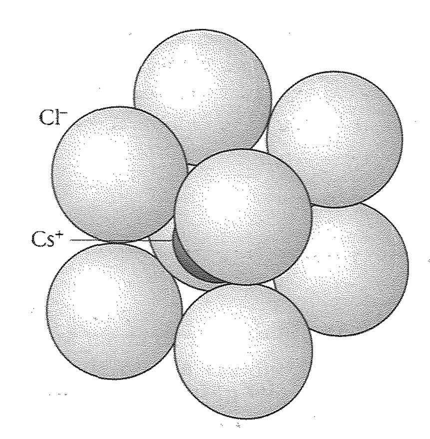


Figura 38.19 Estructura cúbica centrada en el cuerpo (cc) del cristal CsCl.

www.elsolucionario.net

La energía de disociación medida del NaCl es 770 kJ/mol. Teniendo en cuenta que 1 eV = 1,602 × 10^{-19} J, y el hecho de que 1 mol de NaCl contiene N_A pares de iones, podemos expresar la energía de disociación en electrón-voltios por par de iones. La conversión energética de electrón voltios por par de iones a kilojulios por mol es

$$1\ \frac{\text{eV}}{\text{par de iones}} \times \frac{6,022 \times 10^{23}\ \text{pares de iones}}{\text{mol}} \times \frac{1,602 \times 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}$$

El resultado es

$$1\ \frac{\text{eV}}{\text{par de iones}} = 96,47\ \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \qquad \textbf{(38.33)}$$

Por tanto, 770 kJ/mol = 7,98 eV por par de iones. Sustituyendo −7,98 eV para $U(r_0)$, 0,282 nm para r_0 y 1,75 para α en la ecuación 38.32, se obtiene n. El resultado es $n = 9,35 \approx 9$.

La mayor parte de los cristales iónicos, tales como LiF, KF, KCl, KI y AgCl, poseen una estructura cúbica centrada en las caras. Algunos sólidos elementales que poseen también esta estructura son la plata, el aluminio, el oro, el calcio, el cobre, el níquel y el plomo.

En la figura 38.19 se muestra la estructura del CsCl, llamada *cúbica centrada en el cuerpo* (cc). En esta estructura, cada ion posee 8 iones vecinos más próximos de carga opuesta. La constante de Madelung para estos cristales es 1,7627. Entre los sólidos elementales que poseen esta estructura podemos citar el bario, el cesio, el hierro, el potasio, el litio, el molibdeno y el sodio.

La figura 38.20 muestra otra estructura cristalina importante: la *hexagonal compacta* (hc). Se obtiene apilando esferas idénticas, de igual modo que las bolas de una bolera. En la primera capa, cada bola toca otros seis; de ahí el nombre de *hexagonal*. En la capa

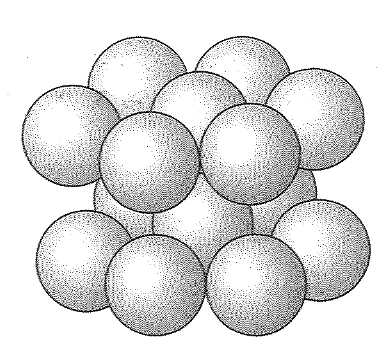


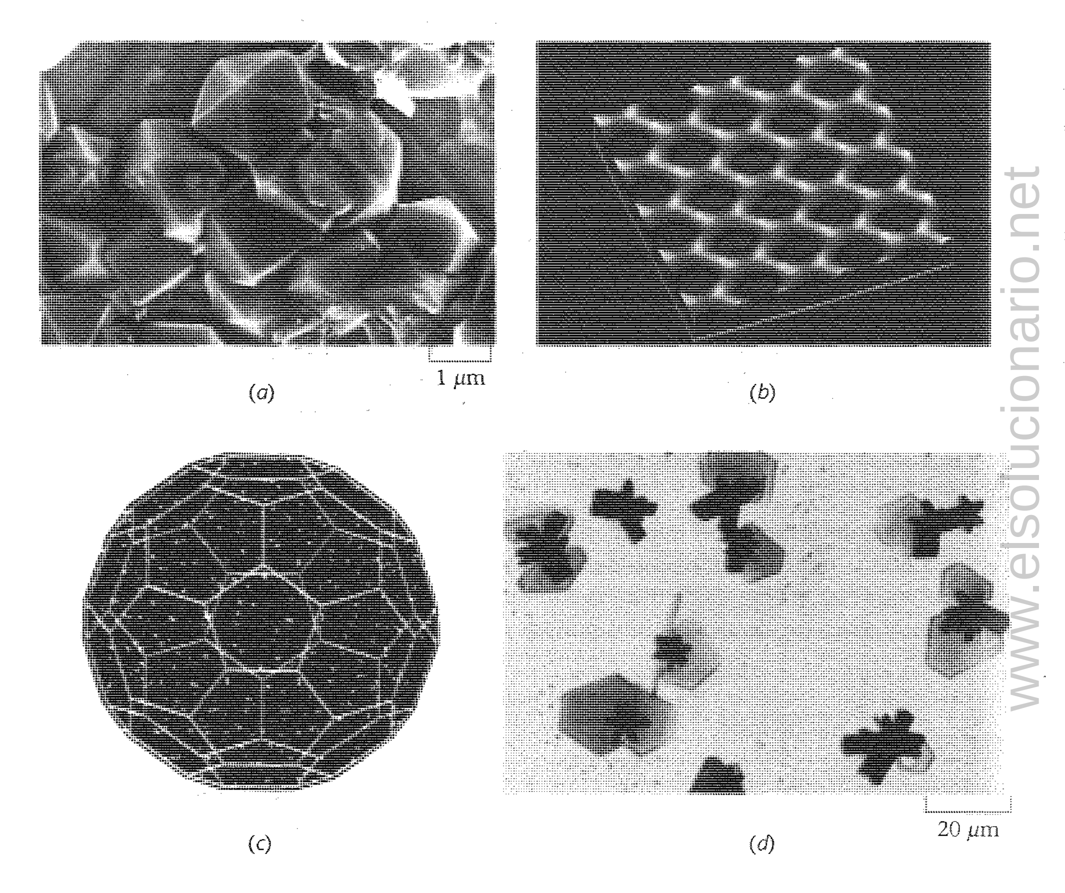
Figura 38.20 Estructura cristalina hexagonal compacta (hc).

 www.elsolucionario.net

siguiente, cada bola se dispone en una depresión triangular de la primera capa. En la tercera capa, cada bola se dispone en una depresión triangular de la segunda capa, de modo que están situadas directamente sobre las esferas de la primera capa. Los sólidos elementales con estructura ec incluyen el berilio, cadmio, cerio, magnesio, osmio y cinc.

En algunos sólidos con enlace covalente, la estructura cristalina viene determinada por la naturaleza direccional de los enlaces. La figura 38.21 ilustra la estructura tipo diamante del carbono, en la cual cada átomo está enlazado con otros cuatro como resultado de la hibridación estudiada en la sección 38.2. Ésta es también la estructura del germanio y silicio.

Figura 38.21 Estructura cristalina tipo diamante. Puede considerarse como una combinación de dos estructuras cúbicas centradas en las caras que se interpenetran.



El carbono existe en tres formas cristalinas bien definidas: diamante, grafito y fullerenos (abreviatura de "buchminsterfullerenos"), la tercera de las cuales fue prevista y descubierta hace pocos años. Las tres formas difieren en el modo en que los átomos de carbono se empaquetan en la red. Existe una cuarta forma cristalina de carbono, no bien definida: es el carbón vegetal. (*a*) Diamantes sintéticos, aumentados 75 000 veces. En el diamante, cada átomo de carbono está centrado en un tetraedro formado por otros cuatro átomos de carbono. La fuerza de estos enlaces explica la dureza del diamante. (*b*) Micrografía de campo atómico correspondiente al grafito. En el grafito, los átomos de carbono están dispuestos en láminas, cada una de ellas formada por átomos en anillos hexagonales. Estas láminas se deslizan fácilmente una sobre otra, propiedad que permite el uso del grafito como lubricante. (*c*) Una lámina aislada de anillos de carbono puede cerrarse sobre sí misma sustituyendo ciertos anillos hexagonales por otros pentagonales. Aquí se muestra una imagen generada por ordenador de esta estructura en su forma más reducida, C_{60}. Cada uno de los 60 vértices está ocupado por un átomo de carbono; 20 caras son hexágonos y 12 pentágonos. El mismo dibujo geométrico se utiliza hoy en los balones de fútbol. (*d*) Cristales de fullereno, en los cuales están empaquetadas las moléculas C_{60}. Los cristales más pequeños tienden a formar plaquetas (en la figura de color marrón); los cristales mayores suelen tener la forma de bastoncitos. Existen fullerenos con más de 60 átomos de carbono. En los cristales de esta figura, aproximadamente un sexto de las moléculas eran C_{70}.

38.5 ■ Semiconductores

En la sección 27.4 vimos que ciertos materiales como el silicio y el germanio se comportaban como *semiconductores intrínsecos* debido a la pequeña banda de energía prohibida comprendida entre la banda de valencia saturada y la banda de conducción vacía. La propiedad semiconductora de estos materiales es básica en su uso como componentes de circuitos electrónicos cuya resistencia se controla por aplicación de una corriente o voltaje externo. Sin embargo, muchos de estos *elementos de estado sólido*, tales como el diodo semiconductor y el transistor utilizan **semiconductores con impurezas** que se crean mediante la adición controlada de ciertas impurezas a semiconductores intrínsecos. Este proceso de introducción de impurezas extrañas se denomina **dopado**. En la figura 38.22*a* se muestra un esquema del silicio con impurezas de arsénico, de tal modo

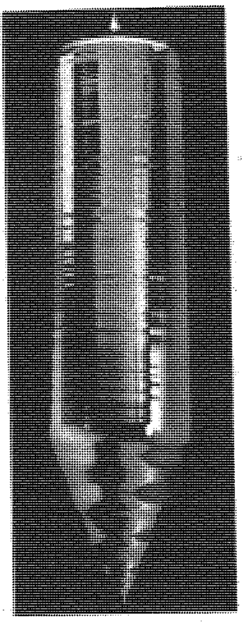
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

que unos pocos átomos de silicio son reemplazados en la red cristalina por átomos de arsénico. Este elemento tiene cinco electrones de valencia, mientras que el silicio tiene cuatro. Por tanto, cuatro electrones del arsénico comparten el enlace con los cuatro átomos de silicio próximos y el quinto electrón está débilmente ligado al átomo. Este electrón extra ocupa un nivel energético que está ligeramente por debajo de la banda de conducción del sólido y se excita fácilmente a la banda de conducción, en donde puede contribuir a la conducción eléctrica.

En la figura 38.22*b* se muestra el efecto sobre la estructura de bandas de un cristal de silicio impurificado con arsénico. Los niveles que se indican justamente por debajo de la banda de conducción son debidos a los electrones extras de los átomos de arsénico. Estos niveles se llaman **niveles donadores**, ya que entregan electrones a la banda de conducción sin dejar vacantes en la banda de valencia. Un semiconductor en estas condiciones se denomina **semiconductor tipo *n***, porque los principales portadores de carga son electrones negativos. La conductividad de un semiconductor dopado puede controlarse por la cantidad de impureza añadida. La adición de una sola parte por millón puede incrementar la conductividad en varios órdenes de magnitud.

Otro tipo de semiconductor con impurezas se obtiene al reemplazar un átomo de silicio por un átomo de galio, el cual posee 3 electrones de valencia (figura 38.23*a*). El átomo de galio acepta electrones de la banda de valencia para completar sus cuatro enlaces covalentes, creando así una vacante en la banda de valencia. En la figura 38.23*b* se muestra la estructura de bandas del silicio obtenida al impurificarle con galio. Los niveles vacíos que se indican justamente por encima de la banda de valencia son debidos a las vacantes producidas por los átomos de galio ionizados. Estos niveles se denominan **niveles aceptores**, ya que aceptan electrones de la banda de valencia saturada cuando estos electrones se excitan térmicamente a un estado energético más elevado. Esto da lugar a vacantes en la banda de valencia que pueden propagarse libremente en la dirección de un campo eléctrico. Este **semiconductor** se llama de **tipo *p*** porque los portadores de carga son las vacantes positivas. El hecho de que la conducción es debida al movimiento de las vacantes puede comprobarse por el efecto Hall.[1]



El silicio cristalino sintético se produce a partir de un material bruto que contiene silicio (por ejemplo, arena de la playa), del cual se separa y se funde. A partir de un germen cristalino, el silicio fundido crece en forma de un cristal cilíndrico, como el que se muestra en esta figura. Los cristales (típicamente de unos 1,3 m de longitud) se forman en condiciones controladas para asegurar que no poseen defecto alguno y se cortan a millares en forma de obleas muy finas sobre las cuales se graban las capas de un circuito integrado.

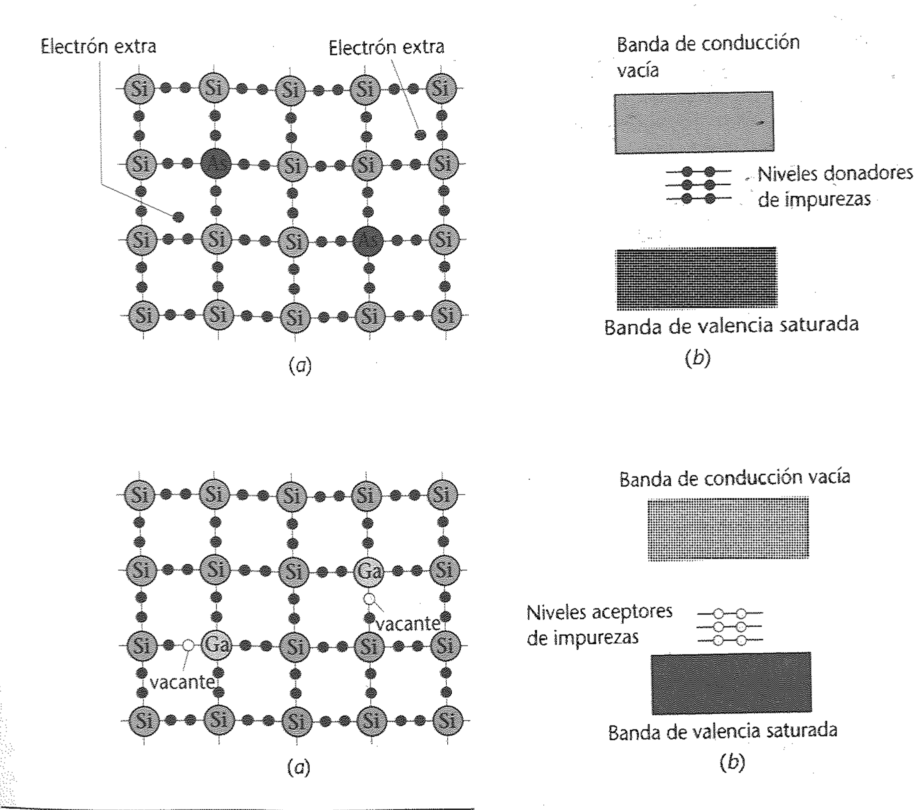


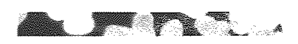
Figura 38.22 (*a*) Ilustración esquemática bidimensional del silicio con impurezas de arsénico. Como el arsénico tiene cinco electrones de valencia, existe un electrón extra, débilmente ligado al átomo que fácilmente se excita a la banda de conducción, contribuyendo a la conductividad eléctrica. (*b*) Estructura de bandas de un semiconductor tipo *n*, tal como el silicio impurificado con arsénico. Los átomos de impureza proporcionan niveles energéticos completos que están justamente por debajo de la banda de conducción. Estos niveles entregan electrones a la banda de conducción.

Figura 38.23 (*a*) Ilustración esquemática bidimensional del silicio impurificado con galio. Como el galio sólo posee tres electrones de valencia, se produce una vacante en uno de sus enlaces. Como los electrones se mueven hacia la vacante, ésta se desplaza contribuyendo a la conducción de la corriente eléctrica. (*b*) Estructura de bandas de un semiconductor tipo *p* tal como el silicio dopado con galio. Los átomos de impurezas proporcionan niveles energéticos vacíos, justo por encima de la banda de valencia saturada, que aceptan electrones de la banda de valencia.

[1] El efecto Hall se trató en el capítulo 28.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 38.6
¡Inténtelo!

El número de electrones libres en el silicio puro es de unos 10^{10} electrones/cm^3 a las temperaturas ordinarias. Si por cada millón de átomos reemplazamos un átomo de silicio por otro de arsénico, ¿cuántos electrones libres existirán entonces por centímetro cúbico? (La densidad del silicio es 2,33 g/cm^3 y su masa molar es 28,1 g/mol.)

Esquema del problema El número de átomos de silicio por centímetro cúbico, n_{Si} puede determinarse a partir de $n_{Si} = N_A\rho/M$. Por tanto, cada átomo de arsénico contribuye con un electrón libre y el número de electrones aportados por los átomos de arsénico es $10^{-6}\ n_{Si}$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Calcular el número de átomos de silicio por centímetro cúbico	$n_{Si} = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{(2{,}33\ \text{g/cm}^3)(6{,}02\times10^{23}\ \text{átomos/mol})}{28{,}1\ \text{g/mol}}$ $= 4{,}99\times10^{22}\ \text{átomos/cm}^3$
2. Multiplicar n_{Si} por 10^{-6} para obtener el número de átomos de arsénico por centímetro cúbico, que es igual al número añadido de electrones libres por centímetro cúbico.	$n_e = 10^{-6}\ n_s = 4{,}99\times10^{16}\ \text{electrones/cm}^3$

Observación Como el silicio tiene muy pocos electrones libres por átomo, el número de electrones de conducción se incrementa en un factor de unos 5 millones dopando el silicio simplemente con un átomo de arsénico por cada millón de átomos de silicio.

Ejercicio ¿Cuántos electrones libres hay por átomo de silicio en el silicio puro? (*Respuesta*: 2×10^{-13}.)

OPCIONAL

38.6 Uniones y dispositivos semiconductores

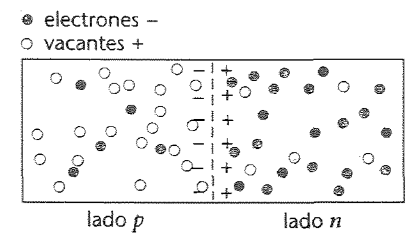


Figura 38.24 Unión *pn*. Debido a la diferencia de sus concentraciones, las vacantes se difunden del lado *p* al *n* y los electrones se difunden del lado *n* al *p*. Como resultado, existe una doble capa de carga en la unión, siendo negativo el lado *p* y positivo el lado *n*.

Los dispositivos semiconductores, tales como diodos y transistores utilizan los semiconductores tipo *p* y tipo *n* del modo indicado en la figura 38.24. En la práctica, los dos tipos de semiconductores se incorporan a menudo en un solo cristal de silicio dopado en un lado por impurezas donadoras y en el otro lado por impurezas aceptoras. La región en la cual el semiconductor cambia de tipo *p* a tipo *n* se denomina **unión**.

Cuando un semiconductor tipo *n* y otro tipo *p* se ponen en contacto, las concentraciones inicialmente desiguales de electrones y vacantes dan lugar a una difusión de electrones a través de la unión desde el lado *n* al lado *p* y de vacantes desde el lado *p* al *n* hasta que se establece el equilibrio. El resultado de esta difusión es un transporte neto de cargas positivas del lado *p* al lado *n*. A diferencia del caso en que dos metales distintos se ponen en contacto, los electrones no pueden propagarse muy lejos de la unión ya que el semiconductor no es particularmente un buen conductor. La difusión de electrones y vacantes crea, por tanto, una doble capa de carga en la unión semejante a la de un condensador de placas paralelas. Existe, por tanto, una diferencia de potencial *V* a través de la unión que tiende a inhibir una difusión posterior. En equilibrio, el lado *n* con su carga neta positiva estará a un potencia superior que el lado *p* con su carga neta negativa. En la región de la unión entre las capas con carga, existirán pocos portadores de carga de uno

www.elsolucionario.net

009197

OPCIONAL

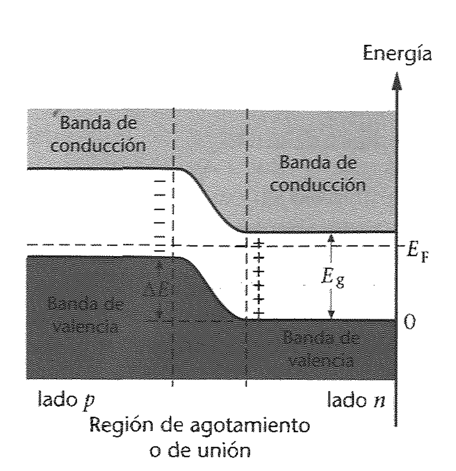


Figura 38.25 Diagrama de niveles energéticos para una unión *pn*.

y otro tipo y, por tanto, esta región posee una elevada resistencia. La figura 38.25 muestra el diagrama de niveles energéticos de una unión *pn*. La región de la unión se llama también **región de agotamiento**, pues está desprovista de portadores de carga.

Diodos

En la figura 38.26 se ha aplicado una diferencia de potencial externa a través de una unión *pn* conectando una batería y una resistencia al semiconductor. Cuando el terminal positivo de la batería se conecta al lado *p* de la unión, como se muestra en la figura 38.26*a*, se dice que la unión está sometida a una **polarización directa**. Este tipo de polarización disminuye el potencial a través de la unión. La difusión de electrones y vacantes se incrementa, por tanto, en un intento de restablecer el equilibrio, dando lugar a una corriente en el circuito.

Si el terminal positivo de la batería se conecta al lado *n* de la unión, como se indica en la figura 38.26*b*, se dice que la unión está **inversamente polarizada**. La polarización inversa tiende a incrementar la diferencia de potencial a través de la unión, inhibiendo, por tanto, la difusión posterior. La figura 38.27 muestra un gráfico de la corriente en función del voltaje para una unión semiconductora típica. Esencialmente, la unión conduce sólo en una dirección. Un dispositivo semiconductor de una sola unión se denomina **diodo**.[1] Los diodos tienen múltiples aplicaciones. Una de ellas es la conversión de la corriente alterna en continua, proceso que se llama rectificación.

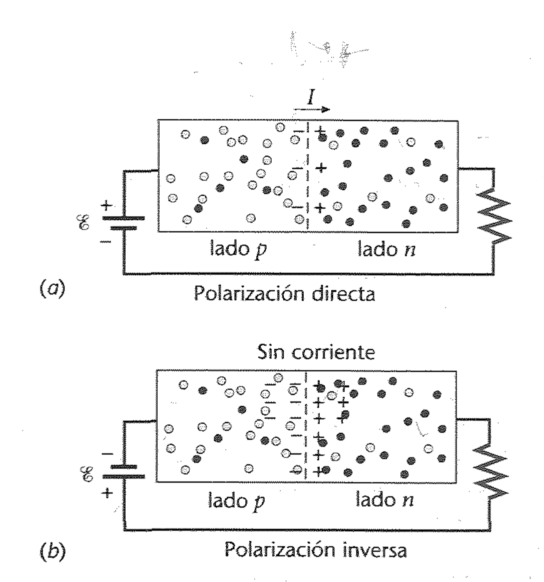


Figura 38.26 Diodo de unión *pn*. (*a*) Unión *pn* con polarización directa. La diferencia de potencial aplicada estimula la difusión de vacantes del lado *p* al *n* y de electrones del lado *n* al *p*, dando lugar a una corriente *I*. (*b*) Unión *pn* con polarización inversa. La diferencia de potencial inhibe la difusión posterior de vacantes y electrones, de modo que no hay corriente.

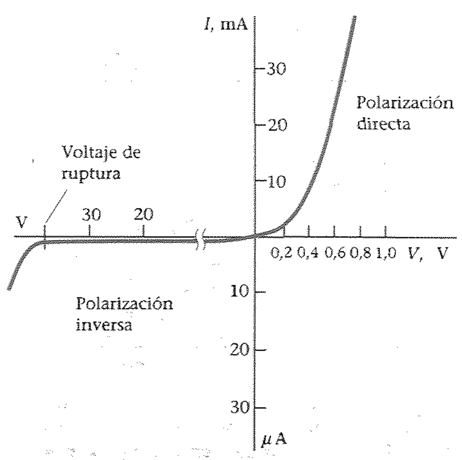
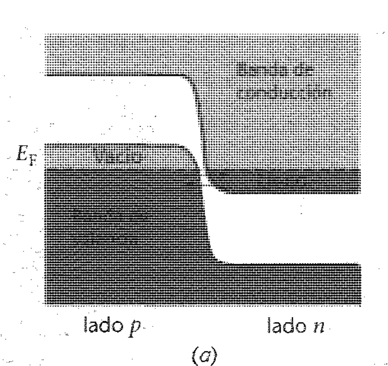


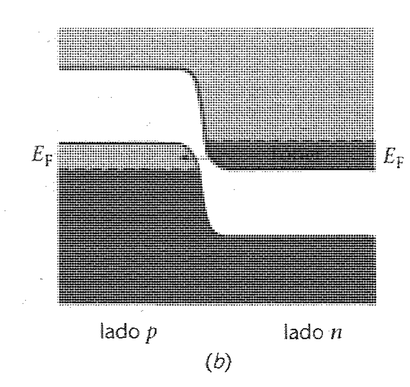
Figura 38.27 Gráfico de la corriente en función del voltaje aplicado a través de una unión *pn*. Obsérvese que las escalas son diferentes en ambos ejes según las condiciones de polarización directa o inversa.

[1] El nombre diodo procede de un tubo de vacío formado por solo dos electrodos que conducen la corriente en un sentido único.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net





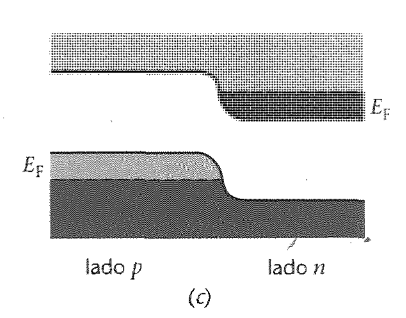


Figura 38.28 Niveles energéticos de los electrones en un diodo túnel de unión *pn* profundamente dopado. (*a*) Sin voltaje de polarización, algunos electrones pasan por efecto túnel en ambas direcciones. (*b*) Con un pequeño voltaje de polarización, la corriente túnel es reforzada en una dirección produciendo una contribución importante a la corriente neta. (*c*) Si el voltaje de polarización crece todavía más, la corriente túnel decrece enormemente.

Obsérvese que la corriente en la figura 38.27 incrementa súbitamente su magnitud en los valores extremos de la polarización inversa. En estos grandes campos eléctricos, los electrones se desprenden de sus enlaces atómicos y se aceleran a través de la unión. A su vez, estos electrones chocan contra otros que también se liberan de sus enlaces. Este efecto se denomina **ruptura por avalancha**. Aunque tal ruptura puede ser desastrosa en un circuito cuando no es esto lo que se pretende, el hecho de que tenga lugar a un voltaje definido específico es de utilidad en el llamado **diodo Zener**.

Un efecto importante que expondremos sólo cualitativamente es el que se presenta cuando los dos lados *n* y *p* de un diodo de unión *pn* están tan intensamente dopados que los donadores del lado *n* proporcionan tantos electrones que la parte inferior de la banda de conducción está prácticamente saturada y los aceptores del lado *p* reciben tantos electrones que la parte superior de la banda de valencia está casi vacía. La figura 38.28*a* muestra el diagrama de niveles energéticos de esta situación. Como la región de agotamiento es ahora tan estrecha, los electrones pueden así penetrar fácilmente la barrera de potencial a través de la unión y pasar por efecto túnel al otro lado. El flujo de electrones a través de la barrera se llama **corriente túnel** y un diodo de este tipo es un **diodo túnel**.

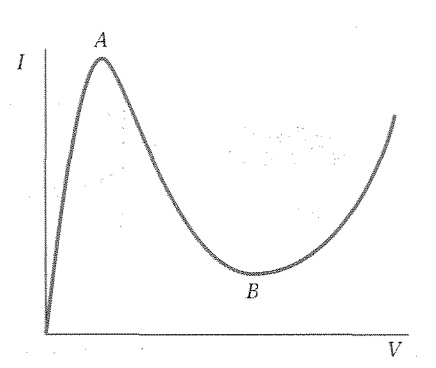


Figura 38.29 Gráfico de la corriente en función del voltaje para un diodo túnel. Hasta el punto A, un incremento en el voltaje polarizador refuerza la corriente túnel. Entre los puntos *A* y *B* el aumento del voltaje de polarización debilita la corriente túnel. Después del punto *B*, el efecto túnel es despreciable y el diodo se comporta como un diodo de unión *pn* ordinario.

En el equilibrio sin polarización existe una corriente túnel idéntica en cada dirección. Cuando se aplica un pequeño voltaje polarizador a través de la unión, el diagrama de niveles energéticos es el indicado en la figura 38.28*b* y la corriente túnel de los electrones del lado *n* al *p* se incrementa mientras que en la dirección opuesta disminuye. Esta corriente túnel junto a la corriente debida a la difusión resulta en una corriente neta considerable. Cuando el voltaje de polarización se incrementa ligeramente, el diagrama de niveles de energía es el que se muestra en la figura 38.28*c* y la corriente disminuye. Aunque la corriente de difusión se incrementa, la corriente neta disminuye. Para grandes voltajes polarizadores, la corriente túnel es totalmente despreciable, y la corriente total crece al crecer el voltaje polarizador debido a la difusión como ocurre en un diodo ordinario de unión *pn*. La figura 38.29 muestra la curva corriente-voltaje de un diodo túnel. Estos diodos se utilizan en circuitos eléctricos debido a su tiempo de respuesta muy rápido. Cuando operan cerca del pico de esta curva, un pequeño cambio del voltaje polarizador da lugar a una gran variación en la corriente.

Otra aplicación del semiconductor de unión *pn* es la **célula solar**, ilustrada esquemáticamente en la figura 38.30. Cuando un fotón de energía superior a la de la banda prohibida (1,1 eV en el silicio) choca contra la región tipo *p*, puede excitar un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción, dejando una vacante en la banda de valencia. Esta región es ya rica en vacantes. Algunos de los electrones creados por los fotones se recombinarán con las vacantes, pero otros emigrarán a la unión. Desde aquí serán acelerados a la región tipo *n* y un exceso de carga positiva en la región tipo *p*. El resultado es una diferencia de potencial entre las dos regiones, que en la práctica es de unos 0,6 V. Si se conecta una resistencia de carga entre las dos regiones pasará por ella una carga eléctrica. Es decir, parte de la energía luminosa incidente se ha convertido en ener-

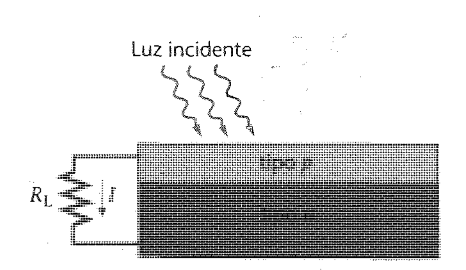


Figura 38.30 Un semiconductor de unión *pn* utilizado como célula solar. Cuando la luz incide sobre la región de tipo *p*, se crean pares electrón-vacante, dando lugar a una corriente a través de la resistencia de carga R_L.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

gía eléctrica. La corriente que circula por la resistencia es proporcional al número de fotones incidentes, el cual es a su vez proporcional a la intensidad de la luz incidente.

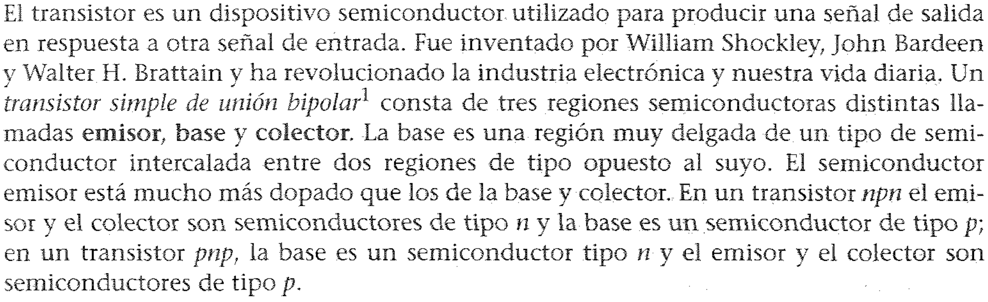
Existen otras muchas aplicaciones de los semiconductores con uniones *pn*. Los detectores de partículas llamados **detectores de barrera superficial** constan de un semiconductor de unión *pn* con una gran polarización inversa, de modo que ordinariamente no hay paso de corriente. Cuando una partícula de alta energía, tal como un electrón, pasa a través del semiconductor, crea muchos pares electrón-vacante a medida que pierde energía. El pulso de corriente resultante señala el paso de la partícula. Los **diodos emisores de luz (LEDs)** son semiconductores de unión *pn* con una gran polarización directa que produce una elevada concentración en exceso de electrones en el lado *p* y vacantes en el lado *n* de la unión. En estas condiciones, el diodo emite luz a medida que los electrones y vacantes se recombinan. Esencialmente este proceso es el inverso de lo que ocurre en un célula solar, en la cual los pares electrón-agujero se crean por absorción de luz. Los LEDs se utilizan corrientemente en las pantallas de relojes digitales y calculadoras.



Diodo emisor de luz, LED (*light-emiting diode*)

OPCIONAL

Transistores



El transistor es un dispositivo semiconductor utilizado para producir una señal de salida en respuesta a otra señal de entrada. Fue inventado por William Shockley, John Bardeen y Walter H. Brattain y ha revolucionado la industria electrónica y nuestra vida diaria. Un *transistor simple de unión bipolar*[1] consta de tres regiones semiconductoras distintas llamadas **emisor**, **base** y **colector**. La base es una región muy delgada de un tipo de semiconductor intercalada entre dos regiones de tipo opuesto al suyo. El semiconductor emisor está mucho más dopado que los de la base y colector. En un transistor *npn* el emisor y el colector son semiconductores de tipo *n* y la base es un semiconductor de tipo *p*; en un transistor *pnp*, la base es un semiconductor tipo *n* y el emisor y el colector son semiconductores de tipo *p*.

Las figuras 38.31 y 38.32 muestran, repectivamente, un transistor *pnp* y un transistor *npn* con los símbolos utilizados para representar cada transistor en diagramas de circuitos. Como puede verse, cada transistor consta de dos uniones *pn*. Veremos la operación de un transistor *pnp*. La operación de un transistor *npn* es semejante.

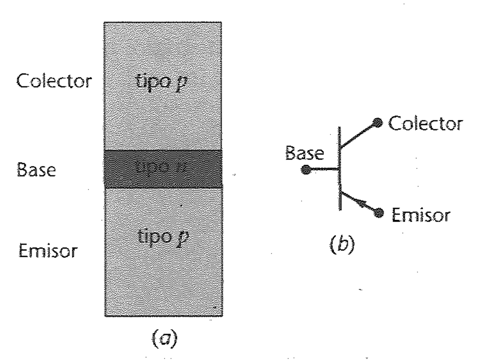


Figura 38.31 Transistor *pnp*. (*a*) El emisor intensamente impurificado emite vacantes que pasan a través de la delgada base al colector. (*b*) Símbolo de un transistor *pnp* en un circuito. La flecha apunta en la dirección convencional de la corriente, que es la misma que poseen las vacantes emitidas.

En una operación normal, la unión emisor-base está polarizada directamente y la unión base-colector está polarizada inversamente. El emisor tipo *p* dopado intensamente emite vacantes que fluyen a través de la unión emisor-base hacia la base. Como ésta es muy delgada, la mayor parte de estas vacantes fluyen a través de la base al colector. Este flujo constituye una corriente I_c del emisor al colector. Sin embargo, algunas de las vacantes se recombinan en la base produciendo una carga positiva que inhibe el flujo posterior de la corriente. Para evitar esto, parte de las vacantes que no alcanzan el colector son extraídos como una corriente de base I_b en un circuito conectado a la base. En la figura 38.33, por tanto, I_c es aproximadamente, pero no completamente, igual a I_e y I_b es mucho menor que I_c o I_e. Es costumbre expresar I_c en la forma

$$I_c = \beta I_b \tag{38.34}$$

en donde β se denomina **ganancia de corriente** del transistor. Los transistores pueden tener valores de β desde 10 hasta varios centenares.

La figura 38.34 muestra un simple transistor *pnp* como amplificador. En serie con el voltaje de polarización V_{eb} hay conectado un pequeño voltaje de entrada v_S variable con el tiempo. La corriente de base es, por tanto, la suma de una corriente estacionaria I_b producida por el voltaje polarizador V_{eb} y una corriente variable i_b debida al voltaje de señal de entrada v_s. Como v_s en cualquier instante puede ser positivo o negativo, el voltaje polarizador V_{eb} debe ser suficientemente grande para asegurar que en todo momento existe una polarización directa en la unión emisor-base. La corriente del colector está formada por dos componentes: una corriente continua $I_c = \beta I_b$ y una corriente

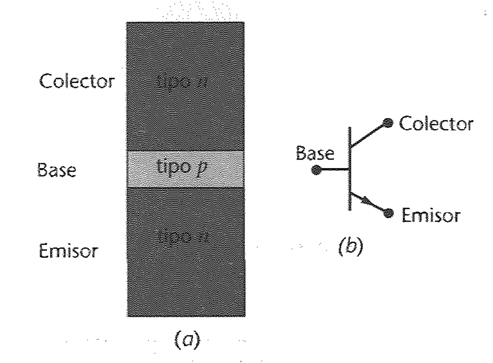


Figura 38.32 Transistor *npn*. (*a*) El emisor intensamente impurificado emite electrones que pasan a través de la delgada base al colector. (*b*) Símbolo de un transistor *npn*. La flecha apunta en la dirección convencional de la corriente, que es la opuesta a la dirección de los electrones emitidos.

[1] Además del transistor de unión bipolar existen otras categorías de transistores, en especial los *transistores de efecto de campo*.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Explorando la naturaleza

Circuitos integrados

Los circuitos integrados (IC; también llamados chips) combinan dispositivos electrónicos "activos" (transistores y diodos) con otros "pasivos" (condensadores y resistencias) sobre un cristal semiconductor. Algunos chips que contienen el equivalente de cientos de miles de transistores pueden estar contenidos en una superficie de unos pocos milímetros cuadrados y conectados a docenas de conductores (figuras E38.1 y E38.2). Aunque al chip pueden incorporarse resistencias, condensadores y conductores (figura E38.3), no se ha encontrado ningún medio para fabricar directamente inductores (el componente pasivo restante de un circuito) sobre un circuito integrado; normalmente se simulan sobre otro circuito o se añaden a un chip como componentes discretos.

Una tecnología de estado sólido que se presta especialmente a la integración a gran escala es la formada por metal-óxido-semiconductor (tecnología MOS). Los transistores MOS se construyen calentando una oblea de silicio puro a unos 1000 °C para formar una capa de dióxido de silicio en su superficie (figuras E38.4 y E38.5). Sobre ésta se deposita una fotorresistencia y se expone a la luz a través de una máscara. Las ventanas de fotorresistencia

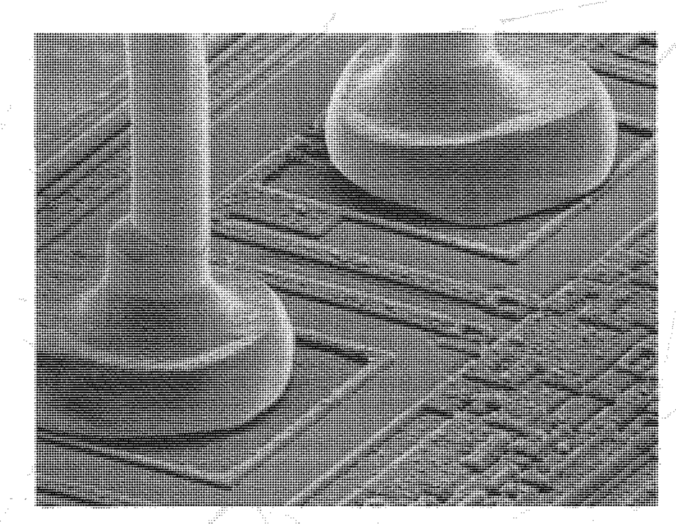


Figura E38.2 Micrografía obtenida con un microscopio electrónico de barrido en donde se ven dos cables conductores enlazados con precisión en el borde de un chip (aumento × 163).

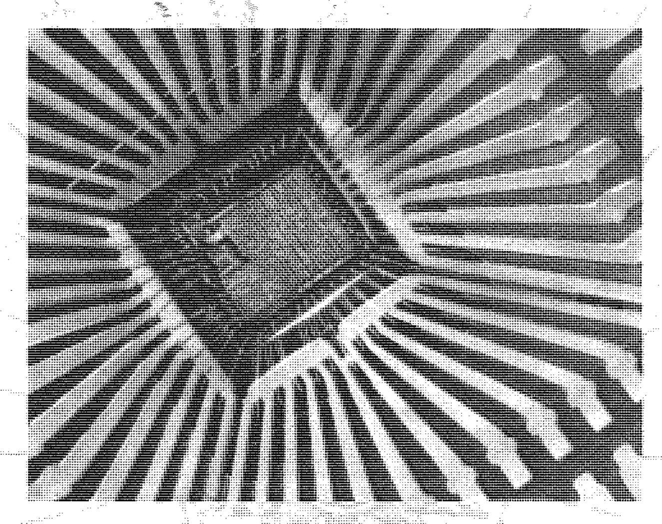


Figura E38.1 Chip utilizado para programar señales de datos y de voz digitalizada de modo que puedan compartir una sola línea de transmisión. Este chip está conectado a 44 cables conductores y posee un tamaño real de 6,4 mm cuadrados.

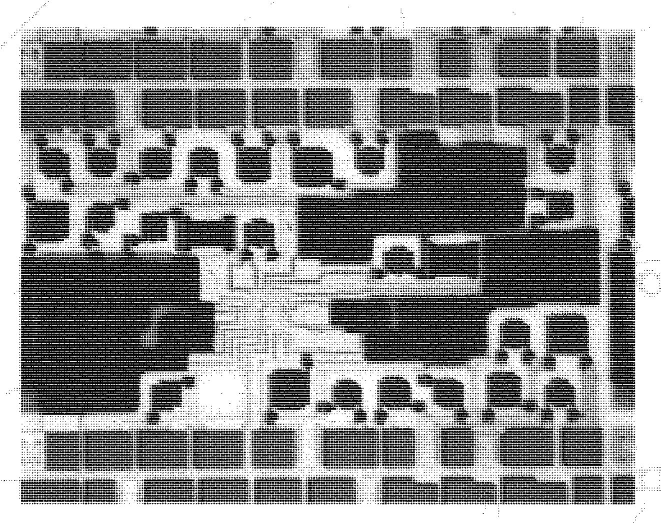


Figura E38.3 Condensadores (bloques de color naranja), resistencias (bloques marrones y serpeantes líneas negras) y conductores (líneas doradas) sobre una base cerámica, formada aquí por películas metálicas cuyo espesor es de unas pocas décimas de micrómetro.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

expuestas (con máscara) son tratadas con un revelador y el dióxido de silicio eliminado con ácido. Las áreas expuestas (sin ácido) son resistentes al revelador y no vienen afectadas. La oblea se calienta de nuevo y se impurifica mediante un proceso de difusión de tipo *p*, formando uniones *pn* en el silicio tipo *p*. El chip se cubre con un metal de contacto (típicamente aluminio) que se une al SiO_2 formado de nuevo en las ventanas mientras el chip se calentaba y dopaba. El propio metal de contacto se modela en un proceso final de fotograbado. Los microchips completos se fabrican por elaboración de este proceso, utilizando múltiples máscaras.

Los circuitos integrados que utilizan las propiedades magnéticas de los materiales pueden utilizarse como memoria digital estable. Los chips de memoria de burbuja magnética son una analogía en circuito integrado de los discos y cintas de registro (figura E38.6). En un cristal de memoria de granate en película delgada, las "burbujas" magnéticas se crean cuando el granate se sitúa entre dos imanes permanentes. Representan regiones cuya polaridad magnética apunta en una dirección opuesta a la del cristal que les rodea. Mediante un campo magnético externo adicional se manipula la posición de las burbujas. (El granate es fácil de imanar, hacia arriba o hacia abajo, a lo largo de un eje particular, pero difícil de imanar perpendicularmente a dicho eje. Esta propiedad es necesaria para la formación y movimiento de las burbujas.) Las posiciones de almacenamiento de las burbujas se establecen utilizando una capa de material ferromagnético depositado sobre la superficie del cristal; la presencia o ausencia de una burbuja en un lugar puede utilizarse para representar un dígito binario de datos (bit).

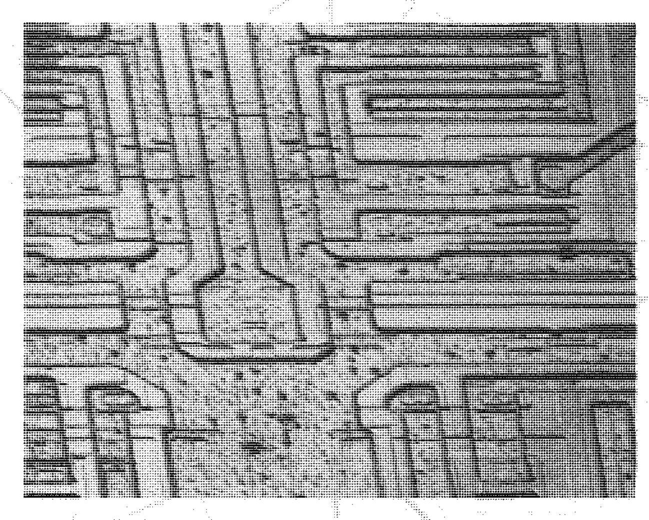


Figura E38.4 Micrografía obtenida por un microscopio electrónico de barrido de transistores metal-óxido-semiconductor (MOS) en capas estructuradas (aumento: × 106).

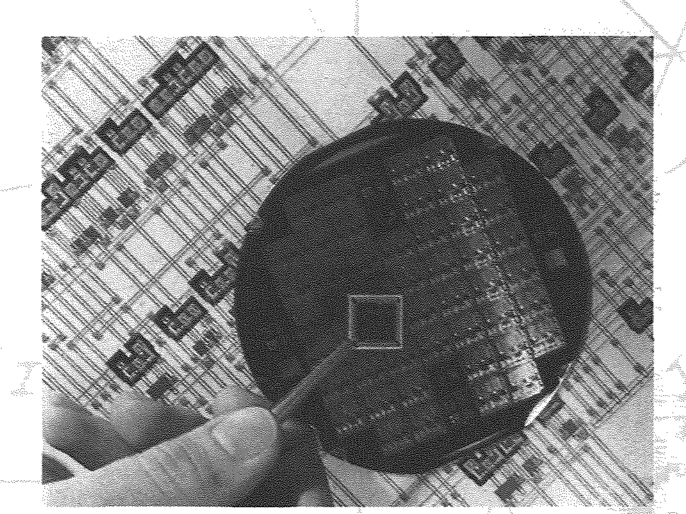


Figura E38.5 El chip sostenido por las pinzas contiene 150 000 transistores. Debajo del mismo hay una oblea de silicio de 4 pulgadas de anchura todavía no recortada en la cual se han fabricado simultáneamente un grupo de chips. Al fondo puede verse un detalle del plano de los circuitos del chip.

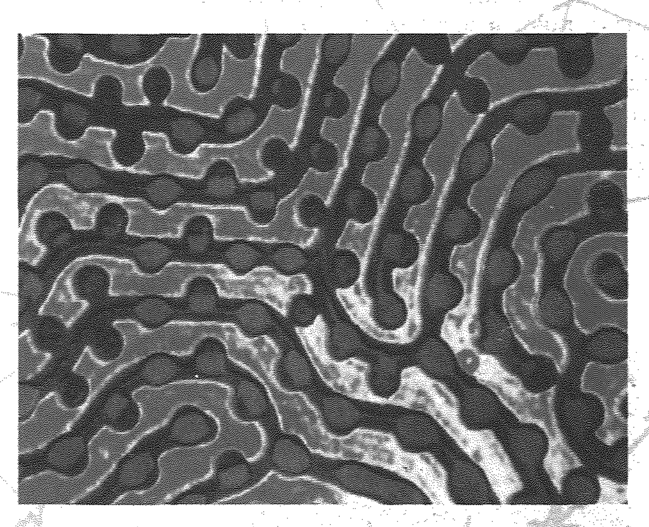


Figura E38.6 Los dominios magnéticos ("burbujas", realmente cilindros vistos en sección transversal) azules en esta micrografía de vídeo, fluyen a lo largo de canales en un cristal de memoria de granate en película delgada. Las burbujas se crean cuando el granate se sitúa entre dos imanes permanentes. Las posiciones de almacenamiento de las burbujas se establecen mediante una capa de material ferromagnético depositada sobre la superficie del cristal; la presencia o ausencia de una burbuja en una posición puede utilizarse para representar un bit de datos.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Explorando la naturaleza

Dispositivos de carga acoplada

Los dispositivos de carga acoplada (DCAs) son semiconductores sensibles a la luz en la vanguardia de la tecnología de imágenes. Son eficientes y rápidos y su salida es fácilmente almacenada electrónicamente para su procesado en un ordenador. Típicamente, una proporción del 40 al 80% de los fotones incidentes en una superficie DCA se convierten en una señal eléctrica que puede almacenarse; esto permite tiempos cortos de exposición y un umbral de detección muy bajo. Este umbral puede compararse con el 2 o 3% de los fotones incidentes que reaccionan con los átomos sensibles a la luz de una película fotográfica produciendo gránulos que pueden revelarse. Además, a diferencia de lo que ocurre en una película fotográfica, la respuesta de un DCA es directamente proporcional a la cantidad de luz incidente, haciendo posible una medida de datos mucho más precisa. Las redes de DCAs utilizadas como receptores pueden aumentar ampliamente la capacidad de los telescopios ópticos.

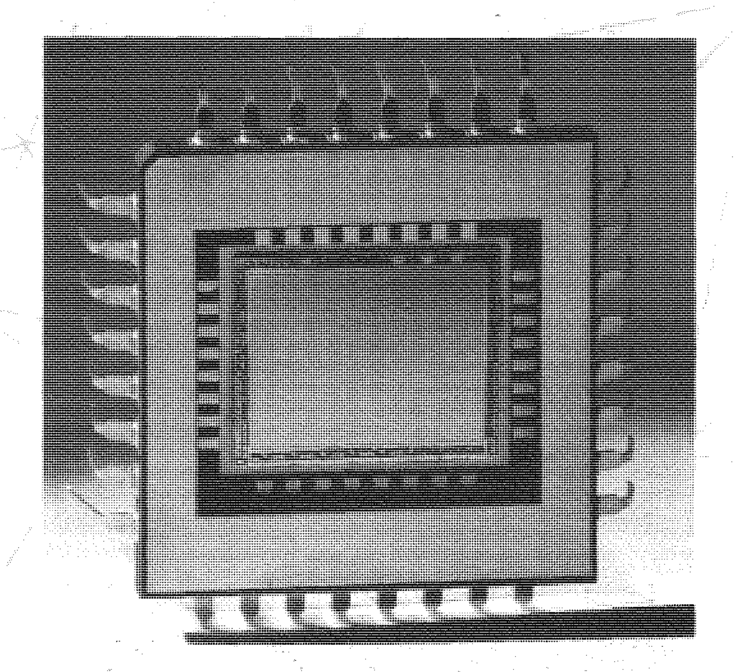


Figura E38.2 Chip DCA de siliciuro de platino que responde a las longitudes de onda del infrarrojo. Contiene áreas fotosensibles en una red de 320 por 244.

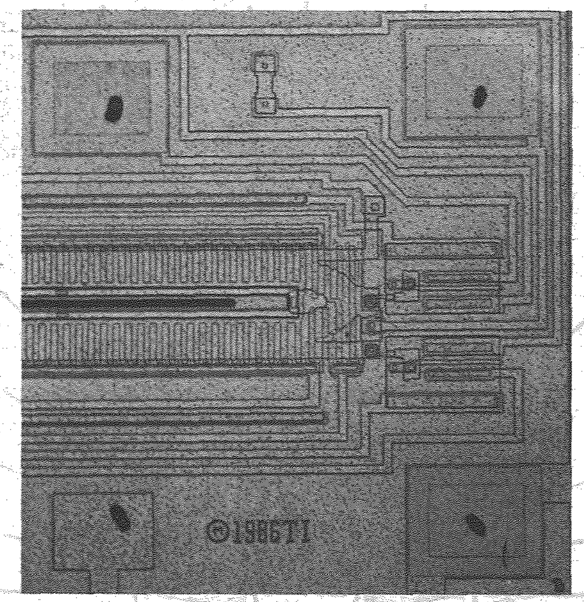


Figura E38.1 Primer plano de parte de un dispositivo DCA. La barra horizontal que emerge desde la izquierda es el área fotosensible ("pixel"[1]). Los segmentos verticales arriba y abajo ("registro de transmisiones") contienen la sucesión de electrodos que transmimten los paquetes de carga acumulados a lo largo de una línea de pozos de potencial, de izuqierda a derecha, depositándoles eventualmente en un amplificador localizado en la porción derecha central del chip.

Un DCA es un semiconductor de tres capas. La capa superior está formada por una serie de electrodos metálicos (véase figura E38.1); la capa del fondo es un cristal de silicio; y la capa del medio es un aislante que separa las otras dos. La luz que choca contra el silicio en el semiconductor libera electrones que se acumulan en los pozos de potencial que se encuentran en la superficie del silicio (figura E38.2). Cada pozo en la red bidimensional de la superficie del silicio almacena una cantidad de carga que es proporcional al número de fotones que chocan contra la superficie en la región del pozo. La carga se vierte electrónicamente en un ordenador que registra la localización y cantidad de carga en cada pozo. Un monitor de TV convencional puede utilizarse para reconstruir la imagen original.

La figura E38.3 muestra una imagen DCA de dos galaxias obtenidas con un procesado mínimo de ordenador. En las figuras E38.4 a E38.6 se han procesado los mismos datos que dieron lugar a la imagen de la figura E38.3 con técnicas distintas para revelar detalles diferentes.

1 N.d.T. Un *pixel* es el menor de los elementos de una imagen al que se puede aplicar individualmente un color o una intensidad.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Figura E38.3 Imagen DCA no procesada de la galaxia espiral Messier 51 y otra galaxia compañera.

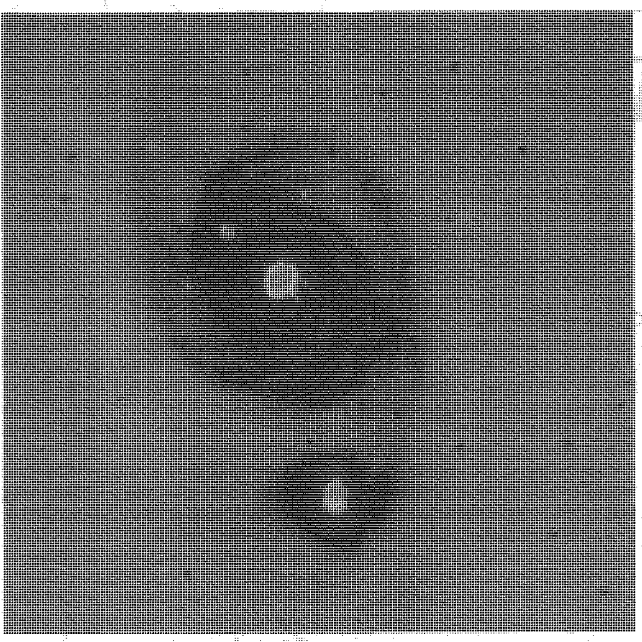


Figura E38.5 Imagen generada, como la figura 4, a partir de los datos de la figura 3, reforzada y coloreada por el ordenador.

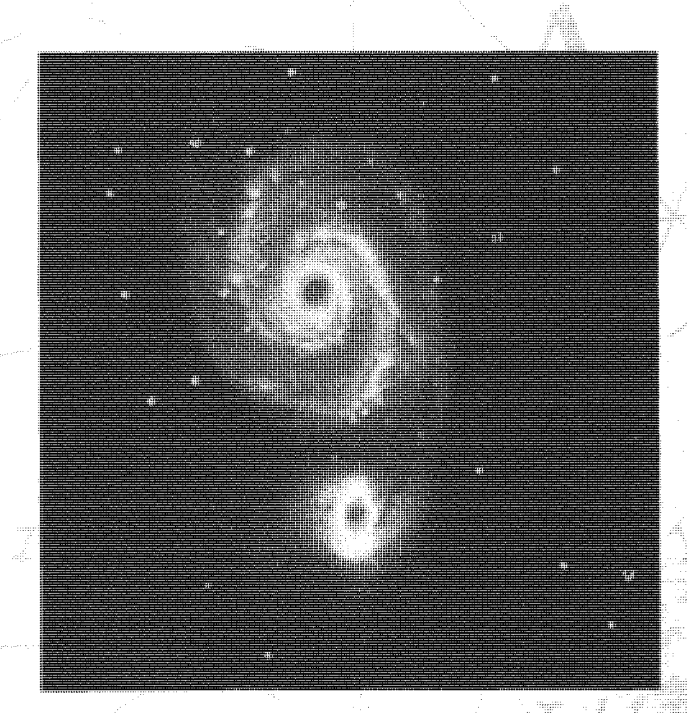


Figura E38.4 Imagen generada a partir de los datos contenidos en la figura 3 en colores falsos que se han asignado de acuerdo con los intervalos de intensidad distintos.

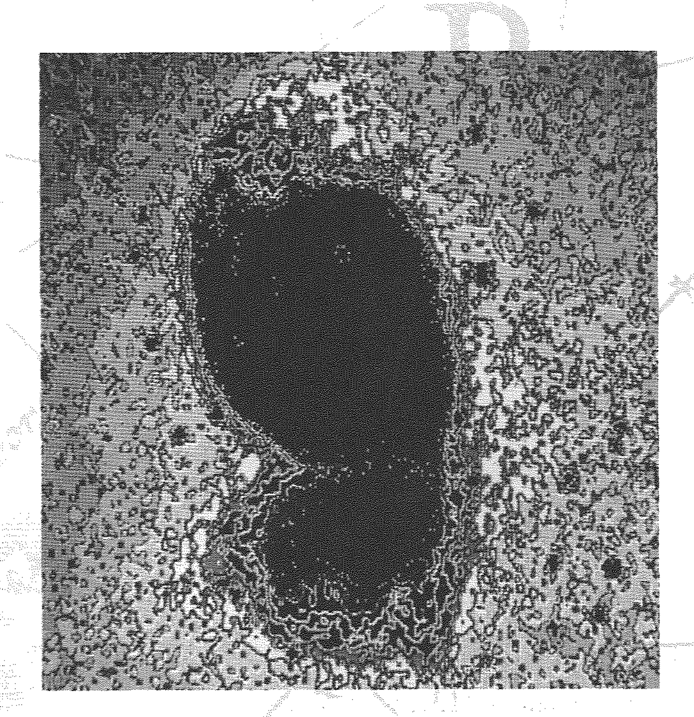


Figura E38.6 Esta vez la imagen se ha procesado con contraste máximo y contorneada para mostrar los detalles de los bordes exteriores de las galaxias.



www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

OPCIONAL

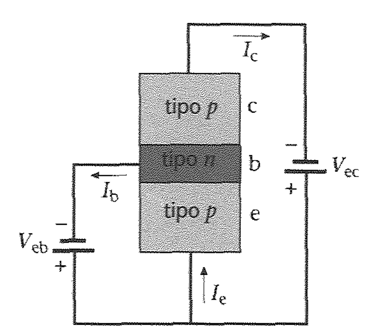


Figura 38.33 Un transistor *pnp* polarizado para operación normal. Las vacantes creadas en el emisor pueden difundir fácilmente a través de la base, que tiene un espesor de solamente unas decenas de nanómetros. La mayor parte de las vacantes fluye hacia el colector y producen la corriente I_c.

alterna $i_c = \beta i_b$. Así tenemos un amplificador de corriente en el cual la corriente de salida i_c, variable con el tiempo, es β veces la corriente de entrada i_b. En este amplificador, las corrientes estacionarias I_c e I_b, aunque esenciales en la operación del transistor, no son usualmente de interés. El voltaje de la señal de entrada v_S está relacionado con la corriente de la base por la ley de Ohm:

$$i_b = \frac{v_s}{R_b + r_b} \qquad (38.35)$$

en donde r_b es la resistencia interna del transistor entre la base y el emisor. De igual modo, la corriente del colector i_c produce un voltaje v_L a través de la salida o resistencia de carga R_L dada por

$$v_L = i_c R_L \qquad (38.36)$$

Utilizando las ecuaciones 38.34 y 38.35 tenemos

$$i_c = \beta i_b = \beta \frac{v_s}{R_b + r_b}$$

El voltaje de salida está, por tanto, relacionado con el voltaje de entrada por

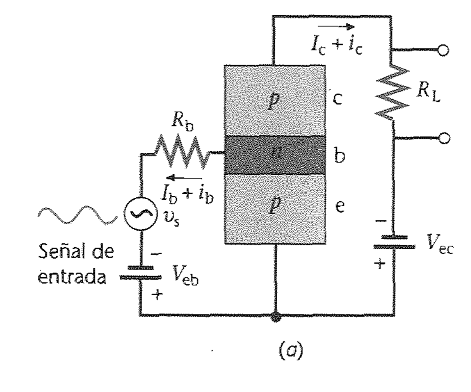
$$v_L = \beta \frac{R_L}{R_b + r_b} v_s \qquad (38.37)$$

La relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada es la **ganancia de voltaje** del amplificador:

$$\text{Ganancia de voltaje} = \frac{v_L}{v_s} = \beta \frac{R_L}{R_b + r_b}$$

Un amplificador típico, tal como el de un vídeo, posee varios transistores semejantes al de la figura 38.34 conectados en serie, de modo que la salida de un transistor sirve de entrada al siguiente. Así, el voltaje muy débil provocado por el paso de la cinta magnética por las cabezas del fonocaptor controla la gran cantidad de potencia requerida para accionar los altavoces. La potencia suministrada a los micrófonos procede de las fuentes de cc conectadas a cada transistor.

La tecnología de los semiconductores se extiende mucho más allá de los transistores y diodos individuales. Muchos de los dispositivos electrónicos que utilizamos habitualmente, como los ordenadores de bolsillo y los procesadores que gobiernan las operaciones de vehículos y aparatos, se basan en la integración a gran escala de múltiples transistores y otros componentes de circuito en un solo "chip". La integración a gran escala, combinada con conceptos avanzados en la teoría de semiconductores ha creado una nueva generación de instrumentos para la investigación científica; véase las secciones "Explorando la naturaleza" que se exponen en las páginas 1266 a 1269.



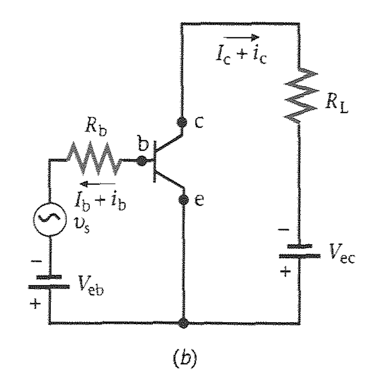


Figura 38.34 (*a*) Transistor *pnp* utilizado como amplificador. Un pequeño cambio i_b en la corriente de base da lugar a un gran cambio i_c en la corriente del colector. Así, una pequeña señal en el circuito de base produce una gran señal en la resistencia de carga R_L en el circuito colector. (*b*) El mismo circuito de (*a*) con el símbolo convencional del transistor.

www.elsolucionario.net

Resumen

1. Los átomos se encuentran usualmente en la naturaleza enlazados entre sí formando moléculas o en las redes de sólidos cristalinos.
2. Los enlaces iónicos y covalentes son los mecanismos principales responsables de la formación de moléculas. Los enlaces de van der Waals y los enlaces metálicos son importantes en la formación de líquidos y sólidos. Los enlaces de hidrógeno permiten que las grandes moléculas biológicas mantengan su forma.
3. Como los átomos, las moléculas emiten radiación electromagnética cuando verifican una transición de un estado energético más alto a otro más bajo. La energía interna de una molécula puede separarse en tres partes: electrónica, vibratoria y rotatoria.
4. Las moléculas en los líquidos se caracterizan por un orden temporal de corto alcance. Las moléculas o iones en los sólidos poseen un orden más estable. Los sólidos amorfos mantienen un orden de corto alcance semejante al de los líquidos. Los sólidos cristalinos exhiben un orden de largo alcance determinado por su estado energético de mínimo potencial.

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	TEMA
	1. Mecanismos de enlace
Los enlaces iónicos tienen lugar cuando un electrón se transfiere de un átomo a otro, dando lugar a un ion positivo y otro negativo que se enlazan mutuamente.	Iónico
El enlace covalente es un efecto mecánico-cuántico que surge de la compartición de uno o más electrones por los átomos.	Covalente
Los enlaces de van der Waals son enlaces débiles que resultan de la interacción de los momentos dipolares eléctricos instantáneos de las moléculas.	van der Waals
Los enlaces (o puentes) de hidrógeno resultan de la compartición de un átomo de hidrógeno por otros átomos.	Hidrógeno
En el enlace metálico, los iones de la red positiva del metal se mantienen unidos por una nube de carga negativa compuesta por electrones libres.	Metálico
Una molécula diatómica formada por dos átomos idénticos, tal como O_2, posee un enlace covalente. El enlace de dos átomos diferentes es frecuentemente una mezcla de enlaces covalente y iónico. El porcentaje del enlace iónico puede determinarse partir de la relación entre el momento dipolar eléctrico medido y el momento dipolar eléctrico iónico definido por $$p_{\text{iónico}} = er_0 \qquad (38.5)$$ en donde r_0 es la separación de equilibrio de los iones.	Mixto
Las formas de moléculas poliatómicas tales como H_2O y NH_3 pueden explicarse a partir de la distribución espacial de las funciones de onda del orbital atómico o del orbital molecular. La naturaleza tetravalente del átomo de carbono es un resultado de la hibridación de los orbitales atómicos 2s y 2p.	**2. Moléculas poliatómicas (opcional)**
	3. Moléculas diatómicas
$$I = \mu r_0^2 \qquad (38.14)$$	Momento de inercia
en donde r_0 es la separación de equilibrio y μ la masa reducida: $$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (38.15)$$	Masa reducida
$$E = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell+1)E_{0r} \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad (38.12)$$	Niveles energéticos de rotación
donde $E_{0r} = \hbar^2/2I$. (38.13)	

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Niveles energéticos de vibración

$$E_\upsilon = (\upsilon + \tfrac{1}{2})hf \qquad \upsilon = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{38.18}$$

Constante de fuerza efectiva K

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}} \tag{38.19}$$

4. Espectros moleculares Los espectros ópticos de las moléculas poseen una estructura de vandas debida a las transiciones entre niveles rotacionales. Puede encontrarse información respecto a la estructura y enlace de una molécula a partir de su espectro de absorción vibratorio y rotacional, debido a transiciones entre niveles de vibración y rotación. Estas transiciones obedecen las reglas de selección

$$\Delta\upsilon = \pm 1, \qquad \Delta\ell = \pm 1$$

5. Estructura cristalina de sólidos Los sólidos aparecen frecuentemente en forma cristalina con una pequeña estructura llamada celda unitaria que se repite en todas direcciones. Un cristal puede tener una estructura cúbica centrada en las caras, cúbica centrada en el cuerpo, hexagonal compacta o de otro tipo que depende del tipo de enlace entre los átomos, iones o moléculas en el cristal y de los tamaños relativos de los átomos si son distintos, como ocurre en el NaCl.

Energía potencial

$$U = -\alpha\frac{ke^2}{r} + \frac{A}{r^n} \tag{38.29}$$

en donde r es la distancia de separación entre los iones vecinos, α es la constante de Madelung, la cual depende de la geometría del cristal y es del orden de 1,8, y n vale aproximadamente 9.

6. Semiconductores con impurezas La conductividad de un semiconductor puede incrementarse grandemente por dopado. En un semiconductor tipo n, el dopado añade electrones justo por debajo de la banda de conducción. En un semiconductor tipo p, las vacantes se adicionan justo por encima de la banda de valencia.

7. Dispositivos semiconductores (opcional)

Unión: Los dispositivos semiconductores, tales como diodos y transistores, son combinaciones acopladas de semiconductores tipo p y tipo n. Los dos tipos de semiconductores suelen estar constituidos por un cristal puro de silicio dopado con impurezas donadoras en un lado y aceptoras en el otro. La región donde el semiconductor cambia de tipo p a tipo n constituye una unión. Las uniones se utilizan en diodos, células solares, detectores de barrera superficial, LEDs y transistores.

Diodo: Un diodo es un dispositivo de una sola unión que transporta corriente en un sentido único.

Diodo Zener: Un diodo Zener es un diodo con una alta polarización inversa. Presenta ruptuta por avalancha a voltajes definidos, por lo que se lo utiliza como un estándar de referencia de voltaje.

Diodo túnel: Un diodo túnel es un diodo profundamente dopado, de modo que los electrones pasan por efecto túnel a través de la barrera de agotamiento. Operando normalmente, un pequeño cambio en el voltaje de polarización da lugar a un cambio importante de corriente.

Transistores: Un transistor consta de un semiconductor muy delgado de un tipo, intercalado entre dos semiconductores del tipo opuesto. Los transistores se utilizan en amplificadores, ya que una pequeña variación en la corriente de base da lugar a una gran variación en la corriente del colector.

www.elsolucionario.net

Guía de resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Enlace molecular	
Calcular la energía debida a la repulsión de dos iones en una molécula iónica.	La energía de disociación es igual a la energía potencial total, es decir, igual a la suma de la energía electrostática de atracción, la energía de repulsión y la energía requerida para la formación de los iones. **Ejemplo 38.1**
2. Moléculas diatómicas	
Determinar la masa reducida	Utilizar $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ **Ejemplo 38.2**

www.elsolucionario.net

Utilizar $E_{0r} = \hbar^2/2I$ con $I = \frac{1}{2} m r_0^2$	Ejemplo 38.3		Determinar la energía rotacional característica
Utilizar $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{u}}$	Ejemplo 38.4		Determinar la constante de fuerza efectiva dada la frecuencia de vibración
		3.	Sólidos
Suponer que cada ion ocupa un volumen cúbico de lado r_0. Después calcular r_0 a partir de la densidad y la masa molecular.	Ejemplo 38.5		Estimar el espaciado de equilibrio de los iones en un cristal iónico.
Calcular el número de átomos de impurezas por centímetro cúbico.	Ejemplo 38.6		Determinar el número de electrones libres por centímetro cúbico en un semiconductor impurificado

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Enlace molecular

• **1** ¿Es la molécula NaCl polar o no polar?

• **2** ¿Es la molécula N_2 polar o no polar?

• **3** ¿Se presenta el neón naturalmente como Ne o Ne_2? ¿Por qué?

• **4** ¿Qué tipo de enlace presentan
(a) HF **(b)** KBr **(c)** N_2?

• **5** ¿Qué tipo de enlace poseen
(a) la molécula N_2
(b) la molécula KF
(c) los átomos de Ag en un sólido?

• **6** Calcular la separación de los iones Na^+ y Cl^- para los cuales la energía potencial es –1,52 eV.

• **7** La energía de disociación del Cl_2 es 2,48 eV. Considerar la formación de una molécula de NaCl de acuerdo con la reacción

$$Na + \tfrac{1}{2}\, Cl_2 \rightarrow NaCl$$

¿Se absorbe o se libera energía en esta reacción? ¿Cuánta energía se absorbe o se libera por molécula?

• **8** La energía de disociación se expresa a veces en kilocalorías/mol.
(a) Determinar la relación entre las unidades eV/molécula y kcal/mol.
(b) Determinar la energía de disociación de la molécula NaCl en kcal/mol.

• **9** La separación de equilibrio de la molécula HF es 0,0917 nm y su momento dipolar eléctrico es $6{,}40 \times 10^{-30}$ C·m. ¿Qué porcentaje del enlace es iónico?

• **10** Resolver el problema 9 para el CsCl, para el cual la separación de equilibrio es 0,291 nm y el momento dipolar eléctrico medido es $3{,}48 \times 10^{-29}$ C·m.

•• **11** La energía de disociación del LiCl es 4,86 eV y la separación de equilibrio es 0,202 nm. La afinidad electrónica del cloro es 3,62 eV, y la energía de ionización del litio es 5,39 eV. Determinar la energía de repulsión del núcleo de LiCl.

•• **12** La separación de equilibrio de los iones K^+ y Cl^- en el KCl es aproximadamente 0,267 nm.
(a) Calcular la energía potencial de atracción de los iones suponiendo que para esta separación son cargas puntuales.
(b) La energía de ionización del potasio es 4,34 eV y la afinidad electrónica del Cl es 3,62 eV. Determinar la energía de disociación, despreciando toda energía de repulsión. (Véase figura 38.1.) La energía de disociación medida es 4,49 eV. ¿Cuál es la energía debida a la repulsión de los iones a la separación de equilibrio?

•• **13** Indicar el valor medio de r para dos niveles de vibración en la curva de energía potencial para una molécula diatómica y demostrar que debido a la asimetría de la curva, r_m se incrementa con el crecimiento de la energía de vibración creciente, y por tanto, los sólidos se expansionan al elevar su temperatura.

•• **14** Calcular la energía potencial de atracción entre los iones Na^+ y Cl^- a la separación de equilibrio $r_0 = 0{,}236$ nm y comparar este resultado con la energía de disociación dada en la figura 38.1. ¿Cuál es la energía debida a la repulsión de los iones en la separación de equilibrio?

•• **15** La separación de equilibrio de los iones K^+ y F^- en el KF es aproximadamente 0,217 nm.
(a) Calcular la energía potencial de atracción de los iones, suponiendo que a esta separación pueden considerarse como cargas puntuales.
(b) La energía de ionización del potasio es 4,34 eV y la afinidad electrónica de F es 3,40 eV. Determinar la energía de disociación despreciando cualquier energía de repulsión.
(c) La energía de disociación medida es 5,07 eV. Calcular la energía debida a la repulsión de los iones en la separación de equilibrio.

••• **16** Suponer que la repulsión nuclear puede representarse por una energía potencial de la forma $U_{rep} = C/r^n$, de modo que la energía potencial total es

$$U = -\frac{ke^2}{r} + \frac{C}{r^n} + \Delta E$$

Utilizar la condición $dU/dr = 0$ para $r = r_0$ y los resultados de U_{rep} en $r = r_0$ para determinar C y n según el problema 11.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

••• **17**

(a) Determinar U_{rep} para $r = r_0$ en el NaCl.
(b) Suponer $U_{rep} = C/r^n$ y determinar C y n para NaCl. (Véase problema 16.)

Moléculas poliatómicas (opcional)

• **18** Buscar otros elementos que posean la misma configuración electrónica de subcapa en los dos orbitales más extremos que el carbono. ¿Tendrán estos elementos el mismo tipo de hibridación que el carbono?

Niveles energéticos y espectros de las moléculas diatómicas

• **19** ¿Qué relación existe entre la constante de fuerza efectiva calculada para la molécula de CO en el ejemplo 38.4 y la constante de fuerza de un muelle ordinario?

• **20** Explicar por qué el momento de inercia de una molécula diatómica crece ligeramente con el momento angular creciente.

• **21** La energía rotacional característica E_{0r} de la molécula N_2 es $2{,}48 \times 10^{-4}$ eV. Con este dato determinar la distancia de separación de los átomos N en N_2.

• **22** La separación de los átomos O en O_2 es realmente algo mayor que el valor 0,1 nm utilizado en el ejemplo 38.3 y la energía característica de rotación E_{0r} es $1{,}78 \times 10^{-4}$ eV en lugar del resultado obtenido en el mismo ejemplo. Utilizar este valor para calcular la distancia de separación de los átomos de O en O_2.

•• **23** Demostrar que la masa reducida es menor que cualquiera de las masas de la molécula diatómica y calcular su valor para

(a) H_2 **(b)** N_2 **(c)** CO y **(d)** HCl.

Expresar los resultados en unidades de masa unificada.

• **24** La separación de equilibrio entre los núcleos de la molécula LiH es 0,16 nm. Determinar la separación energética entre los niveles de rotación $\ell = 3$ y $\ell = 2$ de esta molécula diatómica.

•• **25** Repetir el problema 24 para LiD, en donde D es el símbolo del deuterio. Obsérvese que reemplazando el protón por el deuterón no cambia la separación de equilibrio entre los núcleos de la molécula.

•• **26** Deducir las ecuaciones 38.14 y 38.15 para el momento de inercia en función de la masa reducida de una molécula diatómica.

•• **27** Utilizar la separación de los iones K^+ y Cl^- dados en el problema 12 y la masa reducida del KCl para calcular la energía rotacional característica E_{0r}.

•• **28** La frecuencia central de la banda de absorción del HCl mostrada en la figura 38.17 corresponde a $f = 8{,}66 \times 10^{13}$ Hz y los picos de absorción están separados aproximadamente por $\Delta f = 6 \times 10^{11}$ Hz. Utilizar esta información para determinar

(a) la energía de vibración más baja (punto cero) del HCl,
(b) el momento de inercia del HCl y
(c) la separación de equilibrio de los átomos.

•• **29** Calcular la constante de fuerza efectiva del HCl a partir de su masa reducida y la frecuencia vibratoria fundamental obtenida de la figura 38.17.

•• **30** Dos objetos de masas m_1 y m_2 se fijan a un muelle de constante de fuerza K y distancia de equilibrio r_0.

(a) Demostrar que cuando m_1 se desplaza una distancia Δr_1 del centro de masas, la fuerza ejercida por el muelle es

$$F = -K\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)\Delta r_1$$

(b) Demostrar que la frecuencia angular de oscilación es $f = (1/2\pi)\sqrt{K/\mu}$, en donde μ es la masa reducida.

••• **31** Calcular la masa reducida de las moléculas $H^{35}Cl$ y $H^{37}Cl$ y la diferencia fraccional $\Delta\mu/\mu$. Demostrar que la mezcla de isótopos en HCl conduce a una diferencia fraccional en la frecuencia de transición de un estado a otro de rotación dada por $\Delta f/f = -\Delta\mu/\mu$. Calcular $\Delta f/f$ y comparar el resultado con el de la figura 38.17.

••• **32** Al calcular los niveles de energía rotacional de una molécula diatómica, no consideramos la rotación de la molécula a lo largo de la línea que une los átomos.

(a) Estimar el momento de inercia de la molécula H_2 alrededor de esta línea.
(b) Utilizar los resultados de (a) para estimar la energía rotacional típica E_{0r} correspondiente a la línea que une los átomos.
(c) Comparar la respuesta de (b) con la energía térmica típica kT para $T = 300$ K.

La estructura de los sólidos

• **33** Suponer que esferas duras de radio R están localizadas en los vértices de una célula unitaria de una estructura cúbica simple.

(a) Si las esferas duras se tocan de modo que forman el volumen mínimo posible, ¿cuál es el tamaño de la célula unitaria?
(b) ¿Qué fracción del volumen de la estructura cúbica está ocupado por las esferas duras?

• **34** Calcular la distancia r_0 entre los iones K^+ y K^- del KCl, suponiendo que cada ion ocupa un volumen cúbico de lado r_0. La masa molar del KCl es 74,55 g/mol y su densidad 1,984 g/cm^3.

• **35** La distancia entre los iones Li^+ y Cl^- en el LiCl es 0,257 nm. Utilizar este dato y la masa molar del LiCl (42,4 g/mol) para calcular la densidad del LiCl.

• **36** Determinar el valor de n en la ecuación 38.32 correspondiente a la energía de disociación medida de 741 kJ/mol para el LiCl, que tiene la misma estructura que el NaCl y para el cual $r_0 = 0{,}257$ nm.

•• **37** Supongamos que las bolas de bolera idénticas de radio R están empaquetadas en una estructura hexagonal compacta. ¿Qué fracción del volumen disponible de la célula unitaria es ocupado por estas bolas?

Semiconductores

• **38** ¿Cuáles de los siguientes elementos tienen mayor probabilidad de actuar como impurezas aceptoras en el germanio?

(a) Bromo **(b)** Galio **(c)** Silicio
(d) Fósforo **(e)** Magnesio

• **39** ¿Cuáles de los siguientes elementos tienen mayor probabilidad de actuar como impurezas aceptoras en el germanio?

(a) Bromo **(b)** Galio **(c)** Silicio
(d) Fósforo **(e)** Magnesio

• **40** ¿Qué tipo de semiconductor se obtiene si el silicio se impurifica con

(a) aluminio y **(b)** fósforo?

(Véase la tabla 37.1 para las configuraciones electrónicas de estos elementos.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

• 41 ¿Qué tipo de semiconductor se obtiene si el silicio se impurifica con

(a) indio y (b) antimonio?

(Véase la tabla 37.1 para las configuraciones electrónicas de estos elementos.)

•• 42 Los niveles energéticos del donador en un semimconductor tipo n están 0,01 eV por debajo de la banda de conducción. Determinar la temperatura para la cual $kT = 0{,}01$ eV.

•• 43 El enlace relativo del electrón extra en el átomo de arsénico que reemplaza a un átomo de silicio o germanio se explica mediante un cálculo de la primera órbita de Bohr de este electrón en dichos materiales. Cuatro de los electrones externos del arsénico forman enlaces covalentes, de modo que el quinto electrón "ve" simplemente un centro de atracción cargado. Este modelo es un átomo de hidrógeno modificado. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve en el espacio libre con un radio a_0 dado por

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$$

Cuando un electrón se mueve en un cristal, podemos aproximar el efecto de los otros átomos reemplazando ϵ_0 por $\kappa\epsilon_0$ y m_e por la masa efectiva del electrón. Para el silicio κ es 12 y la masa efectiva 0,2 m_e. Para el germanio, κ es 16 y la masa efectiva aproximada es 0,1 m_e. Estimar los radios de Bohr del electrón externo cuando se encuentra en órbita alrededor del átomo de arsénico de impureza en el silicio y el germanio.

•• 44 La energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno viene dada por

$$E_1 = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

Modificar esta ecuación, como se indica en el problema 43, reemplazando ϵ_0 por $\kappa\epsilon_0$ y m_e por una masa efectiva del electrón para estimar la energía de enlace del electrón extra de un átomo de arsénico de impureza en

(a) silicio y (b) germanio.

•• 45 Una muestra de silicio tipo n dopada con 10^{16} electrones por cm^3 en la banda de conducción posee una resistividad de 5×10^{-3} Ω·m a 300 K. Determinar el recorrido libre medio de los electrones. Utilizar la masa efectiva de 0,2 m_e para la masa de los electrones (véase problema 43). Comparar este recorrido libre con el de los electrones de conducción en el cobre a 300 K.

•• 46 El coeficiente Hall de una muestra de silicio dopado resulta ser 0,04 V·m/A·T a la temperatura ambiente. Si todas las impurezas han contribuido a los portadores de la carga total de la muestra, determinar

(a) el tipo de impureza (donadora o aceptora) utilizado para dopar la muestra y
(b) la concentración de estas impurezas

Uniones y dispositivos semiconductores (opcional)

• 47 Cuando un transistor de unión pnp se utiliza como amplificador, una pequeña señal en la corriente ___________ produce una señal grande en la corriente ___________.

(a) del colector; de la base
(b) de la base; del colector
(c) del emisor; de la base
(d) del emisor; del colector
(e) del colector; de la base

• 48 Cuando la luz choca contra el semiconductor tipo p en una célula solar de unión pn,

(a) sólo se crean electrones libres.
(b) sólo se crean vacantes positivas.
(c) se crean simultáneamente electrones y vacantes.
(d) se crean protones positivos.
(e) ninguna de estas afirmaciones es correcta.

•• 49 La teoría simple de la corriente en función del voltaje de polarización a través de una unión pn ofrece la ecuación

$$I = I_0(e^{eV_b/kT} - 1)$$

Representar I en función de V_b para valores positivos y negativos de V_b utilizando esta ecuación.

•• 50 Para una temperatura de 300 K, utilizar la ecuación del problema 49 y determinar el voltaje polarizador V_b para el cual el término exponencial tiene el valor

(a) 10 y (b) 0,1.

•• 51 En la figura 38.34 correspondiente al amplificador transistor pnp, suponer que $R_b = 2$ kΩ y $R_L = 10$ kΩ. Admitir también que una corriente de base de ca, 10 μA, genera una corriente de colector de 0,5 mA, ca. ¿Cuál es la ganancia de voltaje del amplificador?

•• 52 El germanio puede utilizarse para medir la energía de las partículas incidentes. Consideremos un rayo gamma de 660 keV emitido por el ^{137}Cs.

(a) Sabiendo que la banda prohibida del germanio es de 0,72 eV, ¿cuántos pares electrón-vacante pueden generarse cuando este rayo gamma se propaga a través del germanio?
(b) El número de pares N de la parte (a) posee fluctuaciones estadísticas dadas por $\pm\sqrt{N}$. ¿Cuál es entonces la resolución energética de este detector en esta región energética del fotón?

•• 53 Hacer un esquema que muestre los límites de las bandas de conducción y de valencia y la energía de Fermi de un diodo de unión pn cuando se polariza

(a) directamente y (b) inversamente.

•• 54 Un "buen" diodo de silicio posee la característica corriente-voltaje dada en el problema 49. Sea $kT = 0{,}025$ eV (temperatura ambiente) y la corriente de saturación $I_0 = 1$ nA.

(a) Demostrar que para voltajes pequeños de polarización inversa la resistencia es de 25 MΩ. Sugerencia: Hacer un desarrollo de Taylor de la función exponencial o utilizar la calculadora con valores pequeños de V_b.
(b) Determinar la resistencia cc para una polarización inversa de 0,5 V.
(c) Determinar la resistencia cc para una polarización directa de 0,5 V. ¿Cuál es la corriente en este caso?
(d) Calcular la resistencia ca, dV/dI, para una polarización directa de 0,5 V.

•• 55 Una porción de silicio de espesor $t = 1{,}0$ mm y anchura $w = 1{,}0$ cm se sitúa en un campo magnético $B = 0{,}4$ T. El silicio se encuentra en el plano xy y el campo magnético apunta en la dirección z positiva. Cuando una corriente de 0,2 A fluye a través de la muestra en la dirección x positiva se desarrolla una diferencia de voltaje de 5 mV a través de la anchura de la muestra con el campo eléctrico apuntando en la dirección y positiva. Determinar el tipo de semiconductor (n o p) y la concentración de los portadores de carga.

Problemas generales

• 56 ¿Por qué resulta lógico que la distancia de separación entre los dos protones sea inferior en el ion H_2^+ que en la molécula H_2?

• 57 ¿Qué tipo de mecanismo de enlace debe tener lugar en

(a) la molécula HCl,
(b) la molécula O_2 y
(c) los átomos Cu de un sólido?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **58** ¿Por qué usualmente un átomo absorbe radiación sólo a partir de su estado fundamental, mientras que una molécula diatómica puede absorber radiación a partir de muchos estados rotacionales distintos?

• **59** La separación de equilibrio del CsF es 0,2345 nm. Si su enlace es 70% iónico, ¿cuál es su momento dipolar eléctrico?

• **60** Demostrar que cuando un átomo de una molécula diatómica es mucho más masivo que su compañero, la masa reducida es aproximadamente igual a la masa del átomo más ligero.

•• **61** La separación de equilibrio entre los núcleos de la molécula CO es 0,113 nm. Determinar la diferencia de energía entre los niveles energéticos rotacionales $\ell = 2$ y $\ell = 1$ de esta molécula.

•• **62** Al iluminar una porción delgada de material semiconductor con luz monocromática, la mayor parte de la luz se transmite a través del material si su longitud de onda es superior a 1,85 μm. Para longitudes de onda inferiores a 1,85 μm, la mayor parte de la luz incidente es absorbido. Determinar el hueco energético de este semiconductor.

•• **63** Demostrar que cuando un semiconductor intrínseco transoporta una corriente en un campo magnético transversal no se desarrolla el voltaje Hall a través de la muestra.

•• **64** El compuesto semiconductor CdSe se utiliza ampliamente en los diodos emisores de luz (LEDs). El hueco energético del CdSe es 1,8 eV. ¿Cuál es la frecuencia de la luz emitida por un diodo LED de CdSe?

•• **65** La resistividad de una muestra de silicio puro disminuye drásticamente cuando se irradia con luz infrarroja de longitud de onda inferior a 1,13 μm. ¿Cuál es el hueco energético del silicio?

•• **66** La constante de fuerza efectiva para la molécula HF es 970 N/m. Determinar la frecuencia de vibración de esta molécula.

•• **67** La frecuencia de vibración de la molécula NO es $5,63 \times 10^{13}$ Hz. Determinar la constante de fuerza efectiva del NO.

•• **68** La constante de fuerza del enlace de hidrógeno en la molécula H_2 es 580 N/m. Deducir las energías de los cuatro niveles vibratorios más bajos de las moléculas H_2, HD y D_2, y las longitudes de onda de los fotones resultantes de las transiciones entre niveles vibratorios adyacentes de estas moléculas.

•• **69** La energía potencial entre dos átomos de una molécula puede describirse bastante bien por el potencial de Lenard-Jones, que puede expresarse en la forma

$$U = U_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

en donde U_0 y a son constantes. Determinar la separación interatómica r_0 en función de a para la cual la energía potencial es un mínimo. Determinar el valor correspondiente de U_{min}. Utilizar la figura 38.4 para obtener los valores numéricos de r_0 y U_0 para la molécula H_2 y expresar las respuestas en nanómetros y electrón-voltios.

•• **70** En este problema debe determinarse la forma en que la fuerza de van der Waals entre una molécula polar y otra no polar depende de la distancia entre las moléculas. Supongamos que el momento dipolar de la molécula polar se encuentra en la dirección xy la molécula no polar a una distancia x.

(a) ¿Cómo varía con la distancia x el campo eléctrico de un dipolo?

(b) Teniendo en cuenta que la energía potencial de un dipolo eléctrico de momento **p** en un campo eléctrico E es $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ y que el momento dipolar inducido de la molécula no polar es proporcional a E, determinar cómo depende la energía potencial de interacción de las dos moléculas de la distancia de separación.

(c) A partir de la ecuación $F_x = -dU/dx$, determinar la dependencia con x de la fuerza que se ejerce entre las dos moléculas.

•• **71** Determinar la dependencia de la fuerza con la distancia que separa dos moléculas polares. (Véase problema 70)

•• **72** Utilizar el espectro de absorción del infrarrojo de HCl en la figura 38.17 para obtener

(a) la energía rotacional característica E_{0r} (en eV) y

(b) la frecuencia de vibración f y la energía vibratoria hf (en eV).

•• **73** Para una molécula, tal como CO, que tiene un momento dipolar eléctrico permanente, las transiciones radiativas que obedecen la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$ entre dos niveles energéticos rotacionales del mismo nivel vibratorio están permitidas. (Es decir, la regla de selección $\Delta v = \pm 1$ no es válida).

(a) Determinar el momento de inercia del CO y calcular la energía rotacional característica E_{0r} (en eV).

(b) Construir un diagrama de niveles energéticos para los niveles rotacionales desde $\ell = 0$ a $\ell = 5$ para algún nivel vibratorio. Especificar las energías en electrón-voltios partiendo de $E = 0$ para $\ell = 0$.

(c) Indicar en el diagrama obtenido las transiciones que obedecen $\Delta\ell = -1$ y calcular la energía del fotón emitido.

(d) Determinar la longitud de onda de los fotones emitidos en cada transición en (c). ¿A qué región del espectro electromagnético pertenecen estos fotones?

••• **74** Utilizar los resultados del problema 16 para calcular la frecuencia de vibración de la molécula LiCl. Para ello, desarrollar el potencial alrededor de $r = r_0$, según la serie de Taylor, siendo r_0 la separación de equilibrio. Retener sólo el término proporcional a $(r - r_0)^2$. Recordar que la energía potencial de un oscilador armónico simple viene dada por $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. ¿Cuál es la longitud de onda resultante de las transiciones entre niveles adyacentes del oscilador armónico para esta molécula?

••• **75** Repetir el problema 74 para la molécula del NaCl.

••• **76** Un modelo unidimensional de un cristal iónico consta de una línea de iones alternativamente positivos y negativos con la distancia r_0 entre cada ion.

(a) Mostrar que la energía potencial de un ion en la línea es

$$V = -\frac{2ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$$

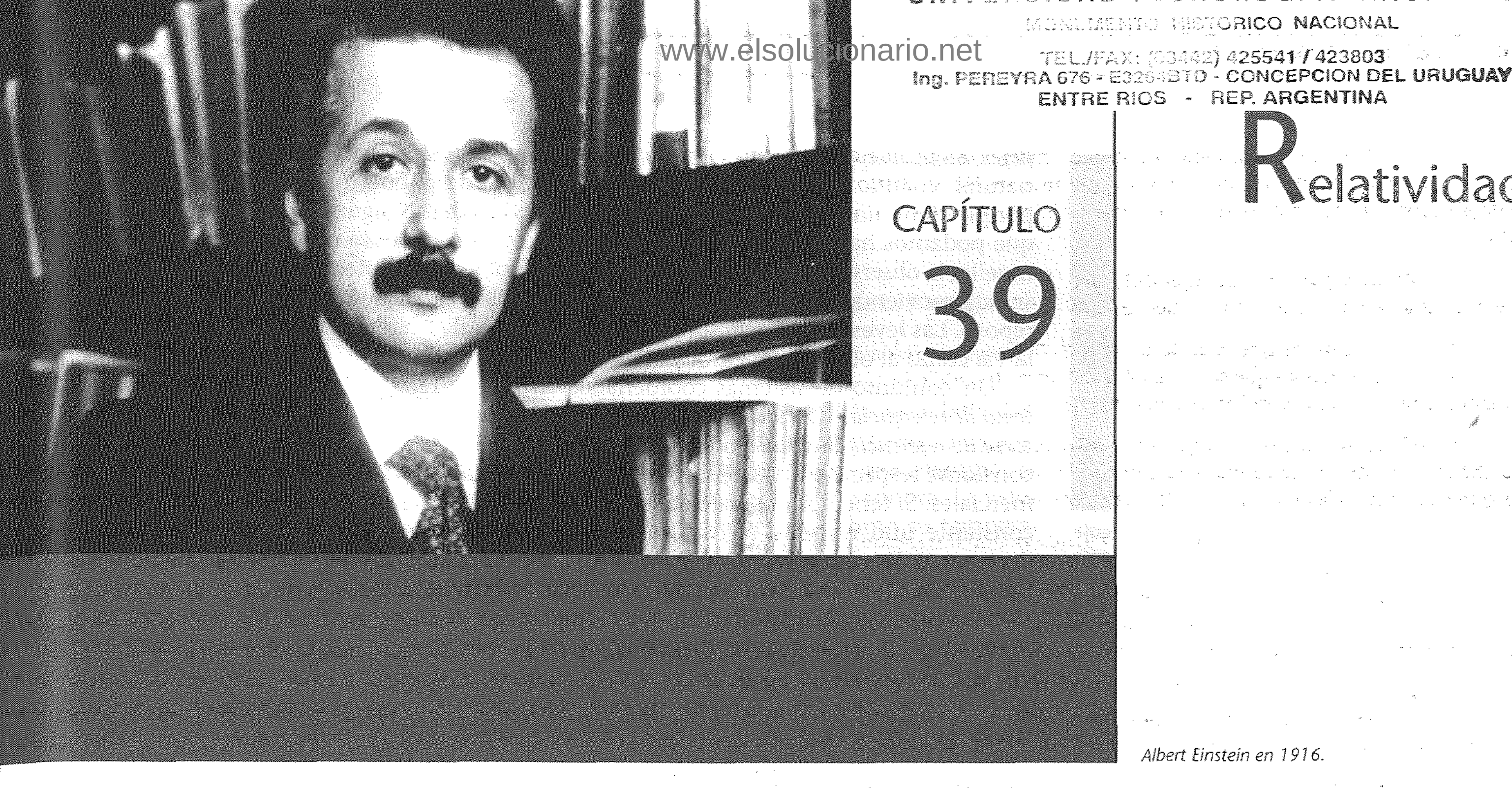
(b) Teniendo en cuenta que

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

demostrar que la constante de Madelung para este modelo unidimensional es $\alpha = 2 \ln 2 = 1,386$.

www.elsolucionario.net

MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
www.elsolucionario.net
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA



CAPÍTULO 39

Relatividad

Albert Einstein en 1916.

www.elsolucionario.net

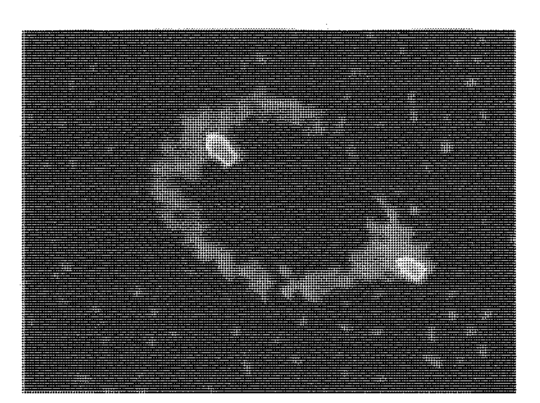
La teoría de la relatividad se compone de dos teorías bastante diferentes, la teoría especial y la teoría general. La teoría especial, desarrollada por Einstein y otros científicos en 1905, se refiere esencialmente a la comparación entre las medidas realizadas en diferentes sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros. Sus consecuencias, que pueden deducirse con un mínimo de cálculo matemático, son aplicables en una gran diversidad de situaciones que aparecen en la ciencia y en la técnica. Por otra parte, la teoría general, también desarrollada por Einstein y otros investigadores alrededor de 1916, trata con sistemas de referencia acelerados y con la gravedad. Una comprensión completa de la teoría general exige el empleo de matemáticas avanzadas y muy complejas y las aplicaciones de esta teoría se enmarcan principalmente en el área de la gravitación. Tiene una gran importancia en la cosmología, pero se encuentra raramente en otras áreas de la física o de la ingeniería. Por consiguiente, nos dedicaremos a la teoría especial (frecuentemente denominada *relatividad especial*) y únicamente comentaremos brevemente la teoría general en la sección "Explorando la naturaleza" al final del capítulo.

Relatividad newtoniana 39.1

La primera ley de Newton no distingue entre una partícula en reposo y otra que se está moviendo con velocidad constante. Si no existe ninguna fuerza externa neta actuando sobre ella, la partícula permanecerá en su estado inicial —bien en reposo, o moviéndose con su velocidad inicial. Consideremos una partícula en reposo respecto a nosotros, pero que se mueve con velocidad constante respecto a un observador que se está moviendo con velocidad constante respecto a nosotros. ¿Cómo podremos distinguir si somos nosotros y la partícula los que estamos en reposo mientras que el segundo observador se mueve con velocidad constante, o es este segundo observador quien permanece en reposo y estamos en movimiento tanto nosotros como la partícula?

Consideremos algunos ejemplos sencillos. Supongamos que se tiene un tren que se mueve sobre una vía recta y horizontal con velocidad constante V. Obsérvese que una pelota en reposo en el tren seguirá estando en reposo. Si dejamos caer la pelota, cae en

 www.elsolucionario.net



Esta estructura en forma de anillo de radio-fuente MG1131 + 0456 se considera debida a la acción de "lente gravitatoria", propuesta por primera vez por Einstein en 1936, en la que una cierta fuente se transforma en una imagen en forma de anillo debido a un objeto muy grande y de gran masa situado más hacia delante.

línea recta hacia abajo en el tren con la aceleración debida a la gravedad g. Como es natural, cuando se observa desde la vía, la pelota describirá una trayectoria parabólica porque tiene una velocidad inicial V hacia la derecha. Ningún experimento mecánico que podamos hacer —la medición del período de un péndulo o de un cuerpo sobre un muelle, la observación de la colisión de dos cuerpos, o cualquier otro— nos dirá si el tren se está moviendo y la vía está en reposo, o si es la vía la que se mueve y el tren está en reposo. Las leyes de Newton son válidas tanto para el sistema de coordenadas asociado a la vía como al otro sistema asociado al tren.

Un conjunto de sistemas coordenados en reposo relativo entre sí se denomina *sistema de referencia.*[1] Un sistema en el que son válidas las leyes de Newton se denomina *sistema de referencia inercial.* Todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial son también sistemas de referencia inerciales. Si tenemos dos sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidad constante uno respecto al otro, no existe ningún experimento mecánico que pueda decirnos cuál está en reposo y cuál está en movimiento, o si ambos están moviéndose. Este resultado se conoce como el principio de la **relatividad newtoniana**:

No puede detectarse el movimiento absoluto.

Principio de relatividad newtoniana

Este principio fue bien conocido por Galileo, Newton y otros científicos en el siglo XVII. Pero durante el siglo XIX, cambió esta visión del problema. Entonces se pensaba generalmente que la relatividad newtoniana no era válida y que en principio podía detectarse el movimiento absoluto haciendo una medida de la velocidad de la luz.

El éter y la velocidad de la luz

En el capítulo 15 vimos que la velocidad de una onda depende de las propiedades del medio en donde se propaga y no de la velocidad del foco emisor de las ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido respecto al aire en reposo depende de la temperatura del aire. La luz y otras ondas electromagnéticas (radio, rayos X, etc.) se propagan a través del vacío con una velocidad $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, pronosticada por las ecuaciones de electromagnetismo de Maxwell. Pero, ¿respecto a qué se refiere esta velocidad? ¿Cuál es el equivalente del aire estacionario en el vacío? El medio que se propuso para la velocidad de la luz se llamó *éter;* se admitió que el éter estaba extendido por todo el espacio. Se supuso que la velocidad de la luz relativa al éter era la velocidad c predicha por las ecuaciones de Maxwell. La velocidad de cualquier objeto relativa al éter se consideró como su velocidad absoluta.

Albert Michelson, primero en 1881 y luego de nuevo con Edward Morley en 1887 decidieron medir la velocidad de la Tierra respecto al éter por un ingenioso experimento en el cual la velocidad de la luz respecto a la Tierra se comparaba en dos haces luminosos, uno en dirección del movimiento de la Tierra relativo al Sol y otro perpendicular a la dirección del movimiento terrestre. A pesar del cuidadoso esmero con que se realizaron los experimentos, nunca se pudo detectar la menor diferencia. La experiencia se repitió en condiciones distintas por otros investigadores con el mismo resultado. El movimiento absoluto de la Tierra respecto al éter no pudo ser detectado.

39.2 Postulados de Einstein

En 1905, a la edad de 26 años, Albert Einstein publicó un artículo sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles.[2] En este artículo, postulaba que el movimiento absoluto no podría detectarse por ningún experimento. Es decir, el éter no existía. La Tierra puede considerarse que está en reposo y que la velocidad de la luz es la misma en cualquier

[1] Los sistemas de referencia inerciales fueron tratados en la sección 4.1.

[2] *Annalen der Phyik*, vol. 17, 1905, p. 841. Para la traducción del original alemán ver W. Perrett y G.B. Jeffery (traducción), *The Principle of Relativity: A collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity* por H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y W. Weyl, Dover, New York, 1923.

www.elsolucionario.net

dirección[1]. Su teoría de la relatividad especial puede deducirse de dos postulados, que enunciados en forma simple son:

Postulado 1. No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme.

Postulado 2. La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente.

Postulados de Einstein

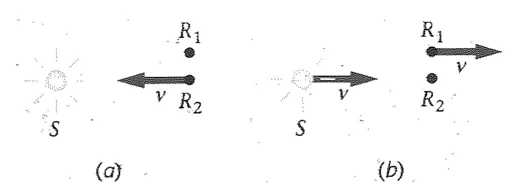


Figura 39.1 (*a*) Foco luminoso estacionario S y observador estacionario R_1, con un segundo observador R_2 moviéndose hacia el foco con velocidad v. (*b*) En el sistema de referencia en el que está en reposo el observador R_2, el foco luminoso S y el observador R_1 se mueven hacia la derecha con velocidad v. Si no puede detectarse el movimiento absoluto, los dos puntos de vista son equivalentes. Como la velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente, el observador R_2 mide el mismo valor para dicha velocidad que el observador R_1.

El postulado 1 es simplemente una extensión del principio newtoniano de relatividad para incluir todos los tipos de mediciones físicas (no sólo aquellas que fueran mecánicas). El postulado 2 describe una propiedad común a todas las ondas. Por ejemplo, la velocidad de las ondas sonoras no depende del movimiento de la fuente sonora. La velocidad de las ondas depende únicamente de las propiedades del aire, como su temperatura, por ejemplo.

Aunque ambos postulados parecen muy razonables, muchas de sus implicaciones comunes resultan sorprendentes y contradicen a lo que normalmente denominamos sentido común. Por ejemplo, una importante implicación de estos postulados es que todo observador mide el mismo valor para la velocidad de la luz con independencia del movimiento relativo del foco y del observador. Consideremos un foco luminoso S y dos observadores, R_1 en reposo relativo a S y R_2 moviéndose hacia S con velocidad v, como se indica en la figura 39.1*a*. La velocidad de la luz medida por R_1 es $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Cuál es la velocidad que mide R_2? La respuesta *no* es $c + v$. Según el postulado 1, la figura 39.1*a* es equivalente a la figura 39.1*b* en la que R_2 está en reposo y tanto el foco S como R_1 se están moviendo con velocidad v. Es decir, puesto que no puede detectarse el movimiento absoluto, no es posible decir quién se está moviendo realmente y quién está en reposo. Según el postulado 2, la velocidad de la luz de una fuente móvil es independiente del movimiento de ésta. Así pues, examinando la figura 39.1*b*, vemos que R_2 mide como valor de la velocidad de la luz exactamente c, igual que R_1. Este resultado se considera con frecuencia como una alternativa al segundo postulado de Einstein:

Postulado 2 (Alternativo). Todo observador mide el mismo valor c para la velocidad de la luz.

Este resultado contradice nuestras ideas intuitivas acerca de las velocidades relativas. Si un coche se mueve a 50 km/h alejándose de un observador, y otro coche se mueve a 80 km/h en la misma dirección y sentido, la velocidad del segundo coche respecto al primero es de 30 km/h. Este resultado se mide fácilmente y se encuentra conforme a nuestra intuición. Sin embargo, de acuerdo con los postulados de Einstein, si un haz de luz se está moviendo en la misma dirección y sentido que los coches, los observadores situados en ellos medirán la misma velocidad para el haz luminoso. Nuestras ideas intuitivas acerca de la combinación de velocidades, son aproximaciones que sólo son válidas cuando las velocidades son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Incluso en un avión que se esté moviendo con la velocidad del sonido, no es posible medir la velocidad de la luz con suficiente exactitud como para distinguir la diferencia entre los resultados c y $c + v$, siendo v la velocidad del avión. Con objeto de poder hallar dicha diferencia deberíamos, o bien movernos con una velocidad muy grande (mucho mayor que la del sonido), o hacer unas mediciones extremadamente exactas.

[1] Einstein no pretendía explicar los resultados del experimento de Michelson-Morley. Su teoría nació de sus propias consideraciones sobre los fundamentos de la electricidad y del magnetismo y de la inusual propiedad de las ondas electromagnéticas al propagarse en el vacío. En su primer artículo, que contiene la teoría completa de la relatividad especial, sólo hizo de pasada una referencia al experimento de Michelson-Morley y en años posteriores no pudo recordar si conocía los detalles de este experimento antes de que publicase su teoría.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

39.3 La transformación de Lorentz

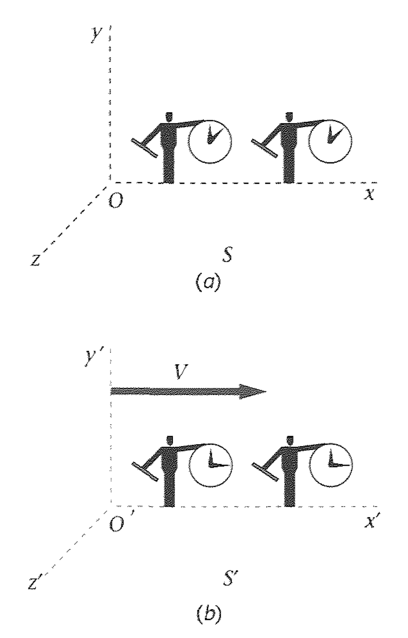


Figura 39.2 Sistemas coordenados de referencia S y S' moviéndose con velocidad relativa V. En ambos sistemas existen observadores con reglas y relojes que son idénticos cuando se comparan en reposo.

Los postulados de Einstein tienen importantes consecuencias cuando se quieren medir intervalos de tiempo y de espacio, o bien velocidades relativas. A través de todo este capítulo estaremos comparando mediciones de las posiciones y los tiempos de ciertos sucesos (como destellos luminosos) hechas por observadores que se están moviendo unos respecto a otros. Utilizaremos un sistema de coordenadas rectangulares xyz con origen O, denominado sistema de referencia S, y otro sistema $x'y'z'$ con origen O', denominado el sistema S', que se está moviendo con una velocidad constante $\mathbf{V}$ respecto al sistema S. Entonces respecto a S', el sistema S se está moviendo con velocidad constante $-\mathbf{V}$. Por sencillez, consideremos que el sistema S' se está moviendo con velocidad de módulo V a lo largo del eje x en su sentido positivo respecto a S. En cada uno de los sistemas, supondremos que existen tantos observadores como sean necesarios y que están equipados con dispositivos de medida, como relojes y reglas, que son idénticos cuando se comparan entre sí en reposo (véase figura 39.2).

Utilizaremos los postulados de Einstein para encontrar la relación general entre las coordenadas x, y y z y el tiempo t de un suceso visto en el sistema de referencia S y las coordenadas x', y' y z' y el tiempo t' del mismo suceso visto en el sistema de referencia S', que se está moviendo con velocidad relativa uniforme respecto a S. Consideraremos únicamente el caso simple en que los orígenes están coincidiendo en el instante $t = t' = 0$. La relación clásica, denominada **transformación de Galileo**, es

$$x = x' + Vt', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t' \tag{39.1a}$$

Transformación de Galileo

La transformación inversa es

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t \tag{39.1b}$$

Transformación de Galileo

Estas ecuaciones son coherentes con las observaciones experimentales en tanto que V sea mucho menor que c. De ellas se deduce la ley clásica familiar de suma de velocidades. Si una partícula tiene una velocidad $u_x = dx/dt$ en el sistema S, su velocidad en el sistema S' es

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V = u_x - V \tag{39.2}$$

Si derivamos esta ecuación una vez más, encontraremos que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x}{dt'} = a'_x$$

Debe quedar claro que la transformación galileana no es consistente con los postulados de Einstein de la relatividad especial. Si la luz se mueve a lo largo del eje x con velocidad $u'_x = c$ en S', estas ecuaciones implican que la velocidad en S es $u_x = c + V$ en lugar de $u_x = c$ de acuerdo con los postulados de Einstein y con la experiencia. Por consiguiente, las ecuaciones de transformación clásicas deben modificarse para hacerlas consistentes con los postulados de Einstein. Daremos un breve esquema de un método para obtener la transformación relativista.

Supongamos que la ecuación de la transformación relativista para x es la misma que la ecuación clásica (ecuación 39.1a) excepto por la presencia de un multiplicador constante en el segundo miembro. Es decir, supondremos que la ecuación tiene la forma

$$x = \gamma(x' + Vt') \tag{39.3}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

en donde γ es una constante que pude depender de V y c pero no de las coordenadas. La transformación inversa debe tener el mismo aspecto exceptuando el signo de la velocidad:

$$x' = \gamma(x - Vt) \tag{39.4}$$

Consideremos un pulso luminoso que parte del origen de S en $t = 0$. Como hemos supuesto que los orígenes son coincidentes en $t = t' = 0$, el pulso también parte del origen de S' en $t' = 0$. El postulado de Einstein exige que la ecuación correspondiente al componente x del frente de ondas del pulso de la luz sea $x = ct$ en el sistema S y $x' = ct'$ en el sistema S'. Sustituyendo x por ct y x' por ct' en las ecuaciones 39.3 y 39.4, se tiene

$$ct = \gamma(ct' + Vt') = \gamma(c + V)t' \tag{39.5}$$

y

$$ct' = \gamma(ct - Vt) = \gamma(c - V)t \tag{39.6}$$

Podemos eliminar t' (o t) de estas dos ecuaciones y determinar γ:

$$\gamma^2 = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{39.7}$$

Es importante observar que γ es siempre mayor que 1 y que cuando V es mucho menor que c, $\gamma \approx 1$. Por consiguiente, la transformación relativista para x y x' viene dada por las ecuaciones 39.3 y 39.4, estando dado γ por la ecuación 39.7. Podemos obtener ecuaciones para t y t' combinando la ecuación 39.3 con la transformación inversa dada por la ecuación 39.4. Sustituyendo en la ecuación 39.4 x por $x = \gamma(x' + Vt')$, se tiene

$$x' = \gamma[\gamma(x' + Vt') - Vt] \tag{39.8}$$

de donde puede despejarse t en función de x' y t'. La transformación relativista completa es

$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \tag{39.9}$$

$$t = \gamma\left(t' - \frac{Vx'}{c^2}\right) \tag{39.10}$$

Transformación de Lorentz

La transformación inversa es:

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \tag{39.11}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \tag{39.12}$$

La transformación descrita por las ecuaciones 39.9 a 39.12 se denomina **transformación de Lorentz**. Relaciona las coordenadas de espacio y tiempo x, y, z y t de un suceso en el sistema S con las coordenadas x', y', z' y t' del mismo suceso visto en el sistema S', que se está moviendo a lo largo del eje x con velocidad V relativa al sistema S.

Examinaremos ahora algunas aplicaciones de la transformación de Lorentz.

Dilatación del tiempo

Consideremos dos sucesos que se producen en x_0' en los instantes t_1' y t_2' en el sistema S'. Podemos hallar los tiempos t_1 y t_2 correspondientes a los mismos sucesos en S mediante la ecuación 39.10. Se tiene

$$t_1 = \gamma\left(t_1' - \frac{Vx_0'}{c^2}\right)$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

y

$$t_2 = \gamma\left(t_2' - \frac{Vx_0'}{c^2}\right)$$

de modo que

$$t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1')$$

El tiempo transcurrido entre dos sucesos que ocurren en el *mismo lugar* en un sistema de referencia se denomina el **tiempo propio** t_p. En este caso, el intervalo de tiempo $\Delta t_p = t_2' - t_1'$ medido en el sistema S' es el tiempo propio. El intervalo de tiempo Δt medido en cualquier otro sistema de referencia es siempre más largo que el tiempo propio. Este crecimiento se denomina **dilatación del tiempo**:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \qquad \textbf{(39.13)}$$

Dilatación del tiempo




EJEMPLO 39.1 **Dos sucesos ocurren en el mismo punto x_0' en los instantes t_1' y t_2' en el sistema S', que se está moviendo con velocidad V respecto al sistema S. ¿Cuál es la separación espacial de estos sucesos en el sistema S?**

Esquema del problema La separación espacial en S es $x_2 - x_1$, en donde x_2 y x_1 son las coordenadas de los sucesos en S, que pueden determinarse mediante la ecuación 39.9.

1. La posición x_1 en S en el tiempo t_1' viene dada por la ecuación 39.9: $\quad x_1 = \gamma(x_0' + Vt_1')$

2. De igual modo, en el tiempo t_2', la posición en x_2 viene dada por: $\quad x_2 = \gamma(x_0' + Vt_2')$

3. La diferencia entre ambas nos da la separación espacial: $\quad x_2 - x_1 = \gamma V(t_2' - t_1') = V(t_2 - t_1)$

Observaciones La separación espacial de estos sucesos en S es la distancia que un punto simple, tal como el x_0' en S', se mueve en S durante el intervalo de tiempo que transcurre entre los sucesos.

Podemos comprender la dilatación del tiempo directamente a partir de los postulados de Einstein *sin* utilizar la transformación de Lorentz. La figura 39.3*a* muestra un observador A' a una distancia D de un espejo. El observador y el espejo están en una nave espacial que está en reposo en el sistema S'. El observador produce un destello y mide el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre el destello original y el momento en que ve el destello que retorna reflejado en el espejo. Como la luz viaja con velocidad c, este tiempo es

$$\Delta t' = \frac{2D}{c}$$

Consideremos a continuación estos mismos dos sucesos, el destello luminoso original y la recepción del destello reflejado, según se observarían en el sistema de referencia S, en el que el observador A' y el espejo se están moviendo hacia la derecha con velocidad V, como se indica en la figura 39.3*b*. Los sucesos se producen en dos lugares diferentes x_1 y x_2 en el sistema S. Durante el intervalo de tiempo Δt (según se mide en S) entre el destello original y el de retorno, el observador A' y su nave espacial han recorrido una distancia horizontal $V\,\Delta t$. En la figura 39.3*b* podemos ver que el trayecto recorrido por la luz es más largo en S que en S'. Sin embargo, según los postulados de Einstein, la luz

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

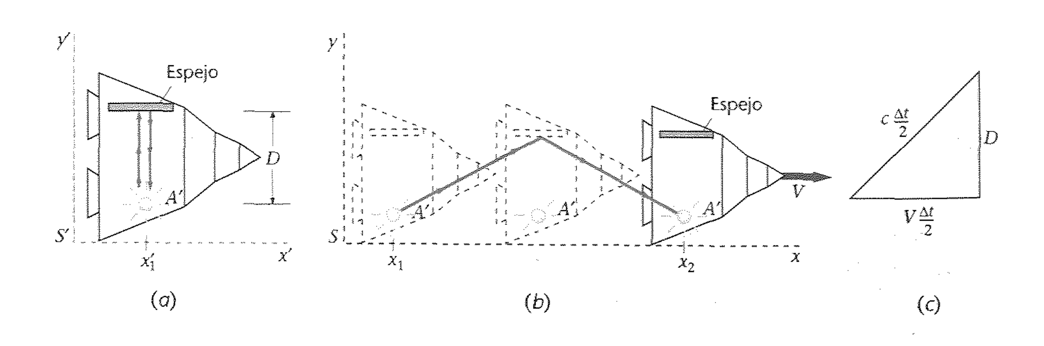


Figura 39.3 (*a*) El observador A' y el espejo están dentro de una nave espacial en el sistema S'. El tiempo que tarda el destello luminoso en llegar al espejo y regresar, según la medida realizada por A' resulta ser $2D/c$. (*b*) En el sistema S, la nave se está moviendo hacia la derecha con velocidad V. Si la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas, el tiempo que tarda la luz en llegar al espejo y regresar es más largo que $2D/c$ en S porque la distancia recorrida es mayor que $2D$. (*c*) Triángulo rectángulo que sirve para calcular el tiempo Δt en el sistema S.

viaja con la misma velocidad c en el sistema S y en el S'. Como la luz recorre una longitud mayor en S a la misma velocidad, debe emplear más tiempo en llegar al espejo y regresar. El intervalo de tiempo en S es, pues, más largo que en S'. A partir del triángulo de la figura 39.3*c*, se tiene

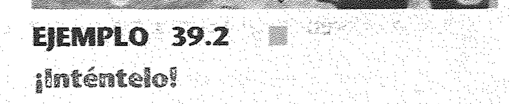
$$\left(\frac{c\,\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{V\,\Delta t}{2}\right)^2$$

o bien,

$$\Delta t = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2D}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Haciendo uso de $\Delta t' = 2D/c$, se obtiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$$



EJEMPLO 39.2

¡Inténtelo!

Los astronautas de una nave espacial que se aleja de la Tierra a $V = 0{,}6c$ interrumpen su conexión con el control espacial, diciendo que van a dormir una siesta de 1 hora y que luego volverán a llamar. ¿Cuál es la duración de sus siesta según se mide en la Tierra?

Esquema del problema Como los astronautas van a dormir y se despertarán en el mismo lugar en su sistema de referencia, el intervalo de tiempo correspondiente a una siesta de 1 hora medido por ellos mismos es su tiempo propio. En el sistema de referencia de la Tierra, los astronautas se desplazarán una distancia considerable entre ambos sucesos. El intervalo de tiempo medido en el sistema de referencia de la Tierra (utilizando dos relojes situados donde se producen dichos sucesos) es más largo en un factor γ.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Relacionar el intervalo de tiempo medido en la tierra Δt con el tiempo propio Δt_p.	$\Delta t = \gamma \Delta t_p$
2. Calcular γ para $V = 0{,}6c$.	$\gamma = 1{,}25$
3. Aplicar el resultado de la etapa 2 para calcular el tiempo de la siesta en el sistema de la Tierra.	$\Delta t = \gamma \Delta t_p = 1{,}25$ h

Ejercicio Si la nave espacial se está moviendo con $V = 0{,}8c$, ¿cuánto durará su siesta de 1 hora, medida desde la Tierra? (*Respuesta*: 1,67 h.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Contratación de longitudes

Un fenómeno estrechamente relacionado con la dilatación del tiempo es la **contratación de longitudes**. La longitud de un objeto medida en el sistema de referencia en que dicho objeto se encuentra en reposo se denomina su **longitud propia** L_p. En un sistema de referencia en el que el objeto se está moviendo, la longitud medida es más corta que su longitud propia. Consideremos una varilla en reposo en el sistema S' con un extremo en x_2' y el otro en x_1'. La longitud de la varilla en este sistema es su longitud propia $L_p = x_2' - x_1'$. Para hallar la longitud de la varilla en el sistema S hay que tener cierto cuidado. En este sistema, la varilla se está moviendo hacia la derecha con velocidad V, que es la velocidad de S'. Se *define* la longitud de la varilla en el sistema S como $L = x_2 - x_1$, en donde x_2 es la posición de un extremo en un cierto instante t_1, y x_1 es la posición del otro extremo *en el mismo instante* $t_1 = t_2$, medidos en el sistema S. Para calcular $x_2 - x_1$ en un cierto instante es conveniente utilizar la ecuación 39.11, porque relaciona x, x' y t, mientras que la ecuación 39.9 no resulta adecuada porque relaciona x, x' y t':

$$x_2' = \gamma(x_2 - Vt_2)$$

y

$$x_1' = \gamma(x_1 - Vt_1)$$

Como $t_2 = t_1$, obtenemos

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,(x_2' - x_1')$$

o sea,

$$L = \frac{1}{\gamma}L_p = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,L_p \qquad (39.14)$$

Contracción de longitudes

La longitud de una varilla es, pues, más corta cuando se mide en un sistema en movimiento. Antes de que se publicase el artículo de Einstein, los investigadores Lorentz y FitzGerald intentaron explicar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley suponiendo que las distancias en la dirección del movimiento se contraían en la cantidad dada por la ecuación 39.14. Esta contracción se conoce ahora como **contracción de Lorentz-FitzGerald**.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 39.3

Una regla que tiene longitud de 1 m se mueve en una dirección a lo largo de su longitud con velocidad relativa V respecto a un observador. Éste mide la longitud de la regla y su resultado es 0,914 m. ¿Cuál es la velocidad V?

Esquema del problema Como ambos L y L_p son conocidos, podemos determinar V directamente a partir de la ecuación 39.14.

1. La ecuación 39.14 relaciona las longitudes L y L_p con la velocidad V:

$$L = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,L_p$$

2. Despejar V:

$$1 - V^2/c^2 = (L/L_p)^2 = (0{,}914\text{ m}/1\text{ m})^2 = 0{,}835$$

$$V = c\sqrt{1 - 0{,}835} = 0{,}406c$$

Un ejemplo interesante de dilatación del tiempo o de contracción de longitudes lo proporciona la aparición de muones como radiación secundaria de los rayos cósmicos. Los muones se desintegran de acuerdo con la ley estadística de la radiactividad:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \tag{39.15}$$

en donde N_0 es el número inicial de muones en el instante $t = 0$, $N(t)$ es el número que queda en el instante t y τ es el período de vida media, que vale aproximadamente 2 μs en el caso de los muones en reposo. Puesto que los muones se crean (a partir de la desintegración de los piones) a gran altura en la atmósfera, normalmente a varios miles de metros por encima del nivel del mar, pocos de estos muones alcanzarán el nivel del mar. Un muón típico que se mueva con velocidad 0,9978c recorrería sólo 600 m aproximadamente en 2 μs. Sin embargo, el período del muón medio en el sistema de referencia terrestre debe incrementarse en el factor $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, que vale 15 para esta velocidad particular. Por tanto, el período medido en el sistema de referencia Tierra es 30 μs, y un muón con una velocidad de 0,9978c recorre del orden de 9000 m en este tiempo. Desde el punto de vista del muón, éste vive sólo 2 μs, pero la atmósfera está circulando junto a él a la velocidad de 0,9978c. La distancia de 9000 m en el sistema terrestre se encuentra así contraída a sólo 600 m en el sistema del muón, como se indica en la figura 39.4.

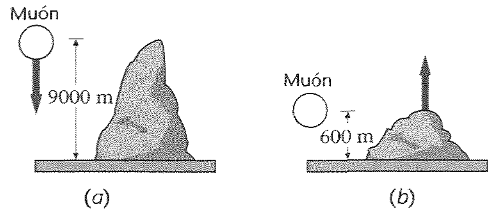


Figura 39.4 Aunque los muones se crean a una gran altura en la atmósfera y su período de vida medio es sólo de unos 2 μs cuando están en reposo, muchos aparecen en la superficie de la Tierra. (*a*) En el sistema de referencia terrestre un muón típico que se mueve a 0,9978c tiene un período de vida medio de 30 μs y recorre 9000 m en este tiempo. (*b*) En el sistema de referencia del muón, la distancia recorrida por la Tierra es de sólo 600 m en el período de 2 μs.

Es fácil distinguir experimentalmente entre las predicciones clásicas y relativista de las observaciones de los muones al nivel del mar. Supóngase que observamos 10^8 muones a una altitud de 9000 m en un cierto intervalo de tiempo con un detector de muones. ¿Cuántos sería de esperar que se observasen al nivel del mar en el mismo intervalo de tiempo? De acuerdo con la predicción no relativista, el tiempo que tardarán estos muones en recorrer 9000 m es (9000 m)/0,9978$c \approx 30\mu$s, que equivale a 15 períodos. Sustituyendo $N_0 = 10^8$ y $t = 15\tau$ en la ecuación 39.15, se obtiene

$$N = 10^8\, e^{-15} = 30{,}6$$

Así pues, sería de esperar que sólo 31 del total original de 100 millones de muones habrían quedado sin desintegrarse al llegar al nivel del mar.

De acuerdo con las predicciones relativistas, la Tierra debería recorrer únicamente la distancia contraída de 600 m en el sistema en reposo del muón. Esto se realiza en sólo 2 μs = 1 τ. Por consiguiente, el número de muones que son de esperar al nivel del mar es

$$N = 10^8\, e^{-1} = 3{,}68 \times 10^7$$

Así pues, la relatividad predice que se deberán observar 36,8 millones de muones en el mismo intervalo de tiempo. Experimentos de este tipo han confirmado las predicciones relativistas.

Efecto Doppler relativista

Para la luz u otras ondas electromagnéticas en el vacío no podemos distinguir entre los movimientos de la fuente y el receptor. Por tanto, las expresiones que fueron deducidas en el capítulo 15 para el efecto Doppler no pueden aplicarse correctamente a la luz. La razón es que en su deducción suponíamos que los intervalos de tiempo medidos en los sistemas de referencia de la fuente y el receptor son los mismos.

Consideremos una fuente que se mueve hacia un receptor con velocidad V relativa a éste. Si la fuente emite N ondas electromagnéticas en un tiempo Δt_R (medido en el sistema del receptor), la primera onda recorrerá una distancia $c\,\Delta t_R$ y la fuente recorrerá $V\,\Delta t_R$ en el tiempo medido en el sistema receptor. La longitud de onda será

$$\lambda' = \frac{c\,\Delta t_R - V\,\Delta t_R}{N}$$

La frecuencia f' observada por el receptor será por tanto

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - V}\frac{N}{\Delta t_R} = \frac{1}{1 - V/c}\frac{N}{\Delta t_R}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Si la frecuencia de la fuente es f_0, emitirá $N = f_0\, \Delta t_S$ ondas en el tiempo medido por la fuente. Por tanto,

$$f' = \frac{1}{1 - V/c}\frac{N}{\Delta t_R} = \frac{1}{1 - V/c}\frac{f_0\, \Delta t_S}{\Delta t_R} = \frac{f_0}{1 - V/c}\frac{\Delta t_S}{\Delta t_R}$$

En este caso Δt_S es el intervalo de tiempo propio (la primera onda y la onda enésima se emiten en el mismo lugar en el sistema de referencia de la fuente). Los tiempos Δt_S y Δt_R están relacionados por la ecuación 39.13 de dilatación del tiempo:

$$\Delta t_R = \gamma\, \Delta t_S = \frac{\Delta t_S}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Así pues, cuando la fuente y el receptor se mueven uno hacia el otro, se obtiene

$$f' = \frac{f_0}{1 - V/c}\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} f_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}\, f_0 \qquad \text{aproximación} \qquad \textbf{(39.16a)}$$

Esta expresión sólo difiere de nuestra ecuación clásica en el factor de dilatación del tiempo.

Cuando el foco y el receptor se mueven alejándose entre sí, el mismo análisis demuestra que la frecuencia observada viene dada por

$$f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} f_0 = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}\, f_0 \qquad \text{alejamiento} \qquad \textbf{(39.16b)}$$

Se deja como problema (problema 36) el demostrar que se obtienen los mismos resultados si se hacen los cálculos en el sistema de referencia de la fuente.

Una aplicación del efecto Doppler relativista es la **desviación hacia el rojo** observada en la luz emitida por galaxias muy alejadas. Como las galaxias se alejan de nosotros, la luz que emiten está desplazada hacia longitudes de onda más largas, rojas. Midiendo este desplazamiento puede determinarse la velocidad de las galaxias relativa al observador.

www.elsolucionario.net

■ EJEMPLO 39.4 ¡Inténtelo!

La longitud de onda más larga emitida por el hidrógeno en la serie de Balmer tiene un valor de λ_0 = 656 nm. En la luz procedente de una galaxia lejana, el valor medido es λ' = 1458 nm. Hallar la velocidad de alejamiento de dicha galaxia respecto a la Tierra.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
1. Utilizar la ecuación 39.16b para relacionar V con la frecuencia f' y la frecuencia emitida f_0.	$f' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}\, f_0$
2. Sustituir $f' = c/\lambda'$ y $f_0 = c/\lambda_0$ y despejar V/c.	$\frac{1 - V/c}{1 + V/c} = \left(\frac{f'}{f_0}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda'}\right)^2 = 0{,}202$ $V/c = 0{,}664$

www.elsolucionario.net

Sincronización de relojes y simultaneidad 39.4

Vimos en la sección 39.3 que el tiempo propio es el intervalo de tiempo entre dos sucesos que se producen en el mismo punto en un cierto sistema de referencia. Por tanto, puede medirse con un solo reloj. Sin embargo, en otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero, los dos mismos sucesos ocurren en lugares diferentes, de modo que se necesitan dos relojes para registrar los tiempo. El tiempo o instante de cada suceso se mide con un reloj diferente y el intervalo se halla por substracción. Este procedimiento exige que ambos relojes estén **sincronizados**. Demostraremos en esta sección que

Dos relojes sincronizados en un sistema de referencia no están sincronizados en ningún otro sistema que se mueva respecto al primero.

Un corolario de este resultado es que

Dos sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema que se mueva respecto al primero.[1]

La comprensión de estos hechos normalmente resuelve todas las paradojas de la relatividad. Desgraciadamente, la creencia intuitiva (e incorrecta) de que la simultaneidad es una relación absoluta, es difícil de eliminar.

Supóngase que tenemos dos relojes en reposo en los puntos A y B separados entre sí una distancia L en el sistema S. ¿Cómo podemos sincronizar estos dos relojes? Si un observador en A mira el reloj situado en B y hace que su reloj marque el mismo tiempo, los relojes no estarán sincronizados debido al tiempo L/c que tarda la luz en recorrer el espacio que separa un reloj de otro. Para sincronizar los relojes, el observador en A debe adelantar su reloj en el tiempo L/c. Entonces verá que el reloj en B marca un tiempo que es L/c detrás del correspondiente a su reloj, pero calculará que los relojes están sincronizados cuando tenga en cuenta el tiempo L/c que la luz tarda en llegar hasta él. Todos los observadores, excepto aquellos que están a mitad del camino entre ambos relojes, verán que éstos marcan tiempos diferentes, pero también podrán calcular que los relojes están sincronizados cuando corrijan el tiempo que tarda la luz en llegar hasta ellos. Un método equivalente para la sincronización de dos relojes consistiría en que un tercer observador en C a mitad de camino entre los dos relojes enviara una señal luminosa hacia los observadores A y B de modo que éstos dispusieran sus relojes marcando una hora ya preestablecida al recibir la señal.

Examinemos ahora la cuestión de la **simultaneidad**. Supongamos que A y B se ponen de acuerdo para disparar destellos luminosos en el instante t_0 (habiendo sincronizado previamente sus relojes). El observador C verá la luz procedente de los dos destellos en el mismo momento, y puesto que está equidistante de A y B, llegará a la conclusión de que ambos son simultáneos. Otros observadores en S verán la luz procedente desde A o desde B primero, dependiendo de su posición, pero después de corregir el tiempo que la luz emplea en llegar hasta ellos, también llegarán a la conclusión de que las explosiones eran simultáneas. Así pues, definiremos que:

Dos sucesos en un sistema de referencia son simultáneos si las señales luminosas procedentes de los sucesos alcanzan en el mismo instante a un observador situado a mitad de camino entre ellos.

Definición —Simultaneidad

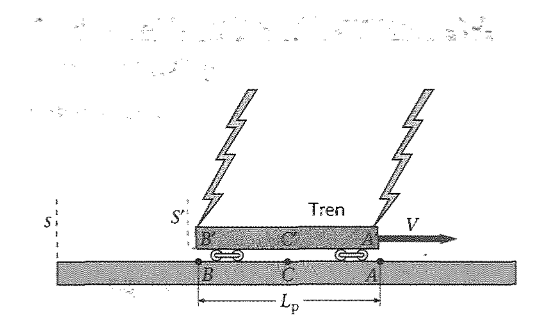


Figura 39.5 Dos rayos caen simultáneamente en los extremos de un tren que se mueve con velocidad V en el sistema S ligado al andén. La luz procedente de estos sucesos simultáneos alcanza al observador C situado en el punto medio entre ambos al mismo tiempo. La distancia entre los relámpagos es $L_{p,\text{andén}}$.

Para demostrar que dos sucesos que son simultáneos en el sistema S no lo son en otro sistemas S' que se mueve con movimiento relativo respecto a S, utilizaremos un ejemplo

[1] Esto es cierto a no ser que los sucesos y los relojes estén en el mismo plano perpendicular al movimiento relativo.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

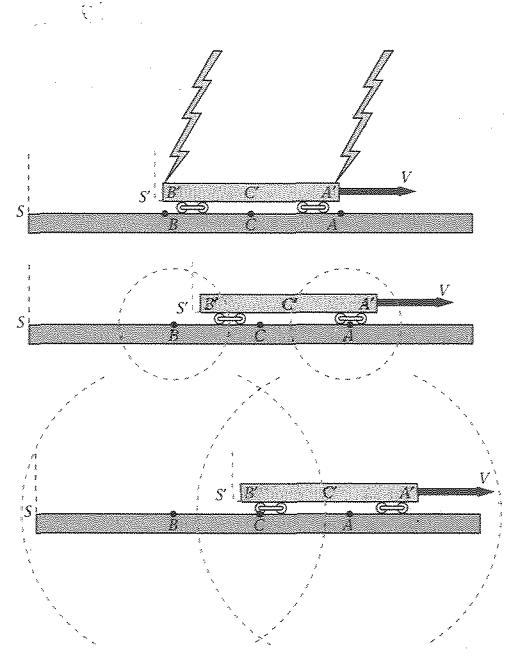


Figura 39.6 La luz procedente del rayo en la parte delantera del tren alcanza al observador C' en el punto medio del tren antes que la luz procedente del rayo en la parte trasera del tren debido a que éste se mueve. Como C' está en el punto medio entre los sucesos (que se produce en la parte delantera y trasera del tren), estos sucesos no son para él simultáneos.

presentado por Einstein. Un tren se está moviendo con velocidad V y pasa por delante del andén de una estación. Tenemos unos observadores A', B' y C' en la parte delantera, trasera y mitad del tren. Supongamos ahora que caen sobre el tren y el andén unos rayos en la parte delantera y trasera del tren y que los relámpagos son simultáneos en el sistema del andén (S) (figura 39.5). Es decir, un observador C en un punto intermedio entre las posiciones A y B en donde caen los rayos, observa los dos destellos en el mismo momento. Es conveniente suponer que los rayos producen unas quemaduras en el tren y en el andén de modo que los sucesos pueden fácilmente localizarse en cada sistema de referencia. Puesto que C' está en el punto medio del tren, a mitad de camino entre los lugares en que se han producido las quemaduras, los sucesos pueden ser simultáneos en S' sólo si C' ve los destellos en el mismo instante. Sin embargo, C' ve el destello procedente de la parte delantera del tren antes que el destello que viene de la parte trasera. Podemos comprender este hecho considerando el movimiento de C' según se ve desde el sistema S (figura 39.6). En el instante en que la luz procedente del destello delantero alcanza a C', éste se ha movido una cierta distancia acercándose hacia el destello delantero mientras que se ha alejado otra cierta distancia del destello trasero. Así pues, la luz procedente del destello trasero aún no ha alcanzado a C', como se indica en la figura. Por consiguiente, el observador C' debe llegar a la conclusión de que los sucesos no son simultáneos y que el rayo cayó en la parte delantera antes que otro cayese en la trasera. Además, todos los observadores en S' sobre el tren estarán de acuerdo con C' cuando hayan corregido sus lecturas en el tiempo que tarda la luz en llegar a ellos.

En la figura 39.7 vemos los sucesos de las caídas de los rayos según se ven en el sistema de referencia del tren (S'). En este sistema, la plataforma se mueve de modo que la distancia entre las quemaduras se contrae. La plataforma resulta ser más corta que en S, y como el tren está en reposo, resulta ser más largo que su longitud contraída en S. Cuando el rayo cae sobre la parte delantera del tren en A', dicha parte delantera está en A, y su parte trasera todavía no ha alcanzado el punto B. Posteriormente, cuando el rayo caiga sobre la parte trasera del tren en B', esta parte habrá alcanzado el punto B sobre el andén.

La discrepancia entre los tiempos de los dos relojes que están sincronizados en el sistema S según se ven en el sistema S' puede hallarse a partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supóngase que tenemos relojes en los puntos x_1 y x_2 que están sincronizados en S. ¿Cuáles son los tiempos t_1 y t_2 en estos relojes cuando se observan desde el sistema S' en el instante t_0'? Según la ecuación 39.12 tenemos

$$t_0' = \gamma\left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2}\right)$$

y

$$t_0' = \gamma\left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}\right)$$

Entonces

$$t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2}\,(x_2 - x_1)$$

Obsérvese que el reloj "cazador" (en x_2) adelanta al otro (en x_1) en una cantidad que es proporcional a su separación propia $x_2 - x_1$.

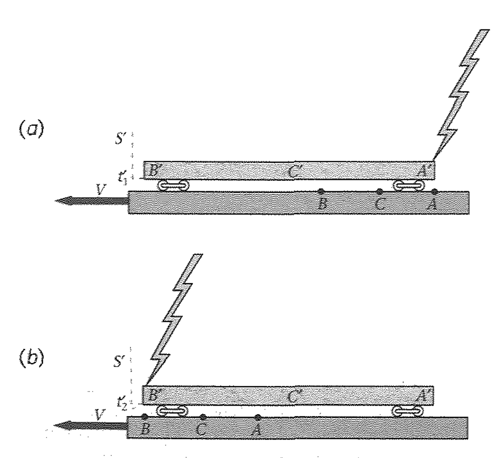


Figura 39.7 Los rayos de la figura 39.5 vistos desde el sistema S' del tren. En este sistema, la distancia entre A y B sobre el andén es menor que $L_{p,\text{andén}}$ y la longitud propia del tren $L_{p,\text{tren}}$ es más larga que $L_{p,\text{andén}}$. El primer rayo cae en la parte delantera del tren cuando A' y A están coincidiendo. El segundo rayo cae en la parte trasera del tren cuando B' y B están coincidiendo.

Si dos relojes se sincronizan en el sistema en el que están en reposo, estarán fuera de sincronismo en otro sistema cualquiera. En el sistema en el que se están moviendo, el reloj "cazador" adelanta (muestra un tiempo posterior) en una cantidad

$$\Delta t_s = L_p \frac{V}{c^2} \tag{39.17}$$

en donde L_p es la distancia propia entre los relojes.

Un ejemplo numérico ayudará a una comprensión más clara de la dilatación del tiempo, la sincronización de los relojes y la consistencia interna de estos resultados.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

EJEMPLO 39.5

Un observador en una nave espacial posee un lanza-destellos y un espejo como se muestra en la figura 39.3. La distancia del cañón al espejo es de 15 minutos-luz (escrito 15 min · c) y la nave en el sistema S' se desplaza con velocidad $V = 0{,}8c$ respecto a una plataforma espacial muy larga en el sistema S que tiene dos relojes sincronizados, uno en la posición x_1 de la nave en el momento que el observador dispara el cañón de destellos y el otro en la posición x_2 de la nave que ocupa cuando la luz retorna al disparador después de reflejarse en el espejo. Hallar los intervalos de tiempo transcurridos entre los sucesos (disparo del cañón y regreso del destello procedente del espejo) (a) en el sistema de la nave y (b) en el sistema de la plataforma. (c) Hallar la distancia recorrida por la nave y (d) el tiempo en que están desincronizados los relojes de la plataforma vistos desde la nave.

(a) 1. En la nave espacial, la luz va desde el disparador al espejo y vuelve, es decir, recorre una distancia total D = 30 min · c. El tiempo requerido es D/c:

$$\Delta t' = \frac{D}{c} = \frac{30\ \text{min} \cdot c}{c} = 30\ \text{min}$$

2. Como ambos sucesos ocurren en el mismo lugar de la nave, el intervalo de tiempo es el tiempo propio:

$$\Delta t_{\text{p}} = 30\ \text{min}$$

(b) 1. En el sistema S, el tiempo transcurrido entre los sucesos es más largo en un factor γ.

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma(30\ \text{min})$$

2. Calcular γ.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{5}{3}$$

3. Utilizar este valor de γ para calcular el tiempo transcurrido entre los sucesos según se observan en el sistema S:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_{\text{p}} = \tfrac{5}{3}(30\ \text{min}) = 50\ \text{min}$$

(c) 1. La distancia recorrida por la nave en S es $V\Delta t$:

$$D = V\ \Delta t = (0{,}8c)(50\ \text{min}) = 40\ \text{min} \cdot c$$

2. Esta distancia es la distancia propia entre los relojes sobre la plataforma:

$$L_{\text{p}} = D = 40\ \text{min} \cdot c$$

(d) El tiempo de desincronización de los relojes sobre la plataforma está relacionado con la distancia propia entre los relojes L_{p}:

$$\Delta t_{\text{des}} = L_{\text{p}}\frac{V}{c^2} = \frac{(40\ \text{min} \cdot c)(0{,}8c)}{c^2} = 32\ \text{min}$$

Observaciones Los observadores situados en la plataforma dirán que el reloj de la nave está atrasando puesto que registra un tiempo de 30 minutos solamente entre los sucesos, mientras que el tiempo medido en la plataforma es de 50 minutos.

La figura 39.8 muestra la situación vista desde la nave espacial en S'. La plataforma está pasando por delante de la nave con velocidad $0{,}8c$. Existe un reloj en el punto x_1,

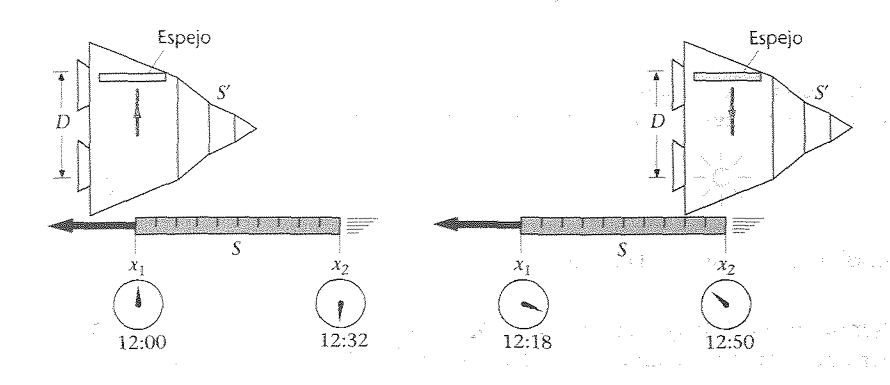


Figura 39.8 Relojes situados en una plataforma observados desde el sistema de referencia de la nave S'. Durante el tiempo $\Delta t'$ = 30 min que emplea la plataforma en atravesar la nave, los relojes en la plataforma se retrasan y señalan sólo (30 min)/γ = 18 min. Pero los relojes no están sincronizados de forma que el reloj "cazador" adelanta en $L_{\text{p}}V/c^2$, que en este caso vale 32 min. El tiempo que tarda la nave espacial en pasar según se aprecia en la plataforma es, por consiguiente, 32 min + 18 min = 50 min.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

explorando la naturaleza

La paradoja de los gemelos

Homero y Ulises son gemelos idénticos. Ulises realiza un viaje a una velocidad muy elevada hacia un planeta más allá del sistema solar y vuelve a la Tierra mientras Homero permanece en ella. Cuando se reúnen de nuevo, ¿cuál de los gemelos es más viejo, o son ambos de la misma edad? La respuesta correcta es que Homero, el gemelo que permaneció en su casa, es más viejo. Este problema, con variaciones, ha sido un tema de grandes debates durante decenios, aunque hay muy pocos que estén en desacuerdo con la respuesta anterior. El problema es una paradoja debido al papel aparentemente simétrico que juegan ambos gemelos frente al resultado asimétrico que se obtiene para su edad. La paradoja se resuelve cuando se observa la asimetría del papel de ambos gemelos. El resultado relativista está en conflicto con el sentido común que se basa en nuestra creencia profunda, pero incorrecta, de la existencia de una simultaneidad absoluta. Consideremos un caso particular con ciertos valores numéricos que, aunque sea impracticable, hace que los cálculos sean más sencillos.

Supongamos que el planeta P y Homero situado en la Tierra y distante L_p del anterior están fijos en el sistema de referencia S, según se ve en la figura E39.1. Despreciamos el movimiento de la Tierra. Los sistemas de referencia S' y S'' se están moviendo con velocidad V hacia el planeta y alejándose de él respectivamente. Ulises acelera rápidamente hasta alcazar la velocidad V; luego viaja con velocidad de crucero en S' hasta que alcanza el planeta que es cuando se detiene quedando momentáneamente en reposo en S. Para volver, acelera rápidamente hasta la velocidad V hacia la Tierra y viaja en S'' hasta que la alcanza, deteniéndose finalmente. Podemos admitir que los tiempos de aceleración son despreciables en comparación con los tiempos de vuelo en crucero.

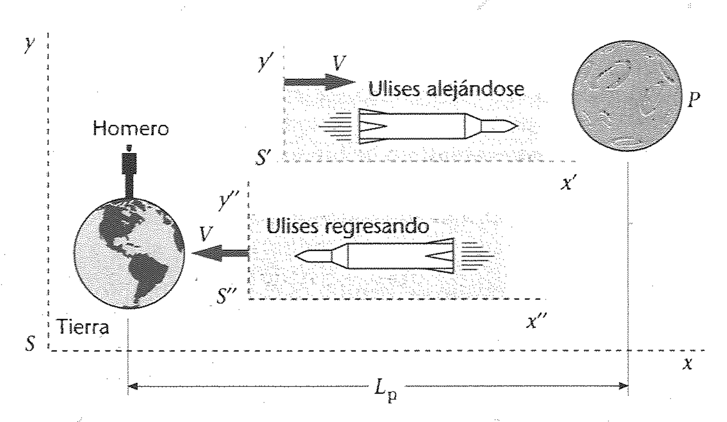


Figura E39.1 Paradoja de los gemelos. La Tierra y un planeta lejano están fijos en el sistema S. Ulises vuela en el sistema S' hacia el planeta y luego regresa a la Tierra en el S''. Su gemelo Homero queda en la Tierra. Cuando Ulises regresa es más joven que su gemelo. Los papeles que desempeñan los gemelos no son simétricos. Homero permanece en un sistema de referencia inercial, pero Ulises ha de acelerar si quiere volver a casa.

Para ilustrar el problema podemos utilizar los valores siguientes: $L_p = 8$ años-luz y $V = 0{,}8c$; entonces $\sqrt{1 - V^2/c^2} = 3/5$ y $\gamma = 5/3$.

Es sencillo analizar el problema desde el punto de vista de Homero en la Tierra. De acuerdo con el reloj de Homero, Ulises está viajando en S' durante un tiempo $L_p/V = 10$ años y en S'' durante otro tiempo igual. Así pues, Homero es 20 años más viejo cuando Ulises regresa. El intervalo de tiempo en S' entre el momento de abandonar la Tierra y llegar al planeta es más corto

que coincide con la nave cuando se dispara el cañón y otro en el punto x_2, que coincide con la nave cuando se recibe el destello de retorno del espejo. Supongamos que el reloj en x_1 marca las 12:00 (mediodía) en el instante de lanzar el destello. Los relojes en x_1 y x_2 están sincronizados en S pero no en S'. En S', el reloj en x_2, que está "cazando" al que está en x_1, adelanta en 32 min. Cuando la nave coincide con x_2, el reloj marca allí 12:50. Por consiguiente, el tiempo transcurrido entre los sucesos en S es 50 minutos. Obsérvese que de acuerdo con los observadores situados en S', este reloj señala un tiempo de 50 min – 32 min = 18 min para un viaje que dura 30 min en S'. Así pues, los observadores en S' ven cómo este reloj se va retrasando en un factor de 30/18 = 5/3.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

debido a su tiempo propio. El tiempo para alcanzar el planeta en el reloj de Ulises es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10 \text{ a}}{5/3} = 6 \text{ años}$$

Puesto que se requiere el mismo tiempo para el viaje de vuelta, Ulises habrá anotado 12 años para el viaje de ida y vuelta y será 8 años más joven que Homero.

Desde el punto de vista de Ulises el cálculo de su tiempo de viaje no es difícil. La distancia de la Tierra al planeta esta contraída y es sólo

$$L' = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{8 \text{ años-luz}}{5/3} = 4{,}8 \text{ años-luz}$$

Para $V = 0{,}8c$ emplearía sólo 6 años en cada parte del viaje.

La dificultad real de este problema consiste en que Ulises ha de comprender por qué su gemelo ha envejecido en 20 años durante su ausencia. Si consideramos a Ulises en reposo y a Homero moviéndose, su reloj atrasará y deberá medir sólo $\frac{3}{5}(6) = 3{,}6$ años. Entonces, ¿por qué no ha envejecido Homero sólo 7,2 años durante el viaje completo? Como es natural, aquí radica la paradoja. La dificultad en el caso del análisis desde el punto de vista de Ulises es que no permanece un sistema inercial. ¿Qué ocurre mientras Ulises está frenando y arrancando? Para investigar este problema con detalle necesitamos considerar los sistemas de referencia acelerados, problema relacionado con el estudio de la relatividad general y más allá del objetivo de este texto. Sería instructivo considerar que los gemelos envían señales regulares uno al otro de modo que pueden anotar la edad del otro continuamente. Si se disponen las cosas de modo que se envíe una señal cada año, la edad del otro gemelo puede determinarse simplemente contando las señales recibidas. La frecuencia de llegada de las señales no será una por año debido al desplazamiento Doppler. La frecuencia observada vendrá dada por las ecuaciones 39.16*a* y *b*. Utilizando $V/c = 0{,}8$ y $V^2/c^2 = 0{,}64$, se tiene para el caso en que los dos gemelos se están alejando el uno del otro

$$f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} f_0 = \frac{\sqrt{1 - 0{,}64}}{1 + 0{,}8} f_0 = \tfrac{1}{3} f_0$$

Cuando se estén acercando, la ecuación 39.16*a* da $f' = 3f_0$.

Consideramos la situación primero desde el punto de vista de Ulises. Durante los seis años que tarda en alcanzar el planeta (recuérdese que la distancia se contrae en su sistema de referencia), recibe señales al ritmo de $\frac{1}{3}$ por año, y por lo tanto recibe dos señales. Tan pronto él empieza el viaje de regreso, recibe tres señales por año; en los seis años que tarda en regresar recibirá 18 señales, dando un total de 20 durante todo el viaje. De acuerdo con ello espera que su gemelo haya envejecido estos 20 años.

Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de Homero. Recibe señales al ritmo de $\frac{1}{3}$ por año durante los 10 años que tarda Ulises, en llegar al planeta y también durante el tiempo que empleará la última señal enviada por Ulises antes de que él regrese a la Tierra. (No puede saber que Ulises ha empezado el viaje de vuelta hasta que le lleguen las señales con frecuencia creciente.) Puesto que el planeta está a una distancia de 8 años-luz, se han de añadir estos 8 años en la recepción de señales a un ritmo de $\frac{1}{3}$ de señal por año. Durante los primeros 18 años, Homero recibe 6 señales, o sea 3 por año. (La primera señal enviada después de que Ulises inicie el regreso emplea 8 años en alcanzar la Tierra mientras que Ulises, moviéndose a una velocidad $0{,}8c$, tardará 10 años en regresar y por lo tanto llegará exactamente dos años después de que Homero empiece a recibir señales al ritmo más elevado.) Así pues Homero espera que Ulises haya envejecido 12 años. En este análisis, resulta evidente la asimetría de los papeles que juegan los dos gemelos. Ambos están de acuerdo en que, cuando se reúnan el que ha sido acelerado será más joven que el que ha permanecido quieto en casa.

Las predicciones de la teoría especial de la relatividad respecto a la paradoja de los gemelos han sido ensayadas muchas veces utilizando partículas pequeñas que pueden acelerarse a velocidades tan grandes que γ es apreciablemente mayor que 1. Pueden acelerarse partículas inestables y atraparse en órbitas circulares dentro de un campo magnético, por ejemplo, compararse sus períodos de vida con los de partículas idénticas en reposo. En estos experimentos las partículas aceleradas viven mayor tiempo en valor medio que las que están en reposo, según acabamos de predecir. Estas predicciones se confirman también por los resultados de los experimentos utilizando relojes atómicos de alta precisión que vuelan alrededor de la Tierra en aviones comerciales, pero el análisis de este experimento es complicado por las necesidades de incluir efectos gravitatorios considerados en la teoría general de la relatividad.

www.elsolucionario.net

Cada observador en uno de los sistemas ve que los relojes del otro sistema retrasan. De acuerdo con los observadores en S, que miden 50 min para el tiempo transcurrido, el intervalo de tiempo en S' (30 min) es demasiado pequeño, de modo que ven a cada reloj aislado en S' marchar más despacio en un factor de 5/3. De acuerdo con los observadores en S', los observadores en S miden un tiempo que es demasiado largo a pesar del hecho de que sus relojes retrasan porque los relojes en S no están sincronizados. Los relojes se mueven sólo durante 18 minutos, pero el segundo adelanta al primero en 32 minutos, de modo que el intervalo de tiempo es 50 minutos.

 www.elsolucionario.net

39.5 Transformación de velocidades

Se puede hallar la forma en que se transforman las velocidades de un sistema de referencia a otro, derivando las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supongamos que una partícula tiene una velocidad $u_x' = dx'/dt'$ en el sistema S', que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V respecto al sistema S. Su velocidad en el sistema S es

$$u_x = \frac{dx}{dt}$$

A partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz (ecuaciones 39.9 y 39.10) se tiene

$$dx = \gamma(dx' + V\ dt')$$

y

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{V\ dx}{c^2}\right)$$

La velocidad en S es, pues,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + V\ dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{V\ dx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt''} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt''}} = \frac{u_x' + V}{1 + \frac{Vu_x'}{c^2}}$$

Si una partícula tiene componentes de velocidad a lo largo de los ejes y o z, podemos utilizar la misma relación entre dt y dt' con dy y dy' y dz y dz', para obtener

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V\ dx}{c^2}\right)} = \frac{dy'/dt'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt''}\right)} = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{Vu_x'}{c^2}\right)}$$

y

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{Vu_x'}{c^2}\right)}$$

La transformación relativista completa de velocidad es

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 + Vu_x'/c^2} \tag{39.18a}$$

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma(1 + Vu_x'/c^2)} \tag{39.18b}$$

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma(1 + Vu_x'/c^2)} \tag{39.18c}$$

Transformación relativista de velocidades

Las ecuaciones de la transformación inversa de las velocidades son

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} \tag{39.19a}$$

www.elsolucionario.net

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \quad \textbf{(39.19b)}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \quad \textbf{(39.19c)}$$

Transformación relativista de velocidades

Estas ecuaciones difieren del resultado clásico e intuitivo $u_x = u_x' + V$, $u_y = u_y'$ y $u_z = u_z'$ debido a que sus denominadores no son iguales a 1. Cuando V y u_x' son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz c, $\gamma \approx 1$ y $Vu_x'/c^2 \ll 1$. Entonces las expresiones relativista y clásica coinciden.

EJEMPLO 39.6

Un avión supersónico se mueve con una velocidad de 1000 m/s (del orden de 3 veces la velocidad del sonido) a lo largo del eje x respecto a un observador. Otro avión se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de 500 m/s respecto al primer avión. ¿Con qué velocidad se está moviendo el segundo avión respecto al observador?

Esquema del problema Estas velocidades son tan pequeñas comparadas con c que lógicamente las ecuaciones clásicas para combinar velocidades deben ser exactas. Esto puede demostrarse calculando el factor de corrección del denominador de la ecuación 19.18a. Sea S el sistema de referencia en reposo del observador y S' el sistema que se mueve con velocidad $V = 1000$ m/s. El primer avión está en reposo en el sistema S' y el segundo posee la velocidad $u_x' = 500$ m/s en S'.

1. La fórmula clásica de combinación de velocidades, nos da la velocidad del segundo avión respecto al observador: $u_x = u_x' + V = 500 \text{ m/s} + 1000 \text{ m/s} = 1500 \text{ m/s}$

2. Calcular el término de corrección en el denominador de la ecuación 39.18a: $\frac{Vu_x'}{c^2} = \frac{(1000)(500)}{(3 \times 10^8)^2} \approx 5{,}6 \times 10^{-12}$

Observaciones Esté termino de corrección es tan pequeño que los resultados clásico y relativista son esencialmente iguales.

EJEMPLO 39.7

Repetir el ejemplo 39.6 para el caso en que el primer avión se mueve con una velocidad de $V = 0{,}8c$ respecto al observador y el segundo avión se mueve con la misma velocidad $0{,}8c$ respecto al primero.

Esquema del problema Estas velocidades no son pequeñas en comparación con c, y por tanto debemos utilizar la expresión relativista (ecuación 39.18a). De nuevo suponemos que el observador está en reposo en el sistema S y el primer avión está en reposo en el sistema S' que se mueve con velocidad $V = 0{,}8c$ respecto al observador. La velocidad del segundo avión en S' es $u_x' = 0{,}8c$.

1. Utilizar la ecuación 39.18a para calcular la velocidad del segundo avión respecto al observador: $u_x = \frac{u_x' + V}{1 + Vu_x'/c^2} = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1 + (0{,}8c)(0{,}8c)/c^2} = \frac{1{,}6c}{1{,}64} = 0{,}98c$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

El resultado del ejemplo 39.7 es muy diferente del resultado clásico esperado de 0,8c + 0,8c = 1,6c. De hecho, puede demostrarse a partir de la ecuación 39.18 que si la velocidad de un objeto es menor que c en un sistema de referencia, es menor que c en cualquier otro sistema que se mueva respecto al anterior con una velocidad inferior a c. (Véase problema 20) Veremos en la sección 39.7 que se debería emplear una cantidad infinita de energía para acelerar una partícula hasta la velocidad de la luz. Por consiguiente, la velocidad de la luz c es un límite superior e inalcanzable para la velocidad de cualquier partícula que posea masa.[1]

■ EJEMPLO 39.8

La luz se mueve a lo largo del eje x en el sistema S' con velocidad $u_x' = c$. ¿Cuál es su velocidad en el sistema S?

1. La velocidad en S' viene dada por la ecuación 39.18a:

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 + Vu_x'/c^2} = \frac{c + V}{1 + Vc/c^2} = \frac{c(1 + V/c)}{1 + V/c} = c$$

Observación La velocidad de la luz en ambos sistemas es c, de acuerdo con los postulados de Einstein.



■ EJEMPLO 39.9

Dos naves espaciales, cada una de 100 m de longitud (cuando se miden en reposo) viajan una hacia la otra con velocidades de 0,85c relativas a la Tierra. (a) ¿Qué longitud tiene cada nave medida por un observador desde la Tierra? (b) ¿Qué velocidad posee cada nave medida por un observador de la otra nave? (c) ¿Qué longitud tiene cada nave medida por un observador de la otra nave. (d) En el tiempo $t = 0$ se ve desde la Tierra que las dos naves tienen su extremo frontal en contacto, es decir, comienzan a cruzarse ¿En qué momento sobre la tierra aparecerán sus extremos finales en contacto?

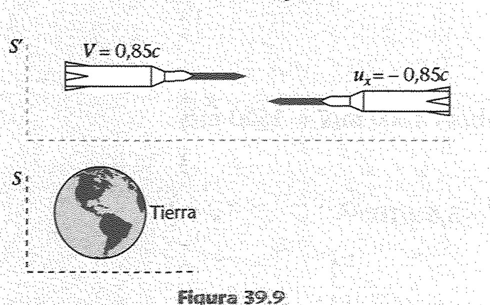


Figura 39.9

Esquema del problema (a) La longitud de cada nave medida desde la Tierra es la longitud contraída $\sqrt{1 - V^2/c^2}L_p$ (ecuación 39.14). Para resolver la parte (b) supongamos que la Tierra se encuentra en el sistema S y que la nave de la izquierda se encuentra en el sistema S' que se mueve con velocidad $V = 0{,}85c$ respecto a la Tierra. Por tanto, la nave de la derecha se desplaza con velocidad $u_x = -0{,}85c$ como muestra la figura 39.9. (c) La longitud de cada nave vista por un observador de la otra es $\sqrt{1 - V_2^2/c^2}L_p$, en donde V_2 es la velocidad de una nave respecto a la otra.

(a) La longitud de cada nave en el sistema de la Tierra es la longitud propia dividida por γ.

$$L = \sqrt{1 - V^2/c^2}L_p = \sqrt{1 - (0{,}85c)^2/c^2}\,(100\text{ m}) = 52{,}7\text{ m}$$

(b) Utilizar la fórmula de transformación de velocidades (ecuación 39.19a) para determinar la velocidad u_x' de la nave de la derecha vista desde el sistema S':

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} = \frac{-0{,}85c - 0{,}85c}{1 - (0{,}85c)(-0{,}85c)/c^2}$$

$$= \frac{-1{,}70c}{1 + 0{,}7225} = -0{,}987c$$

(c) En el sistema de la nave izquierda, la nave de la derecha se mueve con velocidad $V_2 = -0{,}987c$. Utilizar este dato para calcular la longitud contraída de la nave de la derecha:

$$L = \sqrt{1 - V_2^2/c^2}L_p = \sqrt{1 - (0{,}987c)^2/c^2}\,(100\text{ m}) = 16{,}1\text{ m}$$

[1] Las partículas sin masa, como los fotones, siempre se mueven con la velocidad de la luz.

www.elsolucionario.net

(d) Si las cabezas de las naves aparecen juntas para $t = 0$ en la Tierra, sus extremos finales coincidirán transcurrido el tiempo que cada nave necesita para desplazar su longitud vista desde la Tierra:

$$t = \frac{L}{V} = \frac{52{,}7 \text{ m}}{0{,}85c} = \frac{52{,}7 \text{ m}}{(0{,}85)(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 2{,}07 \times 10^{-7} \text{ s}$$

Cantidad de movimiento relativista 39.6

Hemos visto en las secciones anteriores que los postulados de Einstein exigen importantes modificaciones en nuestros conceptos de simultaneidad y de medición de tiempos y longitudes. Pero, lo que quizás sea aún más importante, requieren también que modifiquemos nuestros conceptos e ideas acerca de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. En mecánica clásica, se define la cantidad de movimiento de una partícula como el producto de su masa por su velocidad, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ siendo $\mathbf{u}$ la velocidad. En un sistema aislado de partículas, sin ninguna fuerza neta que actúe sobre el mismo, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

En esta sección veremos mediante un sencillo experimento mental que la expresión clásica para la cantidad de movimiento, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$, no se conserva en un sistema aislado. Consideremos dos observadores: el observador A en el sistema de referencia S y el observador B en el sistema S', el cual se mueve hacia la derecha en la dirección x con velocidad V respecto al sistema S. Cada observador tiene una bola de masa m, que son idénticas cuando se comparan en reposo. Un observador lanza su bola hacia arriba con una velocidad u_0 relativa a él y el otro lanza su bola hacia abajo con la misma velocidad relativa a él, de modo que cada bola recorre la distancia L, realiza un choque elástico con la otra bola y regresa. La figura 39.10 muestra el aspecto que presentan ambas colisiones en cada sistema de referencia. Clásicamente, las dos bolas tienen una cantidad de movimiento vertical de valor mu_0. Como los componentes verticales de las cantidades de movimiento son iguales y opuestos, el componente vertical de la cantidad de movimiento de las bolas, de modo que la cantidad de movimiento vertical total después del choque es también nula.

Sin embargo, desde el punto relativista, los componentes verticales de las velocidades de las dos bolas no son iguales y opuestos. Así pues, cuando se invierten debido al choque, no se conserva la cantidad de movimiento clásica. Consideremos cómo ve A el choque en el sistema S. La velocidad de su bola es $u_{Ay} = +u_0$. Puesto que la velocidad de la bola de B en el sistema S' es $u'_{Bx} = 0$, $u'_{By} = -u_0$, el componente y de la velocidad de la bola de B en el sistema S es (ecuación 39.18b) $u_{By} = -u_0/\gamma$. Así pues, si se utiliza la expresión $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ como definición de la cantidad de movimiento, los componentes verticales de la cantidad de movimiento de las dos bolas no son iguales ni opuestos según los ve el observador A. Como el sentido de movimiento de las bolas se invierte en el choque, no se conserva la cantidad de movimiento. Como es natural, B observa el mismo resultado. En el límite clásico, cuando u es mucho menor que c, γ es aproximadamente 1, y se conserva la cantidad de movimiento del sistema con cualquiera de los observadores.

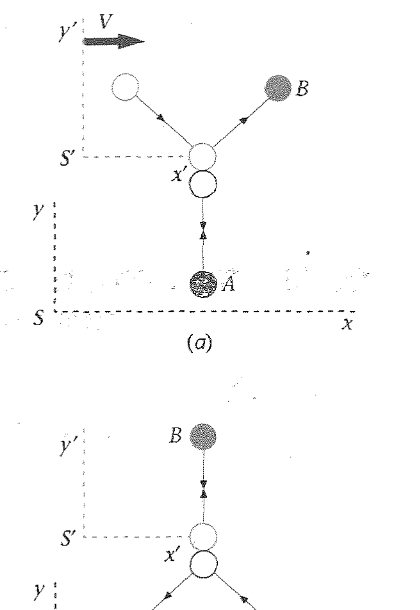


Figura 39.10 (*a*) Choque elástico de dos bolas idénticas vistas en el sistema S. El componente vertical de la velocidad de la bola B es u_0/γ en S si vale u_0 en S'. (*b*) El mismo choque visto en S'. En este sistema la bola A tiene un componente vertical de la velocidad u_0/γ.

La razón por la cual la cantidad de movimiento total de un sistema es importante en la mecánica clásica, se debe a que la misma se conserva cuando no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, como sucede con las colisiones. Ahora hemos visto que la cantidad $\sum m\mathbf{u}$ se conserva únicamente en la aproximación en que $u \ll c$. Definiremos la cantidad de movimiento relativista $\mathbf{p}$ de una partícula de manera que posea las siguientes propiedades:

1. En las colisiones, $\mathbf{p}$ se conserva.
2. Cuando u/c tienda a cero, $\mathbf{p}$ tenderá a $m\mathbf{u}$.

Demostraremos a continuación que la magnitud

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{39.20}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

se conserva en el choque elástico indicado en la figura 39.10. Como esta magnitud también tiende a $m\mathbf{u}$ cuando u/c tiende a cero, tomaremos esta ecuación como la definición de la **cantidad de movimiento relativista** de una partícula.

Una interpretación de la ecuación 39.20 es que la masa de un objeto aumenta con la velocidad. La magnitud $m/\sqrt{1-u^2/c^2}$ se denomina **masa relativista** de la partícula. La masa de una partícula cuando está en reposo en un cierto sistema de referencia se denomina su **masa en reposo** m_0. Así pues, la masa aumenta desde m_0 en reposo a $m_r = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ cuando se está moviendo con velocidad u. Para evitar confusiones, llamaremos m_0 a la masa en reposo y utilizaremos $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ para la masa relativista en este capítulo. La masa en reposo de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia. Utilizando esta notación, la cantidad de movimiento relativista de una partícula es, entonces,

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (39.21)$$

Cantidad de movimiento relativista

OPCIONAL

■ Ilustración de la conservación de la cantidad de movimiento relativista

Calcularemos el componente y de la cantidad de movimiento relativista de cada partícula en el sistema de referencia S para el choque de la figura 39.10 y demostraremos que el componente y de la cantidad de movimiento total relativista es nulo. La velocidad de la bola A en S es u_0, de modo que el componente y de su cantidad de movimiento relativista es

$$p_{Ay} = \frac{mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}$$

La velocidad de la bola B en S es más complicada. Su componente x es V y su componente y es $-u_0/\gamma$. Así pues,

$$u_B^2 = u_{Bx}^2 + u_{By}^2 = V^2 + \left(-u_0\sqrt{1-V^2/c^2}\right)^2 = V^2 + u_0^2 - \frac{u_0^2V^2}{c^2}$$

Utilizando este resultado para calcular $\sqrt{1-u_B^2/c^2}$, se obtiene

$$1 - \frac{u_B^2}{c^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} + \frac{u_0^2V^2}{c^4} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u_0^2}{c^2}\right)$$

y

$$\sqrt{1-u_B^2/c^2} = \sqrt{1-V^2/c^2}\sqrt{1-u_0^2/c^2} = (1/\gamma)\sqrt{1-u_0^2/c^2}$$

Por lo tanto, el componente y de la cantidad de movimiento relativista de la bola B vista en S es

$$p_{By} = \frac{mu_{By}}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}} = \frac{-mu_0/\gamma}{(1/\gamma)\sqrt{1-u_0^2/c^2}} = \frac{-mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}$$

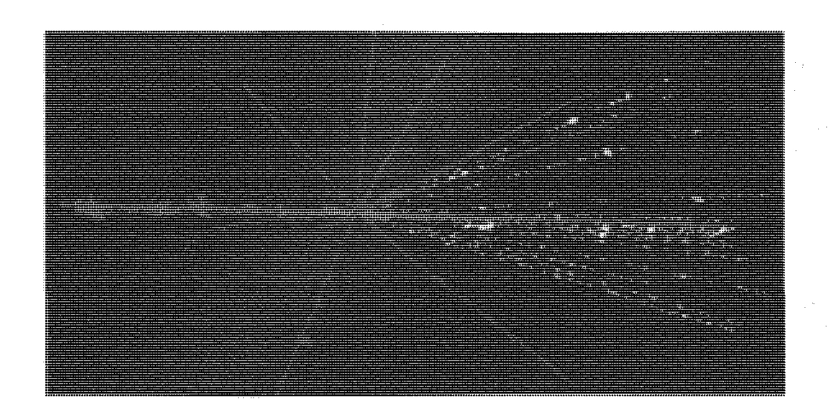
Como $p_{By} = -p_{Ay}$, el componente y de la cantidad de movimiento total de las dos bolas es cero. Si se invierte la velocidad de cada bola en el choque, la cantidad de movimiento total seguirá siendo cero y, por tanto, se conservará la cantidad de movimiento.

39.7 ■ Energía relativista

En mecánica clásica, el trabajo realizado por una fuerza no equilibrada que actúa sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética de la misma. En la mecánica relativista, igualaremos la fuerza no equilibrada a la variación temporal de la cantidad de

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



La creación de partículas elementales demuestra la conversión de energía cinética en energía en reposo. En esta fotografía de 1950 de un chorro de rayos cósmicos, un núcleo de azufre (rojo) de alta energía choca en una emulsión fotográfica y produce un chaparrón de partículas, entre las que se incluyen un núcleo de flúor (verde) otros fragmentos nucleares (azul) y alrededor de 16 piones (amarillo).

movimiento relativista. El trabajo realizado por una fuerza de este tipo puede calcularse entonces e igualarse a la variación de la energía cinética.

Como en mecánica clásica, definiremos la energía cinética como el trabajo realizado por una fuerza no equilibrada para acelerar una partícula desde el reposo hasta una cierta velocidad. Considerando sólo una dimensión, se tiene

$$E_c = \int_{u=0}^{u} \sum F\, ds = \int_0^u \frac{dp}{dt}\, ds = \int_0^u u\, dp = \int_0^u u\, d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \qquad \textbf{(39.22)}$$

en donde hemos utilizado $u = ds/dt$. Se deja como problema a resolver (problema 51) el demostrar que

$$d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} du$$

Si sustituimos esta expresión en el integrando de la ecuación 39.22, se tiene

$$E_c = \int_0^u u\, d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \int_0^u m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} u\, du = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right)$$

o bien

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_0 c^2 \qquad \textbf{(39.23)}$$

Energía cinética relativista

La expresión de la energía cinética consta de dos términos. El primero depende de la velocidad de la partícula. El segundo, m_0c^2, es independiente de la velocidad. La magnitud m_0c^2 se denomina **energía en reposo** de la partícula E_0, y es igual al producto de la masa en reposo por c^2:

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad \textbf{(39.24)}$$

Energía en reposo

La **energía relativista** total E se define entonces como la suma de la energía cinética más la energía en reposo:

$$E = E_c + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \textbf{(39.25)}$$

Energía relativista

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Así pues, el trabajo realizado por una fuerza sin equilibrar aumenta la energía desde el valor de la energía en reposo m_0c^2 hasta el valor final de la energía $m_0c^2/\sqrt{1-u^2/c^2} = m_rc^2$, en donde $m_r = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ es la masa relativista. Puede obtenerse una expresión útil para la velocidad de la partícula multiplicando la ecuación 39.21 de la cantidad de movimiento relativista por c^2 y comparando el resultado con la ecuación 39.25 correspondiente a la energía relativista. Se tiene

$$pc^2 = \frac{m_0c^2u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = Eu$$

o bien,

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \qquad \textbf{(39.26)}$$

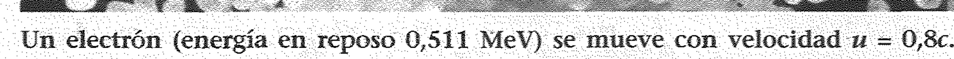
Las energías en física atómica y nuclear se expresan usualmente en unidades de electrón-voltios (eV) o megaelectrón-voltios (MeV):

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Una unidad conveniente para las masa de las partículas atómicas es eV/c^2 o MeV/c^2, que coincide con la energía en reposo de la partícula dividida por c^2. En la tabla 39.1 se dan las masas y energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros.

Tabla 39.1 Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros

Partículas	Símbolos	Energía en reposo, MeV
Fotón	γ	0
Electrón (positrón)	e o e^-(e^+)	0,5110
Muón	$\mu^\pm$	105,7
Pión	π^0	135
	$\pi^\pm$	139,6
Protón	p	938,280
Neutrón	n	939,573
Deuterón	^{2}H o d	1875,628
Tritón	^{3}H o t	2808,944
Helio-3	^{3}He	2808,41
Partícula alfa	^{4}He o α	3727,409

EJEMPLO 39.10 **Un electrón (energía en reposo 0,511 MeV) se mueve con velocidad $u = 0{,}8c$. Determinar (a) su energía total, (b) su energía cinética, y (c) la magnitud de su cantidad de movimiento.**

(a) La energía total viene dada por la ecuación 39.25:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{m_0c^2}{0{,}6}$$
$$= \frac{0{,}511 \text{ MeV}}{0{,}6} = 0{,}852 \text{ MeV}$$

(b) 1. La energía cinética es la energía total menos la energía en reposo:

$$K = E - m_0c^2 = 0{,}852 \text{ MeV} - 0{,}511 \text{ MeV} = 0{,}341 \text{ MeV}$$

2. La magnitud de la cantidad de movimiento se determina a partir de la ecuación 39.21:

$$p = \frac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0(0{,}8c)}{0{,}6}$$

3. Podemos simplificar la expresión anterior multiplicando numerador y denominador por c:

$$p = \frac{(0{,}8)m_0c^2}{(0{,}6)c} = \frac{(1{,}33)(0{,}511 \text{ MeV})}{c} = 0{,}680 \text{ MeV}/c$$

Observación La unidad MeV/c es una unidad conveniente de cantidad de movimiento.

La expresión para la energía cinética dada por la ecuación 39.23 no se parece apenas a la expresión clásica $\frac{1}{2}m_0u^2$. Sin embargo, cuando u es mucho menor que c, podemos obtener un valor aproximado de $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ utilizando el desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \ldots \approx 1 + nx \qquad \textbf{(39.27)}$$

www.elsolucionario.net

Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

A partir de este resultado, cuando u es mucho menor que c, la expresión para la energía cinética relativista se transforma en

$$E_c = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right) \approx m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}-1\right) = \frac{1}{2}m_0u^2$$

Por tanto, a velocidad bajas la expresión relativista es equivalente a la expresión clásica.

Obsérvese en la ecuación 39.25 que cuando la velocidad u se acerca a la velocidad de la luz c, la energía de la partícula se hace muy grande porque $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ se hace cada vez mayor. Para $u = c$, la energía resulta infinita. Si u fuese mayor que c, $\sqrt{1-u^2/c^2}$ resulta ser la raíz cuadrada de un número negativo y, por consiguiente, es imaginaria. Se puede dar una interpretación simple de este resultado considerando que deberá emplearse una cantidad infinita de energía en acelerar una partícula hasta alcanzar la velocidad de la luz, de modo que no puede existir ninguna partícula que estando en reposo en un sistema de referencia inercial cualquiera pueda llegar a moverse con una velocidad igual o mayor que la de la luz c. Como indicábamos en el ejemplo 39.7, si la velocidad de una partícula es menor que c en un sistema de referencia, es menor que c en cualquier otro sistema de referencia que se mueva respecto al primero con velocidades inferior a c.

En las aplicaciones prácticas, en lugar de la velocidad suele conocerse la cantidad de movimiento o la energía de una partícula. Para eliminar la velocidad u pueden combinarse la ecuación 39.21 correspondiente a la cantidad de movimiento relativista con la ecuación 39.25 que nos da la energía relativista. (Véase el problema 52.) El resultado es

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2 \qquad \textbf{(39.28)}$$

Relación entre la energía total, la cantidad de movimiento y la energía en reposo

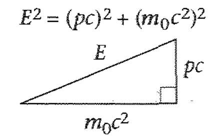


Figura 39.11 Triángulo rectángulo que sirve de regla mnemotécnica para recordar la ecuación 39.28

Esta útil ecuación puede recordarse mediante la regla mnemotécnica del triángulo indicado en la figura 39.11. Si la energía de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo mc^2, puede despreciarse el segundo sumando de la ecuación 39.28, obteniéndose la interesante aproximación

$$E \approx pc \qquad \text{para } E \gg m_0c^2 \qquad \textbf{(39.29)}$$

La ecuación 39.29 es una relación exacta entre la energía y la cantidad de movimiento para partículas que carecen de masa en reposo, como los fotones.

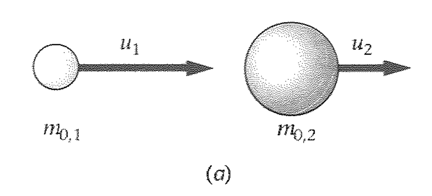
Ejercicio Un protón con una masa de 938 MeV/c^2 tiene una energía total de 1400 MeV. Hallar (a) $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, (b) su cantidad de movimiento, y (c) su velocidad u. (*Respuestas*: (a) 1,49, (b) $p = 1{,}04 \times 10^3$ MeV/c, (c) $u = 0{,}74c$.)

Masa en reposo y energía

Para Einstein, la ecuación 39.24 que relaciona la energía de una partícula con su masa fue el resultado más importante de la teoría de la relatividad. La energía y la inercia, que anteriormente eran dos conceptos diferentes, se relacionan a través de esta famosa ecuación. Como se expuso en el capítulo 7, la conversión de la energía en reposo en energía cinética con la correspondiente pérdida de masa en reposo es un suceso común en las desintegraciones radiactivas y en las reacciones nucleares, incluidas la fisión y la fusión nuclear. Este hecho fue ilustrado en el capítulo 7 con el deuterón, cuya masa en reposo es 2,22 MeV/c^2 inferior a la masa en reposo de sus componentes: un protón y un neutrón. Cuando estos dos nucleones se combinan para dar un deuterón se liberan 2,22 MeV de energía. La energía de enlace de estas partículas cuando forman conjuntamente un deuterón es 2,22 MeV. Cualquier partícula compuesta estable, tal como un deuterón o un núcleo de helio (2 neutrones más 2 protones), formado por otras partículas, posee

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net



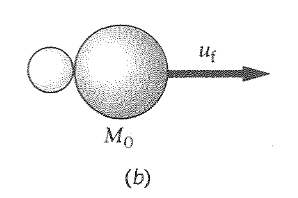


Figura 39.12 Choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Una partícula de masa en reposo $m_{0,1}$ choca con otra de masa en reposo $m_{0,2}$. Después de la colisión, las partículas quedan unidas, formando una partícula compuesta de masa en reposo M_0 que se mueve con velocidad u_f de forma que se conserve la cantidad de movimiento relativista. En este proceso se pierde energía cinética. Si suponemos que se conserva la energía total, la pérdida de energía cinética debe ser igual a c^2 veces el aumento de la masa en reposo del sistema.

una masa en reposo y una energía en reposo inferior a la suma de las masas y energías en reposo de sus componentes. La diferencia de energía en reposo es la energía de enlace de la partícula compuesta. Las energía de enlace de los átomos y moléculas son del orden de algunos electrón-voltios, lo que hace que la diferencia de masa entre la partícula compuesta y sus partes sea despreciable. Las energías de enlace de los núcleos son del orden de varios MeV, lo que origina una diferencia de masas observable. Algunos núcleos muy pesados, como el radio, son radiactivos y se desintegran en núcleos más ligeros, más una partícula alfa. En este caso, el núcleo original tiene una energía en reposo mayor que la de las partículas obtenidas en la desintegración. La energía en exceso aparece como energía cinética de los productos de dicha desintegración.

Para ilustrar la relación existente entre la masa y la energía, consideremos un choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Clásicamente, se pierde energía cinética en un choque de esta clase. Desde el punto de vista relativista, esta pérdida de energía cinética da lugar a un incremento de energía en reposo del sistema, es decir, la energía total del sistema se conserva. Consideremos una partícula de masa en reposo $m_{0,1}$ que se mueve con una velocidad inicial u_1 y que choca con una partícula de masa en reposo $m_{0,2}$ que se mueve con velocidad inicial u_2. Las partículas chocan y quedan adheridas formando una partícula de masa en reposo M_0 que se mueve con velocidad final u_f, como se ve en la figura 39.12. La energía total inicial de la partícula 1 es

$$E_1 = E_{c_1} + m_{0,1}c^2$$

en donde E_{c_1} es la energía cinética inicial. De igual modo, la energía total inicial de la partícula 2 es

$$E_2 = E_{c_2} + m_{0,2}c^2$$

La energía total inicial del sistema es

$$E_i = E_1 + E_2 = E_{c_1} + m_{0,1}c^2 + E_{c_2} + m_{0,2}c^2 = E_{c_i} + (m_{0,1} + m_{0,2})c^2$$

en donde $E_{c_i} = E_{c_1} + E_{c_2}$ es la energía cinética inicial del sistema. La energía final total del sistema es

$$E_f = E_{c_f} + M_0c^2$$

Si igualamos la energía final total con la energía inicial total se obtiene

$$E_{c_f} + M_0c^2 = E_{c_i} + (m_{0,1} + m_{0,2})c^2$$

La variación de energía cinética es, por tanto,

$$E_{c_f} - E_{c_i} = [M_0 - (m_{0,1} + m_{0,2})]c^2 = (\Delta m_0)c^2 \qquad \textbf{(39.30)}$$

en donde $\Delta m_0 = M_0 - (m_{0,1} + m_{0,2})$ es el incremento de masa en reposo del sistema.

EJEMPLO 39.11

Una partícula de masa en reposo 2 MeV/c^2 y energía cinética 3 MeV choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo 4 MeV/c^2. Después del choque, las dos partículas quedan unidas. Hallar (a) la cantidad de movimiento inicial del sistema, (b) la velocidad final del sistema de dos partículas y (c) la masa en reposos de dicho sistema.

Esquema del problema (a) La cantidad de movimiento inicial del sistema es la de la partícula incidente, que puede determinarse a partir de la energía total de la partícula. (b) La velocidad final del sistema puede determinarse a partir de su energía y

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

cantidad de movimiento totales utilizando la expresión $u/c = pc/E$ (ecuación 39.26). La energía y la cantidad de movimiento se determinan a partir de los respectivos principios de conservación. (c) Como la energía y la cantidad de movimiento finales son conocidos, la masa en reposo final puede hallarse a partir de $E^2 = p^2c^2 + (M_0c^2)^2$.

(a) 1. La cantidad de movimiento inicial de la partícula incidente está relacionada con su energía y masa en reposo:

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$$

$$pc = \sqrt{E_1^2 - (m_0c^2)^2}$$

2. La energía total de la partícula móvil es la suma de su energía cinética y energía en reposo:

$$E_1 = 3 \text{ MeV} + 2 \text{ MeV} = 5 \text{ MeV}$$

3. Utilizar esta energía total para calcular la cantidad de movimiento:

$$pc = \sqrt{E_1^2 - (m_0c^2)^2} = \sqrt{(5 \text{ MeV})^2 - (2 \text{ MeV})^2} = \sqrt{21} \text{ MeV}$$

$$p = 4{,}58 \text{ MeV}/c$$

(b) 1. La velocidad final del sistema de las dos partículas puede hallarse a partir de su energía total E y su cantidad de movimiento p utilizando la ecuación 39.26:

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$$

2. Por el principio de conservación de la energía total, la energía final del sistema es igual a la energía total inicial de las dos partículas:

$$E_f = E_i = E_1 + E_2 = 5 \text{ MeV} + 4 \text{ MeV} = 9 \text{ MeV}$$

3. Por el principio de conservación de cantidad de movimiento, esta magnitud para el sistema de las dos partículas es igual a su valor inicial:

$$p = 4{,}58 \text{ MeV}/c$$

4. Calcular la velocidad del sistema de las dos partículas a partir de su energía y cantidad de movimiento totales utilizando $u/c = pc/E$:

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{4{,}58 \text{ MeV}}{9 \text{ MeV}} = 0{,}509$$

(c) La masa en reposo del sistema final de las dos partículas puede hallarse a partir de la ecuación 39.28 utilizando $pc = 4{,}58$ MeV y $E = 9$ MeV:

$$E^2 = (pc)^2 + (M_0c^2)^2$$

$$(9 \text{ MeV})^2 = (4{,}58 \text{ MeV})^2 + (M_0c^2)^2$$

$$M_0 = 7{,}75 \text{ MeV}/c^2$$

Observación La masa en reposo del sistema fue incrementada de 6 MeV/c^2 a 7,75 MeV/c^2. Este aumento multiplicado por c^2 es igual a la pérdida de energía cinética del sistema, como puede verse en el ejercicio siguiente.

Ejercicio (a) Determinar la energía cinética final del sistema de dos partículas del ejemplo 39.11. (b) Determinar la pérdida de energía cinética, $E_{c_{\text{pérdida}}}$, en la colisión. (c) Demostrar que $E_{c_{\text{pérdida}}} = \Delta Mc^2$, en donde ΔM es el incremento de la masa en reposo del sistema determinado en la parte (c) de dicho ejemplo. (*Respuestas*: (a) $E_{c_f} = E - M_0c^2 = 9 \text{ MeV} - 7{,}75 \text{ MeV} = 1{,}25 \text{ MeV}$, (b) $E_{c_{\text{pérdida}}} = E_{c_i} - E_{c_f} = 3 \text{ MeV} - 1{,}25 \text{ MeV} = 1{,}75 \text{ MeV}$, (c) $\Delta Mc^2 = M_0c^2 - M_ic^2 = 7{,}75 \text{ MeV} - (2 \text{ MeV} + 4 \text{ MeV}) = 1{,}75 \text{ MeV} = E_{c_{\text{pérdida}}}$.)

EJEMPLO 39.12

Un cohete de masa $m_r = 10^6$ kg navega a través del espacio cuando súbitamente necesita acelerar. El cohete expulsa 10^3 kg de gases de combustión en un tiempo muy corto a una velocidad $c/2$ respecto al cohete. (a) Despreciando cualquier cambio en la masa en reposo del sistema, calcular la velocidad del cohete u_r en el sistema donde estaba inicialmente en reposo. (b) Utilizar los resultados de (a)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

explorando la naturaleza

Relatividad general

La generalización de la teoría de la relatividad a los sistemas de referencia no inerciales llevada a cabo por Einstein en 1916 se conoce con el nombre de teoría general de la relatividad. Desde el punto de vista matemático es más compleja que la teoría especial de la relatividad, y existen pocas situaciones en las que pueda comprobarse. Sin embargo, su importancia requiere que hagamos al menos una breve exposición cualitativa.

El fundamento de la teoría general de la relatividad es el **principio de equivalencia**:

> *Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado.*
>
> *Principio de equivalencia*

Este principio surge en la mecánica newtoniana debido a la aparente identidad entre masa inercial y masa gravitatoria. En un *campo gravitatorio uniforme, todos los objetos caen con la misma* aceleración **g** independientemente de su masa ya que la fuerza gravitatoria es proporcional a la masa (gravitatoria) mientras que la aceleración varía inversamente con la masa (inercial). Supongamos un compartimiento situado en el espacio, alejado de toda materia y que se encuentra sometido a una aceleración uniforme **a**, tal como se muestra en la figura E39.1*a*. No se puede llevar a cabo ningún experimento mecánico en el interior del compartimiento que permita distinguir si éste se encuentra acelerando en el espacio o se encuentra en reposo (o moviéndose con velocidad uniforme) en presencia de un campo gravitatorio uniforme **g** = −**a**, como se muestra en la figura E39.1*b*. Si dentro del compartimiento se sueltan algunos objetos, caerán hacia el "suelo" con una aceleración **g** = −**a**. Si una persona está sobre una balanza de muelle, leerá que su "peso" tiene un valor *ma*.

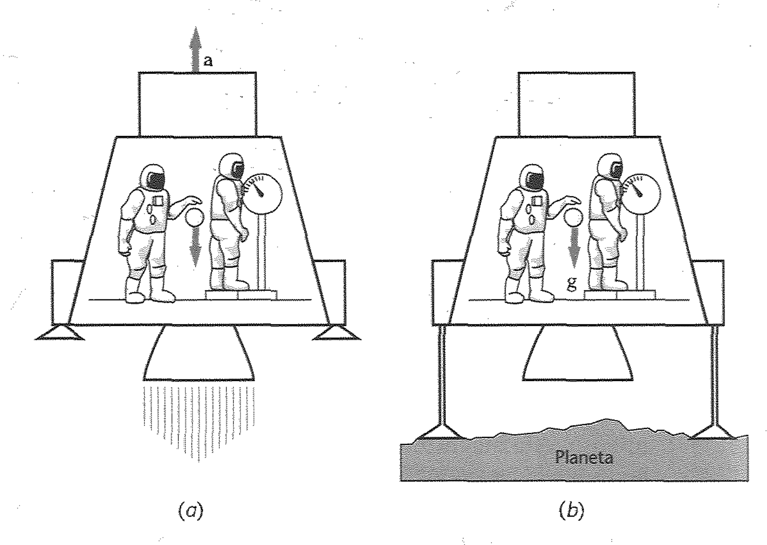


Figura E39.1 Los resultados de los experimentos en un sistema de referencia uniformemente acelerado (*a*) no pueden distinguirse de los realizados en un campo gravitacional uniforme (*b*) si la aceleración **a** y el campo gravitacional **g** tienen la misma magnitud.

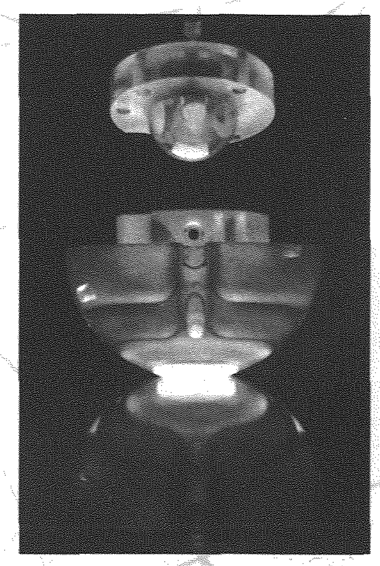
Einstein supuso que el principio de equivalencia se aplica a todas las ramas de la física y no sólo a la mecánica. Supuso que no

para estimar el cambio en la masa en reposo del sistema. (c) Calcular la velocidad del cohete a partir de la mecánica newtoniana clásica.

Esquema del problema La velocidad del cohete se calcula a partir de su cantidad de movimiento relativista. En el sistema donde el cohete estaba inicialmente en reposo, la cantidad de movimiento total del cohete más el combustible es cero. Después del arranque, la magnitud de la cantidad de movimiento del cohete es igual a la de los gases de combustión emitidos. Sea m_r la masa del cohete después de expulsar los gases de combustión y m_f la masa del combustible. Como $m_r \approx 1000\, m_f$, la pérdida de combustible tiene un efecto despreciable sobre la masa del cohete. En la parte (b) puede despreciarse la variación de masa en reposo del gas emitido en comparación con el cambio de masa en reposo del cohete.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Esta esfera de cuarzo situada en la parte superior del recipiente es probablemente el objeto del mundo de más perfecta "redondez" o esfericidad. Está proyectada para girar sobre sí misma como un giróscopo en un satélite que orbita alrededor de la Tierra. La relatividad general predice que la rotación de la Tierra hará que el eje de rotación del giróscopo tenga un movimiento de precesión circular con una velocidad angular de aproximadamente 1 revolución cada 100 000 años.

podía existir ningún experimento que distinguiese entre un movimiento uniformemente acelerado y la presencia de un campo gravitatorio.

Una consecuencia del principio de equivalencia —la desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio— fue una de las primeras en comprobarse experimentalmente. En la figura E.39.2 se muestra un haz de luz que entra en un compartimiento que se está acelerando. Se muestran las diferentes posiciones del compartimiento para intervalos de tiempo iguales, como se ve en la figura E.39.2*a*. Como el compartimiento se está acelerando, la distancia que recorre en cada intervalo de tiempo aumenta con el tiempo. Por tanto la trayectoria del haz de luz observada en el interior del compartimiento es una parábola, como se muestra en la figura E.39.2*b*. Pero, de acuerdo con el principio de equivalencia, no es posible distinguir un compartimiento en aceleración y otro con velocidad uniforme en un campo gravitatorio uniforme. Por tanto, concluimos que un haz de luz, como un objeto masivo, se acelerará en un campo gravitatorio. Por ejemplo, en un lugar próximo a la superficie terrestre la luz caerá con una aceleración de 9,81 m/s^2. Debido a la enorme velocidad de la luz este valor es difícil de observar. Así, por ejemplo, para una distancia de 3000 km, que la luz recorre aproximadamente en 0,01 s, un haz de luz caerá aproximadamente 0,5 mm. Einstein dijo que la desviación

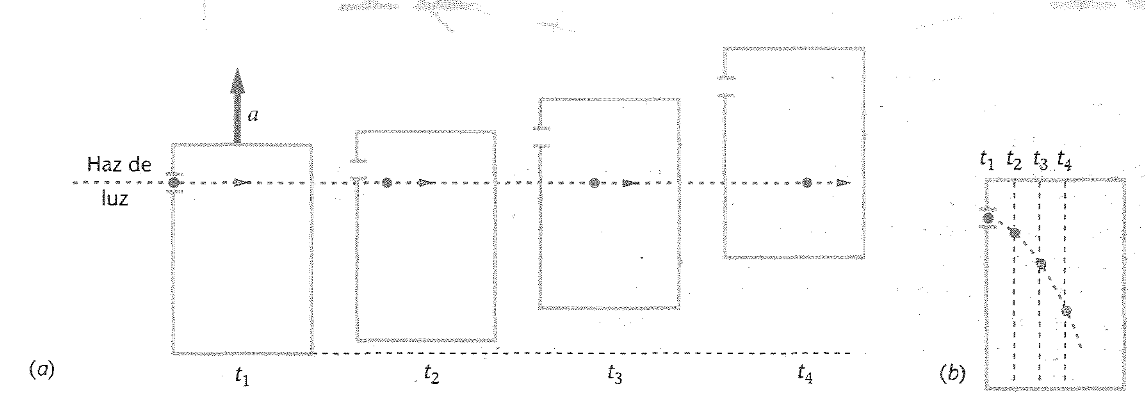


Figura E39.2 (*a*) Haz de la luz moviéndose en línea recta a través de un compartimiento que experimenta una aceleración uniforme. La posición del haz se muestra a intervalos iguales de tiempo t_1, t_2, t_3 y t_4. (*b*) En el sistema de referencia del compartimiento la luz describe una trayectoria parabólica como lo haría una pelota si fuera lanzada horizontalmente. Para dar mayor énfasis los desplazamiento verticales en (*a*) y (*b*) están muy exagerados.

(a) 1. La velocidad del cohete está relacionada con su cantidad de movimiento:

$$p_r = \frac{m_r u_r}{\sqrt{1 - u_r^2/c^2}}$$

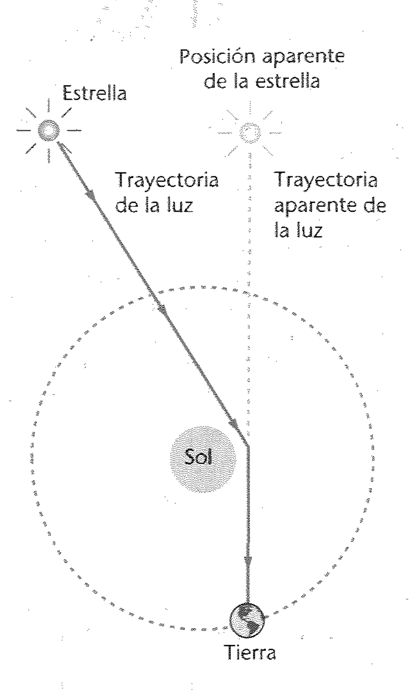
2. Igualar la cantidad de movimiento del cohete con la de los gases expulsados:

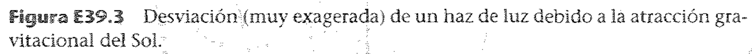
$$\frac{m_r u_r}{\sqrt{1 - u_r^2/c^2}} = \frac{m_f u_f}{\sqrt{1 - u_f^2/c^2}}$$

$$= \frac{m_f(0,5c)}{\sqrt{1 - (0,5c)^2/c^2}} = \frac{m_f(0,5c)}{\sqrt{1 - 0,25}} = \frac{m_f c}{\sqrt{3}}$$

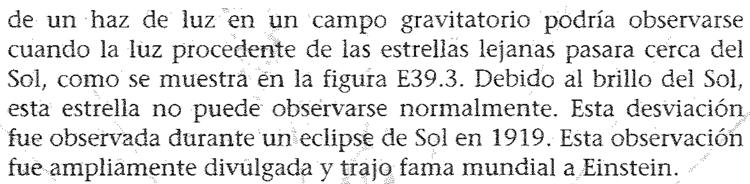
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net




Figura E39.3 Desviación (muy exagerada) de un haz de luz debido a la atracción gravitacional del Sol.


Este reloj de máser de hidrógeno de extraordinaria exactitud fue lanzado dentro de un satélite en 1976, y sus medidas se comparaban con las de otro reloj idéntico en la Tierra. De acuerdo con lo que predice la teoría general de la relatividad, el reloj en la Tierra, donde el potencial gravitatorio es menor, "perdía" alrededor de $4{,}3 \times 10^{-10}$ s cada segundo en comparación con el reloj que está en el satélite a una altura de alrededor de los 10 000 km.


de un haz de luz en un campo gravitatorio podría observarse cuando la luz procedente de las estrellas lejanas pasara cerca del Sol, como se muestra en la figura E39.3. Debido al brillo del Sol, esta estrella no puede observarse normalmente. Esta desviación fue observada durante un eclipse de Sol en 1919. Esta observación fue ampliamente divulgada y trajo fama mundial a Einstein.

Una segunda predicción de la teoría de la relatividad general de Einstein, que no trataremos en detalle, es el exceso de precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, estimado aproximadamente en 0,01° por siglo. Este efecto era conocido desde hacía tiempo, pero no había podido ser explicado; así pues, en cierto sentido, éste fue otro de los éxitos inmediatos de la teoría.

Una tercera predicción de la relatividad general se refiere a la variación de los intervalos de tiempo y de las frecuencias de la luz en un campo gravitatorio. En el capítulo 11 vimos que la energía potencial gravitatoria entre dos masas M y m separadas entre sí una distancia r es

$$U = -\frac{GMn}{r}$$

3. Despejar u_r:

$$\sqrt{3}m_r u_r = \sqrt{1 - u_r^2/c^2}\,m_f c = m_f\sqrt{c^2 - u_r^2}$$

$$c^2 - u_r^2 = 3(m_r/m_f)^2 u_r^2 = 3 \times 10^6 u_r^2$$

$$u_r = (1/\sqrt{3}) \times 10^{-3} c = 1{,}73 \times 10^5 \text{ m/s}$$

(b) 1. La masa en reposo está relacionada con la energía total. Expresar la energía inicial E_i en función de m_r y m_f:

$$E_i = m_r c^2 + m_f c^2$$

2. Expresar la energía final en función de la masa en reposo final del cohete menos la del combustible m_r y la masa en reposo final del combustible m_f:

$$E_f = \frac{m_r' c^2}{\sqrt{1 - u_r^2/c^2}} + \frac{m_f' c^2}{\sqrt{1 - (0{,}5c)^2/c^2}}$$

3. Simplificar teniendo en cuenta que $u_r \ll$ c y $m_f \ll m_r$:

$$E_f \approx m_r' c^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} m_f c^2$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

siendo G la constante universal de la gravitación, y habiéndose escogido como punto cero de la energía potencial cuando la separación de las masas es infinita. La energía potencial por unidad de masa cerca de una masa M se denomina *potencial gravitatorio* ϕ:

$$\phi = -\frac{GM}{r} \tag{E39.1}$$

De acuerdo con la teoría general de la relatividad, los relojes marchan más lentamente en las regiones de potencial gravitatorio bajo. (Como el potencial gravitatorio es negativo, como puede verse por la ecuación E39.1 el potencial gravitatorio bajo se presenta cerca de la masa en donde el valor del potencial es grande.) Si Δt_1 es un intervalo de tiempo entre dos sucesos medidos por un reloj en donde el potencial gravitatorio es ϕ_1, y Δt_2 es el intervalo entre los mismos sucesos pero medidos por un reloj situado donde el potencial gravitatorio es ϕ_2, la relatividad general predice que la diferencia relativa entre estos tiempos será aproximadamente[1]

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{1}{c^2}(\phi_2 - \phi_1) \tag{E39.2}$$

Por tanto, un reloj situado en una región de bajo potencial gravitatorio funcionará con mayor lentitud que otro situado en una región de alto potencial. Como un átomo en vibración puede considerarse como un reloj, su frecuencia de vibración en una región de bajo potencial, por ejemplo, cerca del Sol, será inferior a la del mismo átomo situado sobre la Tierra. Este desplazamiento hacia las frecuencias bajas y por tanto hacia longitudes de onda largas el nombre de desplazamiento **gravitatorio hacia el rojo**.

Como ejemplo final de las predicciones de la teoría general, mencionaremos los agujeros negros, predichos por primera vez por Oppenheimer y Snyder en 1939. De acuerdo con la teoría general de la relatividad, si la densidad de un objeto como una estrella es suficientemente grande, la atracción gravitatoria es tan enorme que una vez dentro del radio crítico, nada puede escapar a su acción, ni siquiera la luz o la radiación electromagnética. (El efecto que produce un agujero negro sobre los objetos que se encuentran fuera del radio crítico es el mismo que el de cualquier otra masa.) Una de las características de un objeto de este tipo es que nada de lo que ocurre en su interior puede ser comunicado al mundo exterior. Como ocurre con cierta frecuencia en física, un cálculo simple aunque incorrecto, permite calcular los valores correctos para la relación entre la masa y el radio crítico de un agujero negro. En mecánica newtoniana, el valor de la velocidad necesaria para que una partícula escape de la superficie de un planeta o estrella de masa M y radio R viene dada por la ecuación 11.19:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{Rm}}$$

Si hacemos la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz y despejamos el radio, obtenemos el radio crítico R_S, llamado **radio de Schwarzschild**:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Para que un objeto de masa igual a la de nuestro Sol fuese un agujero negro, su radio debería ser aproximadamente igual a 3 km. Como un agujero negro no emite radiación y se espera que su radio sea pequeño, la detección de este objeto no es fácil. Lo mejor que podría ocurrir para detectar un agujero negro es que éste fuese compañero de una estrella normal en un sistema binario de estrellas. Entonces ambas estrellas girarían alrededor de su centro de masas, y la existencia del agujero negro podría deducirse a partir del movimiento de la estrella normal. Actualmente existen varios candidatos excelentes —uno en la constelación del Cisne, otro en la Pequeña Nube de Magallanes y quizás uno en nuestra propia galaxia— pero la evidencia no es absoluta.

[1] Como normalmente este desplazamiento es muy pequeño, carece de importancia el intervalo por el que se divida el primer miembro de la ecuación.

www.elsolucionario.net

4. Aplicar la conservación de la energía y despejar m_r:

$$E_f = E_i$$

$$m_r'c^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}m_f c^2 = m_r c^2 + m_f c^2$$

$$m_r' = m_r - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)m_f = m_r - 0{,}155m_f$$

$$\Delta m_f = -0{,}155m_f = -155\text{ kg}$$

(c) 1. Igualar la magnitud de la cantidad de movimiento clásica del cohete con la correspondiente del combustible expulsado y despejar u_r:

$$m_r u_r = m_f u_f$$

$$u_r = \frac{m_f}{m_r}u_f = \frac{10^3\text{ kg}}{10^6\text{ kg}}(0{,}5c) = 1{,}5 \times 10^5\text{ m/s}$$

Observaciones La disminución de masa en reposo es extremadamente pequeña como ocurre normalmente en los problemas macroscópicos. Obsérvese que el cálculo clásico de la velocidad ofrece en este caso un error del 13% aproximadamente.

 www.elsolucionario.net

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Postulados de Einstein	La teoría especial de la relatividad está basada en dos postulados de Albert Einstein. Todos los resultados de la relatividad especial pueden deducirse de estos postulados. Postulado 1. No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme. Postulado 2. La velocidad de la luz es independiente del movimiento del foco. Una implicación importante de ambos postulados es Postulado 2 (alternativo). Todos los observadores miden el mismo valor para la velocidad de la luz con independencia del movimiento relativo de los focos y de los observadores.
2. Transformación de Lorentz	$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z'$ 39.9 $t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$ 39.10
Transformación inversa	$x' = \gamma(x + Vt), \quad y' = y, \quad z' = z$ 39.11 $t' = \gamma\left(t + \frac{Vx}{c^2}\right)$ 39.12
3. Tiempo propio y dilatación del tiempo	El intervalo de tiempo medido entre dos sucesos que se producen en el mismo punto del espacio en un cierto sistema de referencia se denomina tiempo propio. En otro sistema de referencia en el que los sucesos tienen lugar en puntos diferentes, el intervalo de tiempo entre los sucesos mencionados es más largo en el factor γ. $\Delta t = \gamma\,\Delta t_p$ 39.13
4. Contracción de longitudes	La longitud de un objeto, medida en un sistema en el cual dicho objeto se encuentra en reposo, se denomina su longitud propia L_p. Cuando se mide en otro sistema de referencia, la longitud del objeto es $L = \frac{L_p}{\gamma}$ 39.14
5. Efecto Doppler relativista	$f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} f_0$ (aproximación) 39.16a $f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} f_0$ (alejamiento) 39.16b
6. Sincronización de relojes	Dos sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema que se está moviendo respecto al primero. Si dos relojes están sincronizados en el sistema en que se encuentran en reposo, estarán fuera de sincronización en otro sistema. En el sistema en que se están moviendo, el reloj "cazador" adelanta en una cantidad $\Delta t_S = L_p(V/c^2)$ 39.17 en donde L_p es la distancia propia entre los relojes.
7. Transformación de velocidades	$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + Vu'_x/c^2}$ 39.18a $u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)}$ 39.18b $u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)}$ 39.18c

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} \qquad 39.19a$$

Transformación inversa de velocidades

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \qquad 39.19b$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \qquad 39.19c$$

8. Cantidad de movimiento relativista

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad 39.21$$

en donde m_0 es la masa en reposo de la partículas

9. Cantidad de movimiento relativista

Energía cinética

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - E_0 \qquad 39.23$$

Energía en reposo

$$E_0 = m_0c^2 \qquad 39.24$$

Energía total

$$E = E_c + E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad 39.25$$

10. Fórmulas útiles para la velocidad, energía y cantidad de movimiento

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \qquad 39.26$$

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2 \qquad 39.28$$

$$E \approx pc \qquad \text{para } E \gg m_0c^2 \qquad 39.29$$

11. Energía de enlace

La masa en reposo total de sistemas de partículas ligadas, como los núcleos y los átomos, es menor que la suma de las masas en reposo de las partículas que constituyen el sistema. La diferencia de masas multiplicada por c^2 es igual a la energía de enlace del sistema. La energía de enlace es la energía que debe adicionarse para descomponer el sistema en sus partes. Las energías de enlace de los electrones en los átomos son del orden de los eV o de los keV, lo que equivale a una diferencia despreciable de las masas en reposo. Las energías de enlace en los núcleos es del orden de varios MeV, y la diferencia de masas en reposo es observable.

www.elsolucionario.net

Guía para la resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Transformación de Lorentz — Determinar la separación espacial o el intervalo de tiempo entre dos sucesos en otro sistema de referencia.	Utilizar la transformación de Lorentz. Si los sucesos ocurren en el mismo lugar en un sistema, el intervalo de tiempo propio, y en otro sistema $\Delta t = \gamma \Delta t_p$. **Ejemplos 39.1, 39.2, 39.3, 39.5**
2. Efecto Doppler — Determinar la velocidad de una fuente móvil a partir de su desviación Doppler.	Utilizar $f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 \pm V/c}$ y despejar V/c. **Ejemplo 39.4**
3. Sincronización de relojes — Determinar el tiempo de desincronización de los dos relojes.	El reloj "cazador" adelanta al otro en $\Delta t_s = \gamma V L_p/c^2$, siendo L_p la separación propia de los relojes. **Ejemplo 39.5**

 www.elsolucionario.net

4. **Transformación de velocidades**

Determinar la velocidad de un objeto relativa al observador, conocida su velocidad en otro sistema de referencia.	Utilizar las ecuaciones de transformación de velocidades.	**Ejemplos 39.6, 39.7, 39.8, 39.9**

5. **Cantidad de movimiento y energía**

Determinar la energía total, la energía cinética y la cantidad de movimiento de una partícula, conocidas su energía en reposo y velocidad.	Utilizar $E = m_0c^2/\sqrt{1-u^2/c^2}$, $E_c = E - E_0$, $p = m_0u/\sqrt{1-u^2/c^2}$.	**Ejemplos 39.10, 39.11**
Determinar la velocidad y la energía en reposo de un sistema después de una colisión inelástica.	Utilizar $E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$ para determinar la cantidad de movimiento de las partículas. Después usar la conservación de la cantidad de movimiento y energía. La velocidad se halla de $u/c = pc/E$.	**Ejemplo 39.11**
Determinar la velocidad de un cohete, dada la masa y la velocidad de los gases de combustión emitidos.	Utilizar el principio de conservación de la cantidad de movimiento.	**Ejemplo 39.12**

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

• Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

Dilatación del tiempo y contracción de longitudes

• **1** Un observador está de pie en una esquina y un amigo suyo pasa conduciendo un automóvil por delante de él. Ambos anotan los tiempos en que el coche pasa por dos cruces de calles diferentes. Cada uno de ellos determina en su reloj las lecturas de tiempo que transcurren entre ambos sucesos. ¿Cuál de ellos ha determinado el intervalo de tiempo propio?

• **2** El período de vida propio de los piones es de $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. Si un haz de esta partículas tiene una velocidad de $0{,}85c$,

(a) ¿Cuál deberá ser el período de vida media cuando se mida en el laboratorio?

(b) ¿Qué distancia deberán recorrer en valor medio, antes de que se desintegren?

(c) ¿Cuál será la repuesta a la parte (b) si se desprecia la dilatación del tiempo?

• **3**

(a) En el sistema de referencia de los piones del problema 2, ¿cuánto ha recorrido el laboratorio en un período de vida típico de $2{,}6 \times 10^{-8}$ s?

(b) ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema de referencia del laboratorio?

• **4** El período de vida propio medio de un muón es 2μs. Un haz de estos muones se está moviendo a $0{,}999c$.

(a) ¿Cuál es su período de vida medio en el laboratorio?

(b) ¿Cuánta distancia recorrerán, en valor promedio, antes de desintegrarse?

• **5**

(a) En el sistema de referencia del muón del problema 4, ¿qué espacio recorrerá el laboratorio en un período de vida típico de 2 μs?

(b) ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema de referencia del laboratorio?

• **6** Un astronauta ha sido enviado a una región remota del espacio para controlar el tráfico. En un momento de su trabajo una nave espacial pasa junto a él y mediante un dispositivo láser mide su longitud, resultando un valor de 85 m. Consulta un catálogo manual e identifica la nave. Se trata de un aparato CCCNX-22 cuya longitud propia es de 100 m. ¿Cuál era su velocidad?

• **7** Una nave espacial viaja hacia una estrella alejada a 95 años-luz con una velocidad $2{,}22 \times 10^8$ m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar allí

(a) según se mediría en la Tierra y

(b) según mediría un pasajero de la nave?

• **8** El periodo de vida medio de un pión que se mueve a velocidad elevada resulta ser, al medirse, de $7{,}5 \times 10^{-8}$ s, mientras que si se mide en reposo es $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. ¿Con qué velocidad se está moviendo el pión?

• **9** Una regla métrica se mueve con velocidad $V = 0{,}8c$ respecto al observador en dirección paralela a la regla.

(a) Hallar la longitud de la regla medida por el observador.

(b) ¿Cuánto tiempo tarda en pasar la regla por delante del observador?

• **10** El período de semidesintegración de los piones cargados π^+ y π^- es $1{,}8 \times 10^{-8}$ s; es decir, si en el sistema en reposo de los piones hay N piones en el tiempo $t = 0$, sólo quedaran $N/2$ piones en el tiempo $t = 1{,}8 \times 10^{-8}$ s. Los piones se producen en un acelerador y emergen con una velocidad de $0{,}998c$. ¿Qué distancia recorren estas partículas en el laboratorio antes de que la mitad de ellas se hayan desintegrado?

•• **11** Un observador tiene una amiga de su misma edad que viaja a la estrella Alfa Centauri, a 4 años-luz de la Tierra, y regresa inmediatamente. Insiste en que el viaje entero duró 6 años exactamente. ¿Con qué velocidad realizó el viaje?

•• **12** Dos naves espaciales que se desplazan en direcciones opuestas se cruzan en un momento determinado. Una pasajera de la nave A que conoce que la longitud de su nave es de 100 m observa que la nave B se mueve a una velocidad relativa a A de $0{,}92c$ y que la longitud de B es

www.elsolucionario.net

36 m. ¿Cuáles serían las longitudes de las dos naves medidas por un pasajero de la nave *B*?

•• 13 En el acelerador lineal de colisión de Stanford, se disparan pequeños paquetes de electrones y positrones unos contra otros. En el sistema de referencia del laboratorio, cada paquete tiene aproximadamente 1 cm de largo y 10 μm de diámetro. En la región de colisión, cada partícula tiene una energía de 50 GeV, y los electrones y los positrones se mueven en sentidos opuestos.

(a) ¿Qué longitud y qué anchura tiene cada paquete en su propio sistema de referencia?
(b) ¿Cuál debe ser la longitud propia mínima del acelerador para que un paquete tenga sus dos extremos simultáneamente dentro del acelerador en su propio sistema de referencia? (La longitud real del acelerador es menor de 1000 m.)
(c) ¿Cuál es la longitud de un paquete de positrones en el sistema de referencia de los paquetes de electrones?

Transformación de Lorentz

• 14 Utilizar el desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \ldots \approx 1 + nx$$

para deducir los resultados siguientes en el caso en que V sea mucho menor que c, y utilizar los resultados obtenidos cuando sean aplicables en los problemas que siguen:

(a) $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$ (b) $\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$ (c) $\gamma - 1 \approx 1 - \frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$

•• 15 Demostrar que cuando $V \ll c$ las ecuaciones de transformación para x, t y u se reducen a las ecuaciones de Galileo.

•• 16 Los aviones supersónicos tiene unas velocidades máximas del orden de $(3 \times 10^{-6})c$.

(a) ¿En qué porcentaje se verá contraído en longitud un avión de este tipo?
(b) Durante un tiempo de 1 año = $3{,}15 \times 10^7$ s en el reloj del observador, ¿cuánto tiempo habrá transcurrido en el reloj del piloto? ¿Cuántos minutos se perderán en el reloj del piloto en 1 año del tiempo del observador?

•• 17 ¿Cómo debe ser de grande la velocidad relativa de los observadores para que sus medidas de intervalos de tiempo difieran en el 1 por ciento? (Véase problema 14.)

•• 18 Una nave espacial de longitud propia $L' = 400$ m se mueve por delante de una estación transmisora a la velocidad de $0{,}76c$. En el instante en que el extremo frontal de la nave pasa por delante del transmisor los relojes del transmisor y del extremo inicial de la nave están sincronizados a $t = t' = 0$. En el instante que el extremo final de la nave pasa por delante del transmisor, éste emite una señal que es detectada por los relojes citados.

(a) Según el reloj de la nave, ¿cuándo fue emitida esta señal?
(b) Según el reloj del transmisor, ¿cuándo la señal fue recibida por la nave?
(c) Según el reloj de la nave, ¿cuándo fue recibida la señal?
(d) Según un observador del transmisor, ¿dónde se encontraba el extremo frontal de la nave al recibirse la señal?

•• 19 Un haz de partículas inestables emerge de un acelerador con una velocidad de $0{,}89c$. Dos detectores de partículas situados a 3,0 y 6,0 m del orificio de salida miden intensidades del haz de 2×10^8 partículas /cm^2·s y 5×10^7 partículas/cm^2·s respectivamente

(a) Determinar el período de semidesintegración de las partículas.
(b) Determinar la intensidad del haz en el orificio de salida del acelerador
(c) A continuación el acelerador se ajusta de modo que las partículas emergen del orificio con una velocidad de $0{,}96c$. La intensidad del haz en el detector más alejado es de nuevo 5×10^7 partículas/cm^2·s. Determinar la intensidad en el orificio de salida del acelerador.

•• 20 Determinar que si u'_x y V son ambos menores que c en la ecuación 39.18a, entonces u_x es menor que c. (*Nota*: sea $u'_x = (1 - \epsilon_1)c$ y $V = (1 - \epsilon_2)c$, en donde ϵ_1 y ϵ_2 son números pequeños positivos menores que 1.)

••• 21 Dos sucesos en S están separados por una distancia $D = x_2 - x_1$ y un tiempo $T = t_2 - t_1$.

(a) Utilizar las ecuaciones de transformación de Lorentz para demostrar que en el sistema S', que se mueve con velocidad V respecto al sistema S, la separación de tiempo es $t'_2 - t'_1 = \gamma(T - VD/c^2)$.
(b) Demostrar que los sucesos pueden ser simultáneos en el sistema S' sólo si D es mayor que cT.
(c) Si uno de los sucesos es la *causa* del otro, la separación D debe ser menor que cT, puesto que D/c es el tiempo más pequeño que puede tardar una señal en recorrer el espacio que va desde x_1 hasta x_2 en el sistema S. Demostrar que si D es menor que cT, t'_2 es mayor que t'_1 en todos los sistemas de referencia. Esto demuestra que la causa debe preceder al efecto en todos los sistemas de referencia (admitiendo que lo hace en uno de ellos).
(d) Suponer que se pudiese enviar una señal con velocidad $c' > c$ de modo que en el sistema S la causa precediese al efecto en el tiempo $T = D/c'$. Demostrar que entonces existe un sistema de referencia que se mueve con una velocidad V menor que c en la cual el efecto precede a la causa.

Sincronización de relojes y simultaneidad

• 22 Si el suceso A se produce antes que se produzca el suceso B en un sistema determinado, ¿puede ser posible que exista un sistema de referencia en el que el suceso B se produzca antes que el suceso A?

• 23 Dos sucesos son simultáneos en un sistema en el cual se producen además en el mismo punto del espacio. ¿Son simultáneos en otros sistemas de referencia?

•• 24 Dos observadores están en movimiento relativo. ¿En qué circunstancias pueden estar de acuerdo en la simultaneidad de dos sucesos diferentes?

Los problemas 25 a 29 se refieren al siguiente caso. Un observador en S′ marca una distancia L′ = 100 minutos-luz entre los punto A′ y B′ y coloca una lámpara de destellos en el punto medio C′. Dispone que la lámpara produzca destellos y que los relojes en A′ y B′ empiecen a marchar con el valor cero cuando la luz procedente de los destellos les alcance (figura 39.13). El sistema S′ se mueve hacia la derecha con velocidad 0,6c respecto a un observador C en S que está en el punto medio entre A′ y B′ cuando la lámpara lanza un destello y pone su reloj a cero en dicho instante.

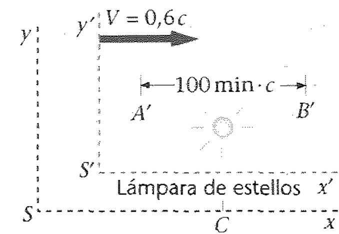


Figura 39.13 Problemas 25 a 29

•• 25 ¿Cuál es la distancia de separación entre los relojes A' y B' de acuerdo con el observador en S?

•• 26 Cuando el pulso luminoso procedente de la lámpara de destellos se mueve hacia A' con velocidad c, A' se mueve hacia C con velocidad $0{,}6c$. Demostrar que el reloj en S lee 25 min cuando el destello alcanza A'. (*Indicación*: En el tiempo t la luz recorre una distancia ct y A' se mueve $0{,}6\,ct$. La suma de estas distancias debe ser igual a la distancia entre A' y la lámpara de destellos según se ve en S.)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

•• **27** Demostrar que el reloj en S marca 100 min cuando el destello luminosos alcanza B', que se está alejando de C con velocidad $0{,}6c$. (Véase la indicación del problema 26.)

•• **28** El intervalo de tiempo entre la recepción de los destellos en A' y B' en los problemas 26 y 27 es 75 min de acuerdo con el observador en S. ¿Cuánto tiempo ha de esperarse que haya transcurrido en el reloj situado en A' durante estos 75 minutos?

•• **29** El intervalo de tiempo calculado en el problema 28 es la cantidad que el reloj en A' adelanta respecto al de B' de acuerdo con los observadores situados en S. Comparar este resultado con $L_p V/c^2$.

•• **30** En el sistema S, del suceso B se produce 2 μs después del suceso A, que ocurre a Δx = 1,5 km del suceso A. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose un observador a lo largo del eje $+x$ de modo que ambos sucesos A y B se verifiquen simultáneamente? ¿Es posible que para algún observador el proceso B preceda al suceso A?

•• **31** Un observador en el sistema S de referencia ve una explosión localizada en x_1 = 480 m. Una segunda explosión se produce 5 μs más tarde en x_2 = 1200 m. En el sistema S', que se está moviendo a lo largo del eje $+x$ con velocidad V, las explosiones se producen en el mismo punto del espacio. ¿Cuál es la diferencia de tiempos entre ambas explosiones, medidos en S'?

Efecto Doppler

• **32** ¿Con qué rapidez deberá moverse un observador hacia una luz roja (λ = 650 nm) para que parezca verde (λ = 525 nm)?

• **33** Una galaxia distante se está alejando de nosotros con una velocidad de $1{,}85 \times 10^7$ m/s. Calcular el desplazamiento relativo hacia el rojo $(\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$ en la luz procedente de esta galaxia.

• **34** Una fuente luminosa que se está acercando a la Tierra con velocidad V emite luz de sodio de 589 nm de longitud de onda. En el sistema de referencia de la Tierra el valor medido es de 620 nm. Hallar V.

• **35** Un estudiante en la Tierra oye una pieza musical en su radio que parece corresponder a un disco que está girando a mayor velocidad de la prevista. Dispone de un disco de la misma pieza de 33 rev/min y determina que la pieza que escucha en la radio suena igual que cuando hace girar su disco a 78 rev/min, es decir, que las frecuencias son todas más elevadas en un factor de 78/33. Si la pieza está tocando correctamente, pero la emite con una emisora situada en una nave espacial que se acerca a la Tierra con velocidad V, determinar V.

•• **36** Deducir la ecuación 39.16a para la frecuencia recibida por un observador que se mueve con velocidad V hacia una fuente estacionaria de ondas electromagnéticas.

Explorando... la paradoja de los gemelos

• **37** Pedro y Pablo son dos hermanos gemelos, músicos de jazz, que forman un duo de trombón y saxofón. A la edad de 20 años Pedro es contratado para realizar una gira musical en uno de los planetas de una estrella situada a 15 años-luz de la Tierra. El viaje se realiza en un vehículo de velocidad $0{,}999c$ y terminada la gira, regresa a la Tierra, según su reloj, diez años después de su salida. ¿Cuántos años de práctica musical ha realizado Pedro? ¿Cuántos años han trascurrido para su hermano Pablo?

•• **38** Se coloca un reloj en un satélite que órbita la Tierra con un período de 90 min. ¿En qué intervalo de tiempo diferirá este reloj de otro idéntico en la Tierra al cabo de 1 año? (Suponer que se aplica la relatividad general.)

•• **39** A y B son gemelos. A viaja $0{,}6c$ a Alfa Centauri (que está a 4 años·c de la Tierra, cuando se mide en el sistema de referencia de ésta) y regresa inmediatamente. Cada gemelo envía al otro una señal luminosa cada 0,01 años medido en su propio sistema de referencia.

(a) ¿A qué ritmo o frecuencia recibirá B las señales cuando A se está alejando?
(b) ¿Cuántas señales recibirá B a este ritmo?
(c) ¿Cuántas señales en total recibirá B antes de que A haya regresado?
(d) ¿Con qué frecuencia recibirá A las señales cuando B se esté alejando de él?
(e) ¿Cuántas señales recibe A a esta frecuencia?
(f) ¿Cuántas señales en total son recibidas por A?
(g) ¿Cuál de los gemelos es más joven al final del viaje y en cuántos años?

Transformación de velocidades

• **40** Un haz luminoso se mueve a lo largo del eje y' con una velocidad c en el sistema S', que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V respecto al sistema S.

(a) Hallar los componentes x e y de la velocidad del haz de luz en el sistema S.
(b) Demostrar que el valor de la velocidad del haz de luz en S es c.

• **41** Una nave espacial se está moviendo hacia el este a una velocidad de $0{,}90c$ respecto a la Tierra. Otra nave espacial se está moviendo hacia el oeste también a una velocidad de $0{,}90c$ respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de una de las naves espaciales respecto a la otra?

•• **42** Dos naves espaciales se aproximan una a la otra.

(a) Si la velocidad de cada una de ellas es $0{,}6c$ respecto a la Tierra, ¿cuál es la velocidad de una respecto a la otra?
(b) Si la velocidad de cada una de ellas respecto a la Tierra es de 30000 m/s (aproximadamente 100 veces la velocidad del sonido), ¿cuál es la velocidad de una respecto a la otra?

•• **43** Una partícula se mueve con velocidad $0{,}8c$ a lo largo del eje x'' del sistema S'' que se mueve con velocidad $0{,}8c$ a lo largo del eje x' respecto al sistema S'. El sistema S' se mueve con velocidad $0{,}8c$ a lo largo del eje x respecto al sistema S.

(a) Hallar la velocidad de la partícula respecto al sistema S'.
(b) Hallar la velocidad de la partícula respecto al sistema S.

Energía y cantidad de movimiento

• **44** La energía total aproximadamente de una partícula de masa m que se mueve a la velocidad $u \ll c$ es

(a) mc^2. (b) $\frac{1}{2}mu^2$. (c) cmu. (d) $\frac{1}{2}mc^2$. (e) $\frac{1}{2}cmu$.

• **45** Determinar la relación entre la energía total y la energía en reposo de una partícula de masa en reposo m_0 que se mueve con velocidad

(a) $0{,}1c$, (b) $0{,}5c$, (c) $0{,}8c$ y (d) $0{,}99c$.

• **46** Un protón con energía en reposo 938 MeV tiene una energía total de 1400 MeV.

(a) ¿Cuál es su velocidad?
(b) ¿Cuál es su cantidad de movimiento?

• **47** ¿Cuánta energía se requerirá para acelerar una partícula de masa m_0 desde el reposo hasta las velocidades de

(a) $0{,}5c$, (b) $0{,}9c$, (c) $0{,}99c$?

Expresar los resultados como múltiplos de la energía en reposo.

• **48** Si la energía cinética de una partícula es igual a su energía en reposo, ¿qué error se comete al utilizar $p = m_0 u$ para su cantidad de movimiento?

• **49** ¿Cuál es la energía de un protón cuya cantidad de movimiento es $3m_0c$?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• **50** Una partícula de cantidad de movimiento 6 MeV/c tiene una energía total de 8 MeV.

(a) Determinar la masa en reposo de la partícula

(b) ¿Cuál es la energía de la partícula en un sistema de referencia en el cual su cantidad de movimiento es 4 MeV/c?

(c) ¿Cuáles son las velocidades relativas de los dos sistemas de referencia?

•• **51** Demostrar que

$$d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} du$$

•• **52** Utilizar las ecuaciones 39.21 y 39.25 para deducir la ecuación $E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$.

•• **53** Utilizar el desarrollo del binomio (ecuación 39.27) y la ecuación 39.28 para demostrar que cuando $pc \ll m_0c^2$, la energía total viene dada aproximadamente por

$$E \approx m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

•• **54**

(a) Demostrar que la velocidad u de una partícula m_0 y energía total E viene dada por

$$\frac{u}{c} = 1 - \left[\frac{(m_0c^2)^2}{E^2}\right]^{1/2}$$

y que, cuando E es mucho mayor que m_0c^2, esta expresión puede aproximarse por

$$\frac{u}{c} \approx 1 - \frac{(m_0c^2)^2}{2E^2}$$

Hallar la velocidad de un electrón con energía cinética de

(b) 0,51 MeV y (c) 10 MeV.

•• **55** La energía en reposo de un protón es próxima a 938 MeV. Su energía cinética es también 938 MeV. Hallar

(a) su cantidad de movimiento y

(b) su velocidad.

•• **56** ¿Qué porcentaje de error se comete al utilizar $\frac{1}{2}m_0u^2$ como energía cinética de una partícula si su velocidad es

(a) 0,1c y (b) 0,9c?

•• **57** La partícula K^0 tiene una masa en reposo de 497,9 MeV/c^2. Se desintegra en un π^- y un π^+, cada uno de masa en reposo 139,6 MeV/c^2. Después de la desintegración de una partícula K^0, uno de los piones queda en reposo en el sistema del laboratorio. Determinar la energía cinética del otro pión y la de la partícula K^0 antes de desintegrarse.

•• **58** El Sol radia energía a un ritmo de 4×10^{26} W aproximadamente. Suponer que esta energía se produce por una reacción cuyo resultado neto es la fusión de 4 núcleos de H para formar un núcleo de He, liberándose 24 MeV por cada núcleo de He formado. Calcular la pérdida de masa en reposo diaria del Sol.

•• **59** Dos protones se aproximan frontalmente a 0,5c respecto al sistema de referencia S'.

(a) Calcular la energía cinética total de los protones vistos en el sistema S'.

(b) Calcular la energía cinética total de los protones vistos en el sistema de referencia S, que se mueve con velocidad 0,5c respecto a S' de forma que uno de los protones está en reposo.

•• **60** Un antiprotón $\bar{p}$ tiene la misma energía en reposo que un protón. Se crea en la reacción $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. En un experimento, los protones que se encuentran en reposo en el laboratorio son bombardeados con protones de energía cinética E_{c_L}, que debe ser lo suficientemente grande como para que pueda convertirse una energía cinética igual a $2m_0c^2$ en la energía en reposo de las dos partículas. En el sistema de referencia del laboratorio, la energía cinética total no puede convertirse en energía en reposo debido a la conservación de la cantidad de movimiento. Sin embargo, en el sistema de referencia de cantidad de movimiento cero en el que los dos protones se están moviendo el uno hacia el otro con la misma velocidad u, la energía cinética total puede convertirse en energía de reposo.

(a) Hallar la velocidad de cada protón u de modo que la energía total cinética en este último sistema de referencia sea $2m_0c^2$.

(b) Transformar al sistema del laboratorio en el que un protón está en reposo y hallar la velocidad u' del otro protón.

(c) Demostrar que la energía cinética del protón móvil en el sistema de referencia del laboratorio es $E_{c_L} = 6m_0c^2$.

••• **61** Una partícula de masa en reposo 1 MeV/c^2 y energía cinética 2 MeV choca con una partícula estacionaria de masa en reposo 2 MeV/c^2. Después de la colisión, las partículas quedan adheridas. Hallar

(a) la velocidad de la primera partícula antes del choque,

(b) la energía total de la primera partícula antes del choque,

(c) la cantidad de movimiento total inicial del sistema,

(d) la energía cinética total después del choque, y

(e) la masa en reposo del sistema después del choque.

Explorando... la relatividad general

• **62** Unos hermanos gemelos trabajan en un bloque de oficinas. Uno de ellos trabaja en el piso más alto y el otro en la planta baja. Considerando la teoría de la relatividad general, ¿cuál de los dos envejecerá más rápidamente?

(a) Envejecerán al mismo ritmo.

(b) El gemelo que trabaja en el piso superior envejecerá más rápidamente.

(c) El gemelo que trabaja en la planta más baja envejecerá más rápidamente.

(d) Depende de la velocidad del bloque de oficinas.

(e) Ninguna de estas respuestas es correcta.

••• **63** El plato de un tocadiscos horizontal gira con una velocidad angular ω. Se sitúa un reloj en el centro del plato giratorio y otro a una distancia r del centro. En un sistema de referencia inercial el reloj situado a la distancia r se mueve con velocidad $u = r\omega$.

(a) Demostrar que, según la dilatación del tiempo de la relatividad especial, los intervalos de tiempo Δt_0 para el reloj en reposo y Δt, para el reloj en movimiento están relacionados por

$$\frac{\Delta t_r - \Delta t_0}{\Delta t_0} \approx -\frac{r^2\omega^2}{2c^2} \qquad \text{si } r\omega \ll c$$

(b) En un sistema de referencia ligado al plato giratorio, ambos relojes se encuentran en reposo. Demostrar que el reloj situado a la distancia r experimenta una pseudofuerza (centrífuga) $F_r = mr\omega^2$ en este sistema acelerado. Demostrar que ésta es equivalente a una diferencia en potencial gravitatorio entre r y el origen de $\phi_r - \phi_0 = \frac{1}{2}r^2\omega^2$. Utilizar esta diferencia de potencial y la ecuación 2 para demostrar que en este sistema la diferencia entre los intervalos de tiempo es la misma que la existente en el sistema inercial.

Problemas generales

• **64** Verdadero o falso

(a) La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia.

(b) El tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto entre dos sucesos.

(c) El movimiento absoluto puede determinarse mediante la contracción de longitudes.

(d) El año-luz es una unidad de distancia.

(e) Los sucesos simultáneos deben ocurrir en el mismo lugar.

(f) Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema de referencia, no pueden ser simultáneos en ningún otro sistema.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

(g) Si dos partículas están estrechamente ligadas mediante fuerzas atractivas intensas, la masa en reposo del sistema es menor que la suma de las masas de las partículas individuales cuando se encuentran separadas.

• **65** Un observador ve un sistema formado por una masa que oscila en el extremo de un muelle que pasa frente a él con velocidad u y determina el período T del péndulo. Otro observador, que se mueve con el sistema masa-muelle, mide también su período. El segundo observador determinará un período que es

(a) igual a T.
(b) menor que T.
(c) mayor que T.
(d) el indicado en (a) o en (b) según el sistema se aproxima o se aleje del primer observador.
(e) No hay suficiente información para responder a la cuestión.

• **66** La transformación de Lorentz para y y z coincide con el resultado clásico $y = y'$ y $z = z'$. Sin embargo, la transformación relativista de velocidades no da el resultado clásico $u_y = u'_y$ y $u_z = u'_z$. Explicarlo.

• **67** Una nave espacial parte de la Tierra hacia la estrella Alfa Centauri, que dista 4 años-luz, moviéndose con una velocidad de 0,75c. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar allí

(a) según se mediría en el Tierra y
(b) según mediría un pasajero de la nave?

• **68** La energía total de una partícula es el doble de su energía en reposo.

(a) Hallar u/c para la partícula.
(b) Demostrar que su cantidad de movimiento viene dada por $p = \sqrt{3}m_0c$.

• **69** ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose un muón de modo que su período de vida medio sea 46 μs, si en reposo el período vale 2 μs?

• **70** Una galaxia distante se está alejando de la Tierra de modo que cada longitud de onda recibida en nuestro planeta se desplaza de modo que $\lambda' = 2\lambda_0$. ¿Cuál es la velocidad de la galaxia respecto a la Tierra?

• **71** ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose una regla métrica respecto al observador en dirección paralela a la misma, si la longitud que mide el observador es 50 cm?

• **72** Demostrar que si V es mucho menor que c, el desplazamiento de frecuencias del efecto Doppler viene dado aproximadamente por $\Delta f/f \approx \pm V/c$.

•• **73** Si un avión vuela a una velocidad de 2000 km/h, ¿qué longitud debe recorrer antes de que su reloj pierda 1 s a causa de la dilatación del tiempo?

• **74** El radio de la órbita de una partícula cargada en un campo magnético está relacionado con la cantidad de movimiento de la misma por

$$p = BqR \qquad (39.41)$$

Esta ecuación es válida clásicamente si se hace $p = mu$, y en relatividad si hacemos $p = m_0u/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Un electrón con una energía cinética de 1,50 MeV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético uniforme $B = 5 \times 10^{-3}$ T.

(a) Hallar el radio de la órbita.
(b) ¿Qué resultado se obtendría si se utilizasen las relaciones clásicas $p = mu$ y $E_c = p^2/2m$?

•• **75** Prescindiendo de la economía y de la política, los físicos proponen construir un acelerador circular a lo largo de la circunferencia terrestre utilizando imanes que proporcionan un campo magnético de valor 1,5 T.

(a) ¿Cuál deberá ser la energía cinética de los protones que orbiten dentro de este campo en una circunferencia de radio R_T? (Véase problema 74.)
(b) ¿Cuál será el período de rotación de estos protones?

•• **76** Los sistemas S y S' se mueven relativamente entre sí o a lo largo de los ejes x y x'. Los observadores de ambos sistemas ponen sus relojes en $t = 0$ cuando coinciden sus orígenes. En el sistema S, el suceso 1 se produce en $x_1 = 1{,}0$ años·c y $t_1 = 1$ año y el suceso 2 en $x_2 = 2{,}0$ años·c y $t_2 = 0{,}5$ año. Estos sucesos se verifican simultáneamente en el sistema S'.

(a) Hallar el valor y la dirección de la velocidad en S' respecto a S.
(b) ¿En qué instante se producen estos sucesos medidos en S?

•• **77** Una nave espacial interestelar viaja desde la Tierra hasta un sistema estelar lejano a 12 años·c (medidas en el sistema de referencia terrestre). El viaje requiere 15 años, medidos en la nave.

(a) ¿Cuál es la velocidad de la nave respecto a la Tierra?
(b) Cuando llega, la nave envía una señal a la Tierra. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido entre la partida de la nave y la llegada de la señal?

•• **78** El pión neutro π^0 posee una masa en reposo de 135 MeV/c^2. Esta partícula puede crearse en una colisión protón-protón:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^0$$

Determinar la energía cinética umbral para la creación de un π^0 en el choque de un protón móvil y otro en reposo (véase problema 60).

•• **79** Un cohete con una longitud propia de 1000 m se mueve en la dirección $+x$ a 0,6c respecto a un observador en el suelo. Un astronauta situado en la parte trasera del cohete dispara un proyectil hacia la parte delantera del mismo a 0,8c respecto al cohete. ¿Cuánto tardará el proyectil en alcanzar la proa del cohete

(a) medido en el sistema del cohete,
(b) medido en el sistema del suelo y
(c) medido en el sistema del proyectil?

••• **80** En un experimento mental sencillo, Einstein demostró que existe una masa asociada con la radiación electromagnética. Consideremos una caja de longitud L y masa M apoyada sobre una superficie sin rozamiento. En la pared izquierda de la caja existe una fuente luminosa que emite radiación de energía E, la cual es absorbida en la pared de la derecha de la caja. De acuerdo con la teoría clásica del electromagnetismo, esta radiación transporta una cantidad de movimiento de valor $p = E/c$ (ecuación 32.13).

(a) Hallar la velocidad de retroceso de la caja de forma que se conserve dicha cantidad de movimiento cuando se emite la luz. (Como p es pequeño y M es grande, se puede utilizar la mecánica clásica.)
(b) Cuando la luz es absorbida en la pared de la derecha de la caja, ésta se para, de modo que sigue siendo nula la cantidad de movimiento total. Si despreciamos la velocidad extremadamente pequeña de la caja, el tiempo que emplea la luz en atravesar la caja es $\Delta t = L/c$. Hallar la distancia que se ha estado moviendo la caja en este tiempo.
(c) Demostrar que si el centro de masa del sistema ha de permanecer fijo en el mismo sitio, la radiación debe poseer una masa $m = E/c^2$.

••• **81** Un cohete con longitud propia de 700 m se está moviendo hacia la derecha con una velocidad 0,9c. Lleva dos relojes, uno en la proa y el otro en la popa, que han sido sincronizados en el sistema de referencia del cohete. Un reloj en el suelo y el reloj de proa marcan ambos $t = 0$ al pasar uno junto al otro.

(a) Cuando $t = 0$, ¿qué marca el reloj de popa, según aprecia un observador en el suelo?
(b) Cuando el reloj de popa pasa junto al reloj en el suelo, ¿qué marca el reloj de popa, según aprecia un observador en el suelo?
(c) ¿Qué señala el reloj de proa, según aprecia el mismo observador?
(d) ¿Qué señala el reloj de proa visto por un observador en el cohete?
(e) En el instante $t = 1$ h, medido en el cohete, se envía una señal luminosa desde la proa del cohete a un observador situado en el suelo. ¿Qué señala el reloj en el suelo cuando el observador recibe esta señal?
(f) Cuando el observador en el suelo recibe la señal, envía una señal hacia la proa del cohete. ¿Cuándo se recibirá esta señal en la proa del cohete, visto desde este mismo?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

00919

••• **82** Un observador en el sistema S situado en el origen, observa dos destellos de luz de color separados espacialmente por Δx = 2400 m. Primero se produce un destello azul, seguido 5 μs después por un destello rojo. Un observador en S' que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad V relativa a S observa también los destellos separados entre sí 5 μs y con una separación de 2400 m, pero se observa primero el destello rojo. Hallar el valor y sentido de V.

••• **83** El sistema de referencia S' se está moviendo a lo largo del eje x' a 0,6c respecto al sistema S. Una partícula que está originalmente en x' = 10 m para t_1' = 0 se acelera repentinamente y luego se mueve a una velocidad constante de $c/3$ en el sentido $-x'$ hasta el instante t_2' = 60 m/c, cuando repentinamente queda en reposo. Según se observa en el sistema S, hallar

(a) la velocidad de la partícula,
(b) la distancia y dirección del trayecto seguido por la partícula desde t_1' a t_2' y
(c) el tiempo durante el cual la partícula se ha estado moviendo.

••• **84** La aceleración de una partícula es $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ en el sistema S. Deducir las expresiones de los componentes de la aceleración a_x', a_y', a_z' de la partícula en el sistema de referencia S' que se mueve respecto a S en la dirección x con velocidad V.

••• **85** Cuando una partícula proyectil de energía cinética superior a la umbral, E_{c_u}, choca contra una partícula estacionaria que actúa de blanco, pueden crearse una o más partículas en el choque inelástico. Demostrar que la energía cinética umbral del proyectil viene dada por la expresión

$$E_{c_u} = \frac{(\Sigma m_{\text{in}} + \Sigma m_{\text{fin}})(\Sigma m_{\text{fin}} - \Sigma m_{\text{in}})c^2}{2m_{\text{blanco}}}$$

en donde Σm_{in} es la suma de las masas en reposos de las partículas proyectil y blanco, Σm_{fin} es la suma de las masas en reposo de las partículas finales y m_{blanco} es la masa en reposo de la partícula blanco. Utilizar este expresión para determinar la energía cinética umbral de los protones incidentes sobre un blanco de protones estacionarios para obtener un par protón-antiprotón; comparar su resultado con el del problema 60.

••• **86** Una partícula de masa en reposo M_0 se desintegra en dos partículas de masa en reposo m_0, en donde $m_0 = 0{,}3M_0$. Antes de la desintegración, la partícula de masa en reposo M_0 tiene una energía $4M_0c^2$ en el sistema del laboratorio. Las velocidades de los productos de desintegración poseen la dirección del movimiento de M_0. Determinar las velocidades de los productos de desintegración en el sistema del laboratorio.

••• **87** Una regla tiene una longitud propia L_p y forma un ángulo θ con el eje x en el sistema S. Demostrar que el ángulo θ' formado con el eje x' del sistema S', que se mueve a lo largo del eje $+x$ con velocidad V, viene dado por tg $\theta' = \gamma$ tg θ y que la longitud de la regla en S' es

$$L' = L_p\left[\frac{1}{\gamma^2}\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right]^{1/2}$$

••• **88** Demostrar que si una partícula se mueve formando un ángulo θ con el eje x y con la velocidad u en el sistema S, se moverá formando un ángulo θ' con el eje x' en S' por

$$\text{tg}\,\theta' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma(\cos\theta - V/u)}$$

en donde el sistema S' se mueve con velocidad V respecto al S.

••• **89** En el caso especial de una partícula que se mueve con velocidad u a lo largo del eje y en S, demostrar que la cantidad de movimiento y la energía en el sistema S' están relacionadas con la cantidad de movimiento y la energía S por las ecuaciones de transformación

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{VE}{c^2}\right), \qquad p_y' = p_y, \qquad p_z' = p_z$$

$$\frac{E'}{c} = \left(\gamma\frac{E}{c} - \frac{Vp_x}{c^2}\right)$$

Comparar estas ecuaciones con la transformación de Lorentz correspondiente a x', y', z', y t'. Éstas demuestran que las magnitudes p_x, p_y, p_z y E/c se transforman del mismo modo que x, y, z y ct.

••• **90** La ecuación correspondiente a un frente de onda esférico de un pulso luminoso que empieza en el origen en el instante t = 0, es $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$. Utilizando las ecuaciones de transformación de Lorentz demostrar que dicho pulso luminoso también tiene un frente de onda esférico en el sistema S' demostrando que $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$ en S'.

••• **91** En el problema 90 se demostró que la magnitud $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ tiene el mismo valor (0) tanto en S como S'. Dicha magnitud se denomina invariante. A partir de los resultados del problema 89 la magnitud $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (E/c)^2$ debe ser también invariante. Demostrar que esta magnitud tiene el valor $-m_0c^2$ tanto en el sistema de referencia S como en el S'.

••• **92** Dos partículas idénticas poseen la misma masa en reposo m_0. Las dos partículas se acercan entre sí con una velocidad u en un sistema de referencia S. Las partículas chocan inelásticamente con un muelle que se comprime y se cierra (figura 39.14) alcanzando el reposo en S, con su energía cinética inicial transformada en energía potencial. En este problema se pide demostrar que la conservación de la cantidad de movimiento en un sistema de referencia S', en el cual una de las partículas se encuentra inicialmente en reposo, requiere que la masa total en reposo del sistema después de la colisión sea $2m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$.

(a) Demostrar que la velocidad de la partícula que no se encuentra en reposo en el sistema de referencia S' es $u' = 2u/(1 + u^2/c^2)$ y utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{1 - u^2/c^2}{1 + u^2/c^2}$$

(b) Demostrar que la cantidad de movimiento inicial en el sistema es S' es $p' = 2m_0u/(1 + u^2/c^2)$.
(c) Después del choque, las dos masas se mueven con velocidad u en el sistema S' (puesto que están en reposo en S). Expresar la cantidad de movimiento total después del choque en función de la masa en reposo final M_0 y demostrar que la conservación del movimiento implica que $M_0 = 2m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$.
(d) Demostrar que la energía total está conservada en cada sistema de referencia.

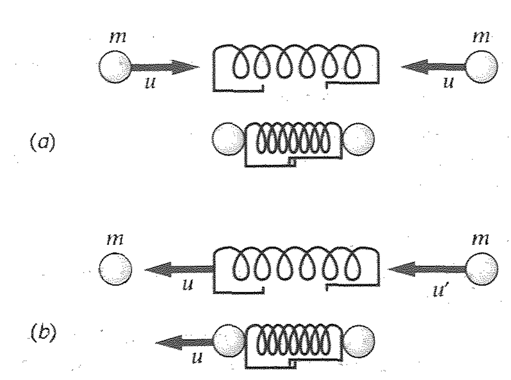
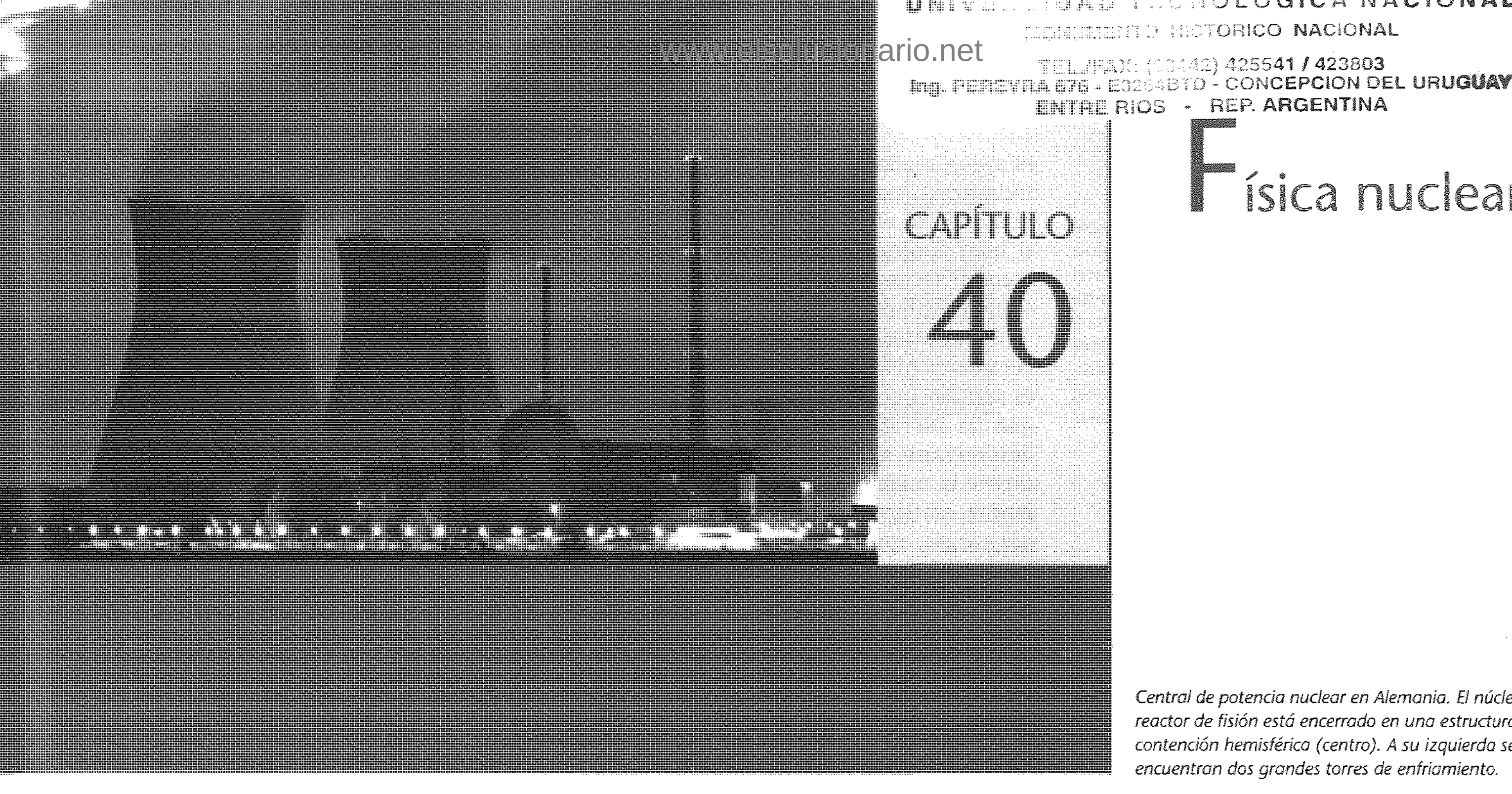


Figura 39.14 Choque ineslástico entre dos objetos idénticos (*a*) en el sistema de referencia S o de cantidad de movimiento nula y (*b*) en el sistema S' que se está moviendo hacia la derecha con velocidad $V = u$ respecto al sistema S, de modo que una de las partículas está inicialmente en reposo. El muelle, que se supone carece de masa, es simplemente un dispositivo que sirve para hacer patente el almacenamiento de energía potencial.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
www.elsolucionario.net
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

CAPÍTULO 40

Física nuclear

Central de potencia nuclear en Alemania. El núcleo del reactor de fisión está encerrado en una estructura de contención hemisférica (centro). A su izquierda se encuentran dos grandes torres de enfriamiento.

www.elsolucionario.net

Para el químico, el núcleo atómico es esencialmente una carga puntual que contiene la mayor parte de la masa del átomo. Desempeña un papel despreciable en la estructura de átomos y moléculas. Pero cuando se examina cuidadosamente, resulta que el núcleo está formado por protones y neutrones, cuyas interacciones han desempeñado importantes papeles en nuestra vida diaria, así como en la historia y estructura del universo. La fisión de núcleos muy pesados como el uranio constituye hoy una fuente importante de potencia; la fusión de núcleos muy ligeros es la fuente energética básica de las estrellas, incluyendo nuestro sol, y posiblemente la clave de nuestras necesidades energéticas en el futuro.

Propiedades de los núcleos ■ 40.1

El núcleo atómico contiene sólo dos tipos de partículas: protones y neutrones,[1] que poseen aproximadamente la misma masa (el neutrón es un 0,2% más masivo que el protón). El protón tiene una carga $+e$ y el neutrón carece de carga. El número de protones, Z, es el número atómico del átomo, que coincide con el número de electrones del mismo. El número de neutrones, N, es aproximadamente igual a Z para los núcleos ligeros, y para los núcleos más pesados es mayor que Z, incrementándose a medida que aumenta Z. El número total de nucleones,[2] $A = N + Z$, se denomina número de masa del núcleo. Una especie nuclear en particular se llama **nucleido**. Dos o más nucleidos de igual número atómico Z, pero distintos números N y A se denominan isótopos. Un nucleido particular se designa por su símbolo atómico (H para el hidrógeno, He para el helio, etc.) con el número de masa A como superíndice. El elemento más ligero, el hidrógeno, tiene tres isótopos: hidrógeno ordinario, ^{1}H, cuyo núcleo está formado por un solo protón; deuterio, ^{2}H, cuyo núcleo contiene un protón y un neutrón; y tritio, ^{3}H, cuyo núcleo posee un protón y dos neutrones. A pesar de que la masa del átomo de deuterio

[1] El núcleo del hidrógeno normal contiene un solo protón.
[2] La palabra nucleón se refiere indistintamente a un neutrón o a un protón.

 www.elsolucionario.net

es aproximadamente el doble que la del hidrógeno, y la del tritio casi el triple que la del hidrógeno, estos tres átomos poseen propiedades casi idénticas porque todos ellos tienen un solo electrón. Por término medio, existen tres isótopos estables por cada átomo, si bien algunos átomos poseen un solo isótopo y otros, cinco o seis. El isótopo más común del segundo átomo más ligero, el helio es ^{4}He, cuyo núcleo se conoce también como partícula α. Otro isótopo del helio es el ^{3}He.

En el interior del núcleo, los nucleones ejercen una fuerza atractiva intensa sobre sus vecinos próximos. Esta interacción llamada **fuerza nuclear fuerte** o **fuerza hadrónica** es mucho más intensa que la fuerza electrostática entre los protones y muchísimo más que las fuerzas gravitatorias entre los nucleones. (La gravedad es tan débil que puede despreciarse siempre en física nuclear). La interacción nuclear fuerte es aproximadamente la misma entre dos neutrones, dos protones, o un neutrón y un protón. Naturalmente, entre dos protones se ejerce una fuerza electrostática repulsiva mutua debida a sus cargas, que tiende a debilitar ligeramente la atracción entre ellos. La interacción nuclear fuerte disminuye rápidamente con la distancia y es despreciable cuando dos nucleones se encuentran a una distancia mayor de unos pocos femtómetros (1 femtómetro, f, es igual a 10^{-15} m).

Tamaño y forma

El tamaño y forma del núcleo puede determinarse bombardeándolo con partículas de alta energía y observando la dispersión de estas partículas. Los resultados dependen en parte del tipo de experimento. Por ejemplo, si se utilizan electrones como partículas bombardeantes, se obtiene la distribución de carga del núcleo, mientras que si se utilizan neutrones se determina la región de influencia de la interacción nuclear fuerte. A pesar de estas diferencias, una amplia variedad de experimentos sugieren que la mayor parte de los núcleos son aproximadamente esféricos con radios dados aproximadamente por

$$R = R_0 A^{1/3} \tag{40.1}$$

Radio nuclear

en donde R_0 vale aproximadamente 1,5 f. El hecho de que el radio de un núcleo esférico sea proporcional a $A^{1/3}$ sugiere que el volumen nuclear es proporcional a A. Como la masa del núcleo es también aproximadamente proporcional a A, las densidades de todos los núcleos son aproximadamente iguales. Esto es análogo a una gota líquida, que también tiene una densidad constante independiente de su tamaño. El **modelo de la gota líquida** del núcleo ha sido muy útil para explicar el comportamiento nuclear, especialmente la fisión de los núcleos pesados.

Números *N* y *Z*

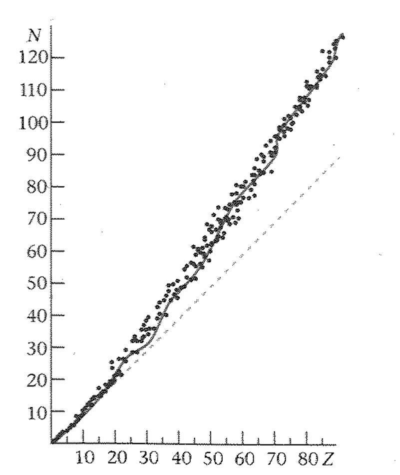


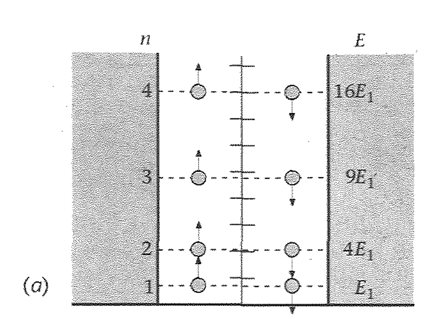
Figura 40.1 Número de neutrones N en función del número de protones Z para los nucleidos estables. La línea de puntos corresponde a $N = Z$.

En los núcleos ligeros, la mayor estabilidad se alcanza cuando los números de protones y neutrones son aproximadamente iguales, $N \approx Z$. En los núcleos más pesados, la inestabilidad provocada por la repulsión electrostática entre los protones se minimiza si hay más neutrones que protones. Veamos, por ejemplo, los número N y Z de los isótopos más abundantes de algunos elementos representativos: para el $^{16}_{8}$O, $N = 8$ y $Z = 8$; para el $^{40}_{20}$Ca, $N = 20$ y $Z = 20$; para el $^{56}_{26}$Fe, $N = 30$ y $Z = 26$; para el $^{207}_{82}$Pb, $N = 125$ y $Z = 82$; y para el $^{238}_{92}$U, $N = 146$ y $Z = 92$. (El número atómico Z se ha incluido en estos símbolos en forma de subíndice para enfatizar los ejemplos. Realmente, no es necesario ya que el número atómico viene implícito en el símbolo del átomo.)

La figura 40.1 muestra un gráfico de N en función de Z para los núcleos estables conocidos. La curva sigue la línea recta $N = Z$ para valores pequeños de N y Z. Puede entenderse esta tendencia a ser iguales N y Z considerando la energía total de A partículas en una caja unidimensional. La figura 40.2 muestra los niveles energéticos para ocho neutrones y para cuatro neutrones y cuatro protones. Debido al principio de exclusión, sólo dos partículas idénticas (con espines opuestos) pueden encontrarse en el mismo estado espacial. Como los protones y neutrones no son idénticos, pueden encontrarse dos de cada especie en un estado como muestra la figura 40.2*b*. Así resulta que la energía total de cuatro protones y cuatro neutrones es menor que la de ocho neutrones (u ocho protones) como los de la figura 40.2*a*. Cuando en este esquema se incluye la energía electrostática de repulsión, que es proporcional a Z^2, el resultado es algo distinto. Para

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



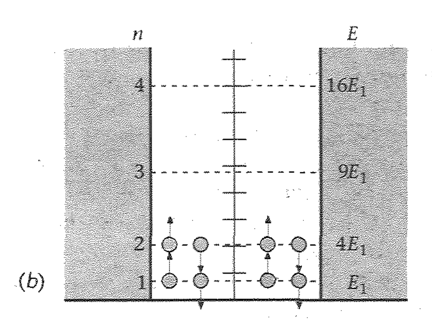


Figura 40.2 (*a*) Ocho neutrones en una caja unidimensional. De acuerdo con el principio de exclusión, sólo dos neutrones (con espines opuestos) pueden permanecer en un nivel energético determinado. (*b*) Cuatro neutrones y cuatro protones en una caja unidimensional. Como los protones y neutrones no son partículas idénticas, dos de cada especie pueden encontrarse en el mismo nivel energético. La energía total en este caso es mucho menor que la correspondiente en (*a*).

grandes valores de A y Z la energía total se incrementa menos añadiendo dos neutrones que añadiendo un neutrón y un protón debido a la repulsión electrostática implicada en el último caso. Esto explica la razón de que $N > Z$ para los núcleos más pesados.

Masa y energía de enlace

La masa de un núcleo es menor que la masa de sus partes en $\Delta E/c^2$, en donde ΔE es la energía de enlace y c la velocidad de la luz. Cuando dos o más nucleones se fusionan entre sí para formar un núcleo, la masa total decrece y se desprende energía. Inversamente, para dividir un núcleo en sus partes, debe añadirse energía al sistema que se invierte en incrementar la masa en reposo.

Las masas atómicas y nucleares se expresan frecuentemente en unidades de masa unificadas (u), definidas por un doceavo de la masa del átomo de ^{12}C neutro. La energía en reposo de una unidad de masa unificada es

$$(1\ \mathrm{u})c^2 = 931{,}5\ \mathrm{MeV} \qquad \textbf{(40.2)}$$

Consideremos el ^{4}He, por ejemplo, que consta de dos protones y dos neutrones. La masa de un átomo puede medirse exactamente en un espectrómetro de masas. La masa del átomo ^{4}He es 4,002603 u. Este valor incluye los dos electrones del átomo. La masa del átomo ^{1}H es 1,007825 u, y la del neutrón, 1,008665 u. La suma de las masas de los dos átomos de ^{1}H, más los dos neutrones es 2(1,007825 u) + 2(1,008665 u) = 4,03298 u, la cual es mayor que la masa del átomo de ^{4}He en 0,030377 u.[1] La energía de enlace del núcleo ^{4}He puede determinarse a partir de esta diferencia de masa, 0,030377 u utilizando el factor de conversión de masas (1 u)c^2 = 931,5 MeV (ecuación 40.2). Por tanto,

$$(0{,}030\,377\ \mathrm{u})c^2 = (0{,}030377\ \mathrm{u})c^2 \times \frac{931{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2}{1\ \mathrm{u}}$$
$$= 28{,}30\ \mathrm{MeV}$$

La energía de enlace total del ^{4}He es 28,3 MeV. En general, la energía de enlace del núcleo de un átomo de masa atómica M_A, que contiene Z protones y N neutrones se obtiene calculando la diferencia entre la masa de las partes y la masa del núcleo y multiplicando por c^2:

$$E_b = (ZM_H + Nm_n - M_A)c^2 \qquad \textbf{(40.3)}$$

Energía de enlace nuclear total

en donde M_H es la masa del átomo ^{1}H y m_n la del neutrón. (Obsérvese que la masa de los Z electrones del término ZM_H se cancela con la masa de los Z electrones contenida en el término M_A.) Las masas atómicas del neutrón y de algunos isótopos seleccionados se relacionan en la tabla 40.1.

Tabla 40.1 Masas atómicas del neutrón y de isótopos seleccionados

Elemento	Símbolo	Z	Masa atómica, u
Neutrón	n	0	1,008665
Hidrógeno	^{1}H	1	1,007825
Deuterio	^{2}H o D	1	2,014102
Tritio	^{3}H o T	1	3,016050
Helio	^{3}He	2	3,016030
	^{4}He	2	4,002603
Litio	^{6}Li	3	6,015125
	^{7}Li	3	7,016004
Boro	^{10}B	5	10,012939
Carbono	^{12}C	6	12,000000
	^{13}C	6	13,003354
	^{14}C	6	14,003242
Nitrógeno	^{13}N	7	13,005738
	^{14}N	7	14,003074
Oxígeno	^{16}O	8	15,994915
Sodio	^{23}Na	11	22,989771
Potasio	^{39}K	19	38,963710
Hierro	^{56}Fe	26	55,939395
Cobre	^{63}Cu	29	62,929592
Plata	^{107}Ag	47	106,905094
Oro	^{197}Au	79	196,966541
Plomo	^{208}Pb	82	207,976650
Polonio	^{212}Po	84	211,989629
Radón	^{222}Rn	86	222,017531
Radio	^{226}Ra	88	226,025360
Uranio	^{238}U	92	238,048608
Plutonio	^{242}Pu	94	242,058725

www.elsolucionario.net

[1] Obsérvese que utilizando las masas de los dos átomos ^{1}H en lugar de la correspondiente a los dos protones, incluimos las masas de los electrones. Hacemos esto porque son las masas atómicas, no las masas nucleares, las que se miden directamente y se especifican en las tablas de masas.

www.elsolucionario.net

■ EJEMPLO 40.1 Determinar la energía de enlace del último neutrón del ^{4}He.

Esquema del problema La energía de enlace es igual al producto de c^2 por la diferencia de masa del ^{3}He más un neutrón y el ^{4}He. Estas masas pueden determinarse de la tabla 40.1 y convertirse en energía mediante la ecuación 40.3.

1. Sumar la masa del neutrón a la del ^{3}He: $m_{^3\text{He}} + m_\text{n} = 3{,}016030\ \text{u} + 1{,}008665\ \text{u} = 4{,}024695\ \text{u}$

2. Restar del resultado la masa del ^{4}He: $(m_{^3\text{He}} + m_\text{n}) - m_{^4\text{He}} = 4{,}024695\ \text{u} - 4{,}002603\ \text{u}$
$= 0{,}022092\ \text{u}$

3. Multiplicar esta diferencia de masa por c^2 y expresar el $E_\text{b} = (\Delta m)c^2 = (0{,}022092\ \text{u})c^2 \times \dfrac{931{,}5\ \text{MeV}/c^2}{1\ \text{u}}$

La figura 40.3 muestra la energía de enlace por nucleón E_b/A en función de A. El valor medio es aproximadamente 8,3 MeV. La casi horizontabilidad de esta curva para $A > 50$ muestra que E_b es aproximadamente proporcional a A. Esto indica que hay una saturación de fuerzas nucleares en el núcleo, como sería el caso en que cada nucleón fuera atraído sólo por sus vecinos más próximos. Tal situación conduce también a una densidad nuclear constante compatible con las medidas del radio. Si, por ejemplo, hubiera saturación y cada nucleón se enlazara con los restantes nucleones, existirían $A - 1$ enlaces por cada nucleón y en conjunto $A(A - 1)$ enlaces. La energía de enlace total, que es una medida de la energía necesaria para romper todos estos enlaces, sería entonces proporcional a $A(A - 1)$, y E_b/A no sería aproximadamente constante. La pendiente elevada de la curva para valores bajos de A se debe al incremento del número de vecinos más próximos y, por tanto, al número creciente de enlaces por nucleón. El decrecimiento gradual para valores elevados de A se debe a la repulsión de Coulomb de los protones, que crece con Z^2 y disminuye la energía de enlace. Eventualmente, para valores muy grandes de A esta repulsión de Coulomb se hace tan grande que un núcleo de A superior a 300 aproximadamente es inestable y experimenta la fisión espontánea.

www.elsolucionario.net

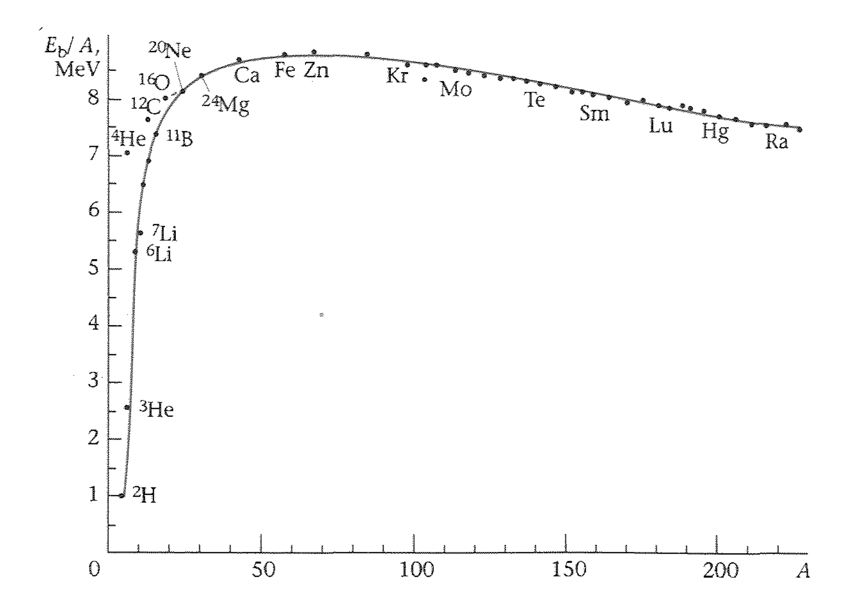


Figura 40.3 Energía de enlace por nucleón en función del número de masa A. Para núcleos con valores de A superiores a un valor alrededor de 50, la curva es aproximadamente horizontal, lo que indica que la energía de enlace total es aproximadamente proporcional a A.

www.elsolucionario.net

Radiactividad 40.2

Muchos núcleos son radiactivos; es decir, se desintegran en otros núcleos por emisión de partículas, tales como fotones, electrones, neutrones o partículas alfa. Las expresiones desintegración α, β y γ fueron utilizadas antes de que se supiera que las partículas α eran núcleos de He, las partículas β eran electrones (β^-) o positrones[1] (β^+) y los rayos γ eran fotones. La velocidad de desintegración no es constante con el tiempo, sino que disminuye exponencialmente. *Esta dependencia exponencial con el tiempo es característica de todo proceso radiactivo e indica que la desintegración radiactiva es un proceso estadístico.* Como todo núcleo está bien protegido de otros núcleos por los electrones del átomo, los cambios de presión y de temperatura tienen poco efecto (o ninguno) sobre la velocidad de desintegración u otras propiedades nucleares.

Sea N el número de núcleos radiactivos en cierto instante t. Si la desintegración de un núcleo individual es un suceso aleatorio, es lógico que el número de núcleos que se desintegran en cierto intervalo dt sea proporcional a N y a dt. A causa de estas desintegraciones, el número N disminuirá. La variación de N viene dada por

$$dN = -\lambda N \, dt \qquad (40.4)$$

en donde λ es una constante de proporcionalidad llamada **constante de desintegración**. La variación de N por unidad de tiempo, dN/dt, es proporcional a N. Esta es una característica de la desintegración exponencial. Para resolver la ecuación 40.4 y obtener N, dividiremos los dos miembros de la ecuación por N, con lo que separamos las variables N y t:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \, dt$$

Integrando, resulta

$$\ln N = -\lambda t + C \qquad (40.5)$$

en donde C es la constante de integración. Pasando esta expresión a la forma exponencial, resulta

$$N = e^{-\lambda t + C} = e^{C} e^{-\lambda t}$$

o sea,

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (40.6)$$

en donde $N_0 = e^C$ es el número de núcleos para $t = 0$. El número de desintegraciones radiactivas por segundo se llama velocidad de desintegración R:

$$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \qquad (40.7)$$

Velocidad de desintegración

en donde

$$R_0 = \lambda N_0 \qquad (40.8)$$

es la velocidad de desintegración para $t = 0$. Esta magnitud R es la que se determina experimentalmente.

El **tiempo de vida media** τ es el recíproco de la constante de desintegración:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \qquad (40.9)$$

[1] El positrón es idéntico a un electrón, excepto en que su carga es $+e$.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

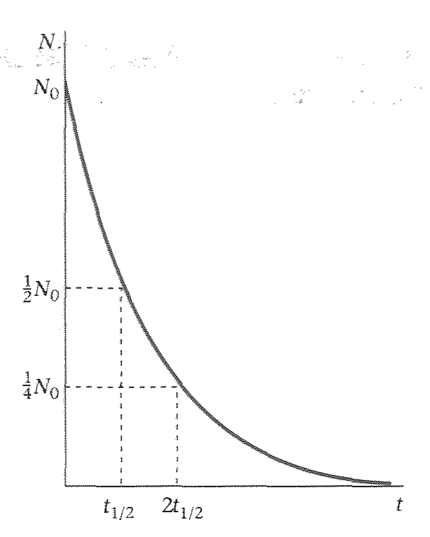


Figura 40.4 Desintegración radiactiva exponencial. Después de cada período $t_{1/2}$, el número de núcleos sin desintegrar se ha reducido a la mitad. La velocidad de desintegración $R = \lambda N$ tiene la misma dependencia con el tiempo.

(Véase problema 33.) El tiempo de vida media es análogo a la constante de tiempo que aparece en la disminución de carga de un condensador en un circuito *RC*, como el que expusimos en la sección 26.6. Después de un tiempo igual al de la vida media, el número de núcleos radiactivos y la velocidad de desintegración han disminuido ambos al 37% de sus valores originales. El **período de semidesintegración** $t_{1/2}$ se define como el tiempo necesario para que el número de núcleos y la velocidad de desintegración se reduzca a la mitad. Haciendo $t = t_{1/2}$ y $N = N_0/2$ en la ecuación 40.6 resulta

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \tag{40.10}$$

o sea,

$$e^{+\lambda t_{1/2}} = 2$$

Despejando $t_{1/2}$ se obtiene

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693\,\tau \tag{40.11}$$

La figura 40.4 muestra un gráfico de *N* en función de *t*. Si multiplicamos los números del eje *N* por λ, este gráfico se convierte en una representación de *R* en función de *t*. Después de cada intervalo de tiempo igual al período de semidesintegración, el número de núcleos sin desintegrar y la velocidad de desintegración se han reducido a la mitad de sus valores anteriores. Por ejemplo, si la velocidad de desintegración inicialmente es R_0, al cabo de un período será $\frac{1}{2}R_0$, al cabo de dos períodos $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})R_0$ y así sucesivamente. Después de transcurridos *n* períodos de semidesintegración,

$$R = (\tfrac{1}{2})^n R_0 \tag{40.12}$$

Los períodos de semidesintegración varían desde valores muy pequeños (menos de 1 μs) a valores muy grandes (hasta 10^{16} años).

EJEMPLO 40.2

Una fuente radiactiva tiene un período de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t = 0$, está situada frente a un detector y la velocidad de recuento (número de partículas que se desintegran detectadas por unidad de tiempo) es de 2000 cuentas/s. Determinar la velocidad de recuento al cabo de $t = 1$ min, 2 min, 3 min y 10 min.

Esquema del problema La velocidad de recuento disminuye en un factor de 2 cada minuto.

1. Como el período de semidesintegración es de 1 min, la velocidad de recuento al cabo de 1 min, la velocidad de recuento al cabo de 1 min será la mitad de la detectada para $t = 0$:

$$r_1 = \frac{1}{2} r_0 = \frac{1}{2}(2000 \text{ cuentas/s}) = 1000 \text{ cuentas/s al cabo de 1 min}$$

2. Para $t = 2$ min la velocidad de recuento es la mitad de la detectada al cabo de 1 min. Disminuye a la mitad cada minuto:

$$r_2 = \frac{1}{2} r_1 = \frac{1}{2}(1000 \text{ cuentas/s}) = 500 \text{ cuentas/s al cabo de 2 min}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} r_2 = \frac{1}{2}(500 \text{ cuentas/s}) = 250 \text{ cuentas/s al cabo de 3 min}$$

3. Para $t = 10$ min, la velocidad de recuento será $(\frac{1}{2})^{10}$ veces la velocidad inicial:

$$r_{10} = (\tfrac{1}{2})^{10} r_0 = (\tfrac{1}{2})^{10}(2000 \text{ cuentas/s}) = 1{,}95 \text{ cuentas/s} \approx 2 \text{ cuentas/s al cabo 10 min}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 40.3

Si la eficiencia de la detección en el ejemplo 40.2 es del 20%, (a) ¿cuántos núcleos radiactivos existen en el instante $t = 0$? (b) ¿Y en el tiempo $t = 1$ min? (c) ¿Cuántos núcleos se desintegran en el primer minuto?

Esquema del problema La eficiencia de la detección depende de la probabilidad de que una partícula de la desintegración radiactiva penetre en el detector y de la probabilidad de que a continuación produzca un impulso (una cuenta). Si la eficiencia es del 20%, la velocidad de desintegración debe ser 5 veces la velocidad de recuento.

(a) 1. El número de núcleos radiactivos está relacionado con la velocidad de desintegración R y con la constante de desintegración λ:
$$R = \lambda N$$

2. La constante de desintegración está relacionada con el período de semidesintegración:
$$\lambda = \frac{0{,}693}{t_{1/2}} = \frac{0{,}693}{1 \text{ min}}$$

3. Calcular la velocidad de desintegración a partir de la velocidad de recuento:
$$R_0 = 5 \times 2000 \text{ cuentas/s} = 10^4 \text{ s}^{-1}$$

4. Sustituir estos resultados para calcular N_0 en $t = 0$:
$$N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{10{,}000 \text{ s}^{-1}}{0{,}693 \text{ min}^{-1}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 8{,}66 \times 10^5$$

(b) En el tiempo $t = 1 \text{ min} = t_{1/2}$, hay la mitad de núcleos radiactivos que en $t = 0$:
$$N_1 = \tfrac{1}{2}(8{,}66 \times 10^5) = 4{,}33 \times 10^5$$

(c) El número de núcleos que se han desintegrado en el primer minuto es $N_0 - N_1$:
$$\Delta N = N_0 - N_1 = 8{,}66 \times 10^5 - 4{,}33 \times 10^5 = 4{,}33 \times 10^5$$

La unidad SI de desintegración radiactiva es el **becquerel** (Bq), definida como una desintegración por segundo:

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegración/s} \tag{40.13}$$

Una unidad histórica que se aplica a todo tipo de radiactividad es el **curie** (ci), cuya definición es

$$1 \text{ Ci} = 3{,}7 \times 10^{10} \text{ desintegraciones/s} = 3{,}7 \times 10^{10} \text{ Bq} \tag{40.14}$$

El curie es la radiación que en un segundo emite 1 g de radio. Es una unidad muy grande y, por ello, se utilizan frecuentemente el milicurie (mCi) y el microcurie (μCi).

Desintegración beta

La desintegración beta tiene lugar en aquellos núcleos que poseen neutrones en exceso o en defecto para conseguir la estabilidad. En la emisión β, A no se modifica, mientras Z crece 1 (emisión β^-) o decrece 1 unidad (emisión β^+).

El ejemplo más simple de emisión β es la desintegración del neutrón libre en un protón más un electrón. (El período de semidesintegración del neutrón libre es de unos 10,8 min.) La energía de desintegración es 0,782 MeV, que es la diferencia entre la energía en reposo del neutrón y la del protón más el electrón. Dicho de un modo más general, en la desintegración β^-, un núcleo de número de masa A y número atómico Z se desintegra en un núcleo llamado **núcleo hijo**, de número de masa A y número atómico $Z' = Z + 1$ con la emisión de un electrón. Si la energía de desintegración fuera compartida sólo por el núcleo hijo y el electrón emitido, la energía de este último vendría determinada únicamente por los principios de conservación de la energía y la cantidad de movimiento. Sin embargo, experimentalmente se encuentra que las energías de los electrones emitidos en

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

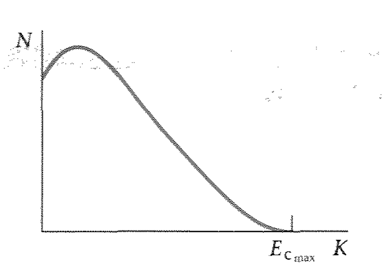


Figura 40.5 Número de electrones emitidos en la desintegración β^- en función de la energía cinética. El hecho de que todos los electrones no tengan la misma energía $E_{c_{max}}$ sugiere la existencia de otra partícula que se emite en el proceso junto al electrón y comparte con éste la energía disponible de la desintegración.

la desintegración β^- de un núcleo varían desde cero hasta la máxima energía disponible. Un espectro de energía típico de estos electrones se muestra en la figura 40.5.

Para explicar la aparente no conservación de la energía en la emisión β, W. Pauli sugirió en 1930 que una tercera partícula, llamada **neutrino**, se emitía simultáneamente en el proceso. Como la energía máxima medida de los electrones emitidos es igual al total disponible en la desintegración, se admitió que la energía en reposo, y por tanto la masa del neutrino, era cero. (Hoy se cree que la masa del neutrino es muy pequeña, pero no cero.) En 1948, las medidas de las cantidades de movimiento del electrón emitido y del núcleo de retroceso, demostraron que el neutrino era también necesario para la conservación de la cantidad de movimiento en la emisión β. El neutrino se observó experimentalmente en 1957. Hoy se sabe que existen al menos tres tipos de neutrinos, uno (υ_e) asociado a los electrones, otro (υ_μ) asociado a los muones y otro (υ_τ) todavía no observado experimentalmente, asociado a la partícula tau, τ, recientemente descubierta. Además, cada neutrino posee una antipartícula, de símbolos respectivamente $\bar{\upsilon}_e$, $\bar{\upsilon}_\mu$ y $\bar{\upsilon}_\tau$. En la desintegración de un neutrón se emite un antineutrino electrónico, según el proceso[1]

$$n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\upsilon}_e \tag{40.15}$$

En la desintegración β^+, un protón se convierte en un neutrón con la emisión de un positrón (y un neutrino). Un protón libre no puede desintegrarse con emisión de un positrón debido a la conservación de la energía (la masa en reposo del neutrón más la masa del positrón es superior a la del protón), pero considerando los efectos de la energía de enlace, es posible la desintegración de un protón dentro de un núcleo. Una emisión β^+ típica es

$$^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + \beta^+ + \upsilon_e \tag{40.16}$$

Los electrones o positrones emitidos en la desintegración β no existen dentro del núcleo. Ellos se crean en el proceso de desintegración del mismo modo que los fotones se crean cuando un átomo verifica una transición desde un estado energético elevado a otro de menor energía.

Un ejemplo importante de desintegración β es el que experimenta el ^{14}C, utilizado para determinar la edad de una muestra orgánica que contenga carbono (método de **datación por carbono radiactivo**):

$$^{14}C \rightarrow {}^{14}N + \beta^- + \bar{\upsilon}_e \tag{40.17}$$

El período de semidesintegración de este proceso es 5730 años. El isótopo radiactivo ^{14}C se produce en la atmósfera superior en reacciones nucleares originadas por los rayos cósmicos. El comportamiento químico de los átomos de carbono con núcleos de ^{14}C es el mismo que poseen los átomos con núcleos ordinarios de ^{12}C. Por ejemplo, los átomos con estos núcleos se combinan igualmente con oxígeno para formar moléculas de CO_2. Como los organismos vivos están continuamente intercambiando CO_2 con la atmósfera, la relación de ^{14}C a ^{12}C en un organismo vivo es la misma relación de equilibrio que existe en la atmósfera, aproximadamente $1{,}3 \times 10^{-12}$. Cuando el organismo muere, deja de absorber ^{14}C de la atmósfera, de modo que la relación ^{14}C a ^{12}C decrece continuamente a causa de la desintegración radiactiva del ^{14}C. El número de núcleos ^{14}C que se desintegran por minuto y por gramo de carbono en un organismo vivo puede calcularse a partir del período de semidesintegración conocido del ^{14}C y del número de núcleos ^{14}C en 1 g de carbono. El resultado es aproximadamente 15,0 desintegraciones por minuto y gramo de carbono en un organismo vivo. Utilizando este dato y el número medido de desintegraciones por minuto y gramo de carbono en una muestra no viva de hueso, madera u otro objeto que contenga carbono, podemos determinar la edad de la muestra. Por ejemplo, si se miden 7,5 desintegraciones por minuto y gramo de muestra, ésta tiene la edad de un período, o sea 5730 años.

[1] Esta reacción se escribe también $n \rightarrow p + e^- + \bar{\upsilon}_e$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



EJEMPLO 40.4

Un hueso que contiene 200 g de carbono presenta una velocidad de desintegración β de 400 desintegraciones por minuto. ¿Qué edad tiene el hueso?

Esquema del problema En primer lugar obtenemos una estimación aproximada de la edad del hueso. Si éste perteneciera a un organismo vivo, la velocidad de desintegración hubiera sido (15 desint/min·g) (200 g) = 3000 desint/min. Como 400/3000 es aproximadamente 1/8 (exactamente 1/7,5), la muestra debe tener una edad aproximada de 3 períodos, es decir 3 × 5730 años = 17 190 años. Para determinar con más exactitud la edad del hueso, debemos considerar que después de n períodos, la velocidad de desintegración se ha reducido en un factor de $(\frac{1}{2})^n$.

1. Expresar la velocidad de desintegración después de n períodos en función de la velocidad inicial de desintegración:

   $R_n = (\frac{1}{2})^n R_0$

2. Calcular la velocidad inicial de desintegración para la muestra de 200 g:

   $R_0 = (15 \text{ desint/min·g})(200 \text{ g}) = 3000 \text{ desint/min}$

3. Sustituir el valor medido de R_n y simplificar:

   $R_n = (\frac{1}{2})^n 3000 \text{ desint/min} = 400 \text{ desint/min}$

   $(\frac{1}{2})^n = \frac{400}{3000}$

   $2^n = \frac{3000}{4000} = 7{,}5$

4. Tomar logaritmos en ambos miembros para deducir el valor de n:

   $n \ln 2 = \ln 7{,}5$

   $n = \frac{\ln 7{,}5}{\ln 2} = 2{,}91$

5. La edad del hueso es $nt_{1/2}$:

   $t = nt_{1/2} = 2{,}91 \times 5730 \text{ años} = 1{,}67 \times 10^4 \text{ años}$

Desintegración gamma

En una emisión γ, un núcleo de un estado excitado se desintegra pasando a un estado de menor energía por emisión de un fotón. Esta es es la contrapartida nuclear de la emisión espontánea de fotones por átomos y moléculas. Al contrario que en la emisión β o α, después de la emisión γ, el núcleo radiactivo permanece siendo el mismo. Como el espaciado de los niveles energéticos nucleares es del orden de 1 MeV (comparado con el espaciado del orden de 1 eV en los átomos), las longitudes de onda de los fotones emitidos son del orden de 1 pm (1 pm = 10^{-12} m):

$$\lambda = \frac{hc}{E} \approx \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1 \text{ MeV}} = 0{,}00124 \text{ nm} = 1{,}24 \text{ pm}$$

La vida media de la emisión γ es frecuentemente muy corta. Usualmente se observa porque se produce después de una emisión α o β. Por ejemplo, si un núcleo radiactivo se desintegra por emisión β produciendo un núcleo excitado del núcleo hijo, éste pasa a su estado fundamental por emisión γ. Medidas directas de vidas medias del orden de 10^{-11} s son posibles. Otras medidas de vida media inferiores a 10^{-11} s son difíciles, pero a veces pueden realizarse por métodos indirectos.

Unos pocos emisores γ tienen vidas medias muy largas, del orden de horas. Estos estados energéticos nucleares se llaman **estados metastables**.

Desintegración alfa

Todos los núcleos muy pesados ($Z > 83$) son teóricamente inestables a la emisión α, ya que la masa del núcleo radiactivo original es mayor que la suma de las masas de los productos emitidos: una partícula α y el núcleo hijo. Consideremos la desintegración del ^{232}Th ($Z = 90$) en ^{228}Ra ($Z = 88$) más una partícula α, es decir,

$$^{232}\text{Th} \rightarrow {}^{228}\text{Ra} + \alpha = {}^{228}\text{Ra} + {}^{4}\text{He} \quad \textbf{(40.18)}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

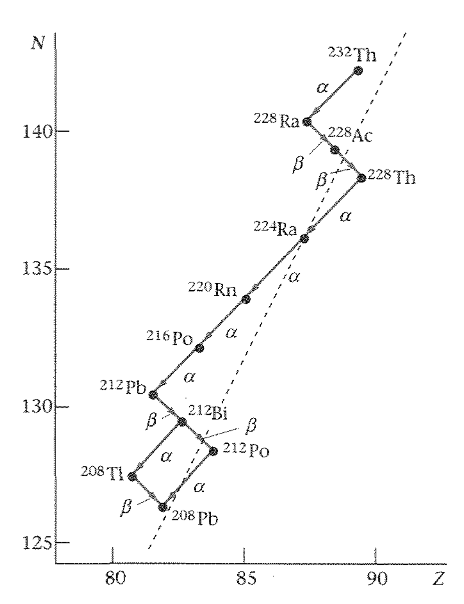


Figura 40.6 Serie de emisión α del torio ($4n$). La línea de trazos es la curva de estabilidad.

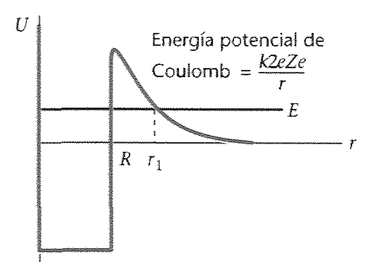


Figura 40.7 Modelo de la energía potencial para una partícula α y un núcleo. La interacción fuerte atractiva que existe en el núcleo para valores de r inferiores al radio nuclear R viene indicada por el pozo de potencial. Fuera del núcleo, la fuerza nuclear es despreciable y la energía potencial viene dada por la ley de coulomb $U = +k2eZe/r$, en donde Ze es la carga nuclear y $2e$ es la carga de la partícula α. La energía E es la energía cinética de la partícula α cuando se encuentra lejos del núcleo. Un incremento pequeño de E reduce la altura relativa de la barrera y también su espesor dando lugar a una probabilidad de penetración mucho mayor. Un incremento de la energía de las partículas α emitidas en un factor 2 reduce el período de semidesintegración en un factor superior a 10^{20}.

La masa del ^{232}Th es 232,038124 u. La masa del átomo hijo ^{228}Ra es 238,031139 u. Sumándole 4,002603 u que es la masa ^{4}He, obtenemos 232,033742 u para la masa total de los productos de desintegración. Esta cantidad es menor que la masa del ^{232}Th en 0,004382 u, la cual multiplicada por 931,5 MeV/c^2 nos da el valor 4,08 MeV/c^2 para el exceso de masa en reposo del ^{232}Th sobre la de los productos emitidos. El isótopo ^{232}Th es, por tanto, teóricamente inestable a la emisión α. Esta desintegración ocurre de hecho en la naturaleza con la emisión de una partícula α de energía cinética 4,08 MeV. (Realmente, la energía cinética de la partícula α es algo menor de 4,08 MeV, pues parte de la energía de desintegración es compartida por el núcleo ^{228}Ra de retroceso.)

En general, cuando un núcleo emite una partícula α, tanto N como Z disminuyen en 2 unidades y A disminuye en 4 unidades. El descendiente de un núcleo radiactivo es frecuentemente radiactivo y emite partículas α o β o ambas. Si el núcleo original tiene un número de masa que es el múltiplo de 4 de un entero, el núcleo hijo y todos los demás descendientes de la cadena tendrán también números de masa múltiplos de 4. Del mismo modo, si el número de masa del núcleo original es $4n + 1$, en donde n es un número entero, todos los núcleos de la cadena de desintegración tendrán números de masa dados por $4n + 1$, en donde n decrece en una unidad por cada emisión. Vemos, por tanto, que hay cuatro cadenas posibles de emisión α, según A sea igual a $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ o $4n + 3$ en donde n es un número entero. Todas estas cadenas, excepto una, se encuentran en la Tierra. La serie $4n + 1$ no existe, debido a que su miembro de vida más larga (distinto al producto estable final ^{209}Bi) es ^{237}Np que tiene un período de semidesintegración de sólo 2×10^6 años. Como este período es mucho menor que la edad de la Tierra, esta serie desapareció.

La figura 40.6 muestra la serie del torio, para la cual $A = 4n$. Comienza con una emisión α del ^{232}Th al ^{228}Ra. El núcleo descendiente de una emisión α se encuentra a la izquierda (más abundante en neutrones) de la curva de estabilidad (la línea de trazos de la figura), y por ello suele desintegrarse por emisión β^-. En esta serie del torio, el ^{228}Ra pasa por emisión β^- a ^{228}Ac, el cual a su vez experimenta la desintegración β^- y se convierte en ^{228}Th. Se producen entonces cuatro emisiones α consecutivas hasta el ^{212}Pb, el cual por emisión β^- pasa a ^{212}Bi. La serie se ramifica en el ^{212}Bi, que se desintegra por emisión α en ^{208}Tl o por emisión β^- en ^{212}Po. Las dos ramas se encuentran en el isótopo estable del plomo ^{208}Pb.

Las energías de las partículas α procedentes de fuentes radiactivas naturales varían entre unos 4 a 7 MeV y los períodos de semidesintegración de las fuentes entre unos 10^{-5} s a 10^{10} años. En general, cuanto menor es la energía de la partícula α emitida, más largo es su período. Como vimos en la sección 36.4, la enorme variación de los períodos fue explicada por George Gamow en 1928. Para ello consideró que la emisión α era un proceso en el cual una partícula α se forma primero dentro del núcleo y luego escapa por efecto túnel a través de la barrera de Coulomb (figura 40.7). Un incremento ligero de la energía de la partícula a reduce la altura relativa $U - E$ de la barrera y también su espesor. Como la probabilidad de penetración es tan sensible a la altura relativa y al espesor de la barrera, un pequeño incremento de E da lugar a un gran incremento en la probabilidad de penetración de la barrera y, por tanto, a una vida media más corta. Gamow obtuvo una expresión para el período de semidesintegración en función de E en excelente acuerdo con los resultados experimentales.

40.3 Reacciones nucleares

La información sobre los núcleos se obtiene típicamente bombardeándolos con diversas partículas y observando los resultados. Aunque los primeros experimentos de este tipo se limitaron por necesidad al uso de la radiación natural, produjeron muchos descubrimientos importantes. En 1932 J. D. Cockcroft y E. T. S. Walton obtuvieron con éxito la reacción

$$p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^8\text{Be} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$$

utilizando protones artificialmente acelerados. Aproximadamente al mismo tiempo, se construyó el generador electrostático de Van de Graaf (1931), así como el primer ciclotrón (por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1932). Desde entonces se han realizado

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

enormes avances en la tecnología de aceleración y detección de partículas y se han estudiado numerosas reacciones nucleares.

Cuando una partícula incide sobre un núcleo, pueden ocurrir varias cosas distintas. La partícula incidente puede dispersarse elástica o inelásticamente o ser absorbida por el núcleo, en cuyo caso puede emitirse una o más partículas. En la dispersión inelástica, el núcleo queda en estado excitado y posteriormente se desintegra emitiendo fotones (u otras partículas).

La cantidad de energía liberada o absorbida en una reacción (en el sistema de referencia del centro de masas) se denomina **valor** Q de la reacción. Este valor Q es igual al producto de c^2 por la diferencia de masas. Cuando en una reacción nuclear se libera energía, se dice que la **reacción es exotérmica**: la masa de las partículas incidentes es mayor que la de las partículas resultantes y el valor Q es positivo. Si la masa total de las partículas incidentes es menor que la de las partículas resultantes, debe aportarse energía para que la reacción se verifique y se dice que la **reacción es endotérmica**. El valor Q de la reacción endotérmica es negativo. En general, si Δm es el incremento de masa, el valor Q es:

$$Q = -(\Delta m)c^2 \tag{40.19}$$

Valor Q

Una reacción endotérmica no puede tener lugar por debajo de una determinada energía umbral. En el sistema de referencia del laboratorio, en el cual las partículas estacionarias son bombardeadas por partículas incidentes, la energía umbral es algo mayor que $|Q|$, ya que las partículas resultantes deben tener cierta energía cinética para conservar la cantidad de movimiento.

Una medida del tamaño efectivo de un núcleo para una reacción nuclear específica es la **sección eficaz** σ. Si I es el número de partículas incidentes por unidad de tiempo y unidad de área (intensidad incidente) y R el número de reacciones por unidad de tiempo y por núcleo, la sección eficaz es

$$\sigma = \frac{R}{I} \tag{40.20}$$

La sección eficaz σ tiene las dimensiones de área. Como las secciones eficaces son del orden del cuadrado del radio nuclear, una unidad conveniente para su medida es el **barn**, definido por

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 \tag{40.21}$$

La sección eficaz de una determinada reacción es función de la energía. Para una reacción endotérmica, es cero para energías inferiores a la umbral.

EJEMPLO 40.5

Determinar el valor Q de la reacción $p + {}^7Li \rightarrow {}^4He + {}^4He$ e indicar si la reacción es exotérmica o endotérmica

Esquema del problema Tomamos las masas de los átomos implicados en la reacción de la tabla 40.1 y calculamos la diferencia de masa total entre las partículas resultantes y las incidentes. El valor Q es $-(\Delta m)c^2$. Si utilizamos la masa del hidrógeno en lugar de la masa del protón, tendremos 4 electrones en cada lado de la reacción, de modo que las masas electrónicas se cancelan.

1. Determinar las masas de cada átomo mediante la Tabla 40.1:
   ${}^1H$ 1,007825 u
   ${}^7Li$ 7,016004 u
   ${}^4He$ 4,002603 u

2. Calcular la masa inicial m_i de las partículas incidentes: $m_i = 1{,}007825 \text{ u} + 7{,}016004 \text{ u} = 8{,}023829 \text{ u}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3. Calcular las masas finales: $m_f = 2(4{,}002603\text{ u}) = 8{,}005206\text{ u}$

4. Calcular el incremento de masa: $\Delta m = m_f - m_i = 8{,}005206\text{ u} - 8{,}023829\text{ u}$
$= -0{,}018623\text{ u}$

5. Calcular el valor Q: $Q = -(\Delta m)c^2 = (+\,0{,}018623\text{ u})c^2(931{,}5\text{ MeV/u }c^2)$
$= 17{,}35\text{ MeV}$
Como Q es positivo, la reacción es exotérmica

Observaciones Como la masa inicial es mayor que la final, la diferencia se convertirá en energía y la reacción es exotérmica, produciendo 17,35 MeV.

Reacciones con neutrones

Las reacciones nucleares con intervención de neutrones son importantes para entender el funcionamiento de los reactores nucleares. La reacción más probable entre un núcleo y un protón que posee una energía aproximadamente superior a 1 MeV es la dispersión. Sin embargo, aunque la dispersión sea elástica, el neutrón cede cierta energía al núcleo y éste retrocede. Si un neutrón se dispersa muchas veces en un material, su energía disminuye hasta ser del orden de la energía del movimiento térmico kT, en donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. (A las temperaturas ordinarias, kT vale aproximadamente 0,025 eV.) En estas condiciones cuando el neutrón se dispersa elásticamente en un núcleo posee la misma probabilidad de ganar como de perder energía. Un neutrón cuya energía es del orden de kT se denomina **neutrón térmico**.

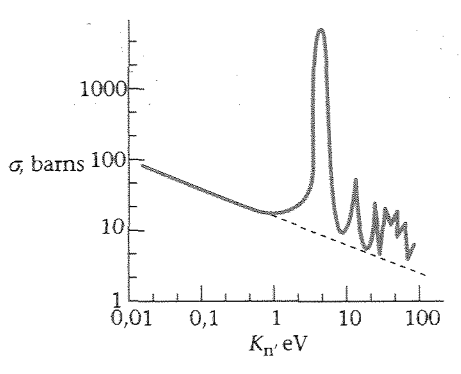


Figura 40.8 Sección eficaz de captura de neutrones por la plata en función de la energía del neutrón. La línea recta indica la dependencia $1/v$ de la sección eficaz, proporcional al tiempo transcurrido por el neutrón en las proximidades del núcleo de plata. Esta dependencia viene superpuesta por una gran resonancia y varias resonancias pequeñas.

A bajas energías el neutrón es probablemente capturado, con la emisión de un rayo γ que procede del núcleo excitado. La figura 40.8 muestra la sección eficaz de captura de neutrones por la plata en función de la energía del neutrón. El pico mayor de esta curva corresponde a una **resonancia**. Excepto en la resonancia, la sección eficaz varía suavemente con la energía, disminuyendo con la energía creciente según la función aproximada $1/v$, en donde v es la velocidad del neutrón. Esta dependencia con la energía puede entenderse del modo siguiente: consideremos un neutrón que se mueve con la velocidad v en las proximidades de un núcleo de diámetro $2R$. El tiempo que tarda el neutrón en sobrepasar al núcleo es $2R/v$. Por tanto, la sección eficaz de captura del neutrón es proporcional al tiempo que el neutrón transcurre en la vecindad del núcleo. La línea de tra-

(*a*)

(*b*)

(*c*)


Bombardeando una pintura con neutrones pueden descubrirse capas escondidas en el cuadro. Para ello se analizan las emisiones radiactivas de los núcleos que han capturado un neutrón. Los distintos elementos utilizados en la pintura poseen diferentes períodos de semidesintegración. (*a*) Cuadro "Santa Rosalía intercediendo por los afectados de la peste de Palermo" de Van Dyck. Las imágenes en blanco y negro de (*b*) y (*c*) se obtuvieron utilizando una película especial sensible a los electrones emitidos por los elementos que se desintegran radiactivamente. La imagen (*b*), tomada unas pocas horas después de la irradiación con neutrones revela la presencia de manganeso, componente del ocre, pigmento terroso oscuro que se utiliza como pintura base. (Las áreas en blanco corresponden a reparaciones modernas, libres de manganeso.) La imagen (*c*) fue tomada cuatro días después, cuando las emisiones del ocre se habían extinguido y el principal elemento radiactivo era el fósforo componente del carboncillo y del carbón de huesos. Invirtiendo la imagen puede verse un boceto de autorretrato del propio Van Dyck, pintado en carboncillo, que posteriormente fue recubierto por el artista.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

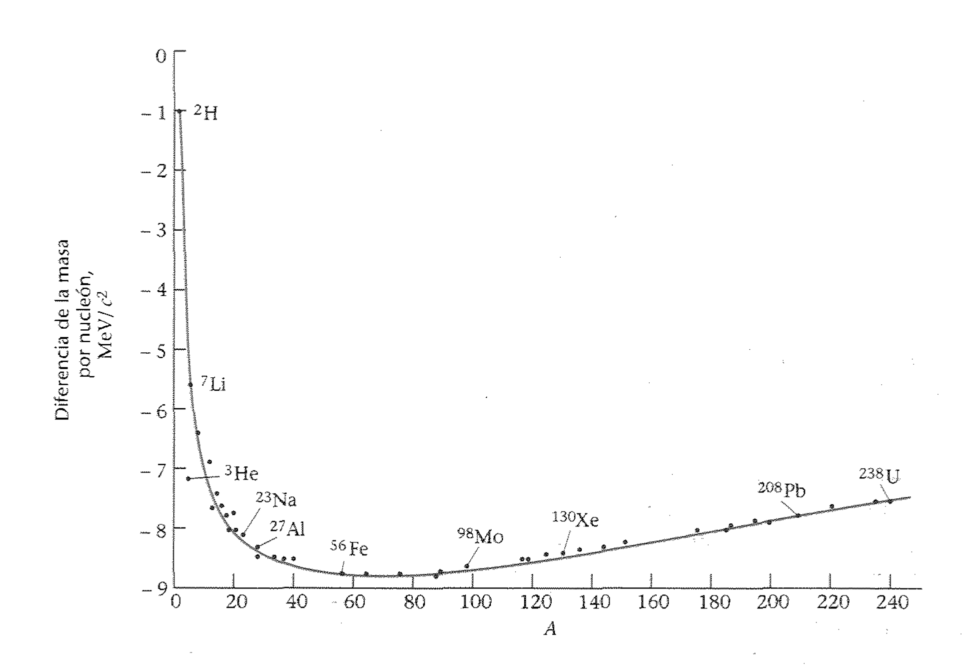


Figura 40.9 Gráfico de la diferencia de masa por nucleón $(M - Zm_p - Nm_n)/A$ en unidades de MeV/c^2 en función de A. La masa en reposo por nucleón es menor para los núcleos de masa intermedia que para los muy ligeros o muy pesados.

zos de la figura 40.8 indica esta dependencia $1/v$. En el máximo de resonancia, el valor de la sección eficaz es muy grande ($\sigma > 5000$ barns) comparado con un valor de sólo unos 10 barns justamente después de la resonancia. Muchos elementos muestran resonancias semejantes en sus secciones eficaces de neutrones. Por ejemplo, la sección eficaz máxima del ^{113}Cd es de unos 57 000 barns. Este material es muy útil para construir un blindaje para los neutrones de baja energía.

Una importante reacción nuclear con intervención de los neutrones es la fisión que se trata en la sección siguiente.

Fisión y fusión ■ 40.4

En la figura 40.9 se muestra un gráfico de la diferencia de masa nuclear por nucleón $(M - Zm_p - Nm_n)/A$ en unidades de MeV/c^2 en función de A. Esta expresión es justamente el valor negativo de la curva de energía de enlace de la figura 40.3. En la figura 40.9 podemos ver que la masa en reposo por nucleón de los nucleidos muy pesados ($A \approx 200$) y de los nucleidos muy ligeros ($A \lesssim 20$) es mayor que la correspondiente a los nucleidos de masa intermedia. Por tanto, cuando un núcleo muy pesado, tal como el ^{235}U, se separa en dos núcleos más ligeros —proceso llamado **fisión**— o bien, los núcleos muy ligeros, tales como el ^{2}H y ^{3}H, se fusionan entre sí para formar un núcleo de masa mayor —proceso llamado **fusión**— se libera una cantidad importante de energía.

La aplicación de los procesos de fisión y de fusión en el desarrollo de las armas nucleares ha tenido un efecto profundo en nuestras vidas durante los últimos 50 años. Las aplicaciones pacíficas de estas reacciones al desarrollo de los recursos energéticos puede tener un efecto incluso mayor en el futuro. A continuación analizaremos algunas de las características de la fisión y la fusión que son importantes en sus aplicaciones para generar potencia en los llamados reactores nucleares.

Fisión ■

Los núcleos muy pesados ($Z > 92$) están expuestos a la fisión espontánea, rompiéndose en dos núcleos más pequeños que se separan incluso en ausencia de toda perturbación exterior. Este fenómeno puede entenderse considerando la analogía con una gota de líquido cargada. Si la gota no es demasiado grande, la tensión superficial puede vencer a las fuerzas repulsivas de las cargas y la gota permanece unida. Existe, sin embargo un cierto tamaño máximo, de modo que si se supera, la gota se hace inestable y se desdobla espontáneamente. De igual modo, la fisión establece un límite superior al tamaño de un núcleo y, por tanto, al número de elementos posibles del sistema periódico.

 www.elsolucionario.net

Ciertos núcleos pesados —en particular, el uranio y el plutonio— pueden ser inducidos a la fisión por captura de un neutrón. Así, en la fisión del ^{235}U, por ejemplo, el núcleo de uranio se excita por la captura de un neutrón, originando su división en dos núcleos y emitiendo varios neutrones. La fuerza de repulsión de Coulomb separa los fragmentos de la fisión y la energía desprendida aparece en forma de calor. Consideremos, por ejemplo, la fisión de un núcleo de número de masa $A = 200$ que origina dos núcleos de número de masa $A = 100$. Como la energía en reposo para $A = 200$ es aproximadamente 1 MeV por nucleón mayor que para $A = 100$, se liberan aproximadamente 200 MeV por núcleo en dicha fisión. Esto supone una cantidad enorme de energía. Por contraste, en la reacción química de la combustión, se liberan aproximadamente 4 eV de energía por molécula de oxígeno consumido.

EJEMPLO 40.6

Calcular la energía total en kilovatios-horas liberada en la fisión de 1 g de ^{235}U, suponiendo que se liberan 200 MeV por cada fisión nuclear.

Esquema del problema Necesitamos determinar el número de núcleos de uranio que hay en un gramo de ^{235}U, para lo cual tendremos en cuenta que existe un número de núcleos igual al número de Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) en 235 gramos de uranio.

1. La energía total liberada es igual al número de núcleos multiplicado por la energía de fisión de cada núcleo:

$$E = NE_{\text{núcleo}} = N(200\ \text{MeV/núcleo})$$

2. Calcular N:

$$N = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{núcleos/mol}}{235\ \text{g/mol}} \times 1\ \text{g} = 2{,}56 \times 10^{21}\ \text{núcleos}$$

3. Calcular la energía por gramo en eV y convertirla en kW·h:

$$E = \frac{200 \times 10^6\ \text{eV}}{\text{núcleo}} \times 2{,}56 \times 10^{21}\ \text{núcleos} \times \frac{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1\ \text{kW}}{1000\ \text{J/s}}$$

$$= 2{,}28 \times 10^4\ \text{kW·h}$$

www.elsolucionario.net

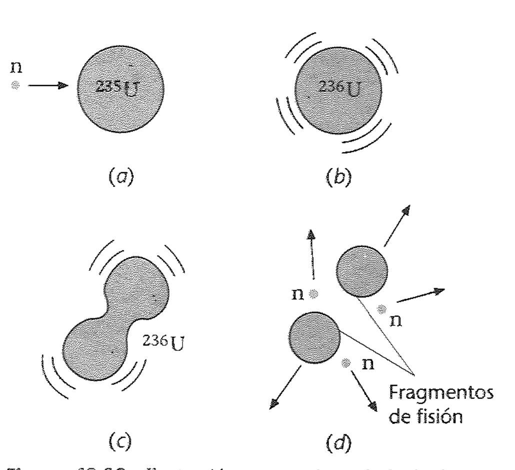


Figura 40.10 Ilustración esquemática de la fisión nuclear. (*a*) La absorción de un neutrón por ^{235}U conduce a (*b*) ^{236}U en un estado excitado. En (*c*) la oscilación de ^{236}U se hace inestable. (*d*) El núcleo se divide en dos fragmentos que son núcleos de masa media y emite varios neutrones que pueden producir la fisión de otros núcleos de uranio.

La fisión del uranio fue descubierta en 1939 por Hahn y Strassmann, quienes determinaron por análisis químico riguroso, que en el bombardeo de uranio por neutrones se producían elementos de masa media (tales como el bario y el lantano). El descubrimiento de que en el proceso de fisión se emitían varios neutrones sustentó la posibilidad de utilizar estas partículas para obtener nuevas fisiones y, por tanto, producir una reacción en cadena. Cuando el ^{235}U captura un neutrón, el núcleo resultante ^{236}U excitado pasa al estado fundamenta emitiendo rayos γ aproximadamente el 15% del tiempo y experimenta la fisión el 85% del tiempo restante. El proceso de fisión es algo análogo a la oscilación de una gota líquida, como se indica en la figura 40.10. Si las oscilaciones son suficientemente violentas, la gota se divide en dos. Utilizando el modelo de la gota líquida, Bohr y Wheeler calcularon la energía crítica E_c necesaria para que el núcleo ^{236}U experimentara la fisión. (^{236}U es el núcleo formado momentáneamente por la captura de un neutrón por el ^{235}U). Para este núcleo, la energía crítica es 5,3 MeV, la cual es menor que la energía de excitación, 6,4 MeV, producida cuando el ^{235}U captura un neutrón. Por tanto, la captura de un neutrón por el ^{235}U produce un estado excitado del ^{236}U que posee una energía superior a la necesaria para romperse en dos fragmentos. Por otra parte, la energía crítica de fisión del núcleo ^{239}U es 5,9 MeV. La captura de un neutrón por un núcleo de ^{238}U produce una energía de excitación de sólo 5,2 MeV. Por tanto, cuando un neutrón es capturado por ^{238}U para formar ^{239}U, la energía de excitación es insuficiente para que tenga lugar la fisión. En este caso, el núcleo excitado ^{239}U pasa al estado normal por emisión γ y se desintegra por emisión β en ^{239}N$_p$ y luego en ^{239}Pu por nueva emisión β.

www.elsolucionario.net

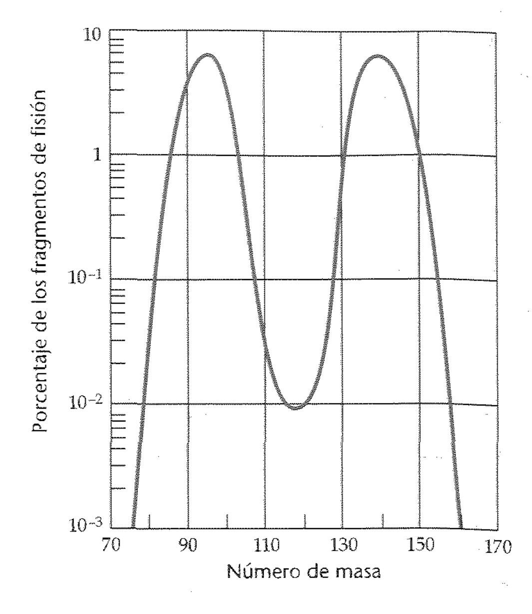


Figura 40.11 Distribución de los posibles fragmentos de fisión del ^{235}U. El desdoblamiento del ^{235}U en dos fragmentos de masa distinta es más probable que su ruptura en fragmentos de igual masa.

Cuando un núcleo experimenta la fisión puede romperse en dos fragmentos distintos, como indica la figura 40.11. Según la reacción específica producida, pueden emitirse 1, 2 ó 3 neutrones. El número medio de neutrones emitidos en la fisión del ^{235}U es aproximadamente 2,5. Una reacción típica de fisión es

$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{141}Ba + {}^{92}Kr + 3n$$

Reactores de fisión nuclear

Para mantener una reacción en cadena en un reactor de fisión, uno de los neutrones (por término medio) emitido en la fisión del ^{235}U debe ser capturado por otro núcleo de ^{235}U y originar su fisión. La **constante de reproducción** k de un reactor se define como el número medio de neutrones de cada fisión que producen una fisión posterior. El valor máximo posible de k es 2,5, pero normalmente es menor por dos importantes razones: (1) Algunos neutrones pueden escapar de la región que contiene núcleos fisionables y (2) Algunos neutrones pueden ser capturados por núcleos no fisionables en el reactor. Si k es exactamente 1, la reacción se mantiene y es autosuficiente. Si es menor que 1, la reacción se extingue. Si k es significativamente mayor que 1, la velocidad de reacción crece rápidamente y queda fuera de control. En el diseño de las bombas nucleares se busca precisamente esta última condición incontrolada. En los reactores de potencia, el valor de k debe mantenerse muy próximo a 1.



Interior de una central nuclear en Kent, Inglaterra. Un técnico está de pie sobre la placa de transferencia de la carga del reactor, donde se disponen las barras de combustible de uranio.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

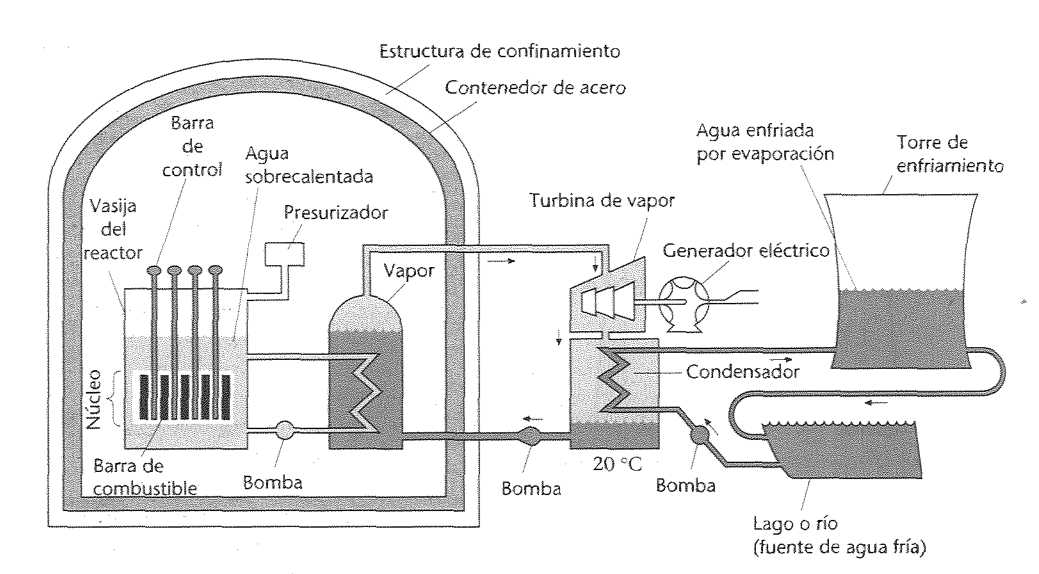


Figura 40.12 Dibujo simplificado de un reactor de agua a presión. El agua en contacto con el núcleo del reactor se utiliza simultáneamente como moderador y como material transmisor del calor. Está aislada del agua utilizada para producir el vapor que impulsa las turbinas. Muchas características, tales como los mecanismos de enfriamiento de retroalimentación, no se muestran aquí.

Como los neutrones emitidos en la fisión poseen energías del orden de 1 MeV y la probabilidad de captura de los neutrones que dan lugar a la fisión del ^{235}U es mayor a pequeñas energías, para que la reacción en cadena sea autosuficiente es necesario que los neutrones disminuyan su velocidad antes de que escapen del reactor. Para altas energías (de 1 a 2 MeV), los neutrones se moderan rápidamente por dispersión inelástica al chocar con el ^{238}U, principal componente del uranio natural (99,3% de ^{238}U y sólo 0,7% del ^{235}U fisionable). Una vez que la energía del neutrón está por debajo de las energías de excitación de los núcleos del reactor (aproximadamente 1MeV), el proceso principal mediante el cual pierde energía es por dispersión elástica. En este proceso, un neutrón rápido choca con un núcleo en reposo y le transmite parte de su energía cinética. Esta transferencia de energía sólo es eficaz si las masas de los dos cuerpos son comparables. Un neutrón no puede transferir mucha energía en un choque elástico con un núcleo pesado de uranio. Tal colisión es equivalente a la de una canica con una bola de billar. La canica será desviada por la bola de billar, mucho más pesada, y ésta adquirirá muy poca energía cinética en el choque. Un **moderador** está formado por material como el agua o el carbón que contienen núcleos ligeros y por tanto, situados alrededor del material fisionable en el núcleo del reactor, producen el retardo de los neutrones. Estos disminuyen su velocidad (y, por tanto, su energía) al chocar elásticamente con los núcleos del moderador hasta alcanzar el equilibrio térmico con este material. Debido a que la sección eficaz de captura de neutrones que poseen los núcleos de hidrógeno del agua es relativamente grande, los reactores que utilizan el agua ordinaria como moderador no pueden alcanzar fácilmente el valor de $k \approx 1$, a menos que utilicen uranio enriquecido, en el cual el contenido de ^{235}U se ha incrementado del 0,7% a un valor comprendido entre el 1 y el 4%. El uranio natural puede utilizarse si se emplea como moderador agua pesada (D_2O) en lugar de agua ordinaria (ligera), H_2O. Aunque el agua pesada es cara de obtener, la mayor parte de los reactores canadienses la utilizan como moderador para evitar el coste de construcción de instalaciones de enriquecimiento del uranio.

La figura 40.12 muestra algunas de las características de un reactor de agua a presión utilizado en los Estados Unidos para generar electricidad. La fisión en el núcleo del reactor calienta el agua a alta temperatura en el circuito primario cerrado. El agua, que también sirve de moderador, está bajo presión para evitar su ebullición. Mediante una bomba, el agua pasa a un cambiador de calor, en donde eleva la temperatura del agua de un circuito secundario hasta convertirla en vapor, el cual se utiliza para impulsar las turbinas que producen potencia eléctrica. Obsérvese que el agua del circuito secundario está aislada de la que circula por el circuito primario, con el fin de evitar su contaminación por los núcleos radiactivos del material del reactor.

Para que un reactor de potencia funcione con seguridad es muy importante controlar con precisión el factor de reproducción k. Para ello se utilizan métodos de control mecá-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

nicos y métodos naturales de retroalimentación negativa. Si k es mayor que 1 y la velocidad de reacción se incrementa, la temperatura del reactor se incrementa. Si se utiliza agua como moderador, al aumentar la temperatura, su densidad disminuye y se convierte en un moderador menos efectivo. Un segundo método de control importante es el uso de barras de control formadas por un material como el cadmio que tiene una sección eficaz de captura de los neutrones muy grande. Cuando el reactor se acelera, se insertan las barras de control y k disminuye hasta valores inferiores a la unidad. Cuando las barras se extraen gradualmente del reactor, capturan menos neutrones y k crece hasta 1. Si k se hace mayor que 1, las barras se insertan de nuevo.

El control mecánico de la velocidad de reacción de un reactor nuclear mediante barras de cadmio es sólo posible porque algunos de los neutrones emitidos en la fisión son **neutrones retardados**. El tiempo necesario para que un neutrón disminuya su energía desde el nivel 1-2 MeV hasta el nivel de energía térmica y luego sea capturado, es sólo del orden de un milisegundo. Si todos los neutrones emitidos en la fisión fueran neutrones rápidos, es decir, emitidos inmediatamente en el proceso de fisión, el control mecánico no sería posible, ya que el reactor se "desbocaría" antes de que pudieran insertarse las barras. Sin embargo, aproximadamente el 0,65% de los neutrones emitidos lo hacen con un tiempo medio de retardo de unos 14 s. Estos neutrones se emiten por desintegración de los fragmentos de fisión y no en el propio proceso de fisión. El efecto de los neutrones retardados puede verse en los siguientes ejemplos.



EJEMPLO 40.7

Si el tiempo medio entre las generaciones sucesivas de fisión (tiempo necesario para que el neutrón emitido en una fisión cause otra fisión) es t_1 = 1 ms = 0,001 s y la constante de reproducción es 1,001, ¿cuánto tiempo tardará la velocidad de reacción en duplicarse?

Esquema del problema El tiempo de duplicación de la velocidad de reacción es igual al número de generaciones N necesarias para la duplicación, multiplicada por el tiempo de generación. Si $k = 1{,}001$, la velocidad de reacción después de N generaciones es $1{,}001^N$. El número de generaciones puede determinarse haciendo $1{,}001^N$ igual a 2 y despejando N.

1. Hacer $1{,}001^N$ igual a 2 y despejar N:

$$(1{,}001)^N = 2$$
$$N \ln 1{,}001 = \ln 2$$
$$N = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}001} = 693$$

2. Multiplicar el número de generaciones por el tiempo de generación

$$t = Nt_1 = 693(0{,}001\ \text{s}) = 0{,}693\ \text{s}$$

Observación El tiempo de duplicación es aproximadamente 0,7 s y, por tanto, insuficiente para insertar las barras de control.

EJEMPLO 40.8

¡Inténtelo!

Suponiendo que el 0,65% de los neutrones emitidos tienen un tiempo de retardo de 14 s, determinar el tiempo medio de generación y el tiempo medio de duplicación si k = 1,001.

Esquema del problema El tiempo de duplicación es Nt_m, en donde t_m es el tiempo medio entre generaciones. Como el 99,35% de los tiempos de generación es 0,001 s y el 0,65% es de 14 s, el tiempo medio de generación será 0,9935 (0,001 s) + 0,0065 (14 s).

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Etapas	*Respuestas*
3. Calcular el tiempo medio de generación.	$t_m = 0{,}092$ s
4. Utilizar el resultado anterior para determinar el tiempo necesario para 693 generaciones.	$t = 63{,}8$ s

Observaciones A pesar de que el número de neutrones retardados es menor del 1%, se obtiene un gran efecto en el tiempo de duplicación. En este caso, el tiempo de generación se incrementa en un factor 0,92, resultando un tiempo de duplicación de unos 64 s, lo cual es más que suficiente para la inserción mecánica de las barras de control.

Debido a las provisiones limitadas del uranio natural, a la pequeña fracción de ^{235}U que existe en el mismo y a la capacidad limitada de las instalaciones de enriquecimiento, los reactores basados en la fisión del ^{235}U no son suficientes para satisfacer las necesidades energéticas de la humanidad durante mucho tiempo. Una alternativa prometedora es el **reactor reproductor**. Cuando el núcleo del ^{238}U, relativamente abundante, pero no fisionable, captura un neutrón, se desintegra por emisión β (con un período de semidesintegración de 20 min) produciendo ^{239}Np, el cual a su vez por emisión β (período, 2,35 días) da un nucleido fisionable, el ^{239}Pu. Como este nucleido se fisiona con neutrones rápidos no es necesario el uso de moderador. Un reactor inicialmente cargado con una mezcla de ^{238}U y ^{239}Pu puede generar tanto combustible como el que consume (o más) si uno o más de los neutrones emitidos en la fisión del ^{239}Pu es capturado por el ^{238}U. Los estudios prácticos indican que un reactor reproductor típico puede duplicar su consumo de combustible en un período de 7 a 10 años.

Existen dos problemas importantes de seguridad inherentes a los reactores de reproducción. La fracción de neutrones retardados es sólo del 0,3% en la fisión del ^{239}Pu y, por tanto, el tiempo entre generaciones es mucho menor que el de los reactores ordinarios. El control mecánico es, por tanto, mucho más difícil. Además, como la temperatura de operación de un reactor reproductor es relativamente alta y el moderador no es necesario, se utiliza un material transmisor del calor como el metal sodio líquido, en lugar del agua (que es el moderador y el transmisor del calor en los reactores ordinarios). Si la temperatura del reactor aumenta, la disminución de densidad del material transmisor del calor da lugar a una retroalimentación positiva, ya que se absorben menos neutrones que antes. Debido a estos problemas de seguridad, los reactores reproductores no se encuentran en uso comercial en los Estados Unidos. Sin embargo, existen varios en operación en Francia, Gran Bretaña y la Unión Soviética.

www.elsolucionario.net

Fusión

En la fusión, dos núcleos ligeros, tales como el deuterio (^{2}H) y el tritio (^{3}H) se fusionan juntamente para formar un núcleo más pesado. Una reacción típica de fusión es

$$^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n} + 17{,}6 \text{ MeV}$$

La energía liberada en la fusión depende de la reacción particular considerada. Para la reacción ^{2}H + ^{3}H es 17,6 MeV. Aunque este valor es inferior a la energía liberada en una reacción de fisión, realmente se trata de una cantidad superior de energía por unidad de masa. La energía liberada en esta reacción de fusión es (17,6 MeV)/(5 nucleones) = 3,52 MeV por nucleón, lo cual es aproximadamente 3,5 veces el valor de 1 MeV por nucleón liberado en la fisión.

La producción de potencia procedente de la fusión de núcleos ligeros es muy esperanzadora, debido a la abundancia relativa del combustible y a la ausencia de los peligros inherentes a los reactores de fisión. Desafortunadamente, la tecnología necesaria para

www.elsolucionario.net

009197

que la fusión sea una fuente práctica de energía no ha sido todavía desarrollada. Seguiremos analizando la reacción $^2H + ^3H$; otras reacciones presentan problemas semejantes.

Debido a la repulsión de Coulomb entre los núcleos ^2H y ^3H, se necesitan energías cinéticas muy grandes, del orden de 1 MeV, para que los núcleos se aproximen suficientemente de modo que sean efectivas las fuerzas atractivas nucleares y originen la fusión. Estas energías pueden obtenerse en un acelerador, pero como la dispersión de un núcleo por otro es mucho más probable que la fusión, la energía requerida en el acelerador es superior a la que podría recuperarse. Para obtener energía mediante la fusión, las partículas deben elevar su temperatura suficientemente de modo que la reacción de fusión tenga lugar como consecuencia de las colisiones térmicas aleatorias. Como un número importante de partículas tienen energías cinéticas mayores que el valor medio $\frac{3}{2}kT$, y algunas pueden, por efecto túnel, atravesar la barrera de Coulomb, una temperatura T correspondiente a $kT \approx 10$ keV es adecuada para conseguir un número razonable de reacciones de fusión si la densidad de partículas es suficientemente alta. La temperatura correspondiente a $kT \approx 10$ keV es del orden de 10^8 K. Tales temperaturas tienen lugar en el interior de las estrellas, en donde estas reacciones son corrientes. A estas temperaturas, un gas está formado por iones positivos y electrones y se denomina **plasma**. Uno de los problemas que surgen al intentar producir reacciones de fusión controladas es la del confinamiento del plasma un tiempo suficiente para que estas reacciones tengan lugar. En el interior del Sol el plasma está confinado por el enorme campo gravitatorio del mismo. En un laboratorio terrestre el confinamiento del plasma es un problema difícil.

La energía requerida para elevar la temperatura de un plasma es proporcional a la densidad de sus iones, n, mientras que el número de colisiones por unidad de tiempo es proporcional a n^2, el cuadrado de la densidad. Si τ es el tiempo de confinamiento, la producción de energía es proporcional a $n^2\tau$. Si la energía de salida debe exceder a la de entrada, se ha de cumplir

$$C_1 n^2 \tau > C_2 n$$

en donde C_1 y C_2 son constantes. En 1957 el físico británico J. D. Lawson evaluó estas constantes a partir de los rendimientos de diversos reactores hipotéticos de fusión y dedujo la siguiente relación entre densidad y tiempo de confinamiento llamada **criterio de Lawson**:

$$n\tau > 10^{20}\ \text{s·partículas/m}^3 \tag{40.22}$$

Criterio de Lawson

Si el criterio de Lawson se cumple y la energía térmica de los iones es suficientemente grande ($kT \sim 10$ keV), la energía liberada por un reactor de fusión será justamente igual a la energía consumida; el reactor está en el punto de equilibrio. Para que el reactor sea práctico debe liberarse mucha más energía.

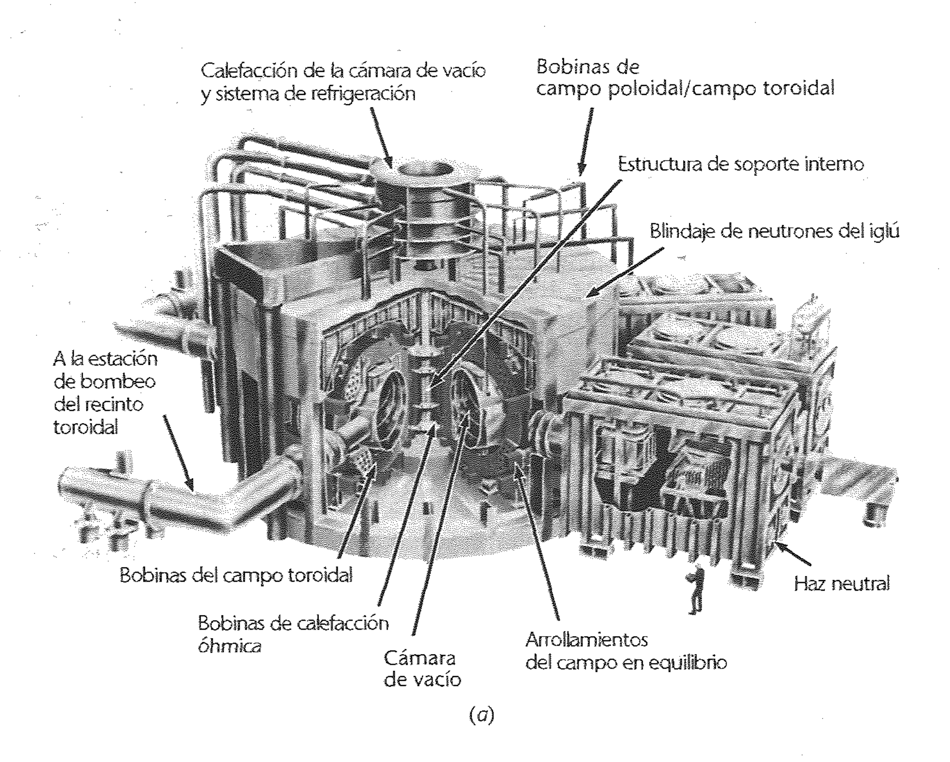
Actualmente se siguen dos esquemas distintos de investigación para alcanzar el criterio de Lawson. Uno de ellos, el **confinamiento magnético**, utiliza un campo magnético para confinar el plasma (véase sección 28.2). En el dispositivo más corriente, desarrollado por vez primera en la URSS, llamado *tokamak*, el plasma está confinado en un gran toroidal debido a los arrollamientos del mismo y el propio campo debido a la corriente de plasma que circula en su interior. El punto "en el punto de equilibrio" se ha alcanzado recientemente con el confinamiento magnético, pero estamos todavía muy lejos de la construcción de un reactor de fusión práctico.

En un segundo esquema, llamado **confinamiento inercial**, una masa comprimida de deuterio y tritio sólidos en forma de microesferas se bombardea en todas direcciones por haces de láser en impulsos cortos con energías del orden de 10^4 J en intervalos de 10^{-8} s. (También se han utilizado haces intensos de iones.) Los estudios de simulación por ordenador indican que la microesfera debería comprimirse hasta unas 10^4 veces su densidad normal y su temperatura debía alcanzar valores superiores a 10^8 K. Estas condiciones producirían aproximadamente unos 10^6 J de energía de fusión en 10^{-11} s, un tiempo tan breve que el confinamiento se alcanza sólo por inercia.

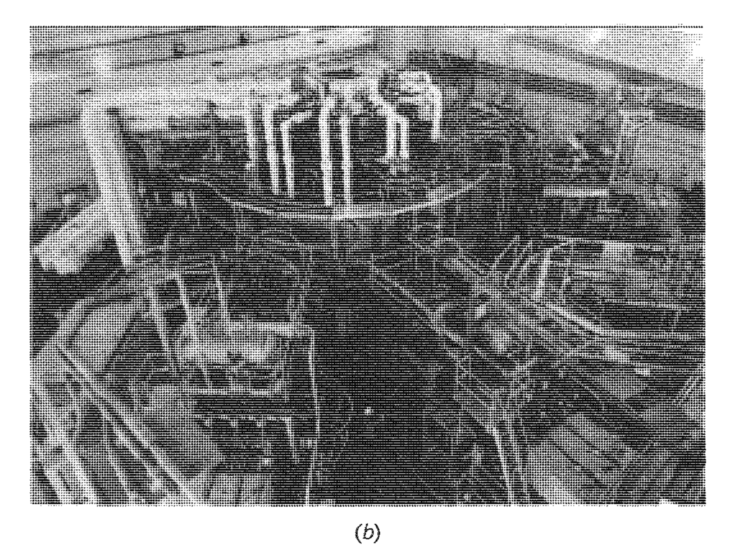
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

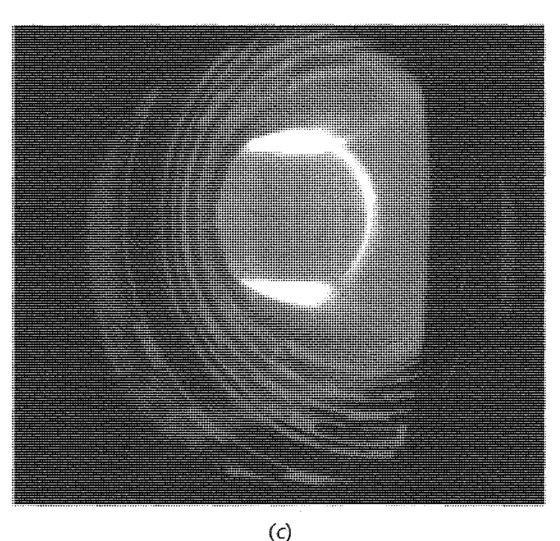
Los resultados precarios obtenidos en el método de fusión por confinamiento magnético y los múltiples problemas prácticos que plantea la construcción de un reactor de fusión, todavía sin resolver, nos llevan a la conclusión de que esta fuente de energía no estará disponible de un modo práctico antes de varias décadas. Sin embargo, la fusión sigue siendo la gran promesa energética del futuro.



(*a*)



(*b*)

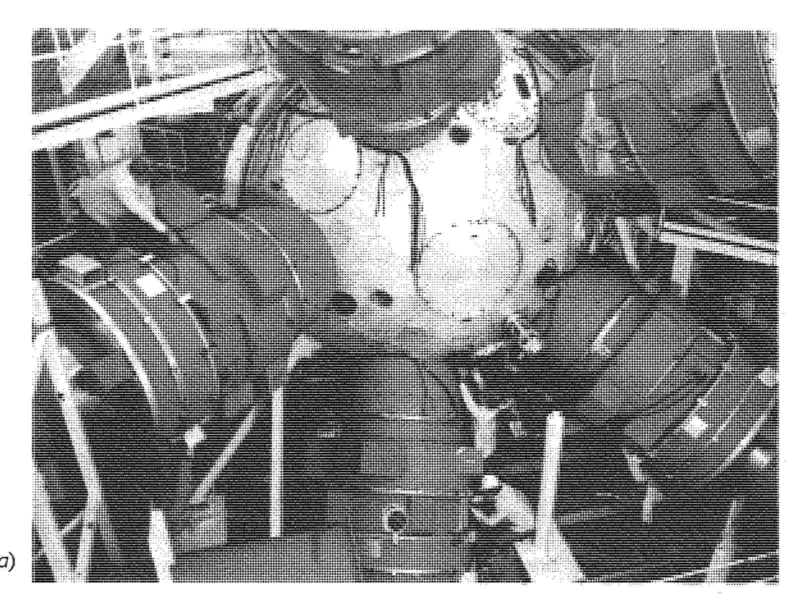


(*c*)

(*a*) Esquema de un reactor piloto de fusión Tokamak. Los arrollamientos toroidales que rodean la cámara de vacío en forma de rosquilla están diseñados para conducir corrientes de pulsos de 3 s, separados por intervalos de espera de 5 min. El pico de los pulsos a 73 000 A produce un campo magnético de 5,2 T. Este campo es el medio principal de confinamiento del plasma deuterio-tritio que circula dentro de la cámara de vacío. La corriente de los pulsos se suministra por conversión de la energía de rotación de dos volantes de 600 ton. Las series de arrollamientos poloidales, perpendiculares a las bobinas toroidales, transportan una corriente a través del plasma confinado que se calienta por efecto óhmico. Los campos poloidales adicionales ayudan a estabilizar el plasma confinado. Entre cuatro y seis sistemas de inyección de haz neutral (sólo se muestra uno en el esquema) se utilizan para inyectar átomos de deuterio de alta energía en el plasma deuterio-tritio elevando la temperatura por encima de lo que puede obtenerse óhmicamente hasta alcanzar el punto de fusión. (*b*) El tokamak en la realidad. El diámetro de la cámara de vacío es de 7,7 m (véase también fotografía de la página 953). (*c*) Un plasma de 800 kA que dura 1,6 s, cuando se descarga dentro de la cámara de vacío.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(a) 

(b) 

(a) Cámara del blanco Nova, formada por una esfera de aluminio de 5 m aproximadamente de diámetro, en cuyo interior convergen 10 haces del láser más poderoso del mundo sobre una microesfera de 0,5 mm de diámetro que contiene hidrógeno en su interior. La reacción de fusión resultante se manifiesta como una pequeña estrella (b) que dura 10^{-10} s con la liberación de 10^{13} neutrones.

Resumen

ECUACIONES RELEVANTES Y OBSERVACIONES	TEMA
Los núcleos poseen N neutrones, Z protones y un número de masa $A = N + Z$. En los núcleos ligeros N y Z son aproximadamente iguales, mientras que en los núcleos pesados, N es mayor que Z.	**1. Propiedades nucleares**
Los isótopos consisten en dos o más núcleos que poseen el mismo valor de Z, pero valores distintos de N y A.	Isótopos
La mayor parte de los núcleos son aproximadamente de forma esférica y poseen un volumen que es proporcional a A. Como la masa es proporcional a A, la densidad nuclear es independiente de A.	Tamaño y forma
$R = R_0 A^{1/3} \approx (1{,}5\ \text{fm})A^{1/3}$ **(40.1)**	Radio
La masa de un núcleo estable es menor que la suma de las masas de sus nucleones. La diferencia de masa multiplicada por c^2 es igual a la energía de enlace del núcleo. Esta energía es aproximadamente proporcional al número de masa A.	Masa y energía de enlace
Los núcleos inestables son radiactivos y se desintegran por emisión de partículas α (núcleos de ^{4}He), partículas β (electrones o positrones), o rayos γ (fotones). Toda la radiactividad es de naturaleza estadística y sigue una ley de desintegración exponencial:	**2. Radiactividad**
$N = N_0 e^{-\lambda t}$ **(40.6)**	Ley de desintegración
$R = \lambda N = R_0 e^{-\lambda t}$ **(40.7)**	Velocidad de desintegración
$\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ **(40.9)**	Vida media
$t_{1/2} = \dfrac{0{,}693}{\lambda}$ **(40.11)**	Período de semidesintegración
Los períodos de semidesintegración en la emisión α varían entre una fracción de segundo a millones de años. En la emisión β varían entre unas horas y unos días y en la emisión γ son usualmente menores que un microsegundo.	

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Curie	El número de desintegraciones por segundo de 1 g de radio es el curie, equivalente a $3,7 \times 10^{10}$ desintegraciones/s = $3,7 \times 10^{10}$ Bq.
3. Reacciones nucleares	
Valor Q	El valor Q es igual a c^2 multiplicado por la diferencia entre la masa de las partículas incidentes y la masa total de las partículas resultantes. Si el incremento neto de masa es Δm, el valor Q es $$Q = -(\Delta m)c^2 \quad (40.19)$$
Reacción exotérmica	La masa decrece, Q es positivo y mide la energía liberada.
Reacción endotérmica	La masa crece, Q es negativo. Entonces $\|Q\|$ es la energía umbral de la relación en el sistema de coordenadas del centro de masas.
4. Fisión	La fisión tiene lugar cuando algunos elementos pesados como ^{235}U o ^{239}Pu, capturan un neutrón y se escinden en dos núcleos de masa media. Los dos núcleos se paran por repulsión electrostática liberando una gran cantidad de energía. Una reacción en cadena es posible porque el proceso se emiten varios neutrones. Esta reacción se automantiene en un reactor si, por término medio, uno de los neutrones emitidos reduce su velocidad por dispersión en un moderador y se captura entonces por otro núcleo fisionable. Los núcleos muy pesados ($Z > 92$) pueden experimentar espontáneamente la fisión.
5. Fusión	Cuando dos núcleos ligeros, tales como ^{2}H y ^{3}H se fusionan entre sí, se libera una gran cantidad de energía. La fusión tiene lugar espontáneamente en el interior del Sol y otras estrellas, en donde la temperatura es suficientemente grande (unos 10^8 K) para que su energía cinética aproxime los iones de hidrógeno entre sí hasta su fusión. Aunque la fusión controlada es una gran esperanza como fuente futura de energía, las dificultades de su puesta en práctica han impedido hasta hoy su desarrollo.
Criterio de Lawson	Es el producto mínimo de la densidad de partículas n y el tiempo de confinamiento τ para conseguir en un reactor de fusión más energía de la que se consume. Viene expresado por la condición $n\tau > 10^{20}$ s partículas/m^3.

Guía de resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Propiedades nucleares	
Determinar la energía de enlace de un nucleón en un núcleo	Calcular la diferencia de masa entre el núcleo final más el nucleón y el núcleo original y multiplicar Δm por c^2. **Ejemplo 40.1**
2. Radiactividad	
Determinar la velocidad de recuento de una fuente radiactiva en tiempos distintos.	La velocidad decrece en un factor 2 en cada período de semidesintegración. **Ejemplos 40.2, 40.3**
Determinar el número de núcleos que se desintegran durante un determinado intervalo de tiempo.	Determinar el número de núcleos al comienzo y al final del intervalo y restar. **Ejemplo 40.3**
Determinar la edad de una muestra orgánica.	Comparar la velocidad de desintegración del carbono en la muestra con la velocidad de desintegración original de 15 desintegraciones por gramo y por minuto. Calcular el número de períodos a partir de $R = (0,5)^n R_0$ y determinar t a partir de $t_{1/2} = 5730$ años. **Ejemplo 40.4**
3. Calcular el valor Q de una reacción	Calcular la diferencia de masa total las partículas incidentes y resultantes y multiplicar por c^2. **Ejemplo 40.5**

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

4. **Fisión nuclear**

Utilizar 200 MeV por núcleo y determinar el número de núcleos de la muestra. **Ejemplo 40.6**

Calcular la energía liberada en la fisión conocida la disminución de masa.

Multiplicar el tiempo de generación por el número de generaciones. Si hay neutrones retardados, es necesario calcular el tiempo de generación medio. **Ejemplos 40.7, 40.8**

Determinar el tiempo necesario para que la velocidad de reacción de un reactor se duplique, conocida la constante de reproducción.

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Propiedades de los núcleos

• **1** Escribir los símbolos de otros dos isótopos de
(a) ^{14}N, **(b)** ^{56}Fe y **(c)** ^{118}Sn.

• **2** Calcular la energía de enlace y su valor por nucleón a partir de las masas dadas en la tabla 40.1 para
(a) ^{12}C, **(b)** ^{56}Fe y **(c)** ^{238}U.

• **3** Repetir el problema 2 para
(a) ^{6}Li, **(b)** ^{39}K y **(c)** ^{208}Pb.

• **4** Utilizar la ecuación 40.1 para calcular los radios de los siguientes núcleos:
(a) ^{16}O, **(b)** ^{56}Fe y **(c)** ^{197}Au.

• **5**
(a) Sabiendo que la masa de un núcleo de número de masa A vale aproximadamente $m = CA$, en donde C es una constante, determinar una expresión para la densidad nuclear en función de C y la constante R_0 en la ecuación 40.1.
(b) Calcular el valor de esta densidad nuclear en gramos por centímetro cúbico utilizando el hecho de que C tiene el valor aproximado de 1 g por número de Avogadro de nucleones.

• **6** Deducir la ecuación 40.2; es decir, demostrar que la energía en reposo de una unidad de masa unificada es 931,5 MeV.

• **7** Utilizar la ecuación 40.1 para el radio de un núcleo esférico, así como la aproximación de que la masa de un núcleo de número de masa A es A u para calcular la densidad de la materia nuclear en gramos por centímetro cúbico.

•• **8** La energía potencial de dos cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia r es $U = kq_1q_2/r$, en donde k es la constante de Coulomb.
(a) Utilizar la ecuación 40.1 para calcular los radios de ^{2}H y ^{3}H.
(b) Determinar la energía potencial electrostática cuando estos núcleos están justamente tocándose, es decir, cuando sus centros están separados por la suma de sus radios.

•• **9**
(a) Calcular los radios de $^{141}_{56}$Ba y $^{92}_{36}$Kr a partir de la ecuación 40.
(b) Suponer que después de la fisión del ^{235}U en ^{141}Ba y ^{92}Kr, los dos núcleos se separan momentáneamente una distancia r igual a la suma de los radios determinados en (a) y calcular la energía potencial electrostática para los dos núcleos a esta separación. (Véase problema 8.) Comparar el resultado obtenido con la energía de fisión medida, 175 MeV.

Radiactividad

• **10** ¿Por qué la serie radiactiva $A = 4n + 1$ no se encuentra en la naturaleza?

• **11** Frecuentemente una desintegración α viene seguida de una emisión β. Cuando esto ocurre, siempre se trata de una emisión β^- y no β^+. ¿Por qué?

• **12** El período de semidesintegración del ^{14}C es mucho menor que la edad de la Tierra; sin embargo, el ^{14}C se encuentra en la naturaleza. ¿Por qué?

• **13** ¿Qué efecto produciría una variación a largo plazo de la actividad de los rayos cósmicos en la exactitud del ^{14}C como método para determinar la edad?

• **14** Homero entra en la cámara de los visitantes y el pitido de su contador Geiger se dispara. Apaga el pitido saca el contador de su bolsillo y lo acerca al único objeto nuevo que hay en la sala: una esfera que ha de regalarse a los visitantes cartesianos. Aprieta el botón "monitor" de su contador y comprueba que la esfera es una fuente radiactiva con una velocidad de recuento de 4000 cuentas/s. Al cabo de 10 min, la velocidad de recuento ha disminuido a 1000 cuentas/s. El período de semidesintegración de la fuente aparece en la pantalla de su contador.
(a) ¿Cuánto vale este período?
(b) ¿Cuál sería la velocidad de recuento 20 min después de apretar el botón monitor?

• **15** Una fuente radiactiva da lugar a 2000 cuentas/s en el tiempo $t = 0$. Su período de semidesintegración es 2 min.
(a) ¿Cuál es la velocidad de recuento al cabo de 4 min?
(b) ¿Después de 6 min?
(c) ¿Después de 8 min?

• **16** La velocidad de recuento correspondiente a una fuente radiactiva es de 8000 cuentas/s en el tiempo $t = 0$ y 10 minutos después es de 1000 cuentas/s.
(a) ¿Cuál es su período de semidesintegración?
(b) ¿Cuál es su constante radiactiva?
(c) ¿Cuál es su velocidad de recuento al cabo de 20 min?

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **17** El período de semidesintegración del radio es 1620 años. Calcular el número de desintegraciones por segundo de 1 g de radio y demostrar que la velocidad de desintegración es aproximadamente 1 Ci.

• **18** Una lámina de plata radiactiva ($t_{1/2}$ = 2,4 min) se sitúa en las proximidades de un contador Geiger y se detectan 1000 cuentas/s en el instante t = 0.

(a) ¿Cuál es la velocidad de recuento cuando t = 2,4 min y t = 4,8 min?
(b) Si la eficiencia del recuento es del 20%, ¿cuántos núcleos radiactivos existen en la lámina en el instante t = 0? ¿Y en el instante t = 2,4 min?
(c) ¿En qué momento la velocidad de recuento es de unas 30 cuentas/s?

• **19** Utilizar la tabla 40.1 para calcular la energía en MeV correspondiente a la emisión α de
(a) ^{226}Ra y **(b)** ^{242}Pu.

• **20** Supongamos que hace 2000 millones de años el 10% de la masa de la Tierra era ^{14}C. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de la masa de la Tierra sería hoy ^{14}C, si despreciamos la formación de ^{14}C en la atmósfera?

• **21** En el escenario del delito (ala oeste del museo), Ángela encuentra unas astillas de madera y las guarda en su bolso para analizarlas posteriormente. Supuestamente pertenecen a una antigua mascarilla de madera que, según manifiesta el guardián, él mismo lanzó contra el ladrón. Más tarde, en el laboratorio, ella comprueba la edad de las astillas, usando una muestra que contiene 10 g de carbono y obtiene una velocidad de desintegración del ^{14}C de 100 cuentas/min. ¿Cuál es la edad de las astillas?

• **22** Parece ser que el ladrón del problema 21 buscaba una talla valiosa realizada sobre un hueso de 10 000 años de edad. El guardián afirma que él consiguió echar al ladrón, pero Ángela sospecha que el guardián es un cómplice y que el hueso expuesto en la vitrina es una falsificación. Si una muestra del hueso contuviera 15 g de carbono y se analizase, ¿cuál sería la velocidad de desintegración del ^{14}C si el hueso tiene una edad de 10 000 años?

• **23** A través de un amigo que trabaja en la seguridad del museo, Ángela consigue una muestra de 175 g de carbono. La velocidad de desintegración del ^{14}C resultó ser 8,1 Bq.

(a) ¿Cuál es su edad?
(b) ¿Corresponde a la talla descrita en el problema 22?

• **24** Una muestra de un isótopo radiactivo, inmediatamente después de ser extraída del reactor donde se formó, posee una actividad de 115,0 Bq. Su actividad 2h 15 min después, resulta ser 85,2 Bq.

(a) Calcular la constante radiactiva y el período de semidesintegración de la muestra.
(b) ¿Cuántos núcleos radiactivos existían inicialmente en la muestra?

•• **25** Comprobar que la actividad de 1 g de carbono natural debida a la emisión β del ^{14}C es de 15 desintegraciones/min = 0,25 Bq.

•• **26** Las medidas de actividad de una muestra radiactiva han dado los siguientes resultados. Representar la actividad en función del tiempo, utilizando papel semilogarítmico, y determinar la constante radiactiva y el período de semidesintegración del radioisótopo.

Tiempo, min	Actividad	Tiempo, min	Actividad
0	4287	20	880
5	2800	30	412
10	1960	40	188
15	1326	60	42

•• **27**

(a) Demostrar que si la velocidad de desintegración es R_0 en el tiempo t = 0 y R_1 un cierto tiempo después, la constante radiactiva viene dada por $\lambda = t_1^{-1}\ \ln(R_0 - R_1)$ y el período $t_{1/2} = 0{,}693\ t_1/\ln(R_0/R_1)$.
(b) Utilizar estos resultados para determinar la constante radiactiva y el período si la velocidad de desintegración es 1200 Bq para t = 0 y 800 Bq para t_1 = 60 s.

•• **28** Se supone que un ataúd de madera tiene 18 000 años. ¿Cuánto carbono tendríamos que tomar de este objeto para obtener una velocidad de recuento no inferior a 5 cuentas/min?

•• **29** Una muestra de 1,00 mg de sustancia de masa atómica 59,934 u emite partículas β con una actividad de 1,131 Ci. Determinar la constante radiactiva de esta sustancia en s^{-1} y su período de semidesintegración en años.

•• **30** La velocidad de recuento de una fuente radiactiva se mide a intervalos de un minuto. Los resultados en cuentas por segundo son 1000, 820, 673, 522, 453, 371, 305, 250. Representar la velocidad de recuento en función del tiempo en papel semilogarítmico y utilizar el gráfico para determinar el período de semidesintegración de la fuente.

•• **31** La actividad inicial de una muestra radiactiva es de 115,0 desintegraciones/min. Al cabo de 4 d 5 h su actividad se ha reducido a 73,5 desintegraciones/min.

(a) Calcular el período de semidesintegración de la muestra.
(b) ¿Cuánto tiempo (desde el momento inicial) ha de transcurrir para que la muestra alcance un nivel de actividad de 10,0 desintegraciones/min?

•• **32** El isótopo del rubidio ^{87}Rb es un emisor β con un período de semidesintegración de $4{,}9 \times 10^{10}$ años que se desintegra en ^{87}Sr. Se utiliza para determinar la edad de rocas y fósiles. Unas rocas con fósiles de animales primitivos presentan una relación de ^{87}Sr a ^{87}Rb de 0,0100. Suponiendo que no existía ^{87}Sr cuando se formaron las rocas, calcular la edad de estos fósiles.

••• **33** Si existen N_0 núcleos radiactivos en el tiempo t = 0, el número que se desintegra en cierto intervalo dt en el tiempo t es $-dN = \lambda N_0 e^{-\lambda t}\,dt$. Si multiplicamos este número por el tiempo de vida t de estos núcleos, sumamos los productos para todos los valores posibles desde t = 0 a $t = \infty$ y dividimos el resultado por el número total de núcleos, obtenemos la vida media, τ:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t|dN| = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}$$

Demostrar que $\tau = 1/\lambda$.

Reacciones nucleares

• **34** Usando la tabla 40.1, determinar los valores Q de las siguientes reacciones:

(a) ^{1}H + ^{3}H → ^{3}He + n + Q y
(b) ^{2}H + ^{2}H → ^{3}He + n + Q.

• **35** Usando la tabla 40.1, determinar los valores Q de las siguientes reacciones:

(a) ^{2}H + ^{2}H → ^{3}H + ^{1}H + Q,
(b) ^{2}H + ^{3}He → ^{4}He + ^{1}H + Q y
(c) ^{6}Li + n → ^{3}H + ^{4}He + Q.

•• **36**

(a) Utilizar las masas atómicas m = 14,00324 u para el $^{14}_{6}$C y m = 14,00307 u para el $^{14}_{7}$N y calcular el valor Q (en MeV) para la emisión β

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

(b) Explicar por qué no es necesario sumar la masa de β^- a la del $^{14}_{7}$N es este cálculo.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

•• 37
(a) Utilizar las masas atómicas m = 13,00574 u para el $^{13}_{7}N$ y m = 13,003354 u para el $^{13}_{6}C$ y calcular el valor Q (en MeV) para la emisión β

$$^{13}_{7}N \rightarrow ^{13}_{6}C + \beta^{+} + \nu_e$$

(b) Explicar por qué es necesario sumar dos masas electrónicas a la masa de $^{13}_{6}C$ para el cálculo del valor Q de esta reacción.

Fisión y fusión

• 38 ¿Por qué no existe un elemento de Z = 130?

• 39 ¿Por qué el reactor de fisión nuclear ordinario necesita un moderador?

• 40 Explicar por qué el agua es más eficaz que el plomo para disminuir la velocidad de los neutrones rápidos.

• 41 ¿Por qué los neutrones producidos en una fisión no producen directamente otra fisión?

• 42 ¿Qué ventaja tiene un reactor reproductor sobre un reactor ordinario? ¿Qué desventajas tiene?

• 43 Suponiendo una energía media de 200 MeV por fisión, calcular el número de fisiones por segundo necesario para el funcionamiento de un reactor de 500 MW.

• 44 Si el factor de reproducción de un reactor es k = 1,1, determinar el número de generaciones necesarias para que la potencia
(a) se duplique,
(b) se incremente en un factor 10 y
(c) se incremente en un factor 100.
Determinar el tiempo necesario en cada caso si
(d) no existen neutrones retardados, de modo que el tiempo entre generaciones es 1 ms, y
(e) existen neutrones retardados, de modo que el tiempo medio entre generaciones es de 100 ms.

• 45 Calcular la temperatura T para la cual kT = 10 keV, en donde k es la constante de Boltzmann.

•• 46 En 1989 unos investigadores anunciaron que habían obtenido la fusión nuclear en una célula electroquímica a la temperatura ambiente. Según ellos, se había generado una potencia de 4 W en la fusión del deuterio en el electrodo de paladio de su aparato. Si las dos reacciones más probables son

$$^{2}H + ^{2}H \rightarrow ^{3}He + n + 3{,}27\ \text{MeV}$$

y

$$^{2}H + ^{2}H \rightarrow ^{3}H + ^{1}H + 4{,}03\ \text{MeV}$$

y suponemos que cada una de ellas contribuye en un 50%, ¿cuántos neutrones por segundo deberían emitirse en la generación de 4 W de potencia?

•• 47 Un reactor de fusión que utiliza sólo deuterio como combustible funciona gracias a las dos reacciones del problema 46. El ^{3}H producido en la segunda reacción se fusiona inmediatamente con otro ^{2}H para producir

$$^{3}H + ^{2}H \rightarrow ^{4}He + n + 17{,}6\ \text{MeV}$$

La relación entre los átomos ^{2}H y ^{1}H en el hidrógeno natural es $1{,}5 \times 10^{-4}$. ¿Cuánta energía se produciría a partir de 4 l de agua si todos los núcleos de ^{2}H experimentasen la fusión?

••• 48 La reacción de fusión entre ^{2}H y ^{3}H es

$$^{3}H + ^{2}H \rightarrow ^{4}He + n + 17{,}6\ \text{MeV}$$

Utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento y el valor Q dado, determinar las energías finales del núcleo ^{4}He y del neutrón, suponiendo que la cantidad de movimiento inicial del sistema es cero.

••• 49 En el sol y otras estrellas la energía se genera por fusión. Uno de los ciclos de fusión, el ciclo protón-protón, consta de las siguientes reacciones:

$$^{1}H + ^{1}H \rightarrow ^{2}H + \beta^{+} + \nu_e$$

$$^{1}H + ^{2}H \rightarrow ^{3}He + \gamma$$

seguidas de

$$^{1}H + ^{3}He \rightarrow ^{4}He + \beta^{+} + \nu_e$$

(a) Demostrar que el efecto neto de estas reacciones es

$$4\,^{1}H \rightarrow ^{4}He + 2\beta^{+} + 2\nu_e + \gamma$$

(b) Demostrar que la energía en reposo liberada en este ciclo es 24,7 MeV (sin considerar la energía de 1,02 MeV liberada cuando cada positrón se encuentra con un electrón y los dos se aniquilan).
(c) El sol irradia energía con una potencia de aproximadamente 4×10^{26} W. suponiendo que esto es debido a la conversión de cuatro protones en helio, más rayos γ y neutrinos, lo cual libera 26,7 MeV, ¿cuál es el número de protones consumidos por segundo en el Sol? ¿Cuándo se extinguirá el Sol si continúa irradiando al ritmo actual? (Suponer que los protones constituyen aproximadamente la mitad de la masa total [2×10^{30} kg] del Sol).

Problemas generales

• 50 Verdadero o falso:
(a) El núcleo atómico contiene protones, neutrones y electrones.
(b) La masa del ^{2}H es menor que la masa de un protón más un neutrón.
(c) Al cabo de dos semiperíodos de semidesintegración, todos los núcleos radiactivos de una determinada muestra se han desintegrado.
(d) En un reactor reproductor, el combustible puede producirse con la misma rapidez con que se consume.

• 51 ¿Por qué las variaciones de presión o de temperatura, por grandes que sean, tienen poco efecto, o ninguno, sobre la radiactividad?

• 52 El isótopo estable del sodio es ^{23}Na. ¿Qué tipo de radiactividad deben experimentar
(a) el ^{22}Na y
(b) el ^{24}Na?

• 53 ¿Por qué la fusión ocurre espontáneamente en el Sol, pero no en la Tierra?

• 54
(a) Demostrar que ke^2 = 1,44 MeV · fm, en donde k es la constante de Coulomb y e es la carga del electrón.
(b) Demostrar que hc = 1240 MeV·fm.

• 55 La velocidad de recuento de una fuente radiactiva es 6400 cuentas/s. El período de semidesintegración de la fuente es 10 s. Representar la velocidad de recuento en función del tiempo para intervalos de 1 min. ¿Cuál es la constante radiactiva de esta fuente?

• 56 Determinar la energía necesaria para extraer un neutrón de
(a) ^{4}He y
(b) ^{7}Li.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

• **57** El isótopo ^{14}C se desintegra según la reacción $^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^- + \bar{\nu}_e$. La masa atómica del ^{14}N es 14,003074 u. Determinar la energía cinética máxima del electrón. (Despreciar la energía de retroceso del átomo de nitrógeno.)

• **58** Una estrella de neutrones es un ente de densidad nuclear. si nuestro Sol se colapsara hasta formar una estrella de neutrones, ¿cuál sería el radio de esta estrella?

• **59** El núcleo A tiene un período de semidesintegración que es el doble del correspondiente al núcleo B. En el tiempo $t = 0$, el número de núcleos de B en una muestra es el doble que el correspondiente a los núcleos A. Si el período de A es 1 h, ¿habrá un instante en que el número de núcleos A y B sean iguales? Si es así, ¿en qué instante ocurrirá?

• **60** Calcular los radios nucleares del ^{19}F, ^{145}La y ^{246}Cm.

• **61** La abundancia relativa del ^{40}K (masa molecular 40,0 g/mol) es $1,2 \times 10^{-4}$. El isótopo 40K es radiactivo con un período de semidesintegración de $1,3 \times 10^9$ años. El potasio es un elemento esencial de toda célula viva. En el cuerpo humano la masa del potasio constituye aproximadamente el 0,36% de la masa total. Determinar la actividad de esta fuente radiactiva en una estudiante de masa 60 kg.

•• **62** Una muestra de 0,05394 kg de ^{144}Nd (masa atómica 143,91 u) emite por término medio 2,36 partículas α cada segundo. Determinar la constante radiactiva en s^{-1} y el período de semidesintegración en años.

•• **63** El isótopo ^{24}Na es un emisor β con un período de semidesintegración de 15 h. Una solución salina que contiene este isótopo radiactivo con una actividad de 600 kBq se inyecta en la corriente sanguínea de un paciente. Diez horas después, la actividad de 1 mL de sangre de este paciente presenta una velocidad de recuento de 60 Bq. Determinar el volumen de sangre del paciente.

•• **64**

(a) Calcular la distancia de máxima aproximación de una partícula α de 8 MeV en una colisión frontal con un núcleo de ^{197}Au y con un núcleo de ^{10}B, despreciando el retroceso del núcleo blanco.

(b) Repetir el cálculo teniendo en cuenta dicho retroceso.

•• **65** En un pozo rectangular infinito y unidimensional de longitud $L = 3$ fm tenemos 12 nucleones.

(a) Suponiendo que la masa de un nucleón es 1 u, determinar la energía mínima del nucleón en el pozo. Expresar la respuesta en MeV.

¿Cuál es la energía del estado fundamental del sistema de 12 nucleones en el pozo si

(b) todos ellos son neutrones, de modo que sólo pueden haber 2 en cada estado y

(c) 6 de los nucleones son neutrones y 6 son protones, de modo que pueden existir 4 nucleones en cada estado? (Despreciar la energía de repulsión de Coulomb de los protones.)

•• **66** El núcleo de helio (o partícula α) es un sistema ligado muy compacto. Los núcleos con $N = Z = 2n$, en donde n es un número entero, tales como ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne y ^{24}Mg pueden considerarse como aglomerados de partículas α.

(a) Utilizar este módulo para estimar la energía de enlace de un par de partículas α a partir de las masas atómicas del ^4He y ^{16}O. Suponer que las cuatro partículas α del ^{16}O forman un tetraedro regular con una partícula α en cada vértice.

(b) Sobre la base de este modelo y utilizando el resultado obtenido en la parte (a), determinar la energía de enlace del ^{12}C y comparar el resultado con el obtenido a partir de la masa atómica del ^{12}C.

•• **67** En un acelerador se producen a ritmo constante R_p núcleos radiactivos de constante radiactiva λ. El número de núcleos radiactivos N obedece a la ecuación $dN/dt = R_p - \lambda N$.

(a) Si N es cero para $t = 0$, representar N en función de t para esta situación.

(b) El isótopo ^{62}Cu se produce a un ritmo de 100 por segundo situando cobre ordinario (^{63}Cu) en un haz de fotones de alta energía. La reacción es

$$\lambda + {}^{63}Cu \rightarrow {}^{62}Cu + n$$

El ^{62}Cu se desintegra por emisión β con un período de semidesintegración de 10 min. Después de un tiempo suficientemente largo, de modo que $dN/dt \approx 0$, ¿cuántos núcleos de ^{62}Cu existen allí?

•• **68** La energía total consumida en los Estados Unidos en un año es aproximadamente $7,0 \times 10^{19}$ J. ¿Cuántos kilogramos de ^{235}U se necesitarían para proporcionar esta cantidad de energía si suponemos que por cada átomo de uranio fisionable se liberan 200 MeV de energía, que todos los átomos de uranio experimentan la fisión y que todos los mecanismos de conversión de la energía utilizados funcionan al 100%.

•• **69**

(a) Determinar la longitud de una partícula en el estado fundamental de un pozo rectangular infinito y unidimensional de longitud $L = 2$ fm.

(b) Determinar la cantidad de movimiento en unidades de MeV/c para una partícula de esta longitud de onda.

(c) Demostrar que la energía total de un electrón con esta longitud de onda es aproximadamente $E \approx pc$.

(d) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón en el estado fundamental de este pozo? Este cálculo demuestra que si un electrón se confinara en una región del espacio del tamaño de un núcleo, su energía cinética sería muy grande.

•• **70**

(a) ¿Cuántas desintegraciones α y β debe experimentar un núcleo de ^{222}Rn antes de que se convierta en un núcleo de ^{210}Pb?

(b) Calcular la energía total liberada en la desintegración de un núcleo de ^{222}Rn en ^{210}Pb. (La masa del ^{210}Pb es 209,984187 u.)

••• **71** Suponer que un neutrón se desintegra en un protón más un electrón sin emisión de un neutrino. La energía compartida por el protón y el electrón es entonces 0,782 MeV. En el sistema de referencia en reposo del neutrón, la cantidad de movimiento total es cero, de modo que esta magnitud referida al protón debe ser igual y opuesta a la del electrón. Esto determina las energías relativas de las dos partículas, pero como el electrón es una partícula relativista, el cálculo exacto de estas energías relativas es algo difícil.

(a) Suponer que la energía cinética del electrón es 0,782 MeV y calcular la cantidad de movimiento p del electrón en unidades de MeV/c. (*Sugerencia*: Utilizar la ecuación 39.28.)

(b) A partir del resultado de (a), calcular la energía cinética $p^2/2\,m_p$ del protón.

(c) Como la energía total del electrón más protón es 0,782 MeV, el cálculo en (b) ofrece una corrección a la hipótesis de que la energía del electrón es 0,782 MeV. ¿Qué porcentaje de 0,782 MeV supone esta corrección?

••• **72** Considerar un neutrón de masa m que se mueve con velocidad v_L y realiza una colisión frontal elástica con un núcleo de masa M que está en reposo en el sistema de referencia del laboratorio.

(a) Demostrar que la velocidad del centro de masas en el sistema del laboratorio es $V = mv_L/(m + M)$.

(b) ¿Cuál es la velocidad del núcleo en el sistema de referencia del centro de masas antes de la colisión? ¿Y después de la colisión?

(c) ¿Cuál es la velocidad del núcleo en el sistema de laboratorio después de la colisión?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

(d) Demostrar que la energía del núcleo después de la colisión en el sistema de laboratorio es

$$\frac{1}{2}M(2V)^2 = \frac{4mM}{(m+M)^2}\left(\frac{1}{2}mv_L^2\right)$$

(e) Demostrar que la fracción de energía perdida por el neutrón en esta colisión elástica es

$$\frac{-\Delta E}{E} = \frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{4(m/M)}{(1+m/M)^2} \tag{40.23}$$

••• 73

(a) Utilizar la ecuación 40.23 del problema 72 para demostrar que después de N colisiones frontales de un neutrón con los núcleos de carbono en reposo, la energía del neutrón es aproximadamente $(0{,}714)^N E_0$, en donde E_0 es la energía original.
(b) ¿Cuántas colisiones frontales se requieren para reducir la energía del neutrón de 2 MeV a 0,02 eV, suponiendo que los núcleos de carbono están en reposo?

••• 74 Por término medio, un neutrón pierde el 63% de su energía en una colisión con un átomo de hidrógeno y el 11% de su energía en una colisión con un átomo de carbono. Calcular el número de colisiones necesarias para reducir la energía de un neutrón de 2 MeV a 0,02 eV, si el neutrón choca con
(a) átomos de hidrógeno y
(b) átomos de carbono. (Véase problema 73.)

••• 75 Frecuentemente, el elemento "hijo" de un "padre" radiactivo es también radiactivo. Supongamos que el "padre" A posee una constante radiactiva λ_A, mientras que la del hijo B es λ_B. El número de núcleos de B vienen dados por la solución de la ecuación diferencial

$$dN_B/dt = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B$$

(a) Justificar esta ecuación diferencial.
(b) Demostrar que la solución de esta ecuación es

$$N_B(t) = \frac{N_{A0}\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$

en donde N_{A0} es el número de núcleos presentes en $t = 0$ cuando no hay núcleos de B.
(c) Demostrar que $N_B(t) > 0$ si $\lambda_A > \lambda_B$ o $\lambda_B > \lambda_A$.
(d) Construir un gráfico de $N_A(t)$ y $N_B(t)$ en función del tiempo si $\tau_B = 3\,\tau_A$.

••• 76 Supongamos que el isótopo A se desintegra en el isótopo B con una constante radiactiva λ_A, y el isótopo B a su vez se desintegra con una constante radiactiva λ_B. Consideremos una muestra que en $t = 0$ contiene sólo el isótopo A. Deducir una expresión para el tiempo en el cual el número de núcleos del isótopo B sea un máximo. (Véase problema 75.)

••• 77 Un ejemplo de la situación expuesta en el problema 75 es el isótopo radiactivo ^{229}Th, un emisor α con un período de semidesintegración de 7300 años. Su "hijo", ^{225}Ra, es un emisor β con un período de 14,8 d. En este ejemplo, como en muchos otros, el período del núcleo "padre" es mucho mayor que el del hijo. Utilizando la expresión dada en el problema 75(b), demostrar que, partiendo de una muestra de ^{229}Th puro, que contiene N_{A0} núcleos, el número N_B de núcleos ^{225}Ra, al cabo de varios años, será una constante dada por

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A$$

Se dice entonces que el número de núcleos "hijo" se encuentran en "equilibrio secular".

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
www.elsolucionario.net

MONUMENTO HISTORICO NACIONAL
www.elsolucionario.net
TEL./FAX: (03442) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3264BTD - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

CAPÍTULO 41

Las partículas elementales y el origen del universo

Trazas producidas en una cámara de burbuja por un protón incidente de alta energía (color amarillo) que penetra por la izquierda y choca con un protón en reposo. La pequeña espiral de color verde es un electrón extraído de un átomo y se curva hacia la izquierda por la acción de un campo magnético externo en la cámara. El choque produce 7 partículas negativas (π^-) (azul); una partícula neutra Λ^0 que no deja rastro alguno; y 9 partículas positivas (rojo) que incluyen siete π^+, un K^+, y un protón. La partícula Λ^0 sigue la dirección original del protón incidente antes de desintegrarse en un protón (amarillo) y un π^- (púrpura).

www.elsolucionario.net

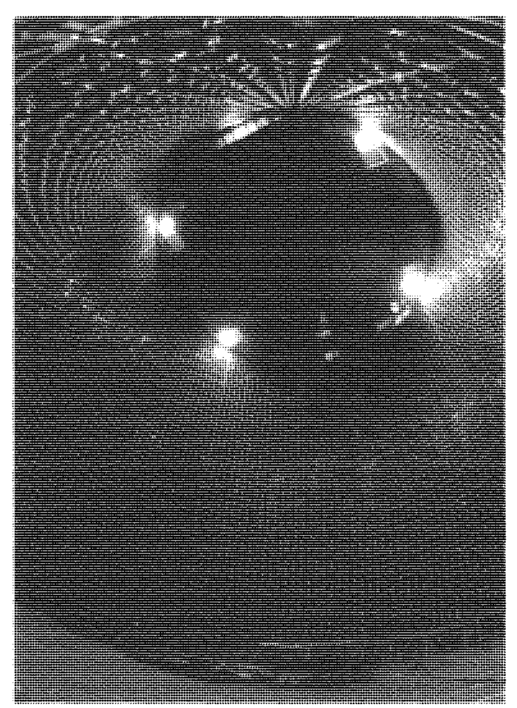
En la teoría atómica de la materia de Dalton (1808), el átomo se consideraba como el constituyente de la materia más pequeño e indivisible, es decir, una partícula elemental. Después, con el descubrimiento del electrón por Thomson (1897), la teoría de Bohr del átomo nuclear (1913), y el descubrimiento del neutrón (1932), resultó evidente que los átomos e incluso los núcleos tenían una estructura interna considerable. Durante cierto tiempo se creyó que existían sólo cuatro partículas "elementales": protón, neutrón, electrón y fotón. Sin embargo, el positrón o antielectrón se descubría en 1932 y poco después se predecían y descubrían el muón, el pión y otras muchas partículas.

Desde los años 1950 se han invertido enormes cantidades de dinero en la construcción de aceleradores de partículas de energías cada vez mayores con el fin de obtener las partículas previstas por diversas teorías. Así se obtuvieron varios centenares de partículas que durante algún tiempo fueron consideradas como elementales y todavía hoy los equipos de investigación de laboratorios dotados de aceleradores gigantescos en todo el mundo siguen buscando y determinando nuevas partículas. Algunas de ellas poseen vidas tan cortas (del orden de 10^{-23} s) que sólo pueden detectarse indirectamente. Muchas se observan sólo en reacciones nucleares con aceleradores de alta energía. Además de las propiedades usuales, masa, carga y espín, se han determinado en estas partículas nuevas propiedades que han recibido nombres caprichosos, tales como extrañeza, encanto, color, cima y fondo.

En este capítulo describiremos en primer lugar las distintas formas de clasificar la multitud de partículas que se han localizado. A continuación se expone la teoría más aceptada de las partículas elementales, llamada *modelo estándar*, en la cual toda la materia de la naturaleza —desde las partículas exóticas producidas en los laboratorios dotados de grandes aceleradores hasta los granos ordinarios de arena— se considera formada por sólo dos familias de partículas elementales, los leptones y los quarks. En la última sección utilizaremos este conocimiento de las partículas elementales para abordar la teoría del big-bang del origen del universo.

 www.elsolucionario.net

41.1 ■ Hadrones y leptones



El detector Super-Kamiokande, construido en el Japón en 1996 para un experimento conjunto japonés-estadounidense, consiste esencialmente en un tanque de agua del tamaño de una gran catedral instalado en una mina profunda de zinc dentro de una montaña. Al atravesar el tanque, un neutrino puede chocar con un átomo produciendo una luz azulada que se registra mediante una red de detectores. Esta es la imagen de una pared y cubierta del detector con unos 9000 fotomultiplicadores para registrar el paso de los neutrinos. Los resultados experimentales registrados en 1998 indican que la masa del neutrino no puede ser cero.

Todas las distintas fuerzas observadas en la naturaleza, desde el rozamiento ordinario hasta las tremendas fuerzas implicadas en las explosiones de las supernovas, pueden entenderse en función de cuatro interacciones básicas: (1) la interacción nuclear fuerte (llamada también interacción hadrónica, (2) la interacción electromagnética, (3) la interacción nuclear débil y (4) la interacción gravitatoria. Las cuatro interacciones básicas proporcionan una estructura conveniente para la clasificación de las partículas. Algunas partículas participan en las cuatro interacciones, pero otras sólo participan en algunas de ellas. Por ejemplo, todas las partículas son influidas por la gravedad, la más débil de las interacciones. En cambio, sólo las partículas que poseen carga eléctrica participan en la interacción electromagnética.

Las partículas que interaccionan por medio de la fuerza nuclear fuerte se denominan **hadrones**. Hay dos tipos de hadrones: los **bariones** de espín $\frac{1}{2}$ (o $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc.) y los **mesones**, de espín cero o entero. Los bariones, que incluyen los nucleones, son las partículas elementales más masivas. Los mesones tienen masas intermedias entre la masa del electrón y la masa del protón. Las partículas que se desintegran por el camino de la interacción fuerte poseen vidas medias muy cortas, del orden de 10^{-23} s, que es aproximadamente el tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia igual al diámetro de un núcleo. En cambio, las partículas que se desintegran por vía de la interacción débil tienen vidas medias muy superiores, del orden de 10^{-10} s. La tabla 41.1 relaciona algunas de las propiedades de aquellos hadrones que son estables frente a la desintegración por vía de la interacción fuerte.

Los hadrones son entidades algo complejas. Si utilizamos el término "partícula elemental" para indicar una partícula puntual sin estructura, es decir, no construida por otras entidades más elementales, los hadrones no cumplen la definición. Hoy se admite que todos los hadrones están constituidos por entidades más fundamentales llamadas *quarks*, que son realmente partículas elementales.

Las partículas que participan en la interacción débil, pero no en la interacción fuerte, se llaman **leptones**. Tales son los electrones, muones y neutrinos, todos ellos menos masivos que el hadrón más ligero. La palabra *leptón*, que significa "partícula ligera" fue elegida para reflejar la masa relativamente pequeña de estas partículas. Sin embargo, el *tau*, último leptón descubierto por Perl en 1975, posee una masa de 1784 MeV/c^2, casi doble que el protón (938 MeV/c^2), de tal modo que ahora tenemos un "leptón pesado". Por lo que sabemos hasta ahora, los leptones son partículas puntuales sin estructura y pueden considerarse como partículas realmente elementales en el sentido de que no están compuestas por otras partículas.

Existen seis leptones, cada uno de los cuales tiene una antipartícula. Ellos son el electrón, el muón y el tau, y un neutrino distinto asociado a cada una de estas partículas. (El neutrino asociado al tau no ha sido observado todavía experimentalmente.) Las masas de estas partículas son completamente distintas. La masa del electrón es 0,511 MeV/c^2, la del muón es 106 MeV/c^2 y la del tau, 1784 MeV/c^2. En principio se creyó que los neutrinos no tenían masa, pero ahora hay evidencias de que su masa, aunque muy pequeña, no es nula. Aunque no se conocen medidas concretas, se supone que la masa del neutrino es de unos pocos eV/c^2. Los experimentos diseñados para detectar neutrinos emitidos por el Sol han obtenido un número de estas partículas menor del esperado, lo cual podía explicarse si la masa del neutrino no fuera cero. Además, una masa incluso tan pequeña como 40 eV/c^2 para el neutrino tendría un gran significado cosmológico. La respuesta a la cuestión de un universo en expansión indefinida o un universo de tamaño máximo, seguido de una contracción, depende de la masa total del universo. Esta respuesta podía depender de que la masa del neutrino fuera simplemente pequeña en lugar de cero, ya que la densidad cósmica de cada especie de neutrino es aproximadamente 100 cm^3. La observación de los neutrinos electrónicos procedentes de la supernova 1987A estableció un límite superior a la masa de estos neutrinos. Como la velocidad de una partícula con masa depende de su energía, el tiempo de llegada de un chaparrón de neutrinos másicos de una supernova debe tener cierta dispersión. El hecho de que los neutrinos electrónicos procedentes de la supernova de 1987 llegasen a la Tierra dentro de un intervalo de 13 s exige un límite superior de 16 eV/c^2 para su masa. Obsérvese que

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 41.1 Hadrones estables a la desintegración por vía de la interacción nuclear fuerte

Nombre	Símbolo	Masa MeV/c^2	Espín $\hbar$	Carga e	Antipartícula	Vida media, s	Productos típicos de desintegración[a]
Bariones							
Nucleón	p (protón)	938,3	$\frac{1}{2}$	+1	p^-	Infinito	
	n (neutrón)	939,6	$\frac{1}{2}$	0	n	930	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	1116	$\frac{1}{2}$	0	$\bar{\Lambda}^0$	$2,5 \times 10^{-10}$	$p + \pi^-$
Sigma[b]	Σ^+	1189	$\frac{1}{2}$	+1	$\bar{\Sigma}^-$	$0,8 \times 10^{-10}$	$n + \pi^+$
	Σ^0	1193	$\frac{1}{2}$	0	$\bar{\Sigma}^0$	10^{-20}	$\Lambda^0 + \gamma$
	Σ^-	1197	$\frac{1}{2}$	−1	$\bar{\Sigma}^+$	$1,7 \times 10^{-10}$	$n + \pi^-$
Xi	Ξ^0	1315	$\frac{1}{2}$	0	Ξ^0	$3,0 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$
	Ξ^-	1321	$\frac{1}{2}$	−1	Ξ^+	$1,7 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$
Omega	Ω^-	1672	$\frac{3}{2}$	−1	Ω^+	$1,3 \times 10^{-10}$	$\Xi^0 + \pi^-$
Mesones							
Pión	π^+	139,6	0	+1	π^-	$2,6 \times 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
	π^0	135	0	0	π^0	$0,8 \times 10^{-16}$	$\gamma + \gamma$
	π^-	139,6	0	−1	π^+	$2,6 \times 10^{-8}$	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu$
Kaón[c]	K^+	493,7	0	+1	K^-	$1,24 \times 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^0$
	K^0	497,7	0	0	$\bar{K}^0$	$0,88 \times 10^{-10}$ y $5,2 \times 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$
Eta	η^0	549	0	0		2×10^{-19}	$\gamma + \gamma$

[a] También ocurren otros modos de desintegración para la mayor parte de las partículas.
[b] El Σ^0 se ha incluido aquí para completar la tabla, pero su desintegración tiene lugar por vía de la interacción fuerte.
[c] El K^0 posee dos vidas medias distintas, a saber, K^0_{corta} y K^0_{larga}. Todas las demás partículas tienen una sola vida media.

un límite superior no implica que la masa no es nula. Medidas más recientes del número relativo de neutrinos muónicos y electrónicos detectados en el experimento subterráneo Super-Kamiokande verificado en el Japón sugieren que al menos un tipo de neutrino puede oscilar entre dos tipos diferentes (por ejemplo un neutrino mu y un neutrino tau). Tal oscilación sólo es posible si el neutrino tiene masa.

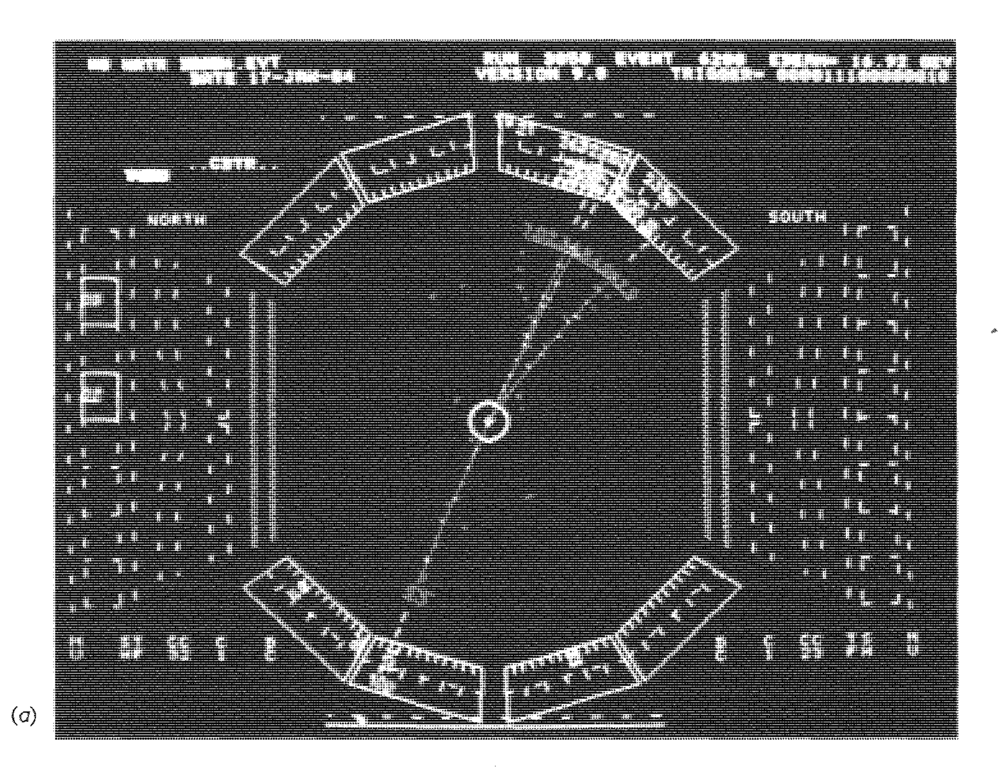
Espín y antipartículas 41.2

Una característica importante de una partícula es su momento angular de espín intrínseco. Ya hemos discutido que el electrón posee un número cuántico m_s que corresponde al componente z de su espín intrínseco caracterizado por el número cuántico $s = \frac{1}{2}$. Los protones, neutrones, neutrinos y otras partículas diversas que poseen un espín intrínseco caracterizado por el número cuántico $s = \frac{1}{2}$ se denominan **partículas de espín** $-\frac{1}{2}$. Las partículas de espín $\frac{1}{2}$ (o $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ...) se llaman también *fermiones* y obedecen el principio de exclusión de Pauli. Los piones y otras partículas de espín cero o entero ($s = 0, 1, 2, \ldots$) se denominan *bosones* y no obedecen el principio de exclusión de Pauli. Cualquier número de bosones puede estar en el mismo estado cuántico.

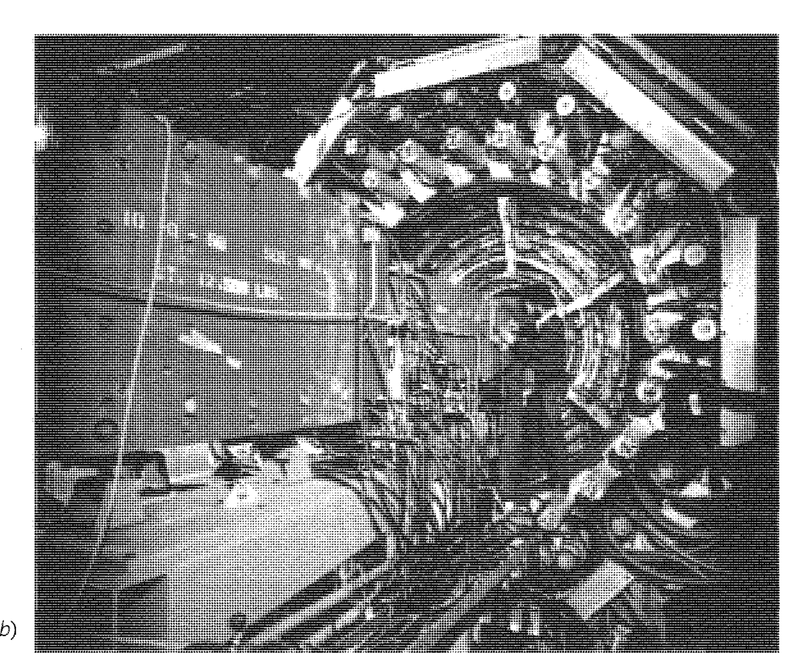
Las partículas de espín $-\frac{1}{2}$ están descritas por la ecuación de Dirac, una extensión de la ecuación de Schrödinger que incluye la relatividad especial. Una característica de la teoría de Dirac, propuesta en 1927, es la predicción de la existencia de antipartículas. En la relatividad especial, la energía de una partícula está relacionada con la masa y cantidad de movimiento de la partícula por $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ (ecuación 39.28). Normalmente escogemos la solución positiva y despreciamos la solución de energía negativa con un argumento físico. Sin embargo, la ecuación de Dirac requiere la existencia de funciones de onda que corresponden a los estados de energía negativa. Dirac soslayó esta dificultad postulando que todos los estados de energía negativa estaban completos y, por tanto, no eran observables. Únicamente se observarían huecos en el "mar infinito" de estados de energía negativa. Por ejemplo, un hueco en el mar negativo de esta-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



(a)



(b)

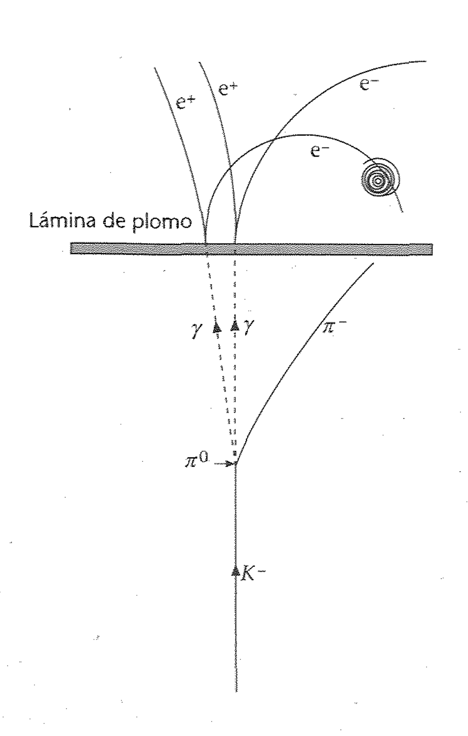
(a) Pantalla de ordenador al registrar la producción y desintegración de un par τ^+ y τ^-. Un electrón y un positrón se aniquilan en el centro marcado por una cruz amarilla, produciendo una par τ^+ y τ^- que viajan en sentidos opuestos, pero se desintegran rápidamente cuando están todavía dentro del tubo del haz (círculo amarillo). El τ^+ se desintegra en dos neutrinos invisibles y un μ^+ que viaja hacia el fondo izquierda. Su recorrido en la cámara se calcula por un ordenador y está indicado en rojo. Finalmente atraviesa los contadores de plomo-argón representados en color púrpura y se detecta en el punto azul próximo a la línea azul inferior que indica el extremo de un detector de muones. El τ^- se desintegra en tres iones cargados (trazas rojas que se mueven hacia arriba) más neutrinos invisibles. (b) Detector Mark I construido por un equipo del Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) y del Lawrence Berkeley Laboratory que se hizo famoso por sus múltiples descubrimientos, entre ellos el mesón Ω/J y el leptón τ. Las trazas de las partículas se registran mediante cámaras de chispa envueltas en cilindros concéntricos alrededor del tubo del haz que se extiende fuera del anillo, donde el físico Carl Friedberg apoya su pie derecho. Más allá de éste hay dos anillos de tubos empotrados que alojan los fotomultiplicadores asociados a diversos contadores de centelleo. Los imanes rectangulares a la izquierda guían los haces que giran en sentido contrario y colisionan en el centro del detector.

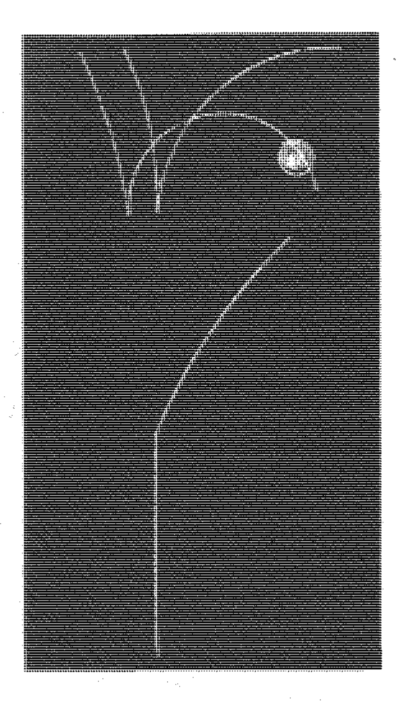
dos energéticos del electrón aparecería como una partícula idéntica al electrón excepto con carga positiva. Cuando tal partícula se encontrase en la vecindad de un electrón, las dos partículas se aniquilarían, liberando una energía de $2\,m_ec^2$. Esta interpretación recibió poca atención hasta que el positrón, que poseía justamente estas propiedades, fue descubierto en 1932 por Carl Anderson.

Las antipartículas nunca se crean aisladamente, sino siempre en forma de pares partícula-antipartícula. En la creación de un par electrón-positrón por un fotón, la energía de éste debe ser mayor que la energía en reposo del electrón más el positrón, es decir, mayor que $2m_ec^2 \approx 1{,}02$ MeV, siendo m_e la masa del electrón. Aunque el positrón es esta-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net





Un kaón negativo (K^-) entra en una cámara de burbujas desde el fondo y se desintegra en un π^-, que se desplaza hacia la derecha y un π^0 que inmediatamente se desintegra en dos fotones cuyas trayectorias se indican con líneas de trazos en el dibujo. Cada fotón choca contra la lámina de plomo y produce un par electrón-positrón. La espiral de la derecha es otro electrón que ha sido extraído de un átomo de la cámara. (Otras trazas espúreas se han eliminado de la fotografía.)

ble, su existencia en nuestro universo es muy corta a causa del gran número de electrones en la materia. El destino de un positrón es la aniquilación de acuerdo con la reacción

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \tag{41.1}$$

La probabilidad de esta reacción es grande sólo si el positrón están en reposo o casi en reposo. Para que se cumpla el principio de conservación del momento lineal es necesaria la aparición de dos fotones que se mueven en sentidos opuestos.

El hecho de que llamemos *partículas* a los electrones y *antipartículas* a los positrones no significa que estos últimos sean menos fundamentales que los electrones. Simplemente refleja la naturaleza de nuestra región del universo. Si nuestra materia estuviera formada por protones negativos y electrones positivos, entonces los protones positivos y los electrones negativos experimentarían una aniquilación rápida y les llamaríamos antipartículas.

El antiprotón (p^-) fue descubierto en 1955 por E. Segré y O. Chamberlain mediante un haz de protones acelerados en el bevatrón de Berkeley para producir la reacción[1]

$$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^- \tag{41.2}$$

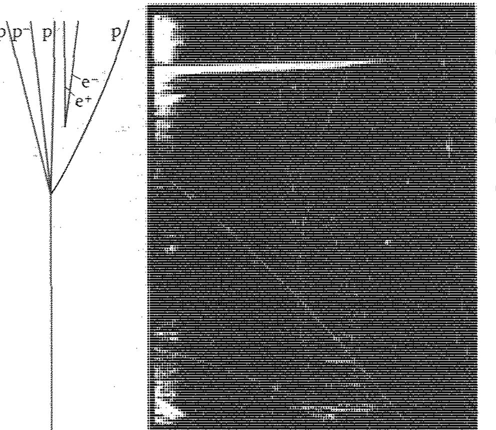


Figura 41.1 Trazas de una cámara de burbuja que muestran la creación de un par protón-antiprotón en la colisión de un protón incidente de 25 GeV con un protón estacionario del hidrógeno líquido.

La creación de un par protón-antiprotón (figura 41.1) requiere al menos la energía cinética $2m_pc^2$ =1877 MeV = 1,877 GeV en el sistema de referencia de cantidad de movimiento cero (sistema centro de masas), en el cual los dos protones se aproximan el uno al otro con cantidades de movimiento iguales y opuestas. En el sistema del laboratorio, en el cual uno de los protones se encuentra inicialmente en reposo, la energía cinética del protón incidente debe ser por lo menos $6m_pc^2$ = 5,63 GeV (véase problema 60 del capítulo 39). Esta energía sólo pudo alcanzarse con el desarrollo de los aceleradores de alta energía en laboratorios especializados durante los años 1950. Los antiprotones se aniquilan con los protones ordinarios produciendo dos rayos gamma en una reacción similar a la de la ecuación 41.1.

[1] El antiprotón se representa a veces por $\overline{p}$ en lugar de p^-. En las partículas neutras, como el neutrón, la barra debe utilizarse para denotar la antipartícula. Así el antineutrón es $\overline{n}$. El electrón y el protón normales se especifican por e y p sin los superíndices menos o más.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Vista aérea del Laboratorio europeo de física de partículas (CERN) en las afueras de Ginebra (Suiza). El gran círculo muestra la situación del túnel del gran colisionador electrón-positrón (Large Electron-Positron collider, LEP) que posee una longitud de circunferencia de 27 km. La línea irregular de puntos indica la frontera entre Francia y Suiza.

www.elsolucionario.net



Túnel del colisionador protón-antiprotón del CERN. Los mismos imanes de curvatura y los imanes de enfoque pueden utilizarse para los protones y antiprotones que se mueven en direcciones opuestas. La caja rectangular en primer término es un imán de enfoque; las cuatro cajas siguientes son imanes de curvatura.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 41.1

Un protón y un antiprotón en reposo se aniquilan de acuerdo con la reacción $p^+ + p^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Determinar las energías y longitudes de onda de los fotones.

Esquema del problema Como el protón y el antiprotón están en reposo, la conservación de la cantidad de movimiento requiere que los dos fotones tengan momentos lineales iguales y opuestos y, por tanto, energías iguales. La conservación de la energía exige que la energía total de los fotones sea igual a la energía en reposo del protón más la del antiprotón (aproximadamente 938 MeV cada una).

1. Igualar la energía total de los dos fotones con al energía en reposo del protón + antiprotón y despejar E_γ:

$$2E_\gamma = 2m_p c^2$$

$$E_\gamma = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$$

2. Establecer que la energía del fotón es $hf = \frac{hc}{\lambda}$ y despejar la longitud de onda, λ:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1240 \text{ eV·nm}}{938 \text{ MeV}} = 1{,}32 \times 10^{-6} \text{ nm}$$

$$= 1{,}32 \text{ fm}$$

Leyes de conservación ■ 41.3

Una máxima de la naturaleza dice que "cualquier cosa que puede ocurrir, ocurre". Si una desintegración o reacción concebible no ocurre, es porque debe haber una razón. Normalmente la razón se expresa en función de una ley de conservación. La conservación de la energía no admite la desintegración de una partícula para la cual la masa en reposo total de los productos de desintegración sea mayor que la masa inicial en reposo de la partícula antes de la desintegración. La conservación del momento lineal exige que cuando un electrón y un protón en reposo se aniquilan, se emitan dos fotones. En una reacción o desintegración también debe conservarse el momento angular. Una cuarta ley de conservación que restringe las desintegraciones y reacciones posibles de las partículas es la de la carga eléctrica. La carga eléctrica neta antes de una desintegración o reacción, debe ser igual a la carga neta después de las mismas.

Existen además dos leyes de conservación que son importantes en las reacciones y desintegraciones de las partículas elementales: la conservación del número de bariones y la conservación del número de leptones. Consideremos la desintegración posible

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+$$

En esta desintegración se conservan la carga, la energía, el momento angular y el momento lineal, pero no puede ocurrir. En ella no se conservan el número de leptones y el número de bariones. Estos principios exigen que si un leptón o un barión se crean, debe crearse también una antipartícula del mismo tipo. Asignaremos un **número de leptones** $L = +1$ a todos los leptones, $L = -1$ a todos los antileptones y $L = 0$ al resto de las partículas. De igual modo se asigna el **número de bariones** $B = +1$ a todos los bariones, $B = -1$ a los antibariones y $B = 0$ a las restantes partículas. Los números de leptones y bariones no pueden cambiar en una reacción o desintegración. La conservación del número de bariones, junto con la conservación de la energía implica que el barión de menor masa, el protón debe ser estable.

La conservación del número de leptones exige que el neutrino emitido en la desintegración β del neutrón libre sea realmente un antineutrino:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad \textbf{(41.3)}$$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

El hecho de que los neutrinos y antineutrinos son diferentes viene ilustrado por un experimento en el cual el ^{37}Cl se bombardea con una haz intenso de antineutrinos procedentes de la desintegración de un haz de neutrones de un reactor. Si neutrinos y antineutrinos fueran iguales, se verificaría la siguiente reacción

$$^{37}\mathrm{Cl} + \bar{\upsilon}_e \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + e^- \qquad (41.4)$$

Esta reacción no se produce. Sin embargo, si los *protones* se bombardean con antineutrinos, se observa la reacción

$$p + \bar{\upsilon}_e \rightarrow n + e^+ \qquad (41.5)$$

Obsérvese que el número de leptones es −1 en el primer miembro de la reacción 41.4 y +1 en el segundo miembro. Sin embargo, el número de leptones es −1 en ambos lados de la reacción 41.5.

No sólo los neutrinos y los antineutrinos son partículas distintas, sino también los neutrinos asociados a los electrones son distintos de los neutrinos asociados a los muones. Los leptones electrónicos (e y υ_e), los leptones muónicos (μ y υ_μ), y los leptones tanónicos (τ y υ_τ) se conservan separadamente, de modo que asignaremos por separado números de leptones L_e, L_μ, y L_τ a estas partículas respectivamente. Para e y υ_e, $L_e = +1$; para sus antipartículas, $L_e = -1$; y para las partículas restantes, $L_e = 0$. Del mismo modo se asignan los números de leptones L_μ y L_τ.

EJEMPLO 41.2 **¿Qué leyes de conservación (si hay alguna) se violan en las siguientes desintegraciones? (a) $n \rightarrow p + \pi^-$, (b) $\Lambda^0 \rightarrow p^- + \pi^+$, (c) $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$.**

(a) No hay leptones en esta desintegración, de modo que no hay problema con la conservación del número de leptones. La carga neta es cero antes y después de la desintegración, de tal modo que la carga se conserva. También el número de bariones es +1 antes y después del proceso. Sin embargo, la energía en reposo del protón (938,3 MeV) más la del pión (139,6 MeV) es superior a la energía en reposo del neutrón (939,6 MeV). Por tanto, esta desintegración viola la conservación de la energía.

(b) Tampoco aquí existen leptones, y la carga neta es cero antes y después de la desintegración. En este caso, la energía en reposo de Λ^0 (1116 MeV) es mayor que la suma de las energías en reposo del antiprotón (938,3 MeV) es mayor que la suma de las energías en reposo del antiprotón (938,3 MeV) y del pión (139,6 MeV), de modo que la energía se conserva con una pérdida de energía en reposo que será igual a la ganancia en energía cinética de los productos de desintegración. Sin embargo, en este proceso no se conserva el número de bariones, que es +1 para Λ^0 y −1 para el antiprotón.

(c) En esta reacción no se conserva el número de leptones muónicos o el número de muones electrónicos. El muón se desintegra del modo siguiente:

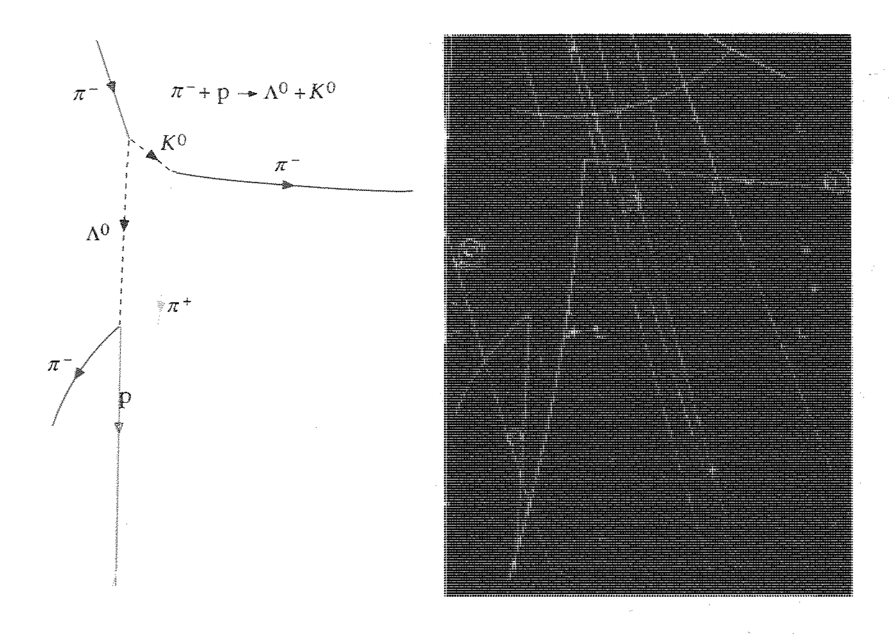
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\upsilon}_e + \upsilon_\mu$$

conservándose ambos números de leptones electrónico y muónico.

Existen algunas leyes de conservación que no son universales, sino que se aplican solo a ciertos tipos de interacciones. En particular hay magnitudes que se conservan en desintegraciones y reacciones que ocurren por vía de la interacción fuerte, pero no en aquellos procesos que tienen lugar por vía de la interacción débil. Una de estas magnitu-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Una de las primeras fotografías de trazas en la cámara de burbujas del Lawrence Berkeley Laboratory, mostrando la producción y desintegración de dos partículas extrañas, K^0 y Λ^0. Estas partículas neutras se identifican por las trazas de sus partículas de desintegración. La partícula lambda se denominó así por la semejanza de estas trazas con la letra griega Λ. (Las trazas azules corresponden a partículas que nada tienen que ver con la reacción de la ecuación 41.6.)

des particularmente importante es la **extrañeza**, introducida por M. Gell-Mann y K. Nishijima en 1952 para explicar el extraño comportamiento de algunos bariones y mesones pesados. Consideremos la reacción

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \tag{41.6}$$

El protón y el pión interaccionan por vía de la interacción fuerte. Tanto el Λ^0 como el K^0 se desintegran en hadrones

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \tag{41.7}$$

y

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \tag{41.8}$$

Sin embargo, los tiempos de desintegración de ambos, Λ^0 y K^0, son del orden de 10^{-10} s, lo cual es característico de la interacción débil, en lugar de 10^{-23} s, típico de la interacción fuerte. Otras partículas que muestran una conducta semejante fueron llamadas **partículas extrañas**. Estas partículas se producen siempre por pares y nunca aisladamente, aún cuando se cumplan todas las restantes leyes de conservación. Este comportamiento se describe asignando a estas partículas una nueva propiedad llamada extrañeza. En las reacciones y desintegraciones que se verifican por vía de la interacción fuerte, la extrañeza se conserva. Si se verifican por vía de la interacción débil, la extrañeza cambia en ±1. La extrañeza de los hadrones ordinarios —nucleones y piones— se tomó arbitrariamente igual a cero. La extrañeza del K^0 se eligió arbitrariamente igual a +1. La extrañeza de la partícula Λ^0 debe entonces ser −1 para que esta magnitud se conserve en la reacción 41.6. La extrañeza de otras partículas puede asignarse observando sus distintas reacciones y desintegraciones. En aquellas que tienen lugar por la vía de la interacción débil, la extrañeza puede cambiar en ±1.

La figura 41.2 muestra las masas de los bariones y mesones que son estables frente a la desintegración por vía de la interacción fuerte en función de su extrañeza. La figura muestra que estas partículas se agrupan en multipletes de una, dos o tres partículas de masa aproximadamente igual y que la extrañeza de un multiplete de partículas está relacionada con el "centro de carga" del multiplete.

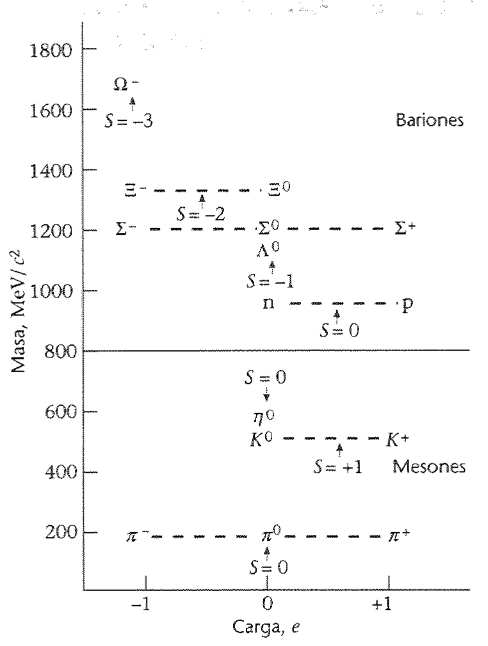
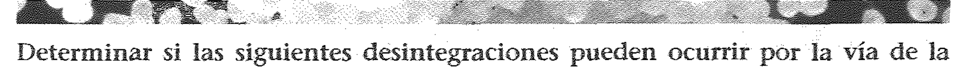


Figura 41.2 La extrañeza de los hadrones se muestra en un gráfico de la masa en reposo en función de la carga. La extrañeza de un multiplete de bariones está relacionada con el número de posiciones que el centro de carga del multiplete se desplaza respecto al doblete del nucleón. Por cada desplazamiento de $\frac{1}{2}e$, la extrañeza cambia en ±1. Para los mesones, la extrañeza está relacionada con el número de posiciones que el centro de carga se desplaza respecto al triplete del ion. Debido a la desafortunada asignación original de +1 a la extrañeza de los kaones, todos los bariones que son estables frente a la desintegración por la vía de la interacción fuerte tienen extrañeza negativa o cero.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

EJEMPLO 41.3

Determinar si las siguientes desintegraciones pueden ocurrir por la vía de la interacción fuerte, de la interacción débil o no pueden ocurrir de ningún modo: (a) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$; (b) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$; (c) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$

Esquema del problema Observemos en primer lugar que la masa de cada una de las partículas que se desintegra es mayor que la de los productos resultantes, de modo que no hay problema con la conservación de la energía en los tres casos. Además, en ninguno de los procesos hay leptones y la carga y el número de bariones se conserva en todos ellos. La desintegración se verificará por la vía de la interacción fuerte si la extrañeza se conserva. Si $\Delta S = \pm 1$, se verificará por la vía de la interacción débil. Si S cambia en más de 1, la desintegración no tendrá lugar.

(a) Según la figura 41.2, la extrañeza de Σ^+ es -1, mientras que la extrañeza de ambos productos, el protón y el pión es cero. Esta desintegración es posible por vía de la interacción débil, pero no por interacción fuerte. En efecto, este es uno de los modos de desintegración de la partícula Σ^+ con una vida media del orden de 10^{-10} s.

(b) Como la extrañeza de tanto Σ^0 como Λ^0 es -1, esta desintegración puede tener lugar por interacción fuerte. En efecto, este es el modo dominante de desintegración de la partícula Σ^0 con una vida media de unos 10^{-20} s.

(c) La extrañeza de Ξ^0 es -2, mientras que la extrañeza del neutrón y pión es cero. Como la extrañeza no puede cambiar en un valor 2, esta desintegración no puede ocurrir.

41.4 Quarks

Los leptones aparecen como partículas realmente elementales, ya que no pueden dividirse en entidades más pequeñas ni poseen un tamaño medible o estructura. Por otra parte, los hadrones son partículas complejas con tamaño y estructura y se desintegran en otros hadrones. Además, hoy se conocen sólo seis leptones, mientras que hay muchos más hadrones. Excepto la partícula Σ^0, la tabla 41.1 incluye sólo hadrones que son estables frente a la desintegración por interacción fuerte. Se han descubierto cientos de otros hadrones, y se han medido sus propiedades, tales como la carga, el espín, la masa, la extrañeza y los esquemas de desintegración.

El avance más importante respecto a la comprensión de las partículas elementales ha sido el modelo de los quarks propuesto por Gell-Mann y G. Zweig en 1963, según el cual todos los hadrones están formados por combinaciones de dos o tres partículas elementales llamadas **quarks**.[1] En el modelo original habían tres tipos de quarks llamados **sabores** con los símbolos u, d y s (de *up*, arriba, *down*, abajo y *strange*, extraño). Una propiedad no usual de los quarks es que transportan cargas electrónicas fraccionarias. La carga del quark u es $+\frac{2}{3}e$ y la de los quarks d y s es $\frac{1}{3}e$. Cada quark tiene espín $\frac{1}{2}$ y número bariónico $\frac{1}{3}$. La extrañeza de los quarks u y d es 0 y la del quark s es -1. Cada quark tiene un antiquark de carga eléctrica, número bariónico y extrañeza de signo opuesto. Los bariones constan de tres quarks (o tres antiquarks para las antipartículas), mientras los mesones constan de un quark y un antiquark, lo que les da un número de bariones $B = 0$, como corresponde. El protón consta de la combinación uud y el neutrón, udd. Los bariones de extrañeza $S = -1$ contienen un quark s. Todas las partículas relacionadas en la tabla 41.1 pueden construirse a partir de estos tres quarks y tres antiquarks.[2] La fortaleza del modelo de los quarks reside en que todas las combinaciones permitidas

[1] El nombre quark fue elegido por Gell-Mann de una frase que aparece en el libro Finnegans Wake de James Joyce.

[2] Las combinaciones correctas de quarks no son siempre obvias, debido a los requisitos de simetría de la función de onda total. Por ejemplo, el mesón π^0 viene representado por una combinación lineal de $u\bar{u}$ y $d\bar{d}$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

009197

de tres quarks o de pares quark-antiquark dan lugar a los hadrones conocidos. Mediante experimentos de dispersión de alta energía (*dispersión inelástica profunda*) se ha conseguido poner en evidencia la existencia de los quarks dentro de un nucleón. En estos experimentos, un nucleón se bombardea con electrones, muones, o neutrinos de energías entre 15 y 200 GeV. Los análisis de las partículas bombardeantes dispersas en grandes ángulos indican la existencia dentro del nucleón de 3 partículas de espín $\frac{1}{2}$ de tamaño mucho más pequeño que el del nucleón. Estos experimentos son análogos a la dispersión de Rutherford de partículas alfa por átomos, mediante la cual se demostró la presencia del pequeñísimo núcleo atómico, gracias a la dispersión de ángulo grande de las partículas bombardeantes.

¿Cuáles son las propiedades de las partículas formadas por los siguientes quarks: (a) $u\bar{d}$, (b) $\bar{u}d$, (c) dds y (d) uss?

EJEMPLO 41.4

Esquema del problema Los bariones están formados por 3 quarks y los mesones por un quark y un antiquark. Sumando las cargas eléctricas de los quarks se obtiene la carga total del hadrón. Igualmente, sumando las extrañezas de los quarks se obtiene la extrañeza del hadrón.

(a) Como $u\bar{d}$ es una combinación quark-antiquark, su número de bariones es cero y, por tanto, se trata de un mesón. Como aquí no hay quark extraño, la extrañeza del mesón es cero. La carga del quark up es $\frac{2}{3}e$ y la del antiquark down es $+\frac{1}{3}e$, de modo que la carga del mesón es $+1e$. Esta es la estructura quark del mesón π^+.

(b) La partícula $\bar{u}d$ es también un mesón de extrañeza cero. Su carga eléctrica es $-\frac{2}{3}e + (-\frac{1}{3}e) = -1e$. Es la estructura quark del mesón π^-.

(c) La partícula dds es un barión de extrañeza -1, ya que contiene un quark extraño. Su carga eléctrica es $-\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = -1e$. Es la estructura quark de la partícula Σ^-.

(d) La partícula uss es un barión de extrañeza -2. Su carga eléctrica es $+\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$. Esta es la estructura quark de la partícula Ξ^0.

Tabla 41.2 Propiedades de quarks y antiquarks

Sabor	Espín	Carga	Número de bariones	Extrañeza	Encanto	Número de cima	Número de fondo
Quarks							
u (*up*, arriba)	$\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{2}{3}e$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	0
d (*down*, abajo)	$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s (*strange*, extraño)	$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{1}{3}$	−1	0	0	0
c (*charmed*, encanto)	$\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{2}{3}e$	$+\frac{1}{3}$	0	+1	0	0
t (*top*, cima)	$\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{2}{3}e$	$+\frac{1}{3}$	0	0	+1	0
b (*bottom*, fondo)	$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+1
Antiquarks							
$\bar{u}$	$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\bar{s}$	$\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	+1	0	0	0
$\bar{c}$	$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	−1	0	0
$\bar{t}$	$\frac{1}{2}\hbar$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	−1	0
$\bar{b}$	$\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	−1

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 41.3 Masas de las partículas fundamentales

Partícula	Masa
Quarks	
u (*up*, arriba)	336 MeV/c^2
d (*down*, abajo)	338 MeV/c^2
s (*strange*, extraño)	540 MeV/c^2
c (*charmed*, encanto)	1500 MeV/c^2
t (*top*, cima)	174 000 MeV/c^2
b (*bottom*, fondo)	500 MeV/c^2
Leptones	
e^- (electrón)	0,511MeV/c^2
υ_e (neutrino electrónico)	< 7 eV/c^2
μ^- (muón)	105,659MeV/c^2
υ_μ (neutrino muónico)	<0,27 MeV/c^2
τ^- (tau)	1,784MeV/c^2
υ_τ (neutrino tauónico)	< 31 MeV/c^2

En 1967 se propuso un cuarto quark para explicar ciertas discrepancias entre las determinaciones experimentales de unas velocidades de desintegración y los cálculos teóricos basados en el modelo quark. Este cuarto quark se denominó **charm** (encanto) con el símbolo *c*. Como la extrañeza, la propiedad charm se conserva en las interacciones fuertes, pero cambia en ±1 en las interacciones débiles. En 1975 se descubrió un nuevo mesón pesado llamado **partícula ψ/J** (o simplemente **partícula ψ**), cuyas propiedades eran las de una combinación $c\bar{c}$. Desde entonces se han descubierto otros mesones con combinaciones tales como $c\bar{d}$ y $\bar{c}d$, así como bariones que contienen el quark encanto. Durante los años 1970 se propusieron dos nuevos quarks llamados *top* (cima) y *bottom* (fondo), de símbolos respectivos *t* y *b*. En 1977 se descubrió un nuevo mesón masivo llamado **mesón Υ**, al que se atribuyó la estructura $b\bar{b}$. El quark top fue observado por vez primera en 1995. Las propiedades de los seis quarks se relacionan en la tabla 41.2.

Hoy consideramos que toda la materia está constituida por seis quarks y seis leptones (y sus antipartículas), que son partículas elementales y fundamentales. La tabla 41.3 ofrece las masas de estas partículas. Las masas indicadas para los neutrinos son límites superiores. Las masas de los quarks son meras hipótesis razonables. Existe la evidencia experimental de cada una de estas partículas.

Confinamiento de quarks

A pesar del considerable esfuerzo experimental realizado en los últimos años, nunca ha podido observarse un quark aislado. Hoy se cree que ello es imposible. Aunque la fuerza entre los quarks no se conoce, se supone que la energía potencial de dos quarks crece al aumentar la distancia de separación, de tal modo que se necesitaría una cantidad de energía infinita para separarles totalmente. Esto sería cierto, por ejemplo, si la fuerza de atracción entre dos quarks permaneciese constante o creciera con la distancia de separación, en lugar de disminuir como ocurre en otras fuerzas fundamentales, tales como la fuerza eléctrica entre dos cargas, la fuerza gravitatoria entre dos masas y la fuerza nuclear fuerte entre dos hadrones.

Cuando a un sistema quark, tal como un nucleón, se le suministra una gran cantidad de energía, se crea un par quark-antiquark y los quarks originales permanecen confinados dentro del sistema original. Como los quarks no pueden aislarse, sino que siempre permanecen confinados en un barión o mesón, la masa de un quark no puede conocerse con exactitud, lo cual justifica el hecho de que las masas relacionadas en la tabla 41.3 sean simplemente hipótesis razonables.

41.5 Partículas de campo

Además de los seis leptones y los seis quarks fundamentales existen las llamadas *partículas* o *cuantos de campo*, asociadas con las fuerzas ejercidas por una partícula elemental sobre otra. En la **electrodinámica cuántica**, el campo electromagnético de una partícula de una sola carga viene descrito por **fotones virtuales** que están siendo continuamente emitidos y reabsorbidos por la partícula. Si la energía es suministrada al sistema acelerando la carga, algunos de estos fotones virtuales pueden ser "extraídos" y convertirse en fotones reales, observables. Se dice que el fotón es mediador en la interacción electromagnética. Cada una de las cuatro interacciones básicas puede describirse de este modo.

El cuanto de campo asociado a la interacción gravitatoria, denominado **gravitón**, no ha sido todavía observado. La "carga" gravitatoria análoga a la carga eléctrica es la masa.

En cuanto a la interacción débil se considera que está mediada por tres cuantos de campo, llamados **bosones vectoriales**: W^+, W^- y Z^0. Estas partículas fueron pronosticadas por S. Glashow, A. Salam y S. Weinberg en la llamada *teoría electrodébil* que discutiremos en la siguiente sección. Las partículas *W* y *Z* fueron observadas por vez primera en 1983 por un grupo de científicos superior al centenar, dirigido por C. Rubbia, utilizando el acelerador de alta energía del CERN en Ginebra, Suiza. Las masas de las partículas W^+ (aproximadamente 80 GeV/c^2) y la partícula *Z* (aproximadamente 91 GeV/c^2), medidas en este experimento, resultaron en excelente acuerdo con las previstas por la teoría electrodébil. (La partícula W^- es la antipartícula de la partícula W^+, de modo que poseen masas idénticas.)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 41.4 Bosones mediadores de las interacciones básicas

Interacción	Bosón	Espín	Masa	Carga eléctrica
Fuerte	g (gluón)[a]	1	0	0
Débil	$W^{\pm}$	1	80,22 GeV/c^2	$\pm 1e$
	Z^0	1	91,19 GeV/c^2	0
Electromagnética	γ (fotón)	1	0	0
Gravitatoria	Gravitón[a]	2	0	0

[a] Todavía no observado.

Los cuantos de campo asociados con la interacción fuerte se denominan **gluones**. Los gluones aislados no se han observado experimentalmente. La "carga" responsable de las interacciones fuertes puede tener tres variedades llamadas *roja*, *verde* y *azul* (los tres colores primarios) y en general, se llama **carga de color**. La teoría de campo de las interacciones fuertes, análoga a la electrodinámica de las interacciones electromagnéticas, se denomina **cromodinámica cuántica** (**CDQ**).

La tabla 41.4 relaciona los bosones responsables de la mediación en las interacciones básicas.

Teoría electrodébil ■ 41.6

En la **teoría electrodébil** las interacciones débil y electromagnética se consideran como dos manifestaciones distintas de una interacción más fundamental, electrodébil. A energías muy elevadas (>> 100 GeV), la interacción electrodébil tiene como mediadores cuatro bosones. Por consideraciones de simetría, estos bosones deberían ser un triplete formado por W^+, W^0 y W^-, todos de igual masa, y un singlete, B^0 de masa distinta. Tanto W^0 como B^0 no serían observados directamente, pero una combinación lineal de W^0 y B^0 daría lugar a Z^0 y al cuarto bosón sería el fotón. A las energías ordinarias, la simetría se rompe y se produce la separación de la interacción electromagnética mediada por el fotón sin masa y la interacción débil mediada por las partículas W^+, W^- y Z^0. El hecho de que el fotón carezca de masa y que las partículas W y Z tengan masas del orden de 1000 GeV/c^2 muestra que la simetría supuesta en la teoría electromagnética no existe a bajas energías.

El mecanismo de ruptura de la simetría se denomina **campo de Higgs**, el cual requiere un nuevo bosón, el **bosón de Higgs**, cuya energía en reposo debía ser del orden de 1 TeV (1 TeV = 10^{12} eV). El bosón de Higgs no ha sido todavía detectado. Los cálculos demuestran que los bosones de Higgs (si existen) deberían producirse en colisiones frontales entre protones de energías del orden de 20 TeV. Actualmente estas energías son inalcanzables.

El modelo estándar ■ 41.7

El conjunto del modelo quark, la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica constituyen el **modelo estándar**. En este modelo, las partículas fundamentales son los leptones y los quarks, cada uno de cuyos grupos posee seis sabores como se indica en la tabla 41.3 y los portadores de las fuerzas son el fotón, las partículas $W^{\pm}$ y Z y los gluones (de los cuales hay 8 tipos). Los leptones y los quarks son todos fermiones de espín $\frac{1}{2}$ que obedecen el principio de exclusión de Pauli y los portadores de las fuerzas son bosones de espín entero, que no obedecen dicho principio. Toda fuerza en la naturaleza es debida a una de las cuatro interacciones básicas: fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria. Una partícula experimenta una de las interacciones básicas si transporta una "carga" asociada con dicha interacción. La "carga" más familiar es la carga eléctrica que hemos estudiado previamente. La carga débil o carga de sabor es transportada por leptones y quarks. La carga asociada a la interacción fuerte es la carga de color y es transportada por quarks y gluones y no por los leptones. La carga asociada a la interacción gravitatoria es la masa. Es importante observar que el fotón, portador de la interacción

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

Tabla 41.5 Propiedades de las interacciones básicas

				Fuerte	
	Gravitatoria	Débil	Electromagnética	Fundamental	Residual
Actúa sobre	Masa	Sabor	Carga eléctrica	Carga de color	
Partículas que la experimentan	Todas	Quarks, leptones	Eléctricamente cargadas	Quarks, gluones	Hadrones
Partículas mediadoras	Gravitón	$W^{\pm}$, Z	γ	Gluones	Mesones
Intensidad para dos quarks a 10^{-18} m[a]	10^{-41}	0,8	1	25	(no aplicable)
Intensidad para dos protones en el núcleo[a]	10^{-36}	10^{-7}	1	(no aplicable)	20

[a] Las intensidades son valores relativos, tomando como unidad la interacción electromagnética.

electromagnética no transporta carga eléctrica. De igual modo, las partículas $W^{\pm}$ y Z, mediadoras de la interacción débil no transportan carga débil. Sin embargo, los gluones que actúan de mediadores en la interacción fuerte, transportan carga de color. Este hecho está relacionado con el confinamiento de los quarks, tratado en la sección 41.4.

Toda la materia está formada por leptones o quarks. No se conocen partículas compuestas formadas por leptones asociados conjuntamente por la fuerza débil. Los leptones existen sólo como partículas aisladas. Los hadrones (bariones y mesones) son partículas compuestas, formadas por quarks asociados conjuntamente por la carga de color. Un resultado de la teoría CDQ es que sólo son posibles las combinaciones de quarks de color neutro. Tres quarks de colores diferentes pueden combinarse para formar bariones de color neutro, tales como el neutrón y el protón. Los mesones contienen un quark y un antiquark y son también de color neutro. Los estados excitados de los hadrones se consideran como partículas diferentes. Por ejemplo, la partícula Δ^+ es un estado excitado del protón. Ambas partículas están formadas por los quarks *uud*, pero el protón se encuentra en el estado fundamental con espín $\frac{1}{2}$ y una energía en reposo de 938 MeV, mientras que la partícula Δ^+ se encuentra en el primer estado excitado con espín $\frac{3}{2}$ y una energía en reposo de 1232 MeV. Los dos quarks u pueden estar en el mismo estado de espín en Δ^+ sin violar el principio de exclusión de Pauli porque tienen color distinto. Todos los bariones eventualmente se desintegran en el barión más ligero, el protón. Este no puede desintegrarse debido a la conservación de la energía y del número de bariones.

La interacción fuerte tiene dos partes, la fundamental o interacción de color y lo que se denomina *interacción fuerte residual*. La interacción fundamental es responsable de la fuerza ejercida por un quark sobre otro y está mediada por los gluones. La interacción fuerte residual es la responsable de la fuerza entre nucleones de color neutro, tales como el neutrón y el protón. Esta fuerza es debida a las interacciones fuertes residuales entre los quarks con carga de color que forman los nucleones y que pueden considerarse como mediados por el intercambio de mesones. La interacción fuerte residual entre nucleones de color neutro pueden considerarse análogas a la interacción electromagnética residual entre átomos neutros que se asocian entre sí para formar moléculas. La tabla 41.5 relaciona algunas de las propiedades de las interacciones básicas.

A cada partícula corresponde una antipartícula. Una partícula y su antipartícula poseen masas y espines idénticos, pero cargas eléctricas opuestas. Para los leptones, los números leptónicos L_e, L_μ y L_τ de las antipartículas son los negativos de los correspondientes números para las partículas. Por ejemplo, el número leptónico para el electrón es $L_e = +1$ y para el positrón $L_e = -1$. Para los hadrones el número bariónico, extrañeza, encanto, cima y fondo son las sumas de estas magnitudes para los quarks que forman el hadrón. El número de cada antipartícula es el negativo del número para la partícula correspondiente. Por ejemplo, la partícula lambda Λ^0, formada por los quarks *uds* tiene $B = 1$ y $S = -1$, mientras que su antipartícula $\bar{\Lambda}^0$, formada por los quarks $\overline{uds}$, tiene $B = -1$ y $S = +1$. Una partícula como el fotón γ o la partícula Z^0 de carga eléctrica neutra que tiene $B = 0$, $L = 0$, $S = 0$ y cero encanto, cima y fondo, es su propia antipartícula. Obsérvese que el mesón K^0 $(\bar{d}s)$ tiene un valor cero para todas estas magnitudes excepto la extrañeza, que es +1. Su antipartícula, el mesón $\bar{K}^0$ $(d\bar{s})$ posee la extrañeza −1, lo que le distingue de K^0. Las partículas π^+ $(u\bar{d})$ y π^- $(\bar{u}d)$ son algo especial, pues poseen carga eléctrica, pero valores nulos para L, B y S. Cada una es antipartícula de la otra, pero como no hay ley de conservación para los mesones, resulta imposible afirmar cuál es la partícula y cuál la antipartícula. De igual modo, las partículas W^+ y W^- son antipartículas una de otra indistintamente.

www.elsolucionario.net

Teorías de la gran unificación

Después del éxito de la teoría electrodébil, se han realizado intentos para combinar las interacciones fuerte, electromagnética y débil en varias **teorías de la gran unificación** (TGU). En una de estas teorías, los leptones y los quarks se consideran como dos aspectos de una sola clase de partículas. En ciertas condiciones, un quark podría convertirse en un leptón o viceversa, aunque esto equivaldría a violar la conservación del número de leptones y del número de bariones. Una de las predicciones más excitantes de esta teoría considera que el protón no es una partícula estable, sino que simplemente posee una vida media muy larga, del orden de 10^{31} años, lo cual hace muy difícil observar su desintegración. Actualmente hay proyectos en marcha, dotados de detectores que controlan grandes números de protones en busca de un suceso que indique la desintegración de una de estas partículas.

Evolución del universo 41.8

En el modelo hoy aceptado, el universo se inició en un cataclismo singular llamado **big-bang** y se encuentra en expansión. La primera evidencia de esta expansión fue el descubrimiento por E. P. Hubble de la relación existente entre los desplazamientos al rojo de los espectros de las galaxias y sus distancias a la Tierra. Esta relación se ilustra en la figura 41.3 para un grupo de galaxias espirales utilizadas por los astrónomos para el calibrado de distancias. Dado que el desplazamiento al rojo es debido al efecto Doppler, la velocidad de recesión v de una galaxia está relacionada con la distancia r de nosotros por la **ley de Hubble**:

$$v = Hr \tag{41.9}$$

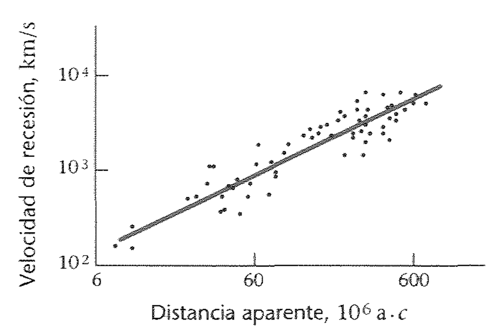


Figura 41.3 Gráfico de las velocidades de recesión de las galaxias individuales en función de la distancia aparente.

en donde H es la **constante de Hubble**. En principio, el valor de H es fácil de obtener, pues depende del cálculo directo de v a partir de las medidas de las desviaciones al rojo. Sin embargo, las distancias astronómicas son muy difíciles de determinar y han sido calculadas para sólo una fracción de las aproximadamente 10^{10} galaxias del universo observable. Por ello, el valor de H cambia a medida que mejoran los datos de calibración de las distancias. El valor corrientemente aceptado de la constante de Hubble es

$$H = \frac{23 \text{ km/s}}{10^6 \text{ a} \cdot c} \tag{41.10}$$

La ley de Hubble nos dice que las galaxias están todas alejándose de nosotros, y las más alejadas son las que más rápidamente se desplazan. Sin embargo, esto no significa que nuestra posición en el universo sea especial. Un observador de cualquier galaxia realizaría las mismas observaciones y calcularía la misma constante de Hubble. Así, la ley de Hubble sugiere que todas las galaxias por 10^6 a · c. de separación. En otras palabras, el universo está en expansión. Obsérvese que la dimensión básica de H es la inversa del tiempo. La magnitud $1/H$ se denomina **tiempo de Hubble** y aproximadamente vale $1{,}3 \times 10^{10}$ años. Esto equivaldría a la edad del universo, si ignoramos la atracción gravitatoria de las galaxias en recesión.

EJEMPLO 41.5

Las medidas de desplazamiento al rojo de una galaxia de la constelación de virgo dan una velocidad de recesión de 1200 km/s. ¿A qué distancia se encuentra dicha galaxia?

Esquema del problema Calculamos la distancia a partir de la ley de Hubble.

1. Utilizar la ley de Hubble para determinar r: $r = \frac{v}{H} = (1200 \text{ km/s})\frac{10^6\ a \cdot c}{23 \text{ km/s}} = 52 \times 10^6 \text{ a} \cdot c$

Ejercicio Demostrar que $1/H = 1{,}3 \times 10^{10}$ años.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La radiación de fondo 2,7 K

Al investigar la abundancia en el cosmos de elementos más pesados que el hidrógeno, los cosmólogos reconocieron que la nucleosíntesis en las estrellas podía explicar la abundancia de los elementos más pesados que el helio, pero no explicaba la presencia del propio helio. Este elemento debía haberse formado durante el big-bang. Para sintetizar la cantidad de helio suficiente que explique su abundancia actual, el big-bang tuvo que ocurrir a una temperatura inicial extraordinariamente elevada, proporcionando así la necesaria velocidad de reacción, antes de que la fusión se hiciera imposible al disminuir la densidad en el proceso de expansión inicialmente muy rápido. La alta temperatura sugiere el desarrollo de un campo de radiación térmica (cuerpo negro) que se enfriaría a medida que progresara la expansión. Los análisis teóricos predicen que con el tiempo estimado, transcurrido desde el big-bang hasta hoy, los residuos del campo de radiación deberían haberse enfriado hasta una temperatura de unos 3 K, correspondiente a un espectro del cuerpo negro con un máximo de longitud de onda, λ_{max} en la región de microondas. En 1965, Arno Penzias y Robert Wilson en los Bell Laboratories descubrieron la radiación de fondo cósmica pronosticada. Un análisis cuidadoso estableció posteriormente que la temperatura del fondo de radiación 2,7 ± 0,1 K y que su distribución es isotrópica en el espacio.

El big bang

El singular suceso que inició la expansión del universo se considera como una gigantesca explosión. Inicialmente, las cuatro fuerzas de la naturaleza (fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria) estuvieron unificadas en una sola fuerza. Los físicos han conseguido con éxito desarrollar descripciones teóricas que unifican las tres primeras fuerzas, pero hasta ahora no existe una teoría cuántica de la gravedad, necesaria para las densidades gigantescas de aquel período con una sola fuerza. En consecuencia, hasta que el universo "congeló" o "condensó" la fuerza gravitatoria a unos 10^{-43} s después del big-bang, cuando la temperatura era todavía 10^{32} K, no es posible describir lo que estaba ocurriendo. En este instante, la energía media de las partículas creadas sería de unos 10^{19} GeV. Cuando el universo continuó enfriándose por debajo de 10^{32} K, las tres fuerzas distintas de la gravedad permanecieron unificadas y se describen por las teorías de la gran unificación. Los quarks y los leptones eran indiscernibles y los números cuánticos de las partículas no se conservaban. Fue durante este período cuando tuvo lugar un exceso de quarks sobre los antiquarks, aproximadamente 1 por cada 10^9, y así resultó el predominio de la materia sobre la antimateria que ahora observamos en el universo.

A los 10^{-35} s, el universo se había expansionado lo suficiente para enfriarse a 10^{27} K, en cuyo momento tuvo lugar otra transición de fase y la fuerza fuerte se condensó separándose del grupo de la TGH, dejando solo unificadas las fuerzas débil y electromagnética en la llamada **fuerza electrodébil**. Durante este período, los quarks previamente libres en la densa mezcla de números aproximadamente iguales de quarks, leptones, sus antipartículas y los fotones comenzaron a combinarse en hadrones y sus antipartículas, incluyendo los nucleones. Con el tiempo, el universo se enfrió hasta 10^{13} K aproximadamente a $t = 10^{-6}$ s y los hadrones habían desaparecido en su mayor parte. En efecto, 10^{13} K corresponden a kT ~16 eV que es la energía mínima necesaria para crear nucleones y antinucleones a partir de los fotones según las reacciones

$$\gamma \rightarrow p^+ + p^- \tag{41.11a}$$

y

$$\gamma \rightarrow n^+ + \bar{n} \tag{41.11b}$$

Los pares partícula-antipartícula se aniquilaron y no hubo una nueva producción que los reemplazara. Sólo el ligero exceso previo de quarks sobre antiquarks dio lugar a un ligero exceso de protones y neutrones sobre sus antipartículas. Las aniquilaciones dieron lugar a fotones y leptones y después del tiempo 10^{-4} s, estas partículas en números aproximadamente iguales dominaron el universo. Fue la **era de los leptones**. Aproximadamente en el tiempo $t = 10$ s la temperatura había descendido a 10^{10} K (kT ~ 1 MeV). La expansión y enfriamiento posterior hicieron que la energía media de los fotones fuera inferior a la necesaria para formar un par electrón-positrón. La aniquilación eliminó todos los positrones, como había ocurrido anteriormente con los antiprotones y antineutrones, dejando sólo el pequeño exceso de electrones resultante de la conservación

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

de la carga, y comenzó la **era de la radiación**. Las partículas dominantes eran entonces fotones y neutrinos.

Al cabo de unos pocos minutos, la temperatura disminuyó lo suficiente para que protones y neutrones formasen núcleos que no se fotodesintegraron inmediatamente. En este **período de nucleosíntesis** se formaron núcleos de deuterio, helio y litio, pero la expansión continuó rápidamente y la temperatura fue ya demasiado baja para que la fusión continuase. La formación de elementos más pesados tuvo que esperar al nacimiento de las estrellas.

Mucho tiempo después, cuando la temperatura había descendido a unos 3000 K y el tamaño del universo era aproximadamente 1/1000 del actual, kT disminuyó por debajo de las energías típicas de ionización atómica y pudieron formarse los átomos. Por entonces, la expansión había desplazado al rojo el campo de radiación, de tal modo que la energía de radiación total era aproximadamente igual a la energía representada por la masa restante. Cuando la expansión y el enfriamiento continuaron, la energía de la radiación que siguió uniformemente desplazándose hacia el rojo, fue declinando hasta que para $t = 10^{10}$ años (ahora) la materia dominó el universo con su densidad energética superando a la radiación 2,7 K residual del big-bang en un factor aproximadamente igual a 1000.

www.elsolucionario.net

Resumen

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	TEMA
Existen cuatro interacciones básicas: fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria	**1. Interacciones básicas**
Todas las partículas con masa experimentan la fuerza debida a la interacción gravitatoria	Gravitatoria
Todas las partículas con carga eléctrica experimentan la fuerza debida a la interacción electromagnética	Electromagnética
La "carga" asociada a la interacción débil se llama sabor. Los quarks y leptones tienen sabor y experimentan la interacción débil. Los tiempos de desintegración por vía de la interacción débil son del orden de 10^{-10} s.	Débil
La "carga" asociada a la interacción fuerte se llama color. Los quarks y los gluones tienen color y experimentan la interacción fuerte. Los hadrones (bariones y mesones) experimentan una interacción fuerte residual que resulta de la interacción fuerte fundamental entre los quarks que forman los hadrones. Los tiempos de desintegración por esta vía son del orden de 10^{-23} s.	Fuerte
Existen dos familias de partículas fundamentales, leptones y quarks, que contienen seis miembros cada una. Se admite que estas partículas no tienen tamaño ni estructura interna.	**2. Partículas fundamentales**
Los leptones son fermiones de espín $\frac{1}{2}$: el electrón e y su neutrino υ_e, el muón μ y su neutrino υ_μ y el tau τ y su neutrino, υ_τ. El electrón, muón y tau tienen masa, carga eléctrica y sabor, pero no color, de modo que participan en las interacciones gravitatoria, electromagnética y débil, pero no en la fuerte. Los neutrinos tienen sabor, pero no carga eléctrica ni color. Todos ellos tienen una masa muy pequeña.	Leptones
Existen seis quarks, llamados up, u (arriba), down, d (abajo), strange, s (extraño), charmed, c (encanto), top, t (cima) y bottom, b (fondo). Cada uno es un fermión de espín $\frac{1}{2}$. Los quarks participan de las cuatro interacciones básicas. Como siempre están confinados en mesones o bariones, sus masas sólo pueden ser estimativas.	Quarks
Los hadrones son partículas compuestas formadas por quarks. Hay dos tipos: bariones y mesones. Los bariones que incluyen el neutrón y el protón son fermiones de espín semientero y constan de tres quarks. Los mesones, que incluyen piones y kaones poseen espín cero o entero. Los hadrones interaccionan entre sí por vía de la interacción residual fuerte.	**3. Hadrones**

www.elsolucionario.net

4. Partículas de campo Además de los leptones y los quarks, existen partículas de campo que están asociadas a las interacciones básicas.

Interacción	*Partícula de campo*
Gravitatoria	Gravitón
Electromagnética	Fotón
Débil	W^+, W^-, Z^0
Fuerte	Gluones

5. Leyes de conservación Algunas magnitudes tales como la energía, cantidad de movimiento, carga eléctrica, momento angular, número de bariones y cada uno de los tres números de leptones se conservan estrictamente en todas las reacciones y desintegraciones. Otras, como la extrañeza y el encanto se conservan en las reacciones y desintegraciones asociadas a la interacción fuerte, pero no en las asociadas a la interacción débil.

6. Partículas y antipartículas Las partículas y sus antipartículas poseen masas idénticas, pero valores opuestos para sus otras propiedades, tales como carga, número de leptones, número de bariones y extrañeza. Los pares partícula-antipartícula pueden producirse en diversas reacciones nucleares si la energía disponible es mayor que $2mc^2$, en donde m es la masa de la partícula.

7. Ley de Hubble La ley de Hubble relaciona la velocidad de recesión de una galaxia, determinada por la desviación al rojo de su espectro, con la distancia de la galaxia al observador:

$$v = Hr \tag{41.12}$$

en donde la constante de Hubble $H \approx 23$ km/s por millón de años luz. Según la ley de Hubble el universo se está expansionando y la expansión comenzó aproximadamente hace $1/H$ años.

8. Big-bang De acuerdo con el modelo corrientemente utilizado para describir la evolución del universo, este comenzó con el big-bang hace aproximadamente 10^{10} años. Este modelo está respaldado por observaciones experimentales sustanciales, entre ellas el espectro de radiación isotrópica, 2,7 K, del fondo.

Guía de resolución de problemas

Resumen de ejemplos resueltos

TIPO DE CÁLCULO	PROCEDIMIENTO Y EJEMPLOS RELEVANTES
1. Espín y antipartículas	
Determinar la energía de los fotones emitidos cuando una partícula y una antipartícula se aniquilan	Cuando la partícula y la antipartícula se aniquilan a partir del reposo, se emiten dos fotones de igual energía y cantidad de movimiento opuesta. La energía de cada fotón es mc^2, donde m es la masa de la partícula o antipartícula. **Ejemplo 41.1**
2. Leyes de conservación	
Comprobar una desintegración posible analizando si hay violación de las leyes de conservación.	Comprobar el espín, la carga eléctrica, el número de bariones y el número de leptones en los dos miembros de la ecuación. Comprobar que la energía en reposo inicial es mayor que la energía en reposo final. **Ejemplo 41.2**
Determinar si una desintegración ocurre por interacción débil o fuerte o no ocurre en absoluto.	En primer lugar comprobar las masas en reposo para la conservación de la energía. Después determinar el cambio de extrañeza. Si $\Delta S = 0$, la desintegración está asociada a la interacción fuerte. Si $\Delta S = \pm 1$, se trata de una interacción débil. Si $\lvert\Delta S\rvert \geq 2$, la desintegración no ocurre. **Ejemplo 41.3**
3. Quarks	
Determinar las propiedades de una partícula conocida la asociación de quarks.	Los bariones contienen 3 quarks; los mesones contienen un quark y un antiquark. Sumar las cargas de los quarks para determinar la carga de la partícula, y sumar las extrañezas de los quarks para determinar la extrañeza de la partícula. **Ejemplo 41.4**
4. Ley de Hubble	
Dada la velocidad de recesión, determinar la distancia a una galaxia.	Calcular r de la ley de Hubble $v = Hr$. **Ejemplo 41.5**

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben localizarse algunos datos que corresponden a conocimientos generales, fuentes externas o incluso estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

Problemas de secciones opcionales o exploratorios

- • Concepto simple, una sola etapa, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados

Hadrones y leptones

• **1** ¿Qué tienen de común los bariones y los mesones? ¿En qué difieren?

• **2** El muón y el pión tienen casi la misma masa. ¿En qué difieren estas partículas?

• **3** ¿Cómo puede saberse si una desintegración tiene lugar por medio de una interacción fuerte o débil?

• **4** Verdadero o falso:
(a) Todos los bariones son hadrones
(b) Todos los hadrones son bariones.

Espín y antipartículas

• **5** Verdadero o falso:
Los mesones son partículas de espín $-\frac{1}{2}$.

• **6** Dos piones en reposo se aniquilan según la reacción $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \gamma + \gamma$
(a) ¿Por qué deben ser iguales las energías de los dos rayos γ?
(b) Determinar la energía de cada rayo γ.
(c) Determinar la longitud de onda de cada rayo γ.

• **7** Determinar la energía mínima necesaria del fotón para las siguientes reacciones de producción de pares:
(a) $\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, (b) $\gamma \rightarrow p^+ + p^-$ y (c) $\gamma \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

Leyes de conservación

• **8** Establecer cuáles de las siguientes desintegraciones o reacciones violan una o más leyes de conservación, especificando su nombre en cada caso:
(a) $p^+ \rightarrow n + e^+ + \bar{\upsilon}_e$, (b) $n \rightarrow p^+ + \pi^-$, (c) $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$,
(d) $p + p^- \rightarrow \gamma + \gamma$ y (e) $\bar{\upsilon}_e + p \rightarrow n + e^+$.

• **9** Determinar el cambio de extrañeza que tiene lugar en cada una de las reacciones siguientes, y establecer si la reacción puede estar asociada a la interacción fuerte o a la débil, o a ninguna de ambas:
(a) $\Omega^- = \Xi^0 + \pi^-$, (b) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$ y (c) $\Lambda^0 \rightarrow p^+ + \pi^-$.

• **10** Determinar el cambio de extrañeza que tiene lugar en las desintegraciones siguientes, y establecer si el proceso puede verificarse por la vía de la interacción fuerte, la interacción débil o ninguna de ambas:
(a) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$ (b) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^-$.

• **11** Determinar el cambio de extrañeza que tiene lugar en las desintegraciones siguientes, y establecer si el proceso puede verificarse por la vía de la interacción fuerte, la interacción débil o ninguna de ambas:
(a) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \bar{\upsilon}_e + e^-$ (b) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$.

• **12**
(a) ¿Cuál de las siguientes desintegraciones de la partícula τ es posible?

$$\tau \rightarrow \mu^- + \bar{\upsilon}_\pi + \upsilon_\tau$$
$$\tau \rightarrow \mu^- + \upsilon_\pi + \bar{\upsilon}_\tau$$

(b) Explicar por qué la otra no es posible
(c) Calcular la energía cinética de los productos de desintegración del proceso posible.

•• **13** Considerar la siguiente cadena de desintegración:

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$
$$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \bar{\upsilon}_\pi$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\upsilon}_\mu$$
$$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$$
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \upsilon_\mu$$
$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\upsilon}_\mu + \upsilon_e$$
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\upsilon}_e + \upsilon_\mu$$

(a) ¿Son estables todos los productos finales? Si no lo son, terminar la cadena de desintegración.
(b) Escribir la reacción global de desintegración para Ω^- hasta los productos finales
(c) Comprobar la reacción de desintegración global en cuanto a la conservación de la carga eléctrica, número de bariones, número de leptones y extrañeza.

•• **14** Comprobar en las siguientes desintegraciones si existe violación de la conservación de la energía, carga eléctrica número de bariones y número de leptones:
(a) $n \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \mu^+ + \mu^-$;
(b) $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$.
Suponer que la cantidad de movimiento y el momento angular se conservan. Indicar qué leyes de conservación (si las hay) se violan en cada desintegración.

Modelo de los quarks

• **15** ¿Cómo podemos saber si una partícula es un mesón o un barión a partir de su contenido en quarks?

• **16** ¿Existen combinaciones quark-antiquark que dan lugar a una carga eléctrica no entera?

• **17** Determinar el número de bariones, la carga y la extrañeza de las siguientes combinaciones de quarks e identificar el hadrón correspondiente:
(a) *uud*, (b) *udd*, (c) *uus*,
(d) *dds*, (e) *uss* y (f) *dss*.

• **18** Repetir el problema 17 para las siguientes combinaciones de quarks:
(a) $u\bar{d}$, (b) $\bar{u}d$, (c) $u\bar{s}$ y (d) $\bar{u}s$.

• **19** La partícula Δ^{++} es un barión que se desintegra por vía de la interacción fuerte. Su extrañeza, encanto, número de cima y número de fondo son todos iguales a cero. ¿Qué combinación de quarks posee esta partícula para que posea dichas propiedades?

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

• **20** Determinar una posible combinación de quarks que ofrezca los valores correctos para la carga eléctrica, número de bariones y extrañeza de las partículas
(a) K^+ y (b) K^0.

• **21** El mesón D^+ no tiene extrañeza pero su encanto es +1.
(a) ¿Cuál es la combinación posible de quarks que nos da las propiedades correctas de esta partícula?
(b) Repetir (a) para el mesón D^-, que es la antipartícula de D^+.

• **22** Determinar la combinación posible de quarks que da los valores correctos de la carga eléctrica, número de bariones y extrañeza para las partículas
(a) K^- (la partícula K^- es la antipartícula de K^+) y
(b) $\bar{K}^0$.

•• **23** Determinar una combinación posible de quarks para las siguientes partículas:
(a) Λ^0 (b) p^- y (c) Σ^-.

•• **24** Determinar una posible combinación de quarks para las siguientes partículas:
(a) $\bar{n}$, (b) Ξ^0 y (c) Σ^+.

•• **25** Determinar una posible combinación de quarks para las siguientes partículas:
(a) Ω^- y (b) Ξ^-.

•• **26** Establecer las propiedades de las partículas formadas por los siguientes quarks:
(a) ddd, (b) $u\bar{c}$, (c) $u\bar{b}$ y (d) $\bar{s}\bar{s}\bar{s}$.

Problemas generales

• **27** Verdadero o falso:
(a) Los leptones constan de tres quarks.
(b) Los tiempos de las desintegraciones asociadas a la interacción débil son típicamente mayores que los correspondientes a las asociadas a la interacción fuerte.
(c) Los electrones interaccionan con los protones por medio de la interacción fuerte.
(d) La extrañeza no se conserva en las interacciones débiles
(e) Los neutrones no poseen encanto.

• **28**
(a) ¿Qué condiciones son necesarias para que una partícula sea su propia antipartícula? Determinar la antipartícula de
(b) π^0 y
(c) Ξ^0.

•• **29** Considerar la siguiente cadena de desintegración:

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$$
$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$
$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

(a) ¿Son estables todos los productos finales? Si no lo son, terminar la cadena de desintegración.
(b) Escribir la reacción de desintegración global para Ξ^0 hasta los productos finales.
(c) Comprobar la reacción de desintegración global en cuanto a la conservación de la carga eléctrica, número de bariones, número de leptones y extrañeza.
(d) En la primera etapa de la cadena, ¿podía el Λ^0 haber sido un Σ^0?

•• **30** Comprobar las siguientes desintegraciones, en cuanto a la violación de la conservación de la energía, la carga eléctrica, el número de bariones y el número de leptones:
(a) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, (b) $\Sigma^- \rightarrow n + p^-$,
(b) $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$.
Suponer que los momentos lineal y angular se conservan. Establecer qué leyes de conservación (si hay alguna) se violan en cada desintegración.

••• **31**
(a) Calcular la energía cinética total de los productos de desintegración del proceso $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$. Suponer que Λ^0 está inicialmente en reposo.
(b) Determinar la relación entre la energía cinética del pión y la energía cinética del protón.
(c) Determinar las energía cinéticas del protón y del pión para esta desintegración.

••• **32** Una partícula Σ^0 en reposo se desintegra en un Λ^0 más un fotón.
(a) ¿Cuál es la energía total de los productos de desintegración?
(b) Suponiendo que la energía cinética del Λ^0 es despreciable comparada con la energía del fotón, calcular la cantidad de movimiento aproximada del fotón.
(c) Utilizar el resultado de (b) para calcular la energía cinética de Λ^0.
(d) Utilizar el resultado de (c) para obtener una mejor estimación de la cantidad de movimiento y de la energía del fotón.

••• **33** En este problema calcularemos la diferencia entre los tiempos de llegada de dos neutrinos de distinta energía procedentes de una supernova a 170 000 años-luz de distancia. Sean E_1 = 20 MeV y E_2 = 5 MeV las energías de los neutrinos y supongamos que la masa en reposo de un neutrino es 20 eV/c^2. Como su energía total es mucho mayor que su energía en reposo, los neutrinos poseen velocidades muy próximas a c y energías aproximadamente $E \approx pc$.
(a) Si t_1 y t_2 son los tiempos que tardan los neutrinos de velocidades u_1 y u_2 para recorrer la distancia x demostrar que

$$\Delta t = t_2 - t_1 = x\frac{u_1 - u_2}{u_1 u_2} \approx \frac{x\,\Delta u}{c^2}$$

(b) La velocidad de un neutrino de masa en reposo m_0 y energía total E puede determinarse a partir de la ecuación 39.25. Demostrar que cuando $E >> m_0c^2$, la velocidad u viene dada aproximadamente

$$\frac{u}{c} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2$$

(c) Utilizar los resultados de (b) para calcular $u_1 - u_2$ para las energías y masa en reposo conocidas, y calcular Δt a partir del resultado de (a) para x = 170 000 a · c.
(d) Repetir el cálculo en (c) utilizando m_0c^2 = 40 eV para la energía en reposo de un neutrino.

www.elsolucionario.net

FACULTAD REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
... HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX: ... 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E32... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA
www.elsolucionario.net

APÉNDICE

A

Unidades SI y factores de conversión

www.elsolucionario.net

Tabla A.1 Unidades básicas.

Longitud	El *metro* (m) es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299 792 458 s
Tiempo	El *segundo* (s) es la duración 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo ^{133}Cs
Masa	El *kilogramo* (kg) es la masa del cuerpo considerado como patrón internacional que se conserva en Sèvres, Francia
Corriente eléctrica	El *amperio* (A) es la corriente que al circular por dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos separados 1 m entre sí da origen a una fuerza magnética por unidad de longitud de 2×10^{-7} N/m
Temperatura	El *kelvin* (K) es 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua
Intensidad luminosa	La *candela* (cd) es la intensidad luminosa, en la dirección perpendicular, de una superficie de 1/600 000 m^2 de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a la presión de 1 atm

Tabla A.2 Unidades derivadas.

Fuerza	newton (N)	1 N = 1 kg · m/s^2
Trabajo, energía	julio o joule (J)	1 J = 1 N · m
Potencia	vatio (W)	1 W = 1 J/s
Frecuencia	hertz (Hz)	1 Hz = s^{-1}
Carga	culombio (C)	1 C = 1 A · s
Potencial	voltio (V)	1 V = 1 J/C
Resistencia	ohmio (Ω)	1 Ω = 1 V/A
Capacidad	faradio (F)	1 F = 1 C/V
Campo magnético	tesla (T)	1 T = 1 N/A · m
Flujo magnético	weber (Wb)	1 Wb = T · m^2
Inductancia	henrio (H)	1 H = 1 J/A^2

www.elsolucionario.net

Tabla A.3 Factores de conversión.[1]

Longitud	Ángulo y velocidad angular	Energía
1 km = 0,6215 millas	* π rad = 180°	* 1 kW · h = 3,6 MJ
1 milla = 1,609 km	1 rad = 57,30°	* 1 cal = 4,1840 J
1 m = 1,0936 yd = 3,281 pies = 39,37 pulgadas	1° = 1,745 × 10^{-2} rad	1 pie · lb = 1,356 J = 1,286 × 10^{-3} Btu
* 1 pulgada = 2,54 cm	1 rev/min = 0,1047 rad/s	* 1 L · atm = 101,325 J
* 1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm	1 rad/s = 9,549 rev/min	1 L · atm = 24,217 cal
* 1 yd = 3 pie = 91,44 cm		1 Btu = 778 pie · lb = 252 cal = 1054,35 J
1 año-luz = 1 a.l. = 9,461 × 10^{15} m		1 eV = 1,602 × 10^{-19} J
1 Å = 0,1 nm		1 u · c^2 = 931,50 MeV
		* 1 erg = 10^{-7} J

Área	Masa	Potencia
* 1 m^2 = 10^4 cm^2	* 1 kg = 1000 g	1 caballo de vapor = 550 pie · lb/s = 745,7 W
1 km^2 = 0,3861 mi^2 = 247,1 acres	* 1 tonelada = 1000 kg = 1 Mg	1 Btu/min = 17,58 W
* 1 pulg^2 = 6,4516 cm^2	1 u = 1,6606 × 10^{-27} kg	1 W = 1,341 × 10^{-3} caballo de vapor
1 pie^2 = 9,29 × 10^{-2} m^2	1 kg = 6,022 × 10^{23} u	= 0,7376 pie · lb/s
1 m^2 = 10,76 pie^2	1 slug = 14,59 kg	
* 1 acre = 43 560 pie^2	1 kg = 6,852 × 10^{-2} slug	
1 milla^2 = 640 acres = 2,590 km^2	1 u = 931,50 MeV/c^2	

Volumen	Densidad	Campo magnético
* 1 m^3 = 10^6 cm^3	* 1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3 = 1 kg/L	* 1 G = 10^{-4} T
* 1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3	(1 g/cm^3)g = 62,4 lb/pie^3	* 1 T = 10^4 G
1 gal = 3,786 L		
1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 pulg^3		
1 pulg^3 = 16,39 cm^3		
1 pie^3 = 1728 pulg^3 = 28,32 L = 2,832 × 10^4 cm^3		

Tiempo	Fuerza	Conductividad térmica
* 1 h = 60 min = 3,6 ks	1 N = 0,2248 lb = 10^5 dina	1 W/m · K = 6,938 Btu · pulg/h · pie^2 F°
* 1 d = 24 h = 1440 min = 86,4 ks	1 lb = 4,4482 N	1 Btu · pulg/h · pie^2 F° = 0,1441 W/m · K
1 a = 365,24 d = 31,56 Ms	(1 kg)g = 2,2046 lb	

Velocidad	Presión
1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6215 milla/h	* 1 Pa = 1 N/m^2
1 milla/h = 0,4470 m/s = 1,609 km/h	* 1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bars
1 milla/h = 1,467 pie/s	1 atm = 14,7 lb/pulg^2 = 760 mmHg
	= 29,9 pulgHg = 33,8 pieH_2O
	1 lb/pulg^2 = 6,895 kPa
	1 torr = 1 mmHg = 133,32 Pa
	1 bar = 100 kPa

[1] Los factores de conversión se escriben en forma de ecuaciones para mayor sencillez. Las relaciones marcadas con un asterisco son exactas.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



APÉNDICE B

Datos numéricos

www.elsolucionario.net

Tabla B.1 Datos terrestres.

Aceleración de la gravedad g	9,80665 m/s^2
Valor estándar	32,1740 pies/s^2
A nivel del mar, en el ecuador[a]	9,7804 m/s^2
A nivel del mar, en los polos[a]	9,8322 m/s^2
Masa de la Tierra M_T	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra R_T, medio	$6{,}37 \times 10^6$ m; 3960 millas
Velocidad de escape $\sqrt{2R_Tg}$	$1{,}12 \times 10^4$ m/s; 6,95 millas/s
Constante solar[b]	1,35 kW/m^2
Temperatura y presión normales (C.N):	
Temperatura	273,15 K
Presión	101,325 kPa; 1,00 atm
Masa molar del aire	28,97 g/mol
Densidad del aire (C.N), ρ_{aire}	1,293 kg/m^3
Velocidad del sonido (C.N)	331 m/s
Calor de fusión del H_2O (0 °C, 1 atm)	333,5 kJ/kg
Calor de vaporización del H_2O (100 °C, 1 atm)	2,257 MJ/kg

[a] Medida respecto a la superficie de la Tierra.
[b] Potencia media incidente normalmente sobre 1 m^2 en el exterior de la atmósfera terrestre y a la distancia media de la Tierra al Sol.

Tabla B.2 Datos astronómicos.

Tierra	
Distancia a la Luna[a]	$3{,}844 \times 10^8$ m; $2{,}389 \times 10^5$ millas
Distancia al Sol, media[a]	$1{,}496 \times 10^{11}$ m; $9{,}30 \times 10^7$ millas; 1,00 AU
Velocidad orbital, media	$2{,}98 \times 10^4$ m/s
Luna	
Masa	$7{,}35 \times 10^{22}$ kg
Radio	$1{,}738 \times 10^6$ m
Período	27,32 d
Aceleración de la gravedad en su superficie	1,62 m/s^2
Sol	
Masa	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Radio	$6{,}96 \times 10^8$ m

[a] De centro a centro.

 www.elsolucionario.net

Tabla B.3 Constantes físicas.

Constante de la gravitación	G	$6{,}672\,6 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Velocidad de la luz	c	$2{,}997\,924\,58 \times 10^{8}$ m/s
Carga del electrón	e	$1{,}602\,177 \times 10^{-19}$ C
Número de Avogadro	N_A	$6{,}022\,137 \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de los gases	R	8,314 51 J/mol · K
		1,987 22 cal/mol · K
		$8{,}205\,78 \times 10^{-2}$ L · atm/mol · K
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}380\,658 \times 10^{-23}$ J/K
		$8{,}617\,385 \times 10^{-5}$ eV/K
Unidad de masa unificada	$u = (1/N_A)$ g	$1{,}660\,540 \times 10^{-24}$ g
Constante de Coulomb	$k = 1/4\pi\epsilon_0$	$8{,}987\,551\,788 \times 10^{9}$ N · m²/C²
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	$8{,}854\,187\,817 \times 10^{-12}$ C²/N · m²
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A²
		$1{,}256\,637 \times 10^{-6}$ N/A²
Constante de Planck	h	$6{,}626\,0755 \times 10^{-34}$ J · s
		$4{,}135\,6692 \times 10^{-15}$ eV · s
	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}054\,57266 \times 10^{-34}$ J · s
		$6{,}582\,1220 \times 10^{-16}$ eV · s
Masa del electrón	m_e	$9{,}109\,3997 \times 10^{-31}$ kg
		510,999 1 keV/c^2
Masa del protón	m_p	$1{,}672\,6231 \times 10^{-27}$ kg
		938,272 3 MeV/c^2
Masa del neutrón	m_n	$1{,}674\,929 \times 10^{-27}$ kg
		939,565 6 MeV/c^2
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/2m_e$	$9{,}274\,015\,4 \times 10^{-24}$ J/T
		$5{,}788\,382\,63 \times 10^{-5}$ eV/T
Magnetón nuclear	$m_n = e\hbar/2m_p$	$5{,}050\,786\,6 \times 10^{-27}$ J/T
		$3{,}152\,451\,66 \times 10^{-8}$ eV/T
Cuanto de flujo magnético	$\phi_0 = h/2e$	$2{,}067\,834\,6 \times 10^{-15}$ T · m²
Resistencia Hall cuantizada	$R_K = h/e^2$	$2{,}581\,280\,7 \times 10^{4}$ Ω
Constante de Rydberg	R_H	$1{,}097\,373\,153\,4 \times 10^{7}$ m⁻¹
Cociente frecuencia-tensión Josephson	$2e/h$	$4{,}835\,979 \times 10^{14}$ Hz/V
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = h/m_e c$	$2{,}426\,310\,58 \times 10^{-12}$ m

Para datos adicionales ver las últimas cuatro páginas del libro y las tablas siguientes en el texto.

Tabla 22.1 Algunos campos eléctricos en la naturaleza, pág. 729
Tabla 25.1 Constantes dieléctricas y resistencia a la ruptura del dieléctrico de diversos materiales, pág. 827
Tabla 26.1 Resistividades y coeficientes de temperatura, pág. 848
Tabla 26.2 Diámetros y secciones transversales de alambres típicos de cobre, pág. 848
Tabla 27.1 Densidades numéricas de electrones libres y energías de Fermi a $T = 0$ para diversos elementos, pág. 891
Tabla 27.2 Funciones de trabajo de algunos metales, pág. 893
Tabla 29.1 Susceptibilidad magnética de diversos materiales a 20 °C, pág. 954
Tabla 29.2 Valores máximos de $\mu_0 M$ y K_m para algunos materiales ferromagnéticos, pág. 962
Tabla 32.1 Espectro electromagnético, 1056
Tabla 37.1 Configuración electrónica de los átomos en sus estados fundamentales, pág. 1228
Tabla 39.1 Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros, pág. 1298
Tabla 40.1 Masas atómicas del neutrón y de isótopos seleccionados, pág. 1317
Tabla 41.1 Hadrones estables a la desintegración por vía de la interacción nuclear fuerte, pág. 1345
Tabla 41.2 Propiedades de quarks y antiquarks, pág. 1353
Tabla 41.3 Masas de partículas fundamentales, pág. 1354
Tabla 41.4 Bosones mediadores de las interacciones básicas, pág. 1355
Tabla 41.5 Propiedades de las interacciones básicas, pág. 1356

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FAC... REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNI... IDAD TECNOLOGICA NACIONAL
... HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX ...) 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - ... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

APÉNDICE

C

Tabla periódica de los elementos

www.elsolucionario.net

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1 **H** 1,00797																	2 **He** 4,003
3 **Li** 6,941	4 **Be** 9,012											5 **B** 10,81	6 **C** 12,011	7 **N** 14,007	8 **O** 15,9994	9 **F** 19,00	10 **Ne** 20,179
11 **Na** 22,990	12 **Mg** 24,31											13 **Al** 26,98	14 **Si** 28,09	15 **P** 30,974	16 **S** 32,064	17 **Cl** 35,453	18 **Ar** 39,948
19 **K** 39,102	20 **Ca** 40,08	21 **Sc** 44,96	22 **Ti** 47,88	23 **V** 50,94	24 **Cr** 52,00	25 **Mn** 54,94	26 **Fe** 55,85	27 **Co** 58,93	28 **Ni** 58,69	29 **Cu** 63,55	30 **Zn** 65,38	31 **Ga** 69,72	32 **Ge** 72,59	33 **As** 74,92	34 **Se** 78,96	35 **Br** 79,90	36 **Kr** 83,80
37 **Rb** 85,47	38 **Sr** 87,62	39 **Y** 88,906	40 **Zr** 91,22	41 **Nb** 92,91	42 **Mo** 95,94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101,1	45 **Rh** 102,95	46 **Pd** 106,4	47 **Ag** 107,870	48 **Cd** 112,41	49 **In** 114,82	50 **Sn** 118,69	51 **Sb** 121,75	52 **Te** 127,60	53 **I** 126,90	54 **Xe** 131,29
55 **Cs** 132,905	56 **Ba** 137,33	57-71 **Tierras raras**	72 **Hf** 178,49	73 **Ta** 180,95	74 **W** 183,85	75 **Re** 186,2	76 **Os** 190,2	77 **Ir** 192,2	78 **Pt** 195,09	79 **Au** 196,97	80 **Hg** 200,59	81 **Tl** 204,37	82 **Pb** 207,19	83 **Bi** 208,98	84 **Po** (210)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	89-103 **Actínidos**	104 **Rf** (261)	105 **Ha** (260)	106 (263)	107 (262)	108 (265)	109 (266)									

Tierras raras (Lantánidos)	57 **La** 138,91	58 **Ce** 140,12	59 **Pr** 140,91	60 **Nd** 144,24	61 **Pm** (147)	62 **Sm** 150,36	63 **Eu** 152,0	64 **Gd** 157,25	65 **Tb** 158,92	66 **Dy** 162,50	67 **Ho** 164,93	68 **Er** 167,26	69 **Tm** 168,93	70 **Yb** 173,04	71 **Lu** 174,97
Actínidos	89 **Ac** 227,03	90 **Th** 232,04	91 **Pa** 231,04	92 **U** 238,03	93 **Np** 237,05	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)	103 **Lr** (260)

La designación de los grupos 1–18 ha sido recomendada por la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC).

 www.elsolucionario.net

Tabla C.1 Números atómico y masas atómicas.

Nombre	Símbolo	Número atómico	Masa atómica	Nombre	Símbolo	Número atómico	Masa atómica
Actinio	Ac	89	227,03	Lawrencio	Lr	103	(260)
Aluminio	Al	13	26,98	Litio	Li	3	6,941
Americio	Am	95	(243)	Lutecio	Lu	71	174,97
Antimonio	Sb	51	121,75	Magnesio	Mg	12	24,31
Argón	Ar	18	39,948	Manganeso	Mn	25	54,94
Arsénico	As	33	74,92	Mendelevio	Md	101	(258)
Astato	At	85	(210)	Mercurio	Hg	80	200,59
Azufre	S	16	32,064	Molibdeno	Mo	42	95,94
Bario	Ba	56	137,3	Neodimio	Nd	60	144,24
Berilio	Be	4	9,012	Neón	Ne	10	20,179
Berkelio	Bk	97	(247)	Neptunio	Np	93	237,05
Bismuto	Bi	83	208,98	Niobio	Nb	41	92,91
Boro	B	5	10,81	Níquel	Ni	28	58,69
Bromo	Br	35	79,90	Nitrógeno	N	7	14,007
Cadmio	Cd	48	112,41	Nobelio	No	102	(259)
Calcio	Ca	20	40,08	Oro	Au	79	196,97
Californio	Cf	98	(251)	Osmio	Os	76	190,2
Carbono	C	6	12,011	Oxígeno	O	8	15,9994
Cerio	Ce	58	140,12	Paladio	Pd	46	106,4
Cesio	Cs	55	132,905	Plata	Ag	47	107,870
Cinc	Zn	30	65,38	Platino	Pt	78	195,09
Circonio	Zr	40	91,22	Plomo	Pb	82	207,19
Cloro	Cl	17	35,453	Plutonio	Pu	94	(244)
Cobalto	Co	27	58,93	Polonio	Po	84	(210)
Cobre	Cu	29	63,55	Potasio	K	19	39,102
Cromo	Cr	24	52,00	Praseodimio	Pr	59	140,91
Curio	Cm	96	(247)	Prometio	Pm	61	(147)
Disprosio	Dy	66	162,50	Protactinio	Pa	91	231,04
Einstenio	Es	99	(252)	Radio	Ra	88	(226)
Erbio	Er	68	167,26	Radón	Rn	86	(222)
Escandio	Sc	21	44,96	Renio	Re	75	186,2
Estaño	Sn	50	118,69	Rodio	Rh	45	102,905
Estroncio	Sr	38	87,62	Rubidio	Rb	37	85,47
Europio	Eu	63	152,00	Rutenio	Ru	44	101,1
Fermio	Fm	100	(257)	Rutherfordio	Rf	104	(261)
Flúor	F	9	19,00	Samario	Sm	62	150,36
Fósforo	P	15	30,974	Selenio	Se	34	78,96
Francio	Fr	87	(223)	Silicio	Si	14	28,09
Gadolinio	Gd	64	157,25	Sodio	Na	11	22,990
Galio	Ga	31	69,72	Talio	Tl	81	204,37
Germanio	Ge	32	72,59	Tántalo	Ta	73	180,95
Hafnio	Hf	72	178,49	Tecnecio	Tc	43	(98)
Hahnio	Ha	105	(260)	Telurio	Te	52	127,60
Helio	He	2	4,003	Terbio	Tb	65	158,92
Hidrógeno	H	1	1,00797	Titanio	Ti	22	47,88
Hierro	Fe	26	55,85	Torio	Th	90	232,04
Holmio	Ho	67	164,93	Tulio	Tm	69	168,93
Indio	In	49	114,82	Uranio	U	92	238,03
Iridio	Ir	77	192,2	Vanadio	V	23	50,94
Iterbio	Yb	70	173,04	Volframio (Tungsteno)	W	74	183,85
Itrio	Y	39	88,906	Xenón	Xe	54	131,29
Kriptón	Kr	36	83,80	Yodo	I	53	126,90
Lantano	La	57	138,91				

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FAC... REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIV... DAD ...NOLOGICA NACIONAL
... HISTORICO NACIONAL
... 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 - E3... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Origen de las ilustraciones

www.elsolucionario.net

Apertura de cada una de las partes

Parte IV pág. 717 © 1988 Richard Megna/Fundamental Photograps
Parte V pág. 1075 Cortesía de AT&T Archives
Parte VI pág. 1183 Cortesía de AT&T Archives

Capítulo 22

Apertura pág. 719 Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers; **pág. 720** *PSSC* Physics, 2ª ed., 1965. D.C. Heath & Co. and Education Development Center, Inc., Newton, MA; pág. 721 Bruce Terris/IBM Almaden Research Center; **pág. 724 (izquierda)** © Grant Heilman; **(derecha)** Ann Ronan Picture Library; **pág. 724** Burndy Library, Norwalk, Connecticut; **pág. 734 (Figura 22-17)** Harold M. Waage; **(Figura 22.18)** Harold M. Waage; **pág. 735 (Figura 22.19)** Harold M. Waage; **pág. 736** Cortesía de Hulon Forrester/Video Display Corporation, Tucker, Georgia.

Capítulo 23

Apertura pág. 749 © Dagmar Hailer-Hamann/Peter Arnold, Inc.; **pág. 751** Ben Damsky Electric Power Research Institute; **pág. 762 (Figura 23.21)** Runk/Schoenberger de Grant Heilman; **pág. 768** Harold M. Waage.

Capítulo 24

Apertura pág. 781 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 799 (Figura 24.18) (b)** © Karen R. Preuss; **(c)** © Hank Morgan/Rainbow; **pág. 801 (Figura 24.20)** Harold M. Waage.

Capítulo 25

Apertura pág. 811 © Picturepoint, Ltd., London; **pág 815 (Figura 25.2)** Harold M. Waage; **pág. 817 (derecha)** © Mark Antman/The Image Works; **(izquierda)** © Bruce Iverson; **pág. 818 (izquierda)** © Bruce Iverson; **(abajo, izquierda)** © Paul Brierly; **(derecha)** Cortesía de Tusonix, Tucson, Arizona; **pág. 823** © Lawrence Livermore National Laboratory; **pág. 826** © Manfred Kage/Peter Arnold, Inc.

Capítulo 26

Apertura pág. 843 © Rabbit System, Santa Monica, California. Texto de la foto, amable cooperación de Larry Albright; **pág. 849** © Chris Rogers/The Stock Market; **pág. 852 (Figura 26.9)** © Paul Silverman/Fundamental Photographs; **págs. 854** y **855** Ann Ronan Picture Library.

Capítulo 28

Apertura pág. 909 © Stadler GmbH, Cortesía de Transrapid International, Munich; **(Figura 28.1)** Fred Weiss; **pág. 912 (Figura 28.8)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographics; **pág. 915 (izquierda)** Larry Langrill; **(derecha)** © Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library; **(Figura 28.13)** Carl E. Nielsen.

Capítulo 29

Apertura pág. 935 Bob Williamson, Oakland University, Rochester, Michigan; **pág. 937 (izquierda)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **(derecha)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 939 (Figura 29.6)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 941 (Figura 29.10)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 943** © Bruce Iverson; **pág. 944 (Figura 29.14)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 945** Cortesía F. W. Bell Co., **pág. 947 (Figura 29.19)** Clarence Bennett, Oakland University Rochester, Michigan; **pág. 951 (izquierda)** Cortesía Princeton University Plasma Physics Laboratory; **(derecha)** Cortesía Princeton University Plasma Physics Laboratory; **pág. 959 (arriba)** J. F. Allen, St. Andrews University, Scotland; **(abajo)** © Paul Silverman/Fundamental Photographs;

 www.elsolucionario.net

pág. 960 (Figura 29.34) Robert J. Celotta, National Institute of Standards and Technology; **pág. 961 (izquierda)** Akira Tonomura, Hitachi Advanced Research Laboratory, Hatomaya, Japón; **(derecha)** © Bruce Iverson; **pág. 962 (izquierda)** Cortesía Seagate Technology; **(derecha)** Tom Chang/IBM Storage Systems Division, San Jose, CA; **pág. 964** © Bill Pierce/Time Magazines, Inc.

Capítulo 30

Apertura pág. 979 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 992 (Figura 30.19)** © Michael Holford, Collection of the Science Museum, London; **pág. 998 (Figura 30.26)** A. Leitner/Renselaer Polytechnic Institute.

Capítulo 31

Apertura pág. 1009 © 1990 C. J. Allen/New England Hydro Transmission Corporation; **pág. 1010 (izquierda)** Cortesía de U.S. Dept. of the Interior, Dept. of Reclamation; **(derecha)** © Lee Langum/Photo Researchers; **pág. 1028** © George H. Clark Radioana Collection-Archive Center, National Museum of American History; **pág. 1032 (arriba)** © Yoav/Phototake; **(abajo)** © Daniel S. Brody/Stock Boston.

Capítulo 32

Apertura pág. 1051 N.A.S.A.; **pág. 1056** Wabash Instrument Corporation; **pág. 1065** Cortesía de Cavendish Laboratory, University of Cambridge; **pág. 1074 (Figura 32.13)** Cortesía Central Scientific Company.

Capítulo 33

Apertura pág. 1077 © Robert Greenler; **pág. 1078 (Figura 33.1)** Corbis-Bettmann; **(Figura 33.2)** Corbis-Bettmann; **(abajo)** Adaptada de Eastman Kodal and Wabash Instrument Corporation; **pág. 1081 (izquierda)** © 1991 Paul Silverman/Fundamental Photographs; **(derecha)** © 1991 Paul Silverman/Fundamental Photographs; **pág. 1085 (a)** © Chuck O'Rear/West Light; **(b)** Cortesía de Ahmed H. Zewail, California Institute of Technology; **(c)** © Chuck O'Rear/West Light; **(d)** © Michael W. Berns/Scientific American; **(e)** © David Scharf, 1988. Reservados todos los derechos; **pág. 1089 (Figura 33.18) (a)** © 1987 Ken Kay/Fundamental Photographs; **(b)** Cortesía de Battelle-Northwest Laboratories; **(abajo)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 1090 (Figura 33.19)** Macduff Everton/Corbis; **(Figura 33.20)** © 1987 Pete Saloutos/The Stock Market; **pág. 1092 (Figura 33.22)** © 1987 Ken Kay/Fundamental Photographs; **pág. 1093 (Figura 33.24)** © Ted Horowitz/The Stock Market; **(abajo izquierda)** © Dan Boyd/Cortesía de Naval Research Laboratory; **(abajo derecha)** Cortesía AT/&T Archives; **pág. 1094 (Figura 33.25)** © Robert Greenler; **pág. 1095 (Figura 33.27)** David Parker/Science Photo Library/Photo Reserchers; **pág. 1099 (arriba)** © Robert Greenler; **(abajo)** Giovanni DeAmici, NSF, Lawrence Berkeley Laboratory; **pág 1097** © Robert Greenler; **pág. 1099 (Figura 33.34) (a)** Larry Langrill; **(b)** Larry Langrill; **pág. 1100 (izquierda)** © 1970 Fundamental Photographs; **(derecha)** © 1990 PAR/NYC, Inc./Photo by Elisabeth Algieri; **pág. 1104 (Figura 33.40)** © 1987 Paul Silverman Photographs; **pág. 1103 (arriba izquierda)** Glen A. Izett, U.S. Geological Survey, Denver Colorado; **(arriba derecha)** Glen A. Izett, U.S. Geological Survey, Denver Colorado; **(centro izquierda)** Dr. Anthony J. Gow/Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire; **(centro derecha)** Dr. Anthony J. Gow/Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire; **(abajo)** © Sepp Seitz/Woodfin Camp & Associates.

Capítulo 34

Apertura pág. 1115 © Dagmar Heiler-Hamann/Peter Arnold, Inc.; **pág. 1115 (Figura 34.2)** Demetrios Zangos; **pág. 1221 (izquierda)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **(derecha)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 1124** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 1126 (Figura 34.26) (a)** Nils Abramson; **(b)** © 1974 Fundamental Photographs; **pág. 1127 (Figura 34.27)** Fundamental Photographs; **pág. 1128** © Bohdan Hrynewych/Stock Boston; **pág. 1137 (arriba izquierda)** © Lennart Nilsson; **(abajo derecha)** © Lennart Nilsson; **(abajo izquierda)** © Lennart Nilsson; **(abajo derecha)** Cortesía IMEC and University of Pennsylvania Department of Electrical Engineering, **pág. 1140 (arriba izquierda)** Scala/Art Resource; **(arriba centro)** © Royal Astronomical Society Library; **(arriba derecha)** © Lick Observatory, University of California Regents; **(abajo izquierda)** California Institute of Technology; **(abajo derecha)** © 1980 Gary Ladd; **pág. 1141 (Arriba izquierda)** © California Association for Research in Astronomy; **(centro)** © California Association for Research in Astronomy; **(abajo)** NASA/Corbis.

Capítulo 35

Apertura pág. 1153 © Ken Kay/Fundamental Photographs; **pág. 1154** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 1155 (Figura 35.3)** Cortesía de Bausch & Lomb; **pág. 1156 (Figura 35.5) (a)** Cortesía T. A. Wiggins; **(b)** Cortesía T. A. Wiggins; **pág. 1157 (Figura 35.6)** *PSSC Physics*, 2ª ed., 1965 D. C. Heath & Co. and Education Development Center, Newton, MA; **pág. 1158 (Figura 35.8)** Cortesía de Michel Cagnet; **pág. 1160 (Figura 35.10)** Cortesía de Michael Cagnet, **pág. 1164 (Figura 35.20) (a)** Cortesía de Michael Cagnet; **(b)** Cortesía de Michael Cagnet; **(c)** Cortesía de Michael Cagnet, **pág. 1168 (Figura 35.28) (a)** M. Cagnet, M. Françon, J. C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*; **(b)** M. Cagnet, M. Françon, J. C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*; **(Figura 35.29)** Cortesía de Batelle-Northwest Laboratories; **(Figura 35.30)** Cortesía de Michael Cagnet; **pág. 1169 (Figura 35.31)** Cortesía de Michael Cagnet; **(Figura 35.33) (a)** Cortesía de Michael Cagnet; **(b)** Cortesía de Michael Cagnet; **pág. 1171** Kevin R. Morris/Corbis; **pág. 1169 (Figura 35.35) (a)** Clarence Bennet/Oakland University; Rochester, Michigan; **(b)** NRAO/AUI/Science Photo Library/Photo Researchers; **pág. 1174 (izquierda)** © Ronald R. Erickson, 1981. Holograma realizado por Nicklaus Phillips, 1978, para Digital Equipment Corporation; **(derecha)** © Ronald R. Erickson, 1981. Holograma realizado por Nicklaus Phillips, 1978, para Digital Equipment Corporation.

Capítulo 36

Apertura pág. 1185 Lawrence Livermore/Photo Researchers; **pág. 1200 (derecha)** Education Development Center; **(izquierda)** Education Development Center; **pág. 1198 (izquierda)** R. Trump/IBM Research; **(derecha)** Cortesía de E. D. Williams; **(abajo)** Cortesía de E. D. Williams; **pág. 1099 (arriba izquierda)** D. M. Eigler, y E. K. Schweizer, IBM Almaden Research Center; **(arriba derecha)** D. M. Eigler, y E. K. Schweizer, IBM Almaden Research Center; **(abajo izquierda)** D. M. Eigler, y E. K. Schweizer, IBM Almaden Research Center; **(abajo derecha)** D. M. Eigler, y E. K. Schweizer, IBM Almaden Research Center.

Capítulo 37

Apertura pág. 1209 Dr. Bruce Schardt/Cortesía de Digital Instruments, Inc.; **pág. 1210 (Figura 37.1) (a)** Adaptado de Eastman Kodak y Wabash Instrument Corporation; **(b)** Adaptado de Eastman Kodak y Wabash Instrument Corporation; **pág. 1226 (izquierda)** A. Jayaraman/AT&T Bell Labs; **(derecha)** A. Jayaraman/AT&T Bell Labs; **pág. 1227 (todas las imágenes)** David Parker/Photo Researchers; **pág. 1230** © Robert Landau/Westlight.

Capítulo 38

Apertura pág. 1241 Cortesía de AT&T Archives; **pág. 1247 (Figura 38.7)** Will and Deni McIntyre/Photo Researchers; **pág. 1254 (Figura 38.14) (a)** Cortesía de Dr. J. A. Marquisee; **(b)** Cortesía de Dr. J. A. Marquisee; **pág. 1257 (arriba izquierda)** Richard Walters 2/89, pág. 52/*Discover*; **(arriba derecha)** Dr. Jeremy Burgess/Science Photo Library/Photo Researchers; **(abajo izquierda)** Thomas R. Taylor/Photo Researchers; **(abajo derecha)** Cortesía de AT&T Archivos; **pág. 1260 (arriba izquierda)** Chris Kovach 3/91, pág. 69/*Discover*; **(arriba derecha)** Srinivas Manne, University of Cali-

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

fornia-Santa Barbara; **(abajo izquierda)** Dr. F. A. Quiocho y J. C. Spurlino/ Howard Hughes Medical Institute, Baylor College of Medicine; **(abajo derecha)** W. Krätschmer/Max-Planck Institute for Nuclear Physics; **pág. 1261** Museum of Modern Art; **pág. 1265** C. Falco/Photo Researchers; **pág. 1266 (arriba)** Dr. Jeremy Burgess/Science Photo Library/Photo Researchers; **(izquierda)** Cortesía AT&T Archivos; **(derecha)** AT&T Archivos; **pág. 1267 (arriba)** Dr. Jeremy Burgess/Science Photo Library/Photo Researchers; **(izquierda)** AT&T Archivos; **(derecha)** AT&T Archivos; **pág. 1268 (abajo)** Cortesía de Texas Instruments; **(abajo)** Cortesía de David Sarnoff Research Center; **pág. 1269 (arriba izquierda)** Imágenes de Patterson Electronics y procesamiento informático por John Stanford; **(arriba derecha)** Imágenes de Patterson Electronics y proceso informático por John Stanford; **(abajo izquierda)** Imágenes de Patterson Electronics y proceso informático por John Stanford; **(abajo derecha)** Imágenes de Patterson Electronics and computer processing por John Stanford.

Capítulo 39

Apertura pág. 1277 Albert Einstein Archives/AIP Niels Bohr Library; **pág. 1278** Cortesía NRAO/AUI; **pág. 1297** C. Powell, P. Fowler & D. Perkins/ Science Photo Library/Photo Researchers; **pág. 1303** © Michael Freeman; **pág. 1304** N.A.S.A.

Capítulo 40

Apertura pág. 1315 Hans Wolf/The Image Bank; **pág. 1326 (izquierda)** © 1991 por el Metropolitan Musem of Art; **(centro)** Cortesía de Paintings Conservation Dept., Metropolitan Museum of Art; **(derecha)** Paintings Conservation Dept., Metropolitan Museum of Art; **pág. 1329** Jerry Mason/ Photo Researchers; **pág. 1334 (izquierda)** Cortesía de Princeton Plasma Physics Laboratory; **(derecha)** Cortesía de Princeton Plasma Physics Laboratory; **pág. 1335 (izquierda)** Cortesía de Lawrence Livermore National Laboratory/U.S. Department of Energy; **(derecha)** Cortesía de Lawrence Livermore National Laboratory/U.S. Department of Energy.

Capítulo 41

Apertura pág. 1343 Lawrence Livermore Lab/Science Photo Library/Photo Researchrs; **pág. 1344** ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo; **pág. 1346 (arriba)** Science Photo Library/Photo Researchers; **(abajo)** Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers; **pág 1347 (arriba)** Lawrence Berkeley Lab/Science Photo Library/Photo Researchers; **(Figura 41.1)** Richard Ehrlich; **pág. 1348 (arriba)** CERN; **(abajo)** CERN; **pág. 1351** Lawrence Berkeley Lab/Science Photo Library/Photo Researchers.

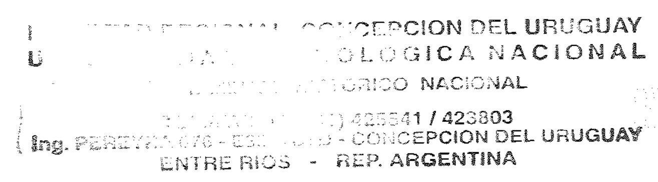
FAC... CONCEPCION DEL URUGUAY
UNIV... OLOGICA NACIONAL
...TORICO NACIONAL
...425541 / 423803
Ing. ... - CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Respuestas de problemas

Para dominar las técnicas de los ejemplos y la resolución de los problemas de nivel intermedio propuestos al final de cada capítulo, los diagramas que preceden a las respuestas indican cuáles son los ejemplos y problemas de nivel intermedio y número impar que tratan materias semejantes.

Estas respuestas se han calculado utilizando $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, a no ser que se especifique otra cosa en el ejercicio o problema. Los resultados normalmente se han redondeado a sólo tres cifras significativas. Si se obtienen diferencias en la última cifra, puede fácilmente ser consecuencia de ligeras diferencias a la hora de redondear los datos de partida, y carecen de importancia.

CAPÍTULO 22

Sección	1	3				4			5	6		7
Ejemplo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Problemas de nivel intermedio												
Ley de Coulomb												
13					■							
15					■							
17					■							
19					■							
Campo eléctrico												
29							■					
31							■					
33							■					
Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos												
41										■		
47												
49										■	■	
Dipolos eléctricos												
53												
55												
Problemas generales												
67						■						
69	■	■										
71				■								
73				■								
75												
77		■										
79				■		■						
81												
83												■
85												

1. Sí
3. 5×10^{12} electrones
5. $4{,}82 \times 10^{7}$ C
7. (c)
9. **(a)**

(b)

11. **(a)** 0,024 N **i**; **(b)** −0,024 N **i**; **(c)** La dirección de ambas fuerzas se invertiría.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

13. $1{,}27 \times 10^{-3}$ N **i** – $3{,}24 \times 10^{-4}$ N **j**

15. –8,66 N **j**

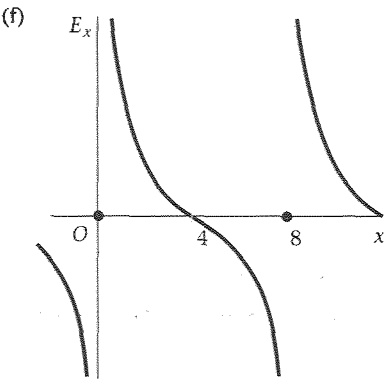
17. 0,899 N **i** + 1,80 N **j**, –1,29 N **i** – 1,16 N **j**, 0,391 N **i** – 0,643 N **j**

19. $(\sqrt{2} + 1)\dfrac{kqQ}{R^2}\mathbf{i}$

21. (d)

23. (d)

25. (a) $-9{,}35 \times 10^3$ N/C **i**; (b) $7{,}99 \times 10^3$ N/C **i**;
(c) $-7{,}99 \times 10^3$ N/C **i**; (d) $9{,}35 \times 10^3$ N/C **i**;
(e) 4 m
(f)



27. $8{,}18 \times 10^5$ N/C, hacia arriba

29. (a) $3{,}45 \times 10^4$ N/C **i**; (b) $6{,}90 \times 10^{-5}$ N/C **i**

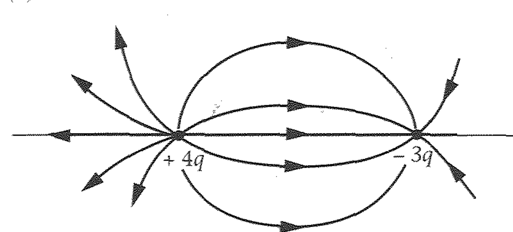
31. (a) $1{,}30 \times 10^4$ N/C, 231° en sentido antihorario desde el eje x;
(b) $2{,}07 \times 10^{-15}$ N, 51,3° en sentido antihorario desde el eje x

33. (a) $1{,}91 \times 10^3$ N/C, 234° en sentido antihorario desde el eje x;
(b) $3{,}06 \times 10^{-16}$ N, 234° en sentido antihorario desde el eje x

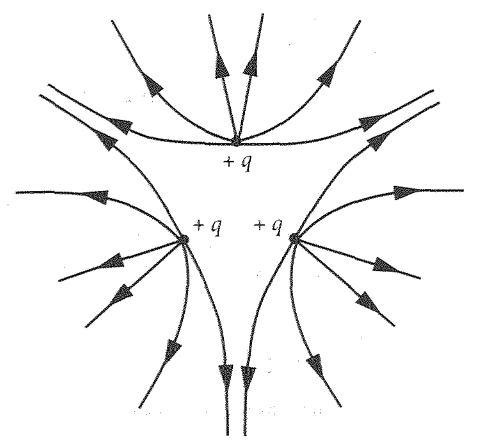
35. (a) Inestable a lo largo del eje x, estable a lo largo del eje y;
(b) Estable a lo largo del eje x, inestable a lo largo del eje y;
(c) $-q/4$; (d) El sistema será inestable

37. (d)

39.



41.



43. (a) $9{,}58 \times 10^7$ C/kg, $9{,}58 \times 10^9$ m/s^2; (b) $3{,}13 \times 10^{-4}$ s

45. $3{,}75 \times 10^7$ m/s

47. 8×10^{-4} C

49. Placa del fondo, 4,07 cm desde el punto de partida

51. (a) 8×10^{-18} C·m
(b) $+q$ ← **p** — $-q$

53. La respuesta viene dada en el problema.

55. (a) La fuerza sobre la carga positiva es $qC(x_1 + a)\mathbf{i}$ y la fuerza sobre la carga negativa es $-qC(x_1 - a)\mathbf{i}$. Por tanto, la fuerza neta sobre el dipolo es $2aqC\mathbf{i} = pC\mathbf{i}$.
(b) La respuesta viene dada en el problema

57. (a) $-3\, kqa^2x^{-4}\mathbf{i}$; (b) $6\, kqa^2y^{-4}\mathbf{j}$

59. (a)

61. El dipolo oscilará alrededor de su orientación de equilibrio $\theta = 0$. En el campo no uniforme, el dipolo acelerará en la dirección x, oscilando alrededor de $\theta = 0$.

63. La bola no conductora está polarizada y el lado más próximo a la carga positiva se hace negativo. Esto produce una fuerza neta atractiva. Con una carga negativa, la bola se polariza de modo que la parte más próxima a la carga se hace positiva.

65. Sí. Una bola positivamente cargada inducirá un dipolo sobre la bola metálica y si las dos están muy próximas, la fuerza neta será atractiva.

67. $1{,}14 \times 10^8$ N/C, $1{,}74 \times 10^6$ N/C, 0,46 cm

69. $3{,}3 \times 10^{-4}$ %, 32,4 N

71. $3kq^2/d^2$, $9kq^2/d^2$

73. 3,0 μC

75. qE/g

77. (a) 28 μC, 172 μC (b) 250 N

79. (a) –97 μC; (b) Entre 0,16 m y 0,17 m

81. (a) 10,2°; (b) 9,9°

83. La respuesta viene dada en el problema.

85. $\sqrt{ke^2/2mr}$

87. (a), (b) La respuesta viene dada en el problema.

89. (a) 8,5°; (b) 7,8° y 8,6°

91. $1{,}1 \times 10^4$ N/C, hacia arriba.

93. (a) $kQ[(L/2 + x)^2 - (L/2 - x)^{-2}]\mathbf{i}$;
(b) La respuesta viene dada en el problema;
(c) La respuesta viene dada en el problema;
(d) $2\pi\sqrt{mL^3/32kqQ}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 23

Problemas de nivel intermedio

Sección	1			2	3				5
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calculo de E mediante la ley de Coulomb									
11									
13	■								
Ley de Gauss									
27									
Distribuciones de carga esférica									
33						■			■
35							■		
37							■		
Distribuciones de carga cilíndrica									
43						■			
45								■	
47								■	
49							■	■	
Carga y campo en superficies conductoras									
57									
59									■
Problemas generales									
71						■			■
73									■
75					■				
77					■				
79									
81									
83					■	■			
85									
87									
89			■						
91									

1. (a) 17,5 nC; (b) 26,2 N/C (c) 4,37 N/C; (d) $2{,}57 \times 10^{-3}$ N/C; (e) $2{,}52 \times 10^{-3}$ N/C

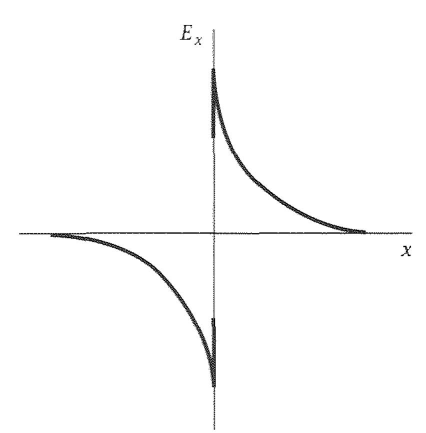
3. (a) $4{,}69 \times 10^5$ N/C; (b) $1{,}13 \times 10^6$ N/C; (c) $1{,}54 \times 10^3$ N/C; (d) $1{,}55 \times 10^3$ N/C

5. (a) $2{,}00 \times 10^5$ N/C; (b) 2,54 N/C

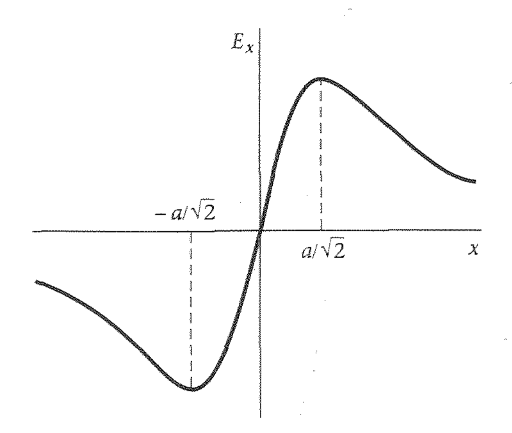
7. $a/\sqrt{3}$

9. (a) $0{,}804(2\pi k\sigma)$; (b) $0{,}553(2\pi k\sigma)$; (c) $0{,}427(2\pi k\sigma)$; (d) $0{,}293(2\pi k\sigma)$; (e) $0{,}106(2\pi k\sigma)$;

(f)



11.



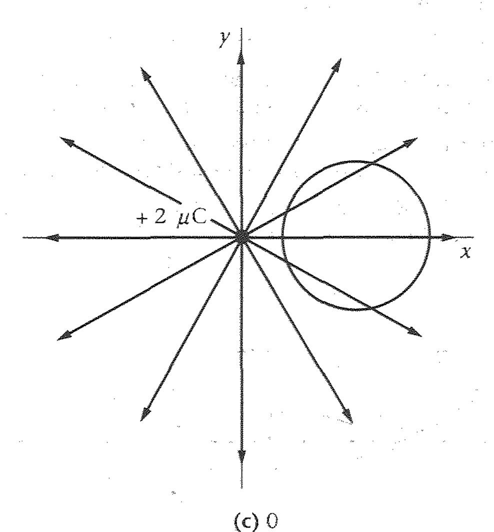
13. (a), (b) La respuesta viene dada en el problema

15. $(\sigma/2\epsilon_0)(1 - 1/\sqrt{2})$

17. (a) Falso (b) Falso

19. En la ley de Gauss E es el campo eléctrico total debido a todas las cargas

21. (a) En la esfera penetran tres líneas.



(b) 0; (c) 0

23. (a) N; (b) N/6; (c) q/ϵ_0; (d) $q/6\epsilon_0$; (e) (b) y (d)

25. (a) 3,14 m^2; (b) $7{,}19 \times 10^4$ N/C (c) $2{,}26 \times 10^5$ N·m^2/C; (d) No; (e) $2{,}26 \times 10^5$ N·m^2/C

27. $1{,}13 \times 10^5$ N·m^2/C

29. El campo a una distancia r es proporcional a Q'/r^2, en donde Q' es la carga dentro de una esfera de radio r. La carga Q' es proporcional al volumen de la esfera y, por tanto, proporcional a r^3. Así el campo es proporcional a $r^3/r^2 = r$.

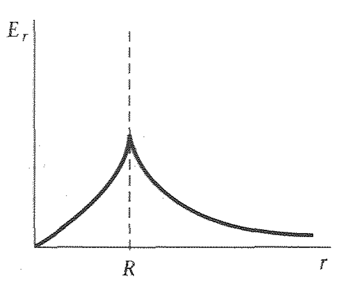
31. (a) 0,407 nC; (b) 0; (c) 0; (d) 984 N/C; (e) 366 N/C

33. (a) $-5Q$, $-Q$; (b) $-5Q$, $-5Q$, 0, se hace 0; (c) $-2Q$, $-2Q$, 0

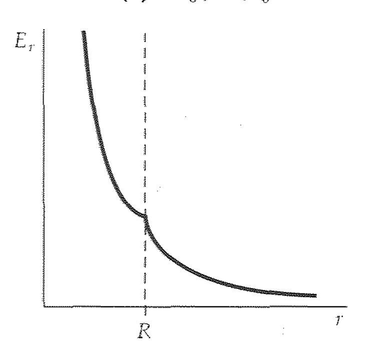
www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

35. (a) πAR^4; (b) $Ar^2/4\epsilon_0$, $AR^4/4\epsilon_0 r^2$



37. (a) $4\pi CR$; (b) $C/\epsilon_0 r$, $CR/\epsilon_0 r^2$



39. (a) $(4\pi\rho/3)(b^3 - a^3)$; (b) 0, $(\rho/3\epsilon_0 r^2)(r^3 - a^3)$, $(\rho/3\epsilon_0 r)(r^3 - a^3)$

41. La respuesta viene dada en el problema.

43. (a) $6{,}79 \times 10^{-7}$ C; (b) 0; (c) 0; (d) $1{,}00 \times 10^3$ N/C; (e) $6{,}11 \times 10^2$ N/C

45. (a) $6{,}79 \times 10^{-7}$ C; (b) $3{,}39 \times 10^2$ N/C; (c) $1{,}00 \times 10^3$ N/C; (d) $1{,}00 \times 10^3$ N/C; (e) $6{,}11 \times 10^2$ N/C; Los campos en la carga cortical y en el cilindro sólido con la misma carga total son idénticos fuera de las cargas. Dentro de la corteza el campo es cero.

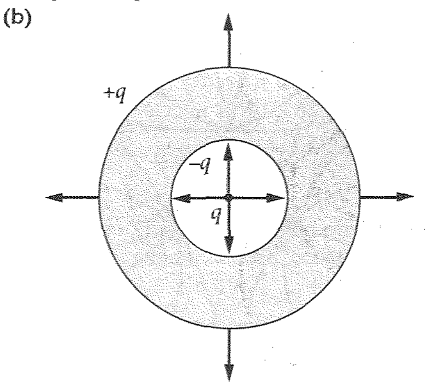
47. (a) Cero para $0 \le r \le 1{,}5$ cm y $4{,}5$ cm $\le r < 6{,}5$ cm, $(108/r)$ N/C para $1{,}5$ cm $< r < 4{,}5$ cm y $6{,}5$ cm $\le r$
(b) $2{,}10 \times 10^{-8}$ C/m², $1{,}47 \times 10^{-8}$ C/m²

49. La respuesta viene dada en el problema.

51. (a) $1{,}885 \times 10^{-8}$ C/m;
(b) $2{,}26 \times 10^4$ N/C para $0 \le r \le 1{,}5$ cm, $(339{,}3/r)$ N/C para $1{,}5$ cm $< r < 4{,}5$ cm, cero para $4{,}5$ cm $< r < 6{,}5$ cm, $(339{,}3/r)$ N/C para $6{,}5$ cm $< r$.

53. $9{,}41 \times 10^3$ N/C

55. (a) kq/r^2, 0, kq/r^2
(b)



(c) $-q/4\pi a^2$, $q/4\pi b^2$

57. (a) $-0{,}553$ μC/m², $0{,}246$ μC/m², $2{,}5$ μC para la superficie exterior y $-2{,}5$ μC para la superficie interior;
(b) kq/r^2 para $0 \le r \le 60$ cm, cero para 60 cm $< r < 90$ cm, kq/r^2 para ≥ 90 cm;
(c) $-0{,}553$ μC/m², $0{,}589$ μC/m², 6 μC para la superficie exterior y $-2{,}5$ μC para la superficie interior; kq/r^2, 0, $(6\mu C)k/r^2$.

59. (a) $1{,}60 \times 10^{-6}$ C/m², $1{,}81 \times 10^5$ N/C;
(b) $6{,}78 \times 10^4$ N/C, $2{,}94 \times 10^5$ N/C, $0{,}6$ μC/m², $2{,}6$ μC/m².

61. (a) Falso; (b) Verdadero; (c) Verdadero; (d) Falso

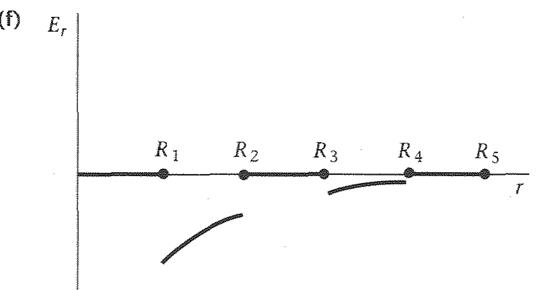
63. (a)

65. (b)

67. (c)

69. La ley de Gauss no puede utilizarse para determinar el campo de una carga lineal infinita porque no hay suficiente simetría para determinar una superficie gaussiana que permita calcular el flujo.

71. (a) hacia el centro; (b) $+Q_0$; (c) $-Q_0$; (d) $+Q_0$; (e) 0
(f)



73. $1{,}15 \times 10^5$ N/C

75. (a) $-1{,}41 \times 10^5$ N/C **i**; (b) $-5{,}37 \times 10^5$ N/C **i**; (c) $1{,}41 \times 10^5$ N/C **i**

77. (a) $1{,}27 \times 10^3$ N/C **i** + $1{,}47 \times 10^3$ N/C **j**; (b) $-1{,}27 \times 10^3$ N/C **i** + $5{,}87 \times 10^3$ N/C **j**

79. (a) $3\sqrt{3}\, gR^2/k|Q|$; (b) $1{,}896R$

81. $(2kQ\lambda/L)(\ln(d + L)/d$

83. (a) $(1{,}13\mathbf{i} + 1{,}69\mathbf{j}) \times 10^5$ N/C; (b) $(2{,}43\mathbf{i} + 2{,}17\mathbf{j}) \times 10^5$ N/C

85. $2\pi(mR^2/2k|q\lambda|)^{1/2}$

87. 7,42 rad/s

89. (a) $1{,}19 \times 10^5$ N/C; (b) $1{,}03 \times 10^5$ N/C; (c) $1{,}12 \times 10^3$ N/C

91. $3{,}27 \times 10^{-8}$ C/m

93. (a) $k\lambda^2 \ln[(d + L)^2/d(2L + d)]$
(b) La respuesta viene dada en el problema.

95. (a) $12Q/L^3$; (b) $dF = [2ka\lambda y^2/(y + b)]\, dy$;
(c) $F = 2ka\lambda(L/2 + d)\{(L/2 + d)\ln[(d + L)/d] - L\}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 24

Sección	1	2					3	4					5		
Ejemplo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Problemas de nivel intermedio															
Potencial y energía potencial															
9								■							
11								■							
Sistemas de cargas puntuales															
19				■	■	■									
Determinación del campo eléctrico a partir del potencial															
31	■														
Cálculo de *V* para distribuciones continuas de carga															
41									■						
43									■						
45									■						
47									■						
49												■	■		
51											■				
53												■			
Superficies equipotenciales y ruptura dieléctrica															
65															■
67													■		
Problemas generales															
81															
83								■							
85															■
87															
89															
91			■												
93								■							

1. **(a)** -8000 V; **(b)** $-2{,}4 \times 10^{-2}$ J; **(c)** $2{,}4 \times 10^{-2}$ J; **(d)** $(-2\text{ kV/m})x$; **(e)** $4000\text{ V} - (2\text{ kV/m})x$; **(f)** $2000\text{ V} - (2\text{ kV/m})x$

3. **(a)** 5 kV/m, positivo; **(b)** 500 eV, 8×10^{-17} J; **(c)** -500 eV, 500 eV

5. Menor.

7. **(a)** $4{,}5 \times 10^3$ V; **(b)** $1{,}35 \times 10^{-2}$ J; **(c)** $1{,}35 \times 10^{-2}$ J

9. La respuesta viene dada en el problema.

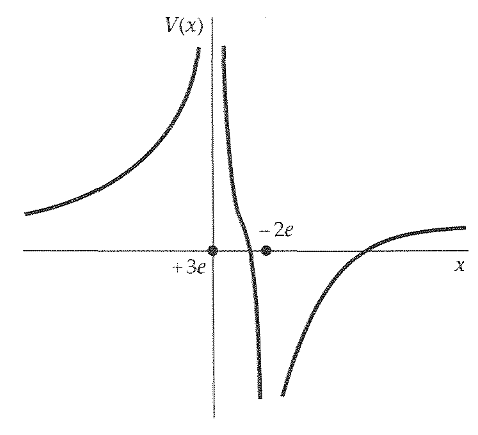
11. **(a)** 30 000 eV; **(b)** $4{,}8 \times 10^{-15}$ J; **(c)** $1{,}03 \times 10^8$ m/s

13. **(a)** 25,4 kV; **(b)** 12,7 kV; **(c)** 0

15. **(a)** 12 000 V; **(b)** 0,0599 J; **(c)** 0, 0

17. $-1/2$

19. **(a)**



(b) $3a/5$; **(c)** $2ke^2/a$

21. No

23. **(a)** positiva; **(b)** 25 000 V/m

25. **(a)** $8{,}99 \times 10^3$ V, $8{,}96 \times 10^3$ V **(b)** disminuye $2{,}97 \times 10^3$ V/m; **(c)** $3{,}00 \times 10^3$ V/m; **(d)** $8{,}99 \times 10^3$ V. El desplazamiento Δy se encuentra sobre una superficie equipotencial.

27. **(a)** positiva; **(b)** 25 000 V/m

29. $-2C_2x$, $-\mathbf{i}$ para $x > 0$ e $\mathbf{i}$ para $x < 0$

31. -7500 V

33. $(-8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$V/m

35. Sí, tanto V como E_x serían diferentes si Q no estuviera distribuido uniformemente

37. **(a)** $6{,}24 \times 10^3$ V/m, 0; **(b)** 749 V, 749 V; **(c)** 749 V, 0

39. **(a)** $6{,}02 \times 10^3$ V; **(b)** $-1{,}27 \times 10^4$ V; **(c)** $-4{,}23 \times 10^4$ V

41. **(a)** $\dfrac{kQ}{L}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + L^2/4} + L/2}{\sqrt{x^2 + L^2/4} - L/2}\right)$

(b) La respuesta viene dada en el problema.

43. **(a)** $\pi\sigma_0 R^2/2$; **(b)** $\sigma_0 k$

45. **(a)** $2\pi\sigma_0 k[2\sqrt{x^2 + R^2/2} - x - \sqrt{x^2 + R^2}]$;

(b) $\pi\sigma_0 kR^4/8x^3$

47. **(a)** $(kQ/L)\ \ln[(x + L/2)/(x - L/2)]$;
(b) La respuesta viene dada en el problema.

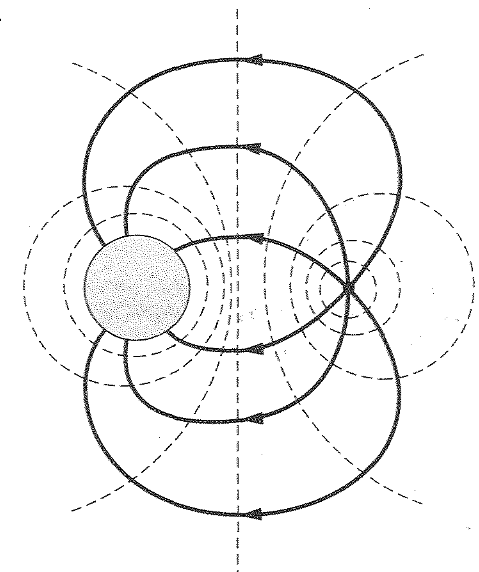
49. $-2kq/L\ \ln(b/a)$

51. **(a)** cero para $0 < x < a$, $-(\sigma/\epsilon_0)(x - a)$ para $x > a$, $\sigma x/\epsilon_0$ para $x < 0$; **(b)** $\sigma x/\epsilon_0$ para $0 < x < a$, $-\sigma a/\epsilon_0$ para $x > a$, cero para $x < 0$

53. **(a)** Qr^3/R^3, kQr^2/R^3; **(b)** $3kQr'\ dr'/R^3$; **(c)** $(3kQ/2R^3)(R^2 - r^2)$; **(d)** $(kQ)/2R)(3 - r^2/R^2)$

55. (c)

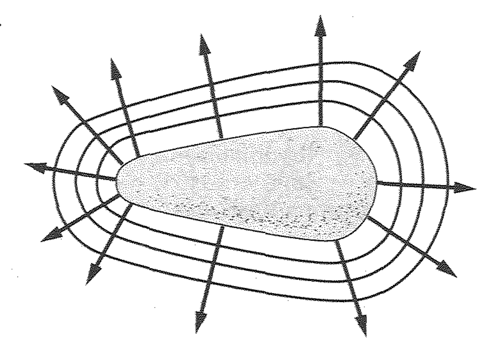
57.

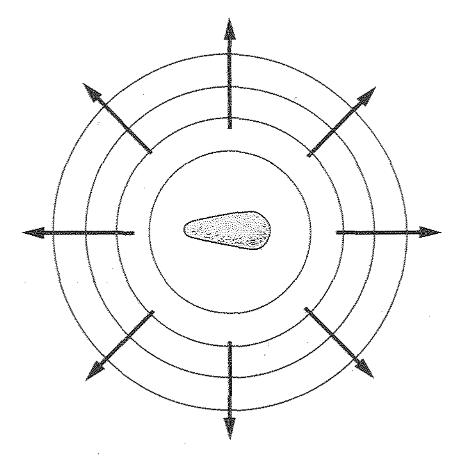


www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

59.





61. $5{,}06 \times 10^{-4}$ m

63. (a) $\pm 8{,}54$ N/C; (b) $\pm 4{,}80 \times 10^5$ V

65. La esfera menor posee un campo eléctrico superior en un factor de 2.

67. $kq(1/a - 1/b)$

69. (b)

71. (c)

73. (a) No; (b) Sí, sí

75. (a) kg/Cs^2; (b) $q_0ax^2/2$; (c) $-ax^2/2$

77. $3{,}33 \times 10^{-3}$ m

79. 20 μC

81. 250 W

83. $1{,}45 \times 10^{-7}$ J, $9{,}03 \times 10^{11}$ eV

85. $2R_1/3$

87. 50 cm

89. 6000 V

91. $4{,}46 \times 10^{-14}$ m

93. 55,1 J

95. (a) $kq_1/x^2 + kq_2/(x-a)^2$ para $x > a$, $kq_1/x^2 - kq_2/(a-x)^2$ para $0 < x < a$, $-kq_1/x^2 - kq_2/(x-a)^2$ para $x < 0$;
(b) $kq_1/|y| + kq_2/(y^2 + a^2)^{1/2}$;
(c) $\pm kq_1/y^2 + kq_2y/(y^2 + a^2)^{3/2}$ (positivo para $y > 0$ y negativo para $y < 0$)

97. (a) $V(a) = kQ(1/b - 1/c)$, $V(b) = kQ(1/b - 1/c)$, $V(c) = 0$;
(b) $V(a) = 0$, $V(b) = kQ(b-a)(c-b)/b^2(c-a)$, $V(c) = 0$,

$$Q_a = -Q\frac{a}{b}\left(\frac{c-b}{c-a}\right),\ Q_b = Q,\ Q_c = -Q\frac{c}{b}\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 25

Sección	1	2		3	4			5			6
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Problemas de nivel intermedio											
Energía potencial electrostática											
5	■										
Almacenamiento de energía eléctrica											
23				■							
Asociaciones de condensadores											
31					■						
33					■		■				
35							■				
37					■		■				
39					■		■				
Condensadores de placas paralelas											
43											
Condensadores esféricos											
49											
Condensadores desconectados y reconectados											
53						■					
55						■					
57						■					
Dieléctricos											
63								■			
65								■			
67								■			
69											
71									■	■	
Problemas generales											
79											
81									■		
83				■							
85											
87					■	■					
89											
91									■		
93											
95									■		
97									■	■	
99										■	

1. (a) $3{,}00 \times 10^{-2}$ J; (b) $-5{,}99 \times 10^{-3}$ J; (c) $-1{,}80 \times 10^{-2}$ J

3. $2{,}23 \times 10^{-5}$ J

5. $(6\sqrt{2}\ k/ma)^{1/2}\ q$

7. (c)

9. (a) $2{,}22 \times 10^{-8}$ C; (b) $1{,}11 \times 10^{-11}$ F; (c) no cambia

11. (a) $1{,}69 \times 10^{7}$ m^2; (b) 4117 m

13. 2

15. (d)

17. (a) $1{,}5 \times 10^{-2}$ J; (b) $4{,}5 \times 10^{-2}$ J

19. (a) 0,625 J; (b) 1,875 J

21. (a) 10^5 V/m; (b) $4{,}43 \times 10^{-2}$ J/m^3; (c) $8{,}85 \times 10^{-5}$ J;
(d) $1{,}77 \times 10^{-8}$ F; (e) es la misma

23. (a) $1{,}11 \times 10^{-8}$ C; (b) $5{,}53 \times 10^{-7}$ J

25. (a) Verdadero; (b) Falso

27. (a) 100; (b) 10 V; (c) 10^{-5} C

29. $C_2 + C_1C_3/(C_1 + C_3)$

31. (a) $4{,}00 \times 10^{-5}$ C; (b) $V_{10} = 4$ V, $V_{20} = 2$V

33. (a) 15,2 μF; (b) $Q_{12} = 2{,}400\ \mu$C, $Q_4 = Q_{15} = 632\ \mu$C
(c) 0,303 J

35. (a) 0,242 μF;
(b) $Q_{0,30} = 2{,}42\ \mu$C, $Q_{1,0} = 1{,}94\ \mu$C $Q_{0,25} = 0{,}484\ \mu$C
(c) $1{,}21 \times 10^{-5}$ J

37. (a) 5,0 μF; (b) 133 V

39. 3 μF, 5 μF, 6 μF, 7 μF (paralelo); (4/7) μF, (4/5) μF, (4/3) μF, (2/3) μF (series); (6/7) μF, (10/7) μF, (12/7) μF, (1 en serie, 2 en paralelo); (14/5) μF, (7/3) μF, (14/3) μF, (2 en serie, 1 en paralelo)

41. (a) 40 V; (b) 4,24 m^2

43. (a) 0,333 mm; (b) 3,77 m^2

45. (a) $1{,}55 \times 10^{-12}$ F; (b) $1{,}55 \times 10^{-8}$ C/m

47. $1{,}79 \times 10^{-10}$ F/m

49. (a) kQ/r^2 entre las esferas, cero en cualquier otro lugar, $\eta = \epsilon_0 k^2Q^2/2r^4$;
(b) $(kQ^2/2r^2)\ dr$; (c) $(\frac{1}{2})kQ^2\ (R_2 - R_1)/R_1R_1$

51. $5R/3$

53. (a) 2,0 kV; (b) 0

55. (a) 2,4 μF; (b) $3{,}60 \times 10^{-4}$ J

57. (a) 6 V; (b) $1{,}15 \times 10^{-3}$ J, $2{,}88 \times 10^{-4}$ J

59. (a) 200 V, 200 V, 200 V;
(b) $Q_1 = -533\ \mu$C, $Q_2 = -133\ \mu$C, $Q_3 = 267\ \mu$C;
(c) $V_1 = -267$ V, $V_2 = -133$ V, $V_3 = 400$ V

61. 2,71 nF

63. (a) $kQ/\kappa r^2$ entre las esferas, cero en cualquier otro lugar,
$\eta = \epsilon_0 k^2Q^2/2\kappa^2r^4$;
(b) $(kQ^2/2\kappa r^2)\ dr$; (c) $kQ^2(R_2 - R_1)/2\kappa R_1\ R_2$

65. $4\kappa_1\kappa_2C_0/(3\kappa_1 + \kappa_2)$

67. (a) $1{,}67 \times 10^{-8}$ F; (b) $1{,}17 \times 10^{-9}$ C; (c) 7×10^{6} V/m

69. (a) 2,08; (b) 45,2 cm^2; (c) 5,2 nC

71. (a) $2{,}5 \times 10^{4}$ V/m $6{,}64 \times 10^{-7}$ J; (b) $6{,}25 \times 10^{3}$ V/m;
(c) 25 V; (d) $1{,}66 \times 10^{-7}$ J

73. (a) Falso (b) Falso (c) Falso

75. (a) 14 μF; (b) (8/7) μF

77. 1,0 mm

79. $C_1C_4 = C_2C_3$

81. $2/(\kappa + 2)$

83. (a) $\epsilon_0 A/2d$; (b) 2 V; (c) $\epsilon_0 AV^2/d$; (d) $\epsilon_0 AV^2/2d$

85. Para un globo de radio 3 m, $C = 0{,}3$ nF

87. (a) 40 V; (b) $1{,}49 \times 10^{-5}$ m^2; (c) 6

89. 6,67 cm

91. (a) $Q/\kappa_1 A\epsilon_0$, $Q/\kappa_2 A\epsilon_0$; (b) $(Q/2C_0)(1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)$;
(c), (d) La respuesta viene dada en el problema

93. (a) Como las placas del condensador son conductoras, los potenciales son iguales para las placas superior e inferior. Así, el sistema es equivalente a los dos condensadores en paralelo, cada uno de área $A/2$.
(b) La respuesta viene dada en el problema

95. (a) $(\epsilon_0 b/d)[\kappa - 1)\ x + a]$;
(b) La respuesta viene dada en el problema

97. $2{,}55 \times 10^{-6}$ J

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

99. (a) $(\epsilon_0 bV^2/2d)[\kappa - 1)\ x + a]$; (b) $(\epsilon_0 bV^2/2d)(\kappa - 1)$

101. (a) $2{,}51 \times 10^3\ m^3$; (b) $5{,}02 \times 10^{-2}\ m^3$

103. (a) $2kQ/\kappa L\ \ln(b/a)$; (b) $Q/2\pi aL$, $-Q/2\pi bL$;
(c) $-Q(\kappa - 1)/2\pi aL\kappa$, $Q(\kappa - 1)/2\pi bL\kappa$;
(d) $kQ^2/\kappa L\ \ln(b/a)$; (e) $(kQ^2/L\kappa)(\kappa - 1)\ \ln(b/a)$

105. $3{,}89 \times 10^{-11}$ F

107. 0,1 μF, 32 μC

109. (a) 0,001 J; (b) 47,6 μC, 152 μC; (c) $4{,}76 \times 10^{-4}$ J

111. (a) $C(V) = C_0[1 + (\kappa\epsilon_0\ V^2/2Yd^2)]$ si $\Delta x \ll d$;
$C(V) = 0{,}133(1 + 6{,}64 \times 10^{-11}\ V^2)\ \mu F/m^2$;
(b) 7,97 kV; (c) 99,8%, 0,2%

113. (a) 5×10^{-4} J; (b) $1{,}59 \times 10^{-4}$ N·m

CAPÍTULO 26

Sección	1		2			3			4				5				6		
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Problemas de nivel intermedio																			
Corriente y movimiento de cargas																			
7																			
9		■																	
11		■																	
Resistencia y ley de Ohm																			
25			■																
27																			
29				■															
31			■	■	■														
Dependencia de la resistencia con la temperatura																			
41																			
43																			
La energía en los circuitos eléctricos																			
57																			
59							■												
61							■												
Combinaciones de resistencias																			
71									■	■	■								
73																			
75									■	■	■	■							
77																			
79											■	■							
Reglas de Kirchhoff																			
85															■	■			
87															■	■			
89																			
91															■	■			
93																			
Circuitos RC																			
107																		■	
109																		■	
111																		■	
113																			
115																			
Problemas generales																			
133			■		■														
135			■																
137																			
139															■	■			
141																			
143																			
145		■																	

1. Los campos eléctricos dentro de un conductor desplazan en éste sus electrones libres; el conductor deja de estar en equilibrio estático.

3. $2{,}81 \times 10^{-4}$ m/s

5. (a) $5{,}93 \times 10^7$ m/s; (b) $3{,}73 \times 10^{-5}$ F

7. $\lambda\omega a$

9. (a) $3{,}21 \times 10^{13}$ protones/m³; (b) $3{,}75 \times 10^{17}$ protones;
(c) $(10^{-3}$ C/s$)t$

11. (a) $1{,}04 \times 10^8$ protones/m; (b) $1{,}04 \times 10^{14}$ protones/m³

13. (e)

15. Batería (química), generador (mecánica)

17. (b)

19. (a) 33 Ω; (b) (3/4) A

21. 8,98 mm

23. 1,95 V

25. $5{,}88 \times 10^{17}$ m

www.elsolucionario.net

27. **(a)** 5,88; **(b)** hierro

29. **(a)** 79,6 Ω; **(b)** 318 Ω

31. **(a)** 0,323 Ω; **(b)** $6{,}96 \times 10^{-2}$ V/m; **(c)** $2{,}38 \times 10^{5}$ s

33. **(a)** 1,28 Ω; **(b)** 0,029 Ω

35. $\rho L/\pi ab$

37. **(a)** $(\rho/2\pi L)\ln(b/a)$; **(b)** 2,05 A

39. 45,6 °C

41. **(a)** 15 A; **(b)** 11,1 Ω; **(c)** 1,29 kW

43. 1750 K

45. (d)

47. disminuye

49. **(a)** 2,88 kW; **(b)** 1,44 kW

51. **(a)** 57,6 Ω, 4,17 A; **(b)** 250 W

53. 0,03 Ω

55. $77,76

57. **(a)** 8 min 13 s; **(b)** 52 min 13 s

59. **(a)** $6{,}91 \times 10^{6}$ J; **(b)** 12 h 48 min

61. **(a)** 26,7 kW; **(b)** $5{,}76 \times 10^{6}$ C; (c) $6{,}91 \times 10^{7}$ J;
(d) 57,6 km; **(e)** 3 cents/km

63. (b)

65. (e)

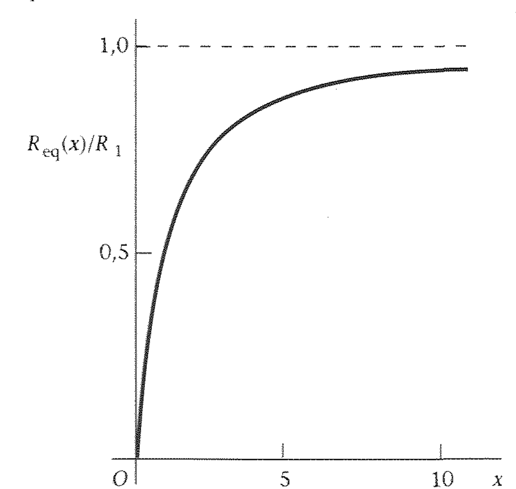
67. **(a)** 4,5 Ω; **(b)** $I_3 = 2{,}67$ A, $I_6 = 0{,}67$ A, $I_2 = 2{,}0$ A

69. **(a)** 16 V; **(b)** 2 A

71. **(a)** I_2 (serie) = 2,14 A, $I_4 = 0{,}43$ A, I_2 (paralelo) = 0,86 A;
(b) 12,8 W

73. **(a)** $R_{eq} = xR_1/(1 + x)$

(b)



75. **(a)** 4,10 Ω;
(b) $I_6 = 1{,}43$ A, I_4 (superior) = 0,86 A, $I_{2,4} = 0{,}57$ A, I_4 (inferior) = 1,50 A, $I_8 = 0{,}75$ A

77. 11,3 Ω

79. La respuesta viene dada en el problema

81. (b)

83. **(a)** 1 A;
(b) 12 W suministrada por la batería de 12 V, 6 W absorbida por la batería de 6 V;
(c) 2 W en la resistencia de 2 Ω, 4 W en la resistencia de 4 Ω

85. 600 Ω

87. **(a)** $I_4 = \frac{2}{3}$ A, $I_3 = \frac{8}{9}$ A, $I_6 = \frac{14}{9}$ A;
(b) $\frac{28}{3}$ V;
(c) 8 W (batería izquierda), $\frac{32}{3}$ W (batería derecha)

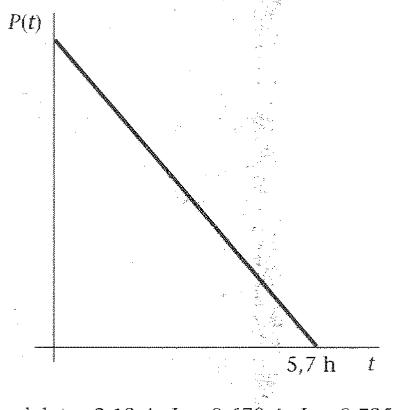
89. Mayor cuando $R < r$ (paralelo) y $R > r$ (serie)

91. 2,4 V

93. **(a)** Para $R > 0{,}4$ Ω conectar en serie y para $R < 0{,}4$ Ω conectar en paralelo;
(b) 107 A; **(c)** 6,67 A; **(d)** 5,45 A; **(e)** 4,44 A

95. **(a)** $I_1 = -57{,}0\text{ A} + (10\text{ A/h})t$, $I_2 = 63{,}0\text{ A} - (10\text{ A/h})t$

(b)



97. I_3 (paralelo) = 2,13 A, $I_4 = 0{,}678$ A, $I_5 = 0{,}735$ A, $I_2 = 2{,}807$ A, I_3 (serie) = 0,057 A

99. (b)

101. (e)

103. **(a)** no se modifica; **(b)** disminuye; **(c)** se duplica

105. **(a)** 6×10^{-4} C; **(b)** 0,2 A; **(c)** 3×10^{-3} s; **(d)** $8{,}12 \times 10^{-5}$ C

107. $2{,}18 \times 10^{6}$ Ω

109. **(a)** 8 μC; **(b)** 0,0737 s

111. **(a)** 5,69 μC; **(b)** 1,10 μA; **(c)** 1,10 μA;
(d) $6{,}62 \times 10^{-6}$ W; **(e)** $2{,}44 \times 10^{-6}$ W; **(f)** $4{,}19 \times 10^{-6}$ W

113. **(a)** 25 A; **(b)** 0,4 Ω, 10 Ω, 6,67 Ω

115. La respuesta viene dada en el problema

117. **(a)** 0,25 A; **(b)** 0,0625 A;
(c) $I_{600} = 0{,}0625(1 - e^{-t/0{,}00075})$

119. **(a)** 0; **(b)** nunca

121. Para evitar que una fracción importante de energía se pierda en la resistencia interna de la batería.

123. Sí

125. (c)

127. La bombilla de 25 W, porque posee mayor resistencia operativa.

129. **(a)** 0,707 A; **(b)** 7,07 V

131. **(a)** 30 A; **(b)** 4 V

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

133. (a) 3,11 V; (b) 0,0779 V/m; (c) 18,7 W

135. 2,03 m

137. (a) 3,42 A; (b) 0,962 A;
(c) 260 μC (10 μF), 130 μC (5μF)

139. (a) 9800 Ω,
(b) Para x = 98,2 cm, R_x = 10,911 Ω. Para x = 97,8 cm, R_x = 8891 Ω. Los errores son 11,3% y 9,28% respectivamente.
(c) Incrementando a 9800 Ω.

141. 0,2 Ω

143. $359

145. (a) 0,05 A; (b) 5000 W

147. (a) 0,01 s; (b) 0,2 V + 79 980 (V/s)t;
(c) 10^9 Ω; (d) $6,09 \times 10^{-11}$ s;
(e) 1,28 W, $1,76 \times 10^4$ W

149. I_{10} = 0,740 A, I_{40} = 0,472 A, I_{30} = 0,383 A, I_{80} = 0,357 A, I_{20} = 0,855 A

151. (a) $QC_1/(C_1 + C_2)$, $QC_2/(C_1 + C_2)$;
(b) $\frac{1}{2}Q^2/C_1$, $\frac{1}{2}Q^2/(C_1 + C_2)$;
(c) El calor generado en la resistencia R

153. (a) 0,12 A; (b) 0,04 A; (c) 8 V;
(d) 6 V; (e) $0,04e^{-133,3t}$ A

155. (a) 10^{12} electrones; (b) 0,16 mA;
(c) $6,4 \times 10^8$ W; (e) 10^{-4}

CAPÍTULO 27

Sección	2					5		6		
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Problemas de nivel intermedio										
El gas de electrones de Fermi										
13										
Teoría cuántica de la conducción eléctrica										
19										
Teoría de bandas de sólidos										
25		■								
Distribución de Fermi-Dirac										
29								■	■	■
31									■	■
33										
35										
37										

1. En forma de energía interna

3. (a) $1,23 \times 10^{-7}$ Ω·m; (b) $7,10 \times 10^{-8}$ Ω·m

5. 3 electrones/átomo de Al.

7. (a) $1,36 \times 10^5$ K; (b) $2,46 \times 10^4$ K; (c) $1,18 \times 10^5$ K

9. (a) 11,7 eV; (b) 2,12 eV; (c) 10,2 eV

11. (a) $1,30 \times 10^5$ K; (b) 11,2 eV

13. (a), (b) Las respuestas viene dadas en el problema
(c) $6,36 \times 10^{10}$ N/m, menos de la mitad del calor medido. En este cálculo, el gas ideal y por ello, no se tienen en cuenta las interacciones electrón-electrón.

15. (a) Au, Ag; (b) 0,1 eV

17. El efecto de impurezas en el latón es superior

19. (a) 66,1 nm; (b) $1,77 \times 10^{-20}$ m^2

21. (b)

23. $1,68 \times 10^{-6}$ m

25. (a) 0,37 eV; (b) 4300 K

27. (a) $2,17 \times 10^{-3}$ eV; (b) 0,455 mm

29. La respuesta viene dada en el problema

31. Aproximadamente 1,0

33. La respuesta viene dada en el problema

35. 60%

37. La respuesta viene dada en el problema

39. La respuesta viene dada en el problema

41. (a) $4,57 \times 10^{45}$ neutrones/m^3; (b) $5,48 \times 10^8$ W;

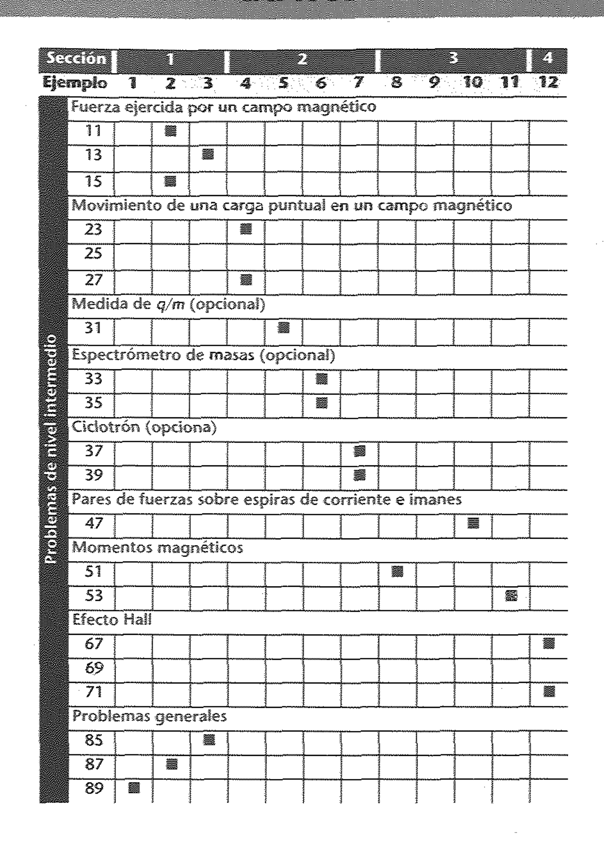
43. La resistividad del cobre crece y la del silicio disminuye.

45. (a) $8,62 \times 10^{22}$ electrones/cm^3; (b) $13,1 \times 10^{22}$ electrones/cm^3

47. (a) $3,12 \times 10^{15}$ pares/s; (b) $3,12 \times 10^{15}$ pares/s; (c) 8×10^{-4} W

www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 28



Sección	1			2				3				4
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Problemas de nivel intermedio												
Fuerza ejercida por un campo magnético												
11		■										
13			■									
15		■										
Movimiento de una carga puntual en un campo magnético												
23				■								
25												
27				■								
Medida de *q/m* (opcional)												
31					■							
Espectrómetro de masas (opcional)												
33						■						
35						■						
Ciclotrón (opciona)												
37							■					
39							■					
Pares de fuerzas sobre espiras de corriente e imanes												
47										■		
Momentos magnéticos												
51								■				
53											■	
Efecto Hall												
67												■
69												
71												■
Problemas generales												
85			■									
87		■										
89	■											

1. (b)

3. $-1{,}25 \times 10^{-12}$ N **j**

5. **(a)** $-6{,}39 \times 10^{-13}$ N **j**; **(b)** $8{,}76 \times 10^{-13}$ N **i**; **(c)** 0

7. 0,962 N

9. $(-1{,}92\mathbf{i} - 1{,}28\mathbf{j} - 5{,}76\mathbf{k}) \times 10^{-13}$ N

11. 1,48 A

13. La respuesta viene dada en el problema

15. 10 T **i** + 10 T **j** – 15 T **k**

17. Falso

19. **(a)** $8{,}74 \times 10^{-8}$ s; **(b)** $4{,}67 \times 10^{7}$ m/s; **(c)** $1{,}82 \times 10^{-12}$ J

21. **(a)** 142 m; **(b)** 2,85 m

23. **(a)** $v_p/v_\alpha = 2$; **(b)** $K_p/K_\alpha = 1$; **(c)** $L_p/L_\alpha = 1/2$

25. La respuesta viene dada en el problema

27. **(a)** $12{,}6 \times 10^{6}$ m/s, 24°; **(b)** $6{,}28 \times 10^{6}$ m/s, 24°

29. **(a)** $1{,}64 \times 10^{6}$ m/s; **(b)** 14,1 keV; **(c)** 7,68 eV

31. **(a)** 7,35 mm; **(b)** $6{,}64 \times 10^{-5}$ T

33. **(a)** 63,5 cm; **(b)** 2,59 cm

35. $1{,}57 \times 10^{-5}$ s; $1{,}63 \times 10^{-5}$ s

37. **(a)** $2{,}13 \times 10^{7}$ Hz; **(b)** 46,0 MeV; **(c)** f y K se reducen en un factor 2.

39. La respuesta viene dada en el problema

41. Si el plano de la espira de corriente es paralelo al campo.

43. $2{,}83 \times 10^{-5}$ N·m

45. **(a)** 0; **(b)** $2{,}08 \times 10^{-3}$ N·m

47. **(a)** 37° por debajo del eje x; **(b)** $0{,}799\mathbf{i} - 0{,}602\mathbf{j}$; **(c)** $[0{,}335\mathbf{i} - 0{,}2{,}53\mathbf{j}]$ A·m²; **(d)** 0,503 N·m **k**; **(e)** 0,380 J

49. La respuesta viene dada en el problema.

51. 0,377 A·m² en dirección hacia la página.

53. Las respuestas vienen dadas en el problema.

55. 0,02 A·m²

57. Las respuestas vienen dadas en el problema.

59. $\frac{4}{3}\pi\sigma\omega R^4$

61. $2^{-1/4}R$

63. $(\pi\omega L\rho_0/4)(2R_s^4 - R_i^4 - R_o^4)$

65. $(\pi/4)\omega\rho_0 R^5$, opuesto a la dirección de $\boldsymbol{\omega}$.

67. **(a)** $3{,}69 \times 10^{-5}$ m/s; **(b)** 1,48 μV

69. $1{,}02 \times 10^{-3}$ V

71. 3,5 electrones/átomo de Al.

73. **(a)** verdadero; **(b)** verdadero; **(c)** verdadero; **(d)** falso; **(e)** verdadero

75. (c)

77. (e)

79. (c)

81. 8,78 N/m **k**

83. La respuesta viene dada en el problema.

85. La respuestas vienen dadas en el problema.

87. **(a)** $(mg/I\ell)$ tg θ; **(b)** g sen θ

89. **(a)** $1{,}6 \times 10^{-18}$ N **j**; **(b)** 10 V/m **j**; **(c)** 20 V

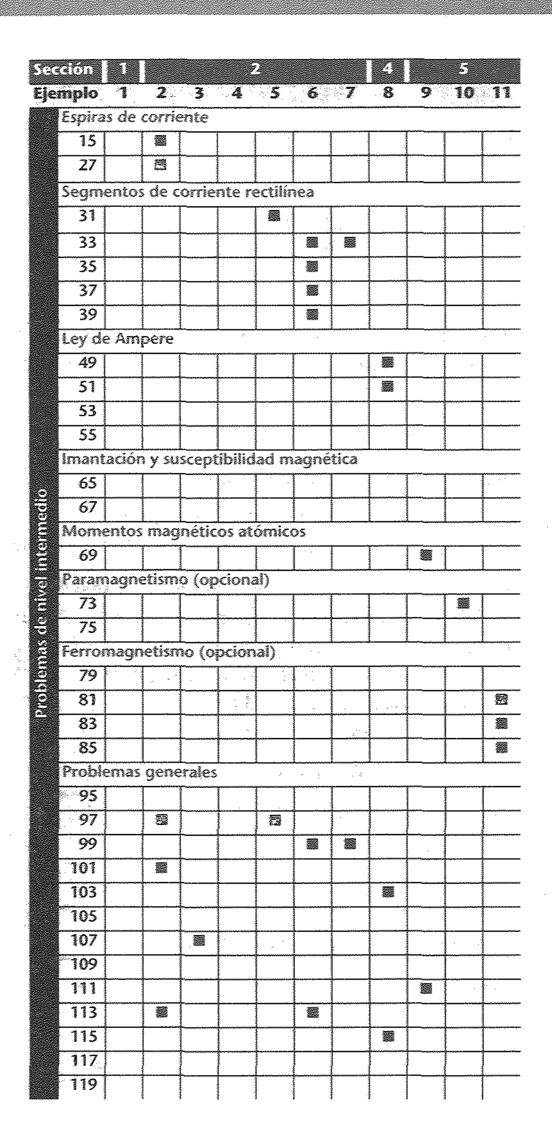
91. 5,10 m

93. $2\pi(M/\pi IB)^{1/2}$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 29



Problemas de nivel intermedio

Sección	1	2						4	5		
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Espiras de corriente											
15		■									
27		■									
Segmentos de corriente rectilínea											
31					■						
33						■	■				
35						■					
37						■					
39						■					
Ley de Ampere											
49								■			
51								■			
53											
55											
Imantación y susceptibilidad magnética											
65											
67											
Momentos magnéticos atómicos											
69									■		
Paramagnetismo (opcional)											
73										■	
75											
Ferromagnetismo (opcional)											
79											
81											■
83											■
85											■
Problemas generales											
95											
97		■			■						
99						■	■				
101		■									
103								■			
105											
107			■								
109											
111									■		
113		■				■					
115								■			
117											
119											

1. **(a)** opuestas; **(b)** iguales

3. **(a)** $1{,}27 \times 10^{-11}$ T **k**; **(b)** 0; **(c)** $3{,}22 \times 10^{-12}$ T **k**

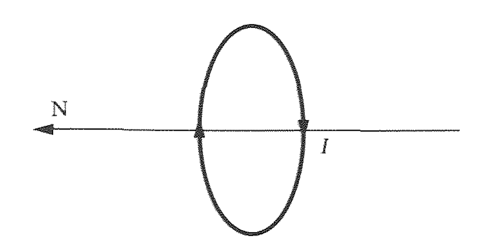
5. 12,5 T

7. (a), (b)

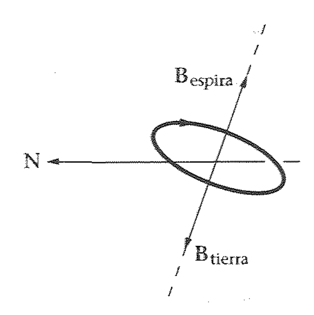
9. $-9{,}6 \times 10^{-12}$ T **i**

11. No

13. 11,1 A

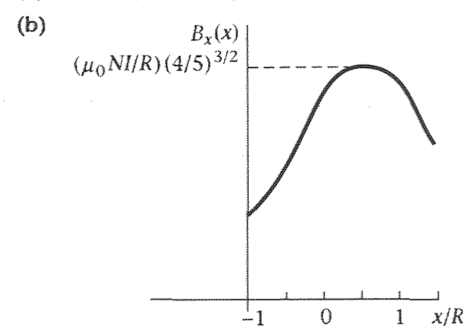


15. 9,47 A



17. **(a)** 0,0540 T, 0,0539 T, 0,0526 T, 0,0486 T

(b)

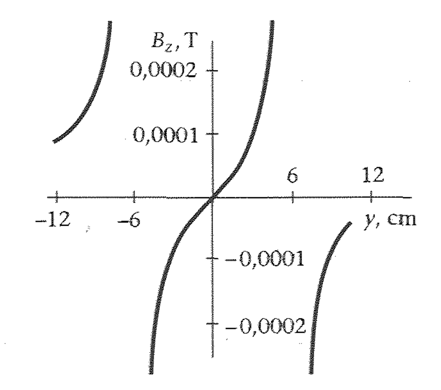


19. (c)

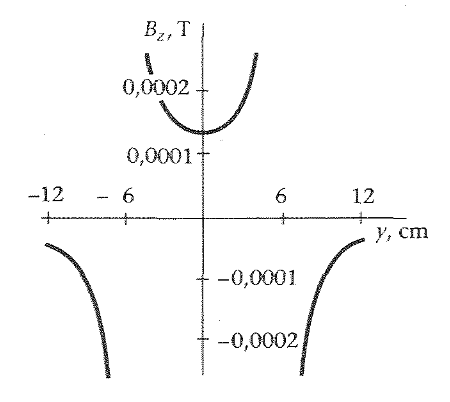
21. (c)

23. **(a)** 2×10^{-5} T; **(b)** 4×10^{-6} T; **(c)** 10^{-6} T

25.



27.



29. $6{,}67 \times 10^{-4}$ N/m

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

31. $B_{1\,cm}$ = 56,6 μT, en dirección hacia la página; $B_{2\,cm}$ = 113 μT, en dirección hacia la página; B_{total} = 226 μT

33. **(a)** $7{,}79 \times 10^{-4}$ N/m, hacia arriba; **(b)** $5{,}20 \times 10^{-5}$ T, hacia la derecha

35. A lo largo de la línea $y = x$, excepto en $x = y = 0$, el campo no está definido.

37. **(a)** $(3\mu_0 I/3\pi L)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$; **(b)** $(\mu_0 I/4\pi L)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$; (c) $(\mu_0 I/4\pi L)(-\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$

39. $[(1 + \sqrt{2})\mu_0 I/2\pi R]\mathbf{i}$

41. $6{,}98 \times 10^{-4}$ T

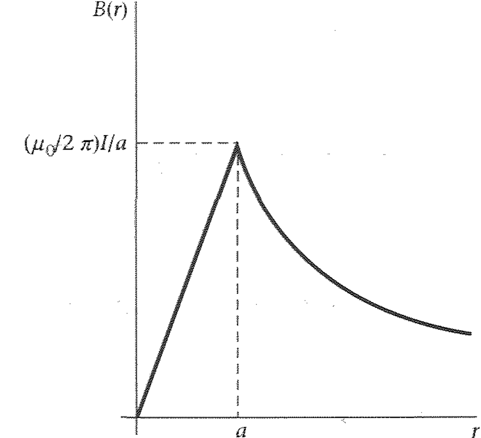
43. Las respuestas se dan en el problema

45. (e)

47. **(a)** C_1: $1{,}01 \times 10^{-5}$ T·m, C_2: 0, C_3: $-1{,}01 \times 10^{-5}$ T·m; **(b)** ninguna

49. **(a)** 8×10^{-4} T; **(b)** 4×10^{-3} T; **(c)** $2{,}86 \times 10^{-3}$ T


(d)



51. **(a)** $2{,}26 \times 10^{-4}$ T·m; **(b)** $1{,}24 \times 10^{-5}$ T·m; **(c)** 0

53. La respuesta se da en el problema

55. **(a)** $-\mathbf{i}$; **(b)** $-\mathbf{i}$; **(c)** $\mathbf{i}$; **(d)** La respuesta se da en el problema

57. (a)

59. Diamagnéticos: hidrógeno, dióxido de carbono, nitrógeno. Paramagnético: oxígeno.

61. $1{,}01 \times 10^{-2}$ T, 0,547 A/m, $1{,}01 \times 10^{-2}$ T

63. $-4{,}00 \times 10^{-5}$

65. $2{,}38 \times 10^{-3}$

67. **(a)** $8{,}12 \times 10^{3}$ A/m; **(b)** $1{,}62 \times 10^{21}$ electrones; **(c)** 24,4 A

69. 0,587 μ_B

71. La respuesta viene dada en el problema

73. **(a)** $5{,}58 \times 10^{5}$ A/m, 0,701 T; **(b)** $5{,}23 \times 10^{-4}$; **(c)** μ es menor que μ_B. Los efectos diamagnéticos se han despreciado y estos efectos tienden a reducir la susceptibilidad.

75. **(a)** 95,5 A/m; **(b)** 0,0301 T; **(c)** 0,4%

77. 0,864 T, $6{,}87 \times 10^{5}$ A/m

79. 11,0 A

81. **(a)** $1{,}26 \times 10^{-3}$ T; **(b)** $1{,}26 \times 10^{6}$ A/m; **(c)** 1250

83. **(a)** 0,096 T; **(b)** 0,96 N/m

85. 0,755 T

87. **(a)** Falso; **(b)** Verdadero; **(c)** Falso; **(d)** Falso; **(e)** Verdadero

89. No

91. Si la corriente en el tubo es uniforme y paralela al eje, el campo magnético es nulo en el interior. En un solenoide la corriente rodea circularmente al eje.

93. $2{,}36 \times 10^{-5}$ T

95. La respuesta viene dada en el problema.

97. **(a)** $\pi\mu_0 I/\ell$; **(b)** $(8\sqrt{2}/\pi)\mu_0 I/\ell$; **(c)** $(27/2\pi)\mu_0 I/\ell$; El campo mayor es el producido por el triángulo.

99. **(a)** La fuerza sobre cada uno de los segmentos horizontales es 0,251 $\times 10^{-4}$ N, hacia abajo en el segmento superior y hacia arriba en el inferior; la fuerza sobre el segmento vertical izquierdo es 1×10^{-4} N hacia la derecha y la fuerza sobre el segmento vertical derecho es $0{,}286 \times 10^{-4}$ hacia la izquierda. **(b)** $0{,}714 \times 10^{-4}$ N, hacia la derecha

101. $7{,}07 \times 10^{-6}$ T, en dirección hacia la página.

103. **(a)** 1,64 mT; **(b)** 1,05 mT; **(c)** 17,2 A

105. 1,05 N·m/rad, 0,524 s

107. 0,512 s

109. **(a)** 0,0524 A·m^2; **(b)** $7{,}70 \times 10^{5}$ A/m; **(c)** $2{,}31 \times 10^{4}$ A

111. **(a)** 70,5 A·m^2; **(b)** 17,6 N·m

113. 3,18 cm

115. **(a)** 10^{-5} T; **(b)** 10^{-5} T; **(c)** 5×10^{-6} T

117. $2{,}32 \times 10^{-22}$ J = $1{,}45 \times 10^{-3}$ eV

119. 6,26 T

121. **(a)** $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)}\left[\dfrac{R}{2} - \dfrac{a^2}{2R - b}\right]\mathbf{j}$;

(b) $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)}\left(\dfrac{R}{2} - \dfrac{2a^2 R}{4R^2 + b^2}\right)\mathbf{i} - \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)}\left(\dfrac{a^2 b}{4R^2 + b^2}\right)\mathbf{j}$

123. $\mathbf{B} = 2\dfrac{\mu_0}{4\pi x^3}\left(\dfrac{I\ell^2}{[1 + (\ell^2/4x)][1 + (\ell^2/2x^2)]^{1/2}}\right)\mathbf{i}$.

En el límite $x \gg 1$, esta expresión se reduce a

$\mathbf{B} = 2\dfrac{\mu_0 I\ell^2}{4\pi x^3}\mathbf{i} = \dfrac{\mu_0 2\boldsymbol{\mu}}{4\pi x^3}$ donde $\boldsymbol{\mu} = I\ell^2\mathbf{i}$.

125. $r < R$: $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}(1 - e^{-r/a})$; $r > R$: $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}(1 - e^{-R/a})$

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 30

Problemas de nivel intermedio

Sección	1	2				3	4		6	7	8		
Ejemplo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Flujo magnético													
7	■												
9	■												
Fem inducida y ley de Faraday													
19					■								
21					■								
23		■											
Fem de movimiento (opcional)													
33													
35						■	■						
37							■						
39						■	■	■					
41						■	■						
43						■	■	■					
Inductancia													
51									■				
53													
Energía magnética													
61													
63													
Circuitos *RL*													
67											■		
69											■		
71											■		
73													
75											■		
77											■		
Problemas generales													
85						■							
87													
89						■							
91					■								
93	■				■								

1. **(a)** 5×10^{-4} Wb; **(b)** $4{,}33 \times 10^{-4}$ Wb; **(c)** $2{,}5 \times 10^{-4}$ Wb; **(d)** 0

3. **(a)** $4{,}2 \times 10^{-2}$ Wb; **(b)** $2{,}1 \times 10^{-2}$ Wb;

5. $\pi R^2 B$

7. $6{,}74 \times 10^{-3}$ Wb

9. **(a)** $\mu_0 hNI\pi R_1^2$; **(b)** $\mu_0 hNI\pi R_3^2$

11. $\mu_0 I/4\pi$

13. (d)

15. **(a)** $(-0{,}2t + 0{,}4)$ V;
(b) $t = 0$ s: 0 Wb y 0,4 V, $t = 2$ s: −0,4 Wb y 0 V, $t = 4$ s: 0 Wb y −0,4 V, $t = 6$ s: 1,2 Wb y −0,8 V

17. $1{,}88 \times 10^{-2}$ V

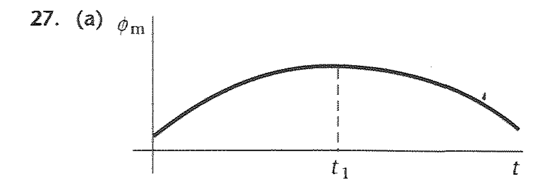
19. **(a)** $1{,}26 \times 10^{-3}$ C; **(b)** 12,6 mA; **(c)** 0,628 V

21. 0,798 G

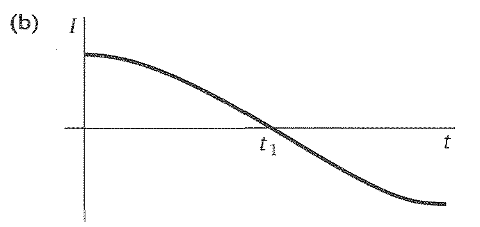
23. **(a)** $\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)4a \ln 3$; **(b)** 6,59 $\mu\Omega$, sentido antihorario

25. **(a)** sentido antihorario; **(b)** sentido horario

27. **(a)**



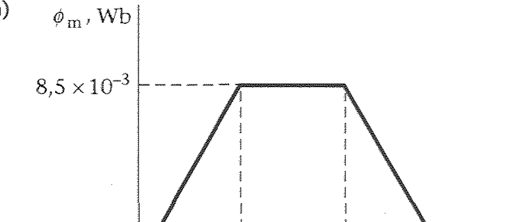
(b)



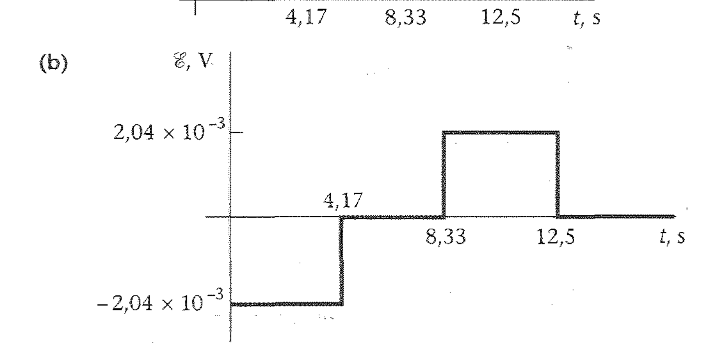
29. **(a)** $6{,}4 \times 10^{-20}$ N; **(b)** 0,4 V/m; **(c)** 0,12 V

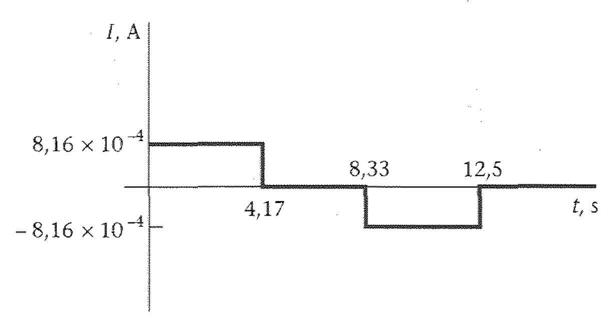
31. **(a)** 1,6 V; **(b)** 0,8 A; **(c)** 0,128 N; **(d)** 1,28 W; **(e)** 1,28 W

33. **(a)**



(b)





35. **(a)** $[(\mathcal{E} - B\ell v)\ell B]/R = ma$; **(b)** $|v| = \mathcal{E}/B\ell$; **(c)** 0

37. $v_0 mR/B^2\ell^2$

39. La respuesta viene dada en el problema

41. **(a)** $1{,}38 \times 10^{-4}$ V/m; **(b)** $5{,}51 \times 10^{-6}$ V

43. $m^2g^2R \operatorname{sen}^2\theta/B^2\ell^2\cos^2\theta$

45. Las respuestas vienen dadas en el problema.

47. Las respuestas vienen dadas en el problema.

49. **(a)** 24 Wb; **(b)** −1600 V

51. **(a)** $6{,}03 \times 10^{-3}$ T; **(b)** $7{,}58 \times 10^{-4}$ Wb;
(c) 253 μH; **(d)** $|\mathcal{E}| = 37{,}9$ mV

www.elsolucionario.net

53. 162 Ω, 0

55. 12 mH

57. (c)

59. **(a)** $4{,}43 \times 10^{-4}$ J; **(b)** $9{,}95 \times 10^{4}$ J; **(c)** $9{,}95 \times 10^{4}$ J

61. **(a)** 0,0536 J; **(b)** 447 J/m^3; **(c)** 0,0335 T; **(d)** 447 J/m^3

63. **(a)** 7958; **(b)** 2,55 T; **(c)** $2{,}58 \times 10^{6}$ J/m^3, 5093 J

65. **(a)** 13,5 mA; **(b)** $7{,}44 \times 10^{-44}$ A

67. **(a)** 47,7 W, 48,0 W; **(b)** 47,4 W, 48,0 W; **(c)** 0,321 W, 0

69. **(a)** 2,30; **(b)** 4,61; **(c)** 6,91

71. **(a)** 2,41 s; **(b)** 20,1 s

73. La respuesta viene dada en el problema.

75. 20 Ω, 4 H

77. $2{,}31 \times 10^{-4}$ s

79. (a)

81. En el tubo metálico, el imán móvil crea corrientes turbillonarias que producen una fuerza de retardo.

83. **(a)** $7{,}07 \times 10^{-3}$ V; **(b)** $6{,}64 \times 10^{-3}$ V

85. **(a)** La respuesta viene dada en el problema.
(b) 275 rad/s

87. La respuesta viene dada en el problema.

89. (0,35 sen $2t$) A

91. La respuesta viene dada en el problema.

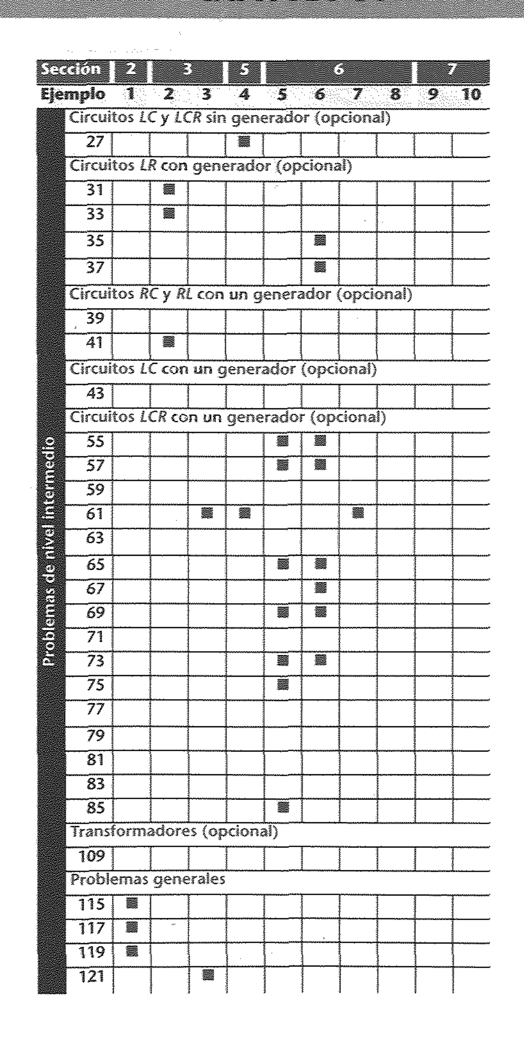
93. **(a)** $-\frac{1}{2}\mu_0 n r I_0 \omega \cos \omega t$; **(b)** $-\frac{1}{2}\mu_0 n (R^2/r) I_0 \omega \cos \omega t$.
En cada caso, el campo eléctrico es tangente al círculo de radio r. El signo menos indica la dirección de **E** relativa a la corriente.

95. **(a)** $\mu_0 I/2\pi r$, no hay corriente incluida para $r < r_1$ y $r > r_2$.
(b)–(d) La respuesta viene dada en el problema.

97. **(a)** $0{,}600v$ A, sentido antihorario;
(b) $-0{,}180v$ N, hacia arriba ($+y$ es hacia abajo;
(c) $(4{,}90 - 0{,}180v)$N; **(d)** $a_y = \frac{-1}{2{,}78}(v - 27{,}2)$m/s^2;
(e) $v = 27{,}2(1 - e^{-t/2{,}78})$ m/s; **(f)** $y = 27{,}2[t - 2{,}78(1 - e^{-t/2{,}78})]$m;
(g) 0,553 s; **(h)** 4,91 m/s; **(i)** 5,24 m/s

99. La respuesta viene dada en el problema.

CAPÍTULO 31



Sección	2	3		5	6				7	
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Circuitos LC y LCR sin generador (opcional)										
27				■						
Circuitos LR con generador (opcional)										
31		■								
33		■								
35						■				
37						■				
Circuitos RC y RL con un generador (opcional)										
39										
41		■								
Circuitos LC con un generador (opcional)										
43										
Circuitos LCR con un generador (opcional)										
55					■	■				
57					■	■				
59										
61			■	■			■			
63										
65					■	■				
67						■				
69					■	■				
71										
73					■	■				
75					■					
77										
79										
81										
83										
85					■					
Transformadores (opcional)										
109										
Problemas generales										
115	■									
117	■									
119	■									
121			■							

Problemas de nivel intermedio

1. **(a)** 39,8 Hz; **(b)** 15,1 V

3. **(a)** 13,6 V; **(b)** 486 Hz

5. (b)

7. **(a)** 0,833 A; **(b)** 1,18 A; **(c)** 200 W

9. **(a)** 21,2 A; **(b)** 1,8 kW

11. (a)

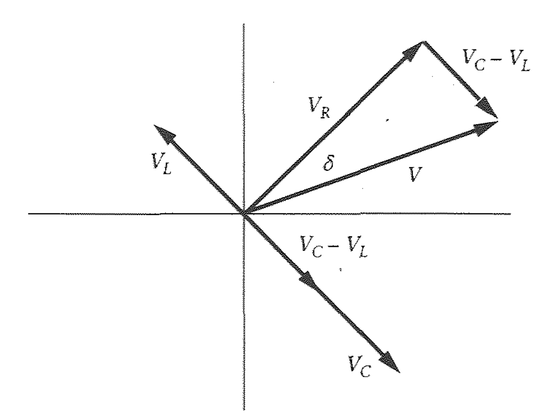
13. Sí, sí

15. **(a)** 0,377 Ω; **(b)** 3,77 Ω; **(c)** 37,7 Ω

17. 1,59 kHz

19. **(a)** 0,025 A; **(b)** 0,0178 A

21.



La fem neta V está atrasada respecto a la corriente I, que posee la misma dirección que V_R en el ángulo δ. En el diagrama es evidente que tg $\delta = (V_C - V_L)/V$.

23. (a)

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

25. La respuesta viene dada en el problema.

27. **(a)** La respuesta viene dada en el problema
(b) tercer circuito

29. **(a)** 0,553; **(b)** 0,663 A; **(c)** 44 W

31. 29,2 mH

33. **(a)** 0,333; **(b)** 26,7 Ω; **(c)** 0,2 H; **(d)** se retrasa 70,5°

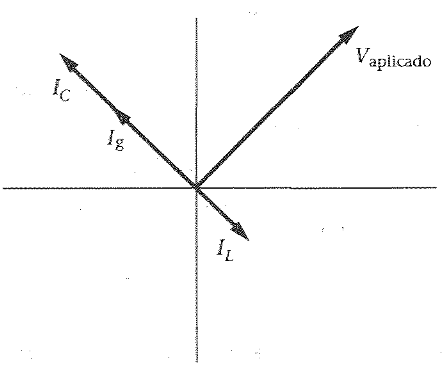
35. 0,397

37. **(a)** 8,81 A, 7,87 A, 3,95 A; **(b)** 4,64 A, 2,07 A, 4,15 A;
(c) 0,502, 0,800

39. 60 V

41. **(a)** 6 Ω; **(b)** 35,5 mH

43. **(a)** $I_C = \omega CV$ adelanta al voltaje en 90°; $I_L = V/\omega L$ está retrasada respecto al voltaje en 90°;
(b) 100 rad/s; **(c)** 0,25 A, 0,25 A;
(d)



45. $1{,}24 \times 10^9$ N/m^2

47. **(a)** Verdadero; **(b)** Verdadero; **(c)** Verdadero

49. Sí, la frecuencia debe sintonizarse con gran precisión para conseguir una buen señal.

51. $9{,}89 \times 10^{-9}$ F a $1{,}01 \times 10^{-7}$ F

53. **(a)** 0,539; **(b)** 95,3 mA; **(c)** 0,727 W

55. **(a)** $7{,}07 \times 10^3$ rad/s; **(b)** 14,1 A; **(c)** 62,5 Ω, 80 Ω;
(d) 18,2 Ω, 3,86 A; **(e)** 74,1°

57. **(a)** 0,155, −81,1°; **(b)** 0,839, −33,0°; **(c)** 0,237, 76,3°

59. 2002

61. **(a)** 18,8 μF, 0,531 A; **(b)** 25 V

63. **(a)** La respuesta viene dada en el problema
(b)

65. **(a)** 450 Hz; **(b)** 0,141; **(c)** 3,25 kHz, 62,4 Hz

67. **(a)** 933 W; **(b)** 7,71 Ω; **(c)** 99,9 μF; **(d)** 40,9 μF, 20,5 mH

69. **(a)** 120 Hz; **(b)** 356 Hz; 2,96; **(c)** 40,7 Hz, 0,338

71. **(a)** 15 W; **(b)** 15 Ω; **(c)** 0,235 H

73. **(a)** 0,8 mH, 12,5 μF; **(b)** 1,6; **(c)** 2 A

75. **(a)** 12 Ω; **(b)** 7,2 Ω of R, 9,6 Ω of X;
(c) capacitiva

77. Las respuestas vienen dadas en el problema.

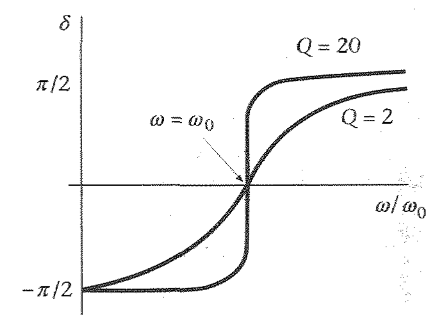
79. **(a)** 40 Ω; **(b)** 41,1 Ω;
(c) cerrado: 0,75ℰ, abierto: 0,73ℰ;
(d) 23,7 Ω, 22,7 Ω, cerrado: 0,701ℰ, abierto: 0,028ℰ
(e) S abierto

81. Suponiendo que la resonancia es aguda, $Q = 1/\omega RC = \omega L/R$

83. 5,66 kHz, 5,66, 1,14 kΩ

85. **(a)** 13,3 MHz; **(b)** 0,5 A, V_L = 1,5 kV, V_C = 1,5 kV;
(c) 0,354 A, V_L = 1,07 kV, V_C = 1,05 kV

87. **(a)**, **(b)** La respuesta viene dada en el problema
(c)



89. Las respuestas vienen dadas en el problema.

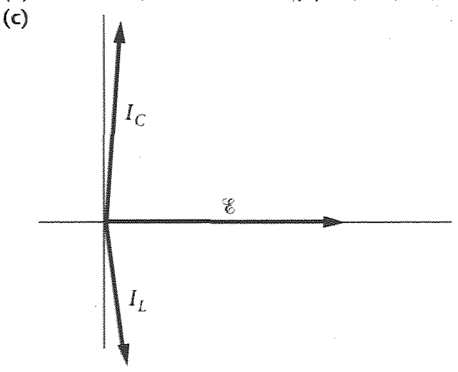
91. La respuesta viene dada en el problema.

93. **(a)** $3{,}55 \times 10^{-5}$ H; **(b)** $1{,}98 \times 10^{-11}$ F; **(c)** $3{,}67 \times 10^{-4}$

95. **(a)** 19,8 MHz; **(b)** 1,10 mm

97. 7,96 kHz

99. **(a)** 1975 rad/s; **(b)** 16,9 Ω, 23,7 Ω;
(c)



(d) 45,3 Ω

101. Verdadero

103. **(a)** 5; **(b)** 50 A

105. **(a)** 1,5 A; **(b)** 19

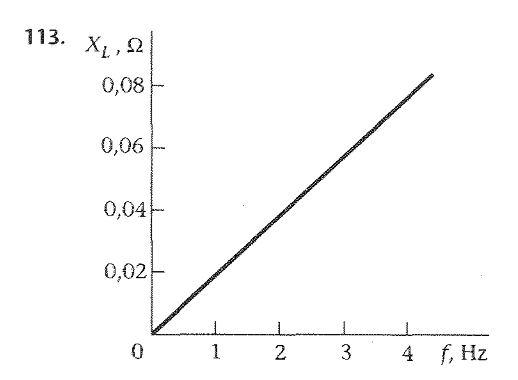
107. 3,333 vueltas

109. La respuesta viene dada en el problema.

111. **(a)** 20,8 A; **(b)** 29,5 A; **(c)** 41,7 A, 58,9 A

www.elsolucionario.net

113.



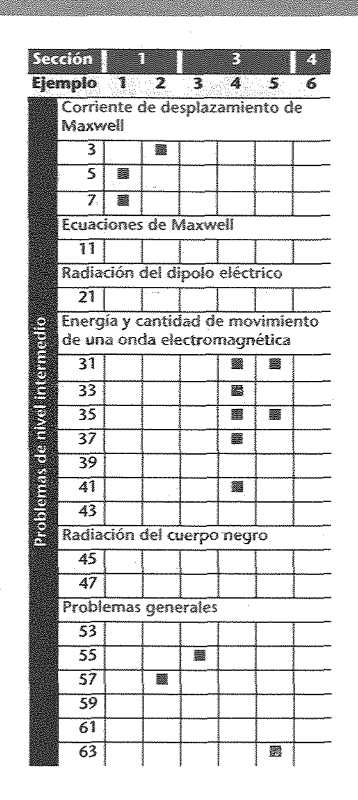
115. **(a)** 6,08 A; **(b)** 444 W; **(c)** 73 V

117. **(a)** 4,74 A; **(b)** 150 W

119. **(a)** 2,00 A, 2,31 A; **(b)** 2,00 A, 2,83 A

121. 45,2 mA, −45,2 mA, 0, 32,0 mA

CAPÍTULO 32



Sección	1		3			4
Ejemplo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Problemas de nivel intermedio						
Corriente de desplazamiento de Maxwell						
3		■				
5	■					
7	■					
Ecuaciones de Maxwell						
11						
Radiación del dipolo eléctrico						
21						
Energía y cantidad de movimiento de una onda electromagnética						
31				■	■	
33				■		
35				■	■	
37				■		
39						
41				■		
43						
Radiación del cuerpo negro						
45						
47						
Problemas generales						
53						
55			■			
57		■				
59						
61						
63					■	

1. **(a)** $3{,}4 \times 10^{14}$ V/m·s; **(b)** 5 A

3. La respuesta viene dada en el problema.

5. **(a)** 10 A; **(b)** $2{,}26 \times 10^{12}$ V/m·s; **(c)** $7{,}89 \times 10^{-7}$ T·m

7. **(a)** $(A/100\rho d)t$; **(b)** $\kappa\epsilon_0 A/100d$; **(c)** $\kappa\epsilon_0\rho$

9. Las respuestas vienen dadas en el problema.

11. Las respuestas vienen dadas en el problema.

13. Mayor.

15. **(a)** 300 m; **(b)** 3 m

17. 3×10^{18} Hz

19. Horizontal y perpendicular a la dirección que une la antena con el receptor.

21. **(a)** 30°; **(b)** 7,07 m

23. $4{,}14 \times 10^{-6}$ W/m², $5{,}21 \times 10^{17}$ fotones/s·cm²

25. $1{,}51 \times 10^{-7}$ W/m²

27. **(a)** 283 V/m; **(b)** 943 nT; **(c)** 212 W/m²; **(d)** 707 nPa

29. La respuesta viene dada en el problema.

31. **(a)** 4×10^{-8} N; **(b)** 8×10^{-8} N

33. **(a)** 12 V/m, 4×10^{-8} T; **(b)** 1,2 V/m, 4×10^{-9} T; **(c)** 0,12 V/m, 4×10^{-10} T

35. **(a)** 3×10^{-12} N; **(b)** 6×10^{-12} N

37. $7{,}52 \times 10^{4}$ V/m, $2{,}51 \times 10^{-4}$ T

39. **(a)** dirección x positiva; **(b)** 0,628 m, $4{,}77 \times 10^{8}$ Hz; **(c)** $\mathbf{E} = (194\ \text{V/m}) \cos[10x - (3 \times 10^9)t]\ \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = (0{,}647 \times 10^{-6}\ \text{T}) \times \cos[10x - (3 \times 10^9)t]\mathbf{k}$

41. $3{,}42 \times 10^{6}$ W/m²

43. $7{,}59 \times 10^{-4}$ kg/m², la relación no cambia.

45. **(a)** 1425 W/m²; **(b)** 907 W/m²; **(c)** 585 V/m; **(d)** $1{,}95 \times 10^{-6}$ T

47. **(a)** 278 K; **(b)** 245 K

49. La respuesta viene dada en el problema.

51. **(a)** Falso; **(b)** Verdadero; **(c)** Verdadero; **(d)** Verdadero; **(e)** Falso; **(f)** Verdadero

53. La salida del receptor varía con el cos θ, en donde θ es el ángulo que forman la normal al plano de la espira y una línea dirigida hacia la fuente.

55. $7{,}25 \times 10^{-3}$ V

57. **(a)** $V_0[(1/R)\ \text{sen}\ \omega t + (\epsilon_0\ \pi a^2\omega/d) \cos \omega t]$; **(b)** $(\mu_0/2\pi)[V_0/aR)\ \text{sen}\ \omega t + (\epsilon_0\ \omega\pi V_0 a/d) \cos \omega t$

59. La respuesta viene dada en el problema.

61. 111 m²

63. 247 mW

65. **(a)** $-\mu_0 nar/2$, tangente al círculo de radio r y opuesto al sentido de la corriente; **(b)** $\mu_0 n^2 a^2\ Rt/2$, apunta hacia dentro en dirección al eje del solenoide **(c)** $\mu_0\ \pi R^2 n^2 a^2 Lt$

67. Las respuestas viene dadas en el problema.

69. Las respuestas viene dadas en el problema.

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 33

Sección	3	4		6		7
Ejemplo	1	2	3	4	5	6
Problemas de nivel intermedio						
Fuentes luminosas						
7	■					
Reflexión y refracción						
23				■		
25						
27						
Reflexión total interna						
35					■	
37					■	
Dispersión						
43						
Polarización						
51						■
53						■
55						■
57						
59						
61						■
Problemas generales						
67					■	
69				■		
71					■	
73						
75						
77		■				
79		■				
83						
85						

1. Los átomos de helio son necesarios para obtener la población de energía invertida en los átomos de neón para producir un haz láser.

3. **(a)** 0,015 J; **(b)** $5{,}24 \times 10^{16}$ fotones.

5. **(a)** 435 nm; **(b)** 1210 nm

7. **(a)** 1140 nm; **(b)** 1140 nm, 285 nm, 554 nm, 588 nm

9. 20 μs

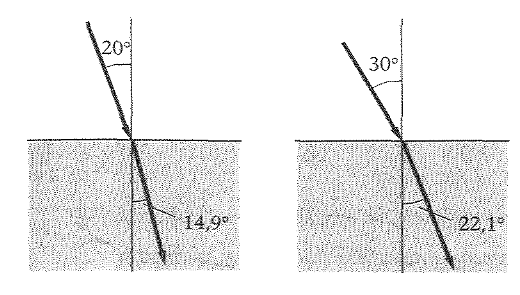
11. $2{,}1 \times 10^6$ años luz.

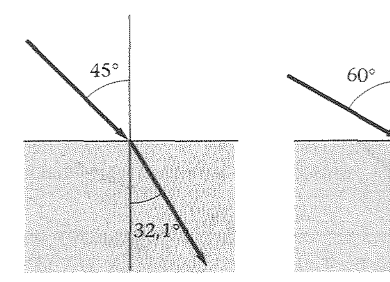
13. ±0,3 m

15. El conductor verá menos luz de sus faros reflejados en la carretera, pero verá más luz reflejada del automóvil que se acerca en sentido contrario.

17. Debido a la refracción producida por la variación de densidad del aire, un rayo procedente de la parte más baja del Sol se curva en la dirección de la curvatura de la Tierra de modo que la posición aparente de esta zona del Sol se eleva y puede verse después de sobrepasar el horizonte. La curvatura de los rayos procedentes de la parte superior del Sol es menor, de modo que su posición se eleva menos que la del fondo, la cual da lugar al aplanamiento observado.

19. **(a)** 14,9°; **(b)** 22,1°; **(c)** 32,1°; **(d)** 40,6°



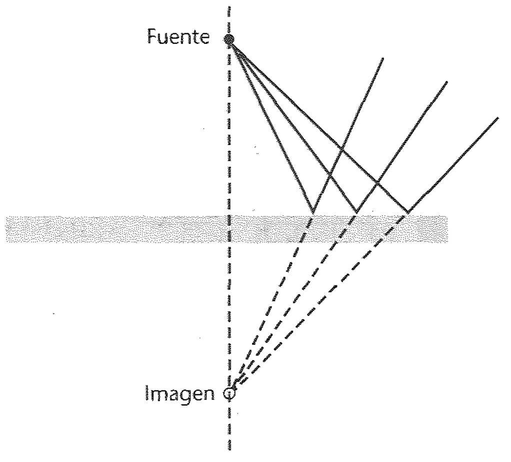


21. $2{,}26 \times 10^8$ m/s, 2×10^8 m/s

23. **(a)** 50,2°; **(b)** 38,8°; **(c)** 26,3°

25. ≈ 92%

27.



29. **(a)** $\text{arcsen}(n^2 - n\sqrt{n^2 - 1})^{1/2}$; **(b)** 48,5°, 2,81 cm

31. **(a)** Sí.
(b) Si la bola se mueve con velocidad constante, la trayectoria de distancia mínima será la trayectoria de tiempo mínimo que es el camino que recorrería un haz de luz, de acuerdo con el principio de Fermat.

33. 48,6°

35. 102 m^2

37. 1,30

39. **(a)** 1,41; **(b)** entre 1,63 y 1,88

41. 2,18 cm

43. 1,1°

45. (b)

47. **(a)** 53,1°; **(b)** 56,3°

49. **(a)** $I_0/8$; **(b)** $3I_0/32$

51. $I = (1/8)I_0 \text{ sen}^2 2\theta$

53. **(a)** $I_0 [\cos(\pi/2N)]^{2N}$; **(b)** $I_0/4$; **(c)** $0{,}976I_0$;
(d) Perpendicular a la polarización original.

55. 0,211 I_0, que es mayor que I = 0,125 I_0 para una sola hoja en el medio a 45°.

57. La respuesta viene dada en el problema.

59. $\mathbf{E} = E_0 \cos(kz + \omega t)\mathbf{i} + E_0 \text{ sen}(kz + \omega t)\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = (E_0/c) \text{ sen}(kz + \omega t)\mathbf{i} - (E_0/c) \cos(kz + \omega t)\mathbf{j}$

www.elsolucionario.net

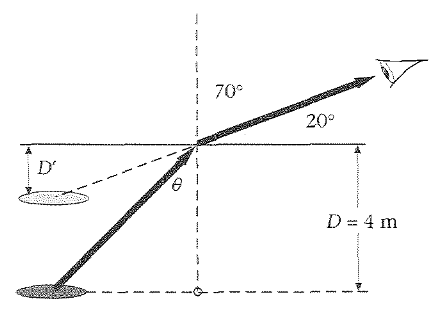
61. Polarizada horizontalmente, $I_0\,[\cos(\pi/2N)]^{2N}$

63. (c)

65. **(a)** 526 nm; **(b)** el mismo color

67. 35,3°

69. 1,45 m



71. La respuesta viene dada en el problema.

73. La respuesta viene dada en el problema.

75. La respuesta viene dada en el problema.

77. **(a)** La respuesta viene dada en el problema
(b) 3,47°

79. **(a)** 1,60; **(b)** 38,7°

81. 1,68°

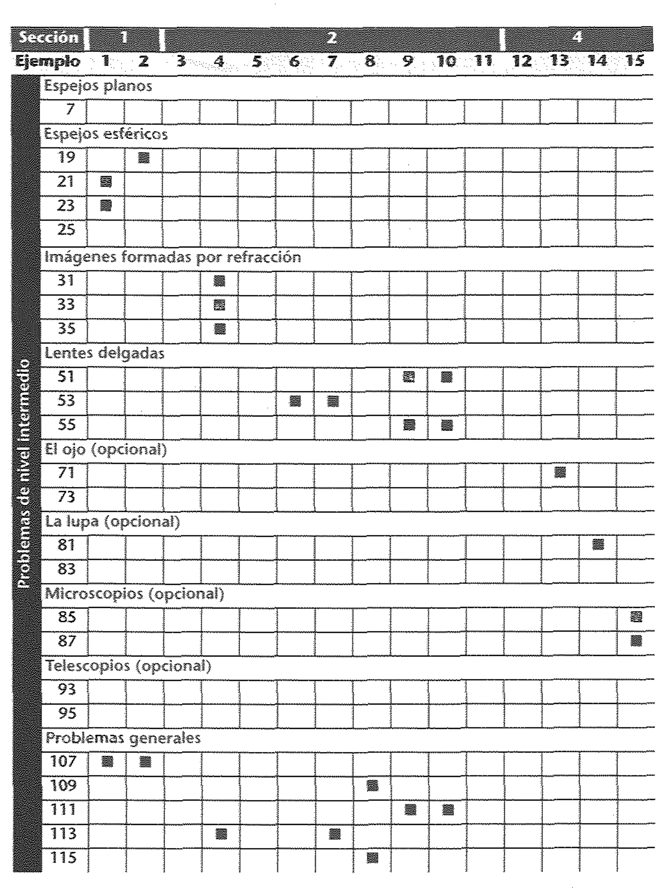
83. **(a)** $[4n/(n+1)^2]^{2N}$; **(b)** 0,783; **(c)** 28

85. **(a)** 24,0°;
(b) La nube parece moverse en un círculo de radio angular 24,0°
(c) El radio angular θ está relacionada con la velocidad de la Tierra v por tg $\theta = v/c$
(d) $2{,}99 \times 10^8$ m/s.

87. **(a)** La respuesta viene dada en el problema;
(b) 5,12 cm

89. La respuesta viene dada en el problema.

CAPÍTULO 34

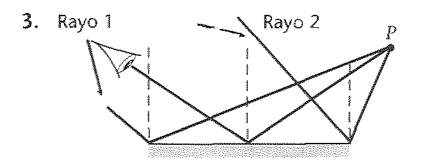


Problemas de nivel intermedio

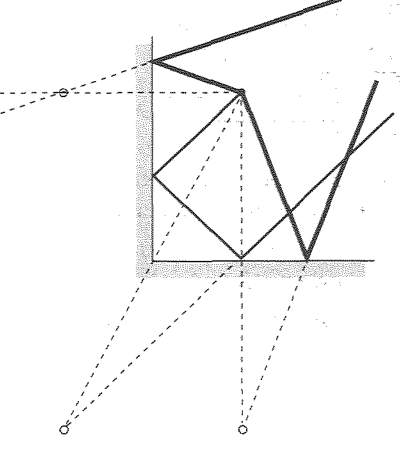
Sección	1		2									4			
Ejemplo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Espejos planos															
7															
Espejos esféricos															
19		■													
21	■														
23	■														
25															
Imágenes formadas por refracción															
31				■											
33				■											
35				■											
Lentes delgadas															
51									■	■					
53						■	■								
55									■	■					
El ojo (opcional)															
71													■		
73															
La lupa (opcional)															
81														■	
83															
Microscopios (opcional)															
85															■
87															■
Telescopios (opcional)															
93															
95															
Problemas generales															
107	■	■													
109								■							
111									■	■					
113				■			■								
115								■							

1. Sí

3.



5.

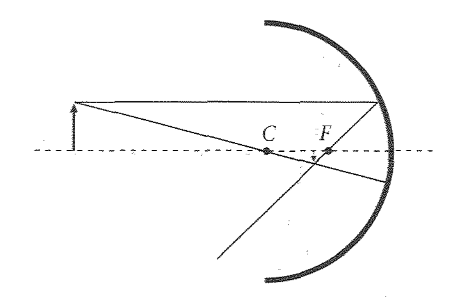


7. **(a)** 10 cm, 50 cm, 70 cm, 110 cm;
(b) 20 cm, 40 cm, 80 cm, 100 cm

9. La imagen será virtual y derecha si $s < F$; la imagen será menor si $s > 2F$ y mayor si $s < 2F$

11. Mientras la distancia imagen sea menor que la distancia objeto, el tamaño de la imagen es menor que el objeto. El segundo efecto supera al primero de modo que el tamaño angular observado por el conductor es menor para la imagen que para el objeto real. Así, la imagen parece más distante.

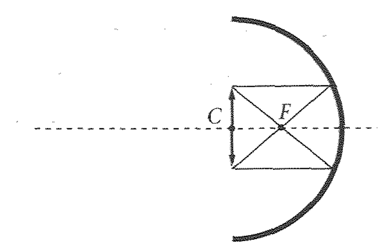
13. **(a)** real, invertida, reducida



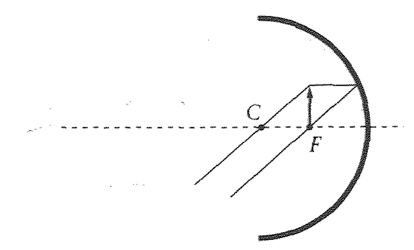
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

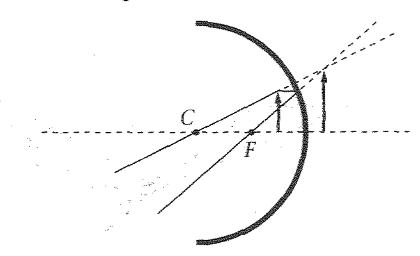
(b) real, invertida, de igual tamaño



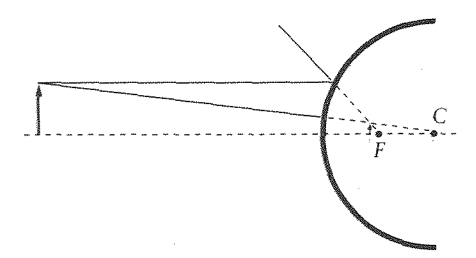
(c) no hay formación de imagen



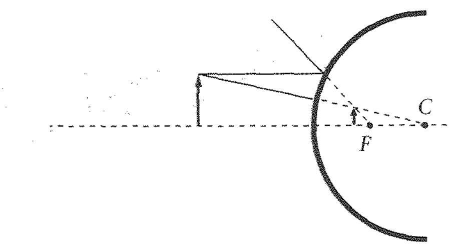
(d) virtual, derecha, ampliada



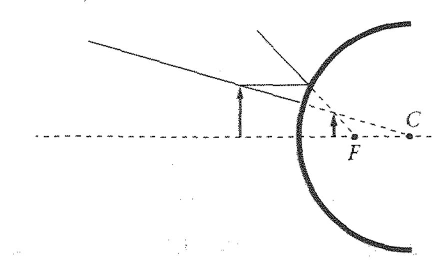
15. (a) virtual, derecha, reducida



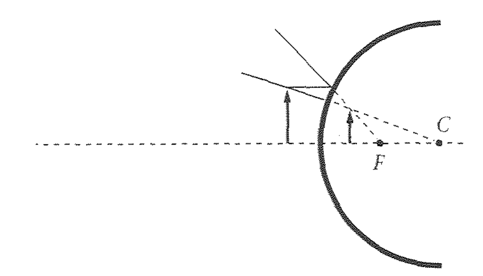
(b) virtual, derecha, reducida



(c) virtual, derecha, reducida



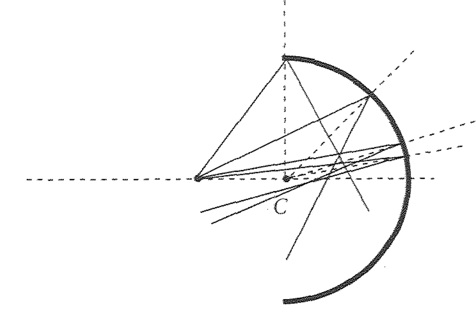
(d) virtual, derecha, reducida



17. La respuesta viene dada en el problema

19. (a) 0,566 m; (b) detrás; (c) 0,113 m

21. 1,5 cm



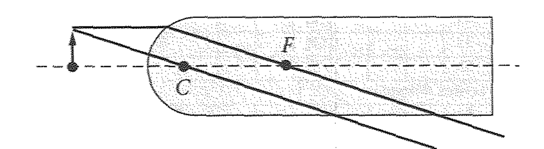
23. (a) –66,7 cm; (b) virtual

25. (a) –1,33 m; (b) convexa

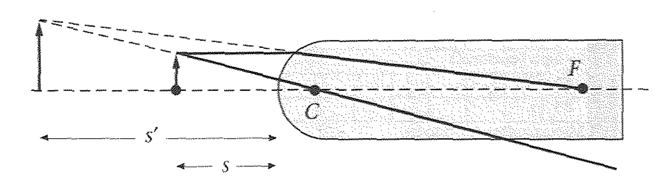
27. más lejos

29. (a) –8,58 cm; (b) –35,9

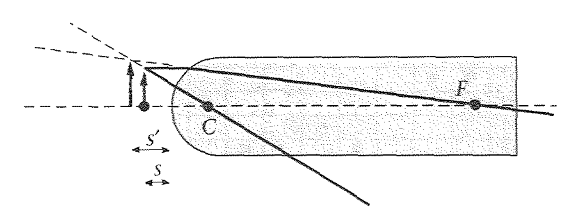
31. 10 cm



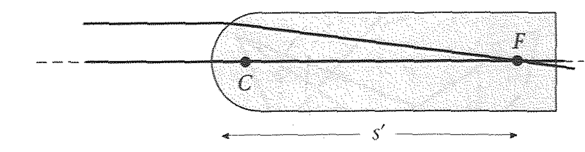
33. (a) –46,2 cm, virtual



(b) –6,47 cm, virtual



(c) 44,1 cm, real



www.elsolucionario.net

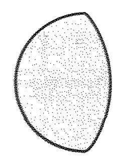
www.elsolucionario.net

35. (a) 64 cm; (b) −80 cm; (c) virtual

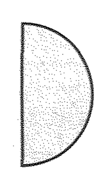
37. Suponiendo que n es mayor que 1, una lente delgada tendrá una distancia focal positiva si es biconvexa, plano convexa o si el radio de curvatura de la cara convexa es de magnitud mayor que el radio de curvatura de la cara cóncava. La distancia focal será negativa si la lente es bicóncava, plano cóncava, o si el radio de curvatura de la cara cóncava es de magnitud menor que el radio de curvatura de la cara convexa.

39. (d)

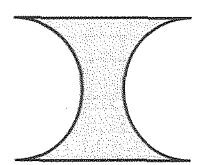
41. (a) 13,5 cm



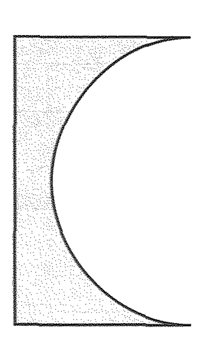
(b) 20 cm



(c) −10 cm

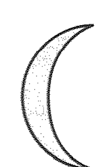


(d) −40 cm

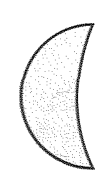


43. 108 cm

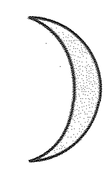
45. (a) −33 cm



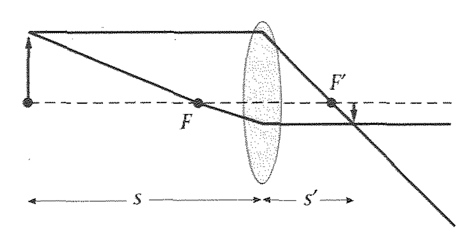
(b) 33,3 cm



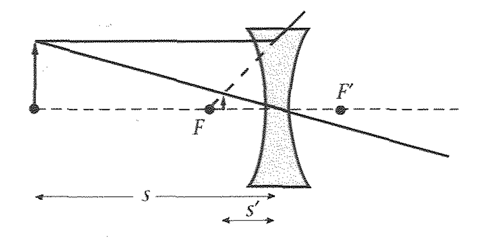
(c) −33,3 cm



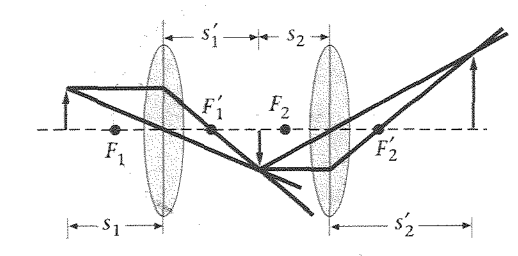
47. $S' = 6{,}67$ cm, $h = 1$ cm



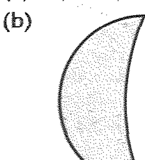
49. $S' = -3{,}33$ cm, $h = 0{,}333$ cm



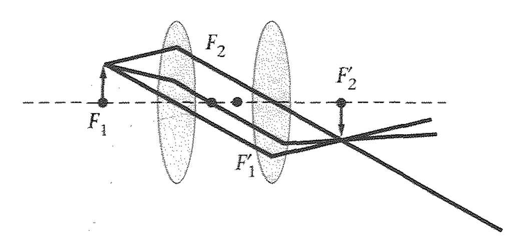
51. (a) 30 cm del lado más alejado de la segunda lente; (b) real y derecha; (c) 2



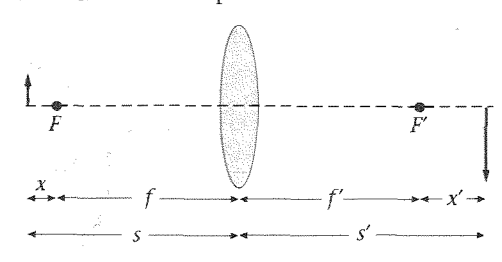
53. (a) 35,0 cm, cóncava
(b)



55. 15 cm a la derecha de la segunda lente, real e invertida, amplificación −1.



57. La respuesta viene dada en el problema.



59. (a) 41,2 cm; (b) −1,53; (c) real, invertida

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

61. (a) Falso; (b) Verdadero

63. (a)

65. (b)

67. 0,172 cm

69. 44,4 cm

71. (a) 103 cm; (b) 0,972 dioptrías

73. 0,714, más pequeño

75. (a) 46,0 cm; (b) 186 cm; (c) 3,84 dioptrías

77. 6

79. 5

81. (a) 3; (b) 4

83. La respuesta viene dada en el problema.

85. (a) −11,3; (b) −56,3

87. (a) 30 cm; (b) −6; (c) −30; (d) 5,83 cm

89. (a) 1,67 cm; (b) 0,508 cm; (c) 0,496 cm

91. 17,6 cm

93. 4 cm (ocular), 28 cm

95. (a) 103,4 cm; (b) −6,25 cm; (c) 97,2 cm; (d) 20,7 cm, 25,6

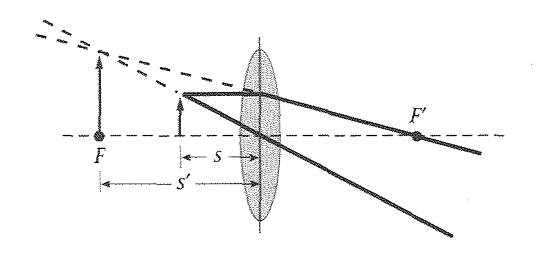
97. 0,00667

99. (a)

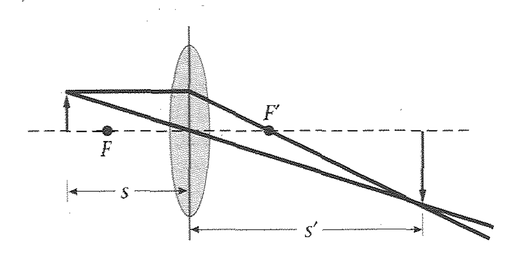
101. La respuesta viene dada en el problema.

103. 0,158 mm

105. (a) 5 cm, −10 cm



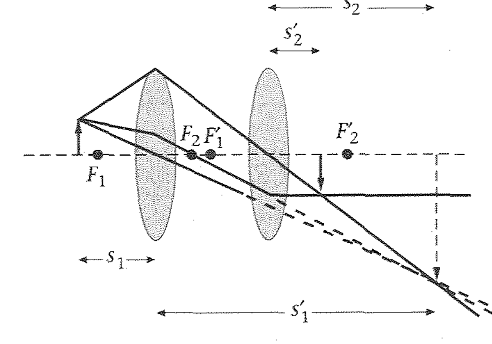
(b) 15 cm, 30 cm



107. cóncavo, 90 cm

109. 3,7 m

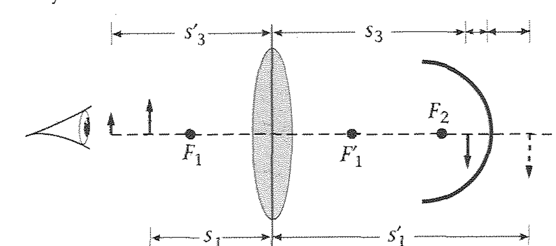
111. (a) 9,52 cm; (b) −1,19
(c)



113. (a) 19,3 cm; (b) 77,3 cm

115. 9,7 cm/s

117. (a) 18 cm a la izquierda de la lente;
(b) real y derecha
(c)



119. 1,6

121. 1,36

123. (a) La respuesta viene dada en el problema
(b) 17,4 cm

125. La respuesta viene dada en el problema.

www.elsolucionario.net

CAPÍTULO 35

Problemas de nivel intermedio

Sección	1	2	3	4		5	7	8
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8
Diferencia de fase y coherencia								
5	■							
Interferencias en láminas delgadas								
11		■						
13		■						
15		■						
Anillos de Newton								
17								
19								
Diagrama de interferencia de dos rendijas								
25								
27			■					
Diagrama de difracción de una sola rendija								
33				■				
Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas								
35					■			
37					■			
Suma de ondas armónicas utilizando fasores (opcional)								
41						■		
43						■		
Difracción y resolución								
53							■	
55							■	
Redes de difracción (opcional)								
63								
65								■
67								
69								
Problemas generales								
81		■						
83		■						
85							■	

1. Aparece en donde ocurren interferencias constructivas.

3. **(a)** 300 nm; **(b)** 135°

5. 164°

7. Las franjas están demasiado próximas para ser resueltas por el ojo.

9. **(a)** La parte superior de la película tiene un espesor casi nulo, de modo que la diferencia de fase se aproxima a 180°.
(b) Violeta;
(c) La parte superior de la película es blanca; el color de la primera banda es rojo.

11. 5,64 μm < d < 5,75 μm

13. **(a)** 602 nm; **(b)** 401 nm, 516 nm, 722 nm
(c) 401 nm, 516 nm, 722 nm

15. 476 nm

17. **(a)** La respuesta viene dada en el problema.
(b) La respuesta viene dada en el problema.
(c) El diagrama por transmisión se invierte
(d) 68;
(e) 1,14 cm; las franjas están más próximas

19. 534 μm, 926 μm

21. 8,33 franjas/cm

23. **(a)** 9,29 μm; **(b)** 29

25. La respuesta viene dada en el problema.

27. **(a)** 0,30°; **(b)** 8

29. La ecuación d sen $\theta = m\lambda$ describe los ángulos para los cuales la *interferencia entre dos rendijas separadas una distancia d* produce la intensidad máxima. La ecuación a sen $\theta = m\lambda$ describe los ángulos para los cuales la *difracción de la luz procedente de una sola rendija de anchura a* da lugar a una intensidad cero.

31. **(a)** 2 cm; **(b)** 20 cm; **(c)** 231 cm

33. 32,2 km

35. **(a)** 20 μm; **(b)** 9

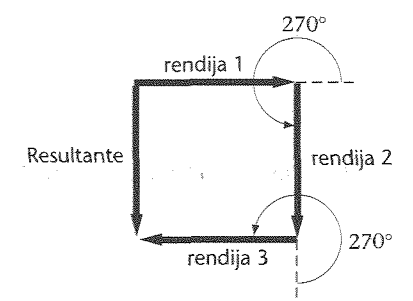
37. 8

39. 3,61 sen (ωt – 56,3°)

41. $0{,}0162 I_0$

43. **(a)** La respuesta viene dada en el problema.
(b) 4 fuentes: 6,00 mm, 2 fuentes: 12,0 mm

45. **(a)**



(b) $5{,}56 \times 10^{-3}$ W/m^2

47. **(a)** 3π, 5π, 7π; **(b)** $2{,}86\pi$, $4{,}92\pi$, $6{,}94\pi$

49. 8,54 cm

51. 8,35 km

53. **(a)** 55,6 km; **(b)** 55,6 m

55. 5×10^6 km

57. (a)

59. 485 nm, 658 nm

61. 500 nm

63. La longitud de onda larga de segundo orden solapa la longitud de onda corta de tercer orden.

65. **(a)** 0,353 m, 0,707 m; **(b)** 88,4 μm; **(c)** 8000

67. $3{,}09 \times 10^5$, $5{,}14 \times 10^4$ líneas/cm

69. **(a)** 750 líneas/cm; **(b)** 4,21 cm, 12,6 cm

71. **(a)** La respuesta viene dada en el problema;
(b) 491; **(c)** 0,988 nm

73. La respuesta viene dada en el problema.

75. 695 nm

77. 1,68 cm

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

79. $1{,}30 \times 10^{-4}$ rad

81. La respuesta viene dada en el problema.

83. (a) 97,8 nm; (b) No; (c) 0,273, 0,124

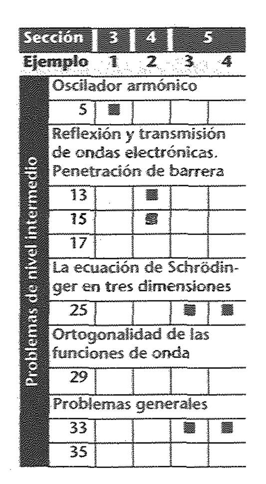
85. 12,3 m

87. Las respuesta vienen dadas en el problema.

89. La respuesta viene dada en el problema.

91. (a) $I_{max} \cos^2[(\pi/2) \text{ sen } \theta]$
(b) $I(\theta)$

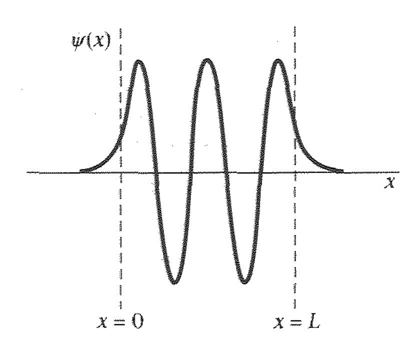
CAPÍTULO 36



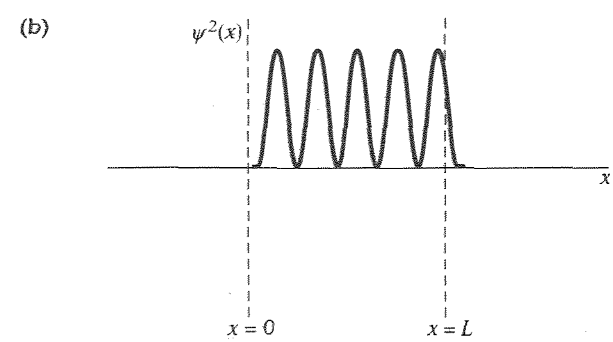
Sección	3	4	5	
Ejemplo	1	2	3	4
Problemas de nivel intermedio				
Oscilador armónico				
5	■			
Reflexión y transmisión de ondas electrónicas. Penetración de barrera				
13		■		
15		■		
17				
La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones				
25			■	■
Ortogonalidad de las funciones de onda				
29				
Problemas generales				
33			■	■
35				

1. Verdadero

3. (a)



(b)



5. La respuesta viene dada en el problema.

7. $[(2/\sqrt{\pi})(m\omega_0/\hbar)^{3/2}]^{1/2}$

9. La respuesta viene dada en el problema.

11. $m\omega_0\hbar/2$

13. (a) $k_1/\sqrt{2}$, $(2mU_0)^{1/2}/\hbar$; (b) 0,0294;
(c) $0{,}971 \times 10^5$ partículas. Clásicamente se transmiten el 100% de las partículas.

15. (a) $0{,}1k_1$, $(0{,}02mU_0)^{1/2}/\hbar$; (b) 0,671; (c) 0,329;
(d) $3{,}29 \times 10^5$ partículas. Clásicamente se transmiten el 100% de las partículas.

17. 0,342

19. (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 1, 4), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 2, 4)

21. (a) (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 4), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 1), (1, 1, 6), (1, 3, 2);
(b) (1, 1, 4) y (1, 2, 2); (1, 1, 6) y (1, 3, 2)

23. (a) $\psi(x, y, z) = (8/L^3)^{1/2} \cos(\pi x/L) \text{ sen } (\pi y/L) \text{ sen } (\pi z/L)$;
(b) Los niveles energéticos son los mismos.

25. $50h^2/8mL^2$

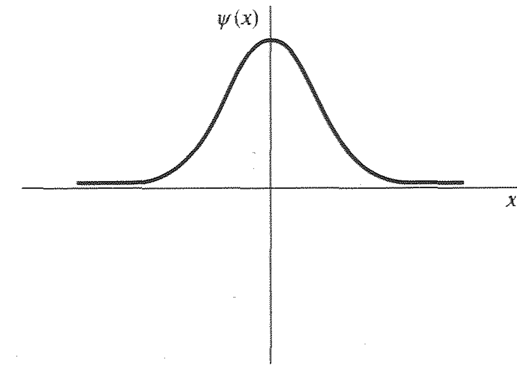
27. $10E_1$

29. La respuesta viene dada en el problema.

31. La respuesta viene dada en el problema.

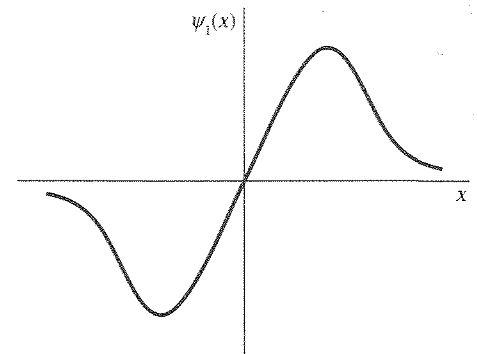
33. $20\,\hbar^2\,\pi^2/mL^2$, $21\hbar^2\,\pi^2/mL^2$, $21\hbar^2\,\pi^2/mL^2$

35. (a)



www.elsolucionario.net


(b)



37. La respuesta viene dada en el problema.

39. $\sqrt{2}[m\omega_0/(\pi\hbar)]^{1/4}$

41. La respuesta viene dada en el problema.

CAPÍTULO 37

Sección	2		3	4	5	6		7
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8
Problemas de nivel intermedio								
Modelo de Bohr								
13								
15								
17								
Teoría cuántica del átomo de hidrógeno								
33				■				
35				■				
Tabla periódica								
53							■	
Problema generales								
73								
75		■						
77		■						

1. decrece

3. (a)

5. (d)

7. La respuesta viene dada en el problema.

9. 1,89 eV, 656 nm; 2,55 eV, 486 nm; 2,86 eV, 434 nm

11. **(a)** 0,85 eV, 1459 nm; **(b)** 4052 nm, 2627 nm, 2168 nm

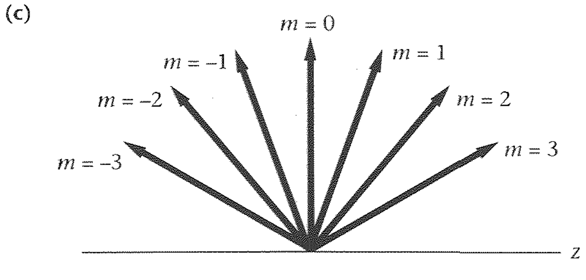
13. **(a)** 13,6 eV; **(b)** 54,4 eV; **(c)** 122,4 eV

15. La respuesta viene dada en el problema.

17. **(a)** La respuesta viene dada en el problema;
(b) $R_H = 1{,}096776 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$, $R_\infty = 1{,}097373 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$,
(c) 0,0544%

19. (c)

21. **(a)** $(2\sqrt{3})\hbar$; **(b)** −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3;
(c)



23. **(a)** 0, 1, 2; **(b)** 0; −1, 0, 1; −2, −1, 0, 1, 2; **(c)** 18

25. **(a)** 45°; **(b)** 26,6°; **(c)** 8,05°

27. **(a)** $n \geq 1$, $\ell \geq 0$; **(b)** $n \geq 2$, $\ell \geq 1$; **(c)** $n \geq 3$, $\ell \geq 2$

29. **(a)** 4;
(b) $n = 2$, $\ell = 0$, $m = 0$; $n = 2$, $\ell = 1$, $m = 1$; $n = 2$, $\ell = 1$, $m = 0$; $n = 2$, $\ell = 1$, $m = -1$

31. **(a)** $0{,}0605a_0^{-3/2}$; **(b)** $0{,}00366a_0^{-3}$; **(c)** $0{,}046a_0^{-1}$

33. **(a)** 0,00092; **(b)** 0

35. $(3/2)a_0$

37. 0,323

39. $\ell = 0$ o $\ell = 1$

41. 5/2 o 3/2

43. En el sodio, el apantallamiento de la carga nuclear por los electrones más internos es menor para el estado 3s que para el estado 3p; no hay apantallamiento en el hidrógeno.

45. El hierro y el cobalto poseen dos electrones de valencia en la capa 4s, de modo que tienen propiedades semejantes. Difieren sólo en que el cobalto tiene un electrón más en la capa 3d. El neón tiene una estructura cortical cerrada, de modo que es inerte. El sodio posee un electrón más, el cual se encuentra en la capa 3s, de tal modo que sus propiedades son muy diferentes.

47. **(a)** silicio; **(b)** calcio

49. (c)

51. **(a)** $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^1$; **(b)** $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^5\,4s^1$

53. 3,4

55. **(a)** $2s^1$ o $2p^1$; **(b)** $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3p^1$; **(c)** $1s^1\,2s^1$

57. **(a)** 0,0611 nm, 0,0580 nm; **(b)** 0,0543 nm

59. circonio

61. **(a)** 1,01 nm; **(b)** 0,155 nm

63. (c)

65. Estos átomos poseen un solo electrón más externo en la capa p, el cual está blindado del núcleo más que un electrón de la capa s.

67. $n = 4$ o $n = 1$.

69. $n = 3$ a $n = 2$, $n = 9$ a $n = 3$, $n = 7$ a $n = 4$

71. **(a)** 1,61774 eV, 1,61041 eV; **(b)** $7{,}33 \times 10^{-3}$ eV; **(c)** 63,3 T

www.elsolucionario.net

 www.elsolucionario.net

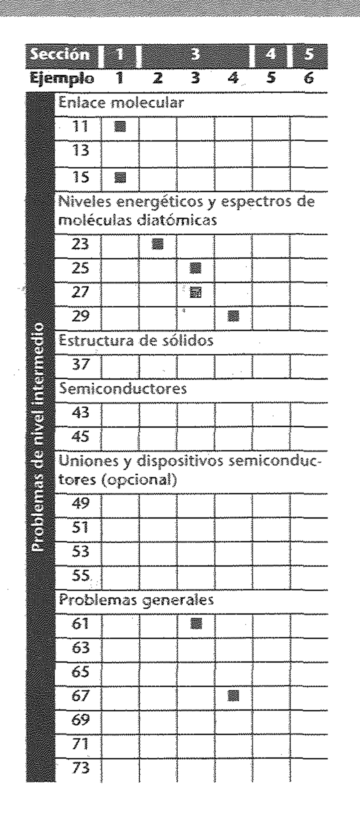
73. La respuesta viene dada en el problema.

75. **(a)** $R_H = 1{,}096776 \times 10^{-7}\ \text{m}^{-1}$, $R_D = 1{,}097074 \times 10^{-7}\ \text{m}^{-1}$; **(b)** 0,178 nm

77. **(a)** $R_T = 1{,}097174 \times 10^{-7}\ \text{m}^{-1}$; **(b)** 0,0598 nm, 0,238 nm

79. La respuesta viene dada en el problema.

CAPÍTULO 38



Sección	1	3			4	5
Ejemplo	1	2	3	4	5	6
Problemas de nivel intermedio						
Enlace molecular						
11	■					
13						
15	■					
Niveles energéticos y espectros de moléculas diatómicas						
23		■				
25			■			
27			■			
29				■		
Estructura de sólidos						
37						
Semiconductores						
43						
45						
Uniones y dispositivos semiconductores (opcional)						
49						
51						
53						
55						
Problemas generales						
61			■			
63						
65						
67				■		
69						
71						
73						

1. polar

3. Ne

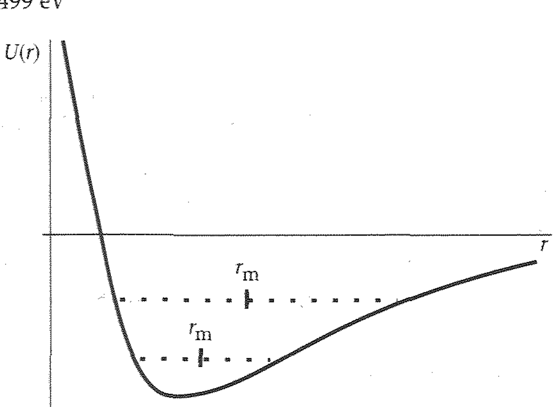
5. **(a)** covalente; **(b)** iónico; **(c)** metálico

7. libera energía, 30,2 eV

9. 43,6%

11. 0,499 eV

13.



En este gráfico puede verse que r_m crece al aumentar la energía de vibración. En coherencia, esta molécula se expansiona al calentar el sólido.

15. **(a)** −6,64 eV; **(b)** 5,70 eV; **(c)** 0,64 eV

17. (a) 3,1 eV; **(b)** $C = 1{,}37 \times 10^{-13}\ \text{eV·nm}^n$, $n = 19{,}7$

19. La constante de fuerza es semejante a la de un muelle ordinario rígido.

21. 0,110 nm

23. **(a)** 0,504 u; **(b)** 7,00 u; **(c)** 6,86 u; **(d)** 0,980 u

25. 0,00314 eV

27. $1{,}58 \times 10^{-5}$ eV

29. 477 N/m

31. **(a)** ^{35}Cl: 0,9722 u, ^{37}Cl: 0,9737 u, $\Delta\mu/\mu = 0{,}00153$ u; **(b)** $\Delta f/f = -0{,}00153$

33. **(a)** es un cubo de aristas $2R$; **(b)** 0,524

35. 2,07 g/cm^3

37. 0,740

39. (d)

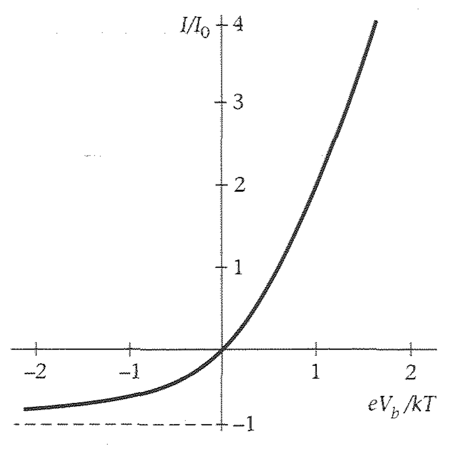
41. **(a)** tipo-*p*; **(b)** tipo-*n*

43. 3,17 nm, 8,46 nm

45. 342×10^{-10} m

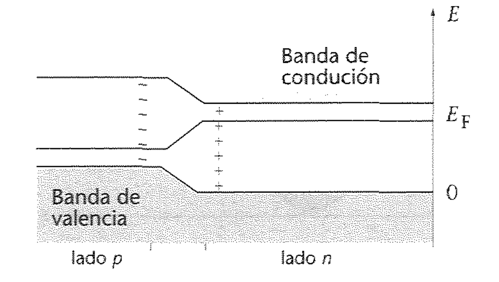
47. (b)

49.



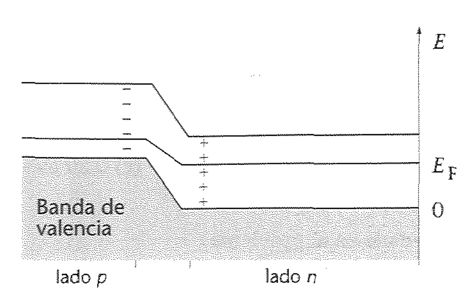
51. 250

53.



www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



55. tipo p, 10^{23} vacantes/m^3

57. **(a)** iónico; **(b)** covalente; **(c)** metálico

59. $2{,}63 \times 10^{-29}$ C·m

61. $9{,}55 \times 10^{-4}$ eV

63. La respuesta viene dada en el problema.

65. 1,1 eV

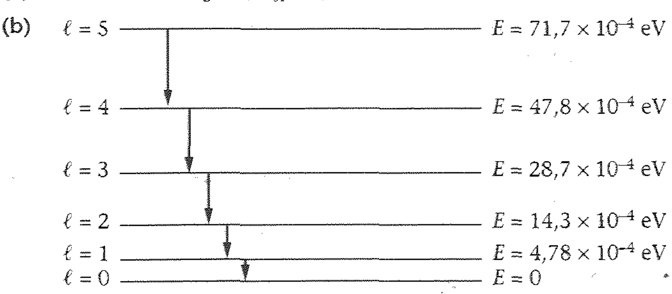
67. 1551 N/m

69. $r_0 = a$, $U_{min} = -U_0$, $r_0 = 0{,}074$ nm, $U_0 = 4{,}52$ eV

71. $F_x \propto 1/x^4$

73. **(a)** $I = 1{,}45 \times 10^{-46}$ kg·m^2, $E_{0r} = 2{,}39 \times 10^{-4}$ eV

(b)



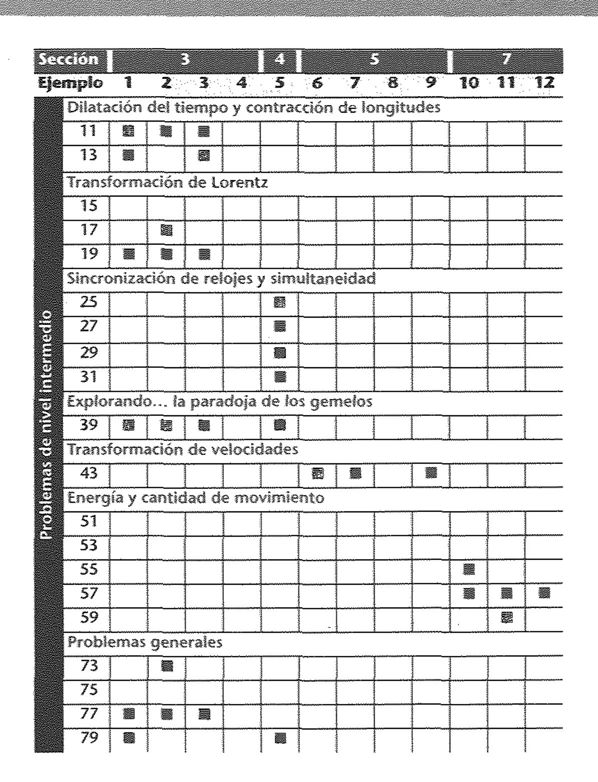
(c), **(d)** Las transiciones que obedecen $\Delta\ell = -1$ viene indicadas por las flechas en el diagrama.

$\Delta\ell$	ΔE	λ
$\ell = 1 \to \ell = 0$	$4{,}78 \times 10^{-4}$ eV	2,60 mm
$\ell = 2 \to \ell = 1$	$9{,}55 \times 10^{-4}$ eV	1,30 mm
$\ell = 3 \to \ell = 2$	$14{,}4 \times 10^{-4}$ eV	0,862 mm
$\ell = 4 \to \ell = 3$	$19{,}1 \times 10^{-4}$ eV	0,650 mm
$\ell = 5 \to \ell = 4$	$23{,}9 \times 10^{-4}$ eV	0,519 mm

Estos fotones pertenecen a la región de microondas y longitudes de ondas de radio cortas del espectro electromagnético.

75. $f = 1{,}9 \times 10^{13}$ Hz, $\lambda = 1{,}6 \times 10^{-5}$ m

CAPÍTULO 39



Sección	3				4	5				7		
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Problemas de nivel intermedio												
Dilatación del tiempo y contracción de longitudes												
11	■	■	■									
13	■		■									
Transformación de Lorentz												
15												
17		■										
19	■	■	■									
Sincronización de relojes y simultaneidad												
25					■							
27					■							
29					■							
31					■							
Explorando... la paradoja de los gemelos												
39	■	■	■		■							
Transformación de velocidades												
43						■	■		■			
Energía y cantidad de movimiento												
51												
53												
55										■		
57										■	■	■
59											■	
Problemas generales												
73		■										
75												
77	■	■	■									
79	■				■							

1. El amigo del coche

3. **(a)** 6,63 m; **(b)** 12,6 m

5. **(a)** 599 m; **(b)** 13,4 km

7. **(a)** 130 a; **(b)** 88,1 a

9. **(a)** 0,6 m; **(b)** 2,5 ns

11. $0{,}8c$

13. **(a)** 978 m; **(b)** $9{,}57 \times 10^7$ m; **(c)** $1{,}02 \times 10^{-7}$ m

15. La respuesta viene dada en el problema.

17. $0{,}141c$

19. **(a)** $2{,}56 \times 10^{-9}$ s; **(b)** 8×10^8 partículas/cm^2·s; **(c)** $2{,}4 \times 10^8$ partículas/cm^2·s

21. Las respuestas vienen dadas en el problema.

23. Sí.

25. 80 c·min

27. La respuesta viene dada en el problema.

29. $L_P V/c^2 = 60$ min que coincide con el intervalo de tiempo obtenido en el problema 28.

31. 4,39 μs

33. 0,0637

35. $0{,}696c$

37. **(a)** 11,3 a; **(b)** 40 a

39. **(a)** 50 señales/a; **(b)** 533,3 señales; **(c)** 1067 señales; **(d)** 50 señales/a; **(e)** 267 señales; **(f)** 1333 señales **(g)** A, por 2,67 años

41. $0{,}994c$

43. **(a)** $0{,}976c$; **(b)** $0{,}997c$

45. **(a)** 1,005; **(b)** 1,15; **(c)** 1,67; **(d)** 7,09

47. **(a)** $0{,}155E_0$; **(b)** $1{,}29E_0$; **(c)** $6{,}09E_0$

49. 2,97 GeV

51. La respuesta viene dada en el problema.

53. La respuesta viene dada en el problema.

55. **(a)** 1625 MeV/c; **(b)** $0{,}866c$

57. 608 MeV, 389 MeV

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

59. **(a)** 290 MeV; **(b)** 625 MeV

61. **(a)** 0,943c; **(b)** 3 MeV; **(c)** 2,83 MeV/c
(d) 0,877 MeV; **(e)** 4,12 MeV/c^2

63. Las respuestas vienen dadas en el problema.

65. (b)

67. **(a)** 5,33 a; **(b)** 3,53 a

69. 0,999c

71. 0,866c

73. $1{,}85 \times 10^4$ a

75. **(a)** $2{,}87 \times 10^9$ MeV; **(b)** 0,133 s

77. **(a)** 0,625c; **(b)** 31,2 a

79. **(a)** 4,17 μs; **(b)** 7,71 μs; **(c)** 2,5 μs

81. **(a)** 2,1 μs; **(b)** 2,59 μs; **(c)** 0,493 μs;
(d) 2,59 μs; **(e)** 4,36 h; **(f)** 19 h

83. **(a)** $c/3$; **(b)** 20 m; **(c)** 0,20 μs

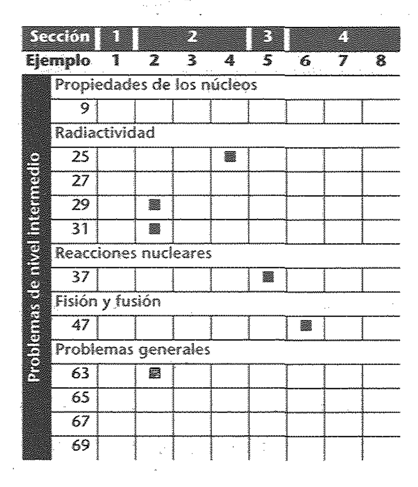
85. La respuesta viene dada en el problema.

87. La respuesta viene dada en el problema.

89. La respuesta viene dada en el problema.

91. La respuesta viene dada en el problema.

CAPÍTULO 40



Sección	1	2			3	4		
Ejemplo	1	2	3	4	5	6	7	8
Problemas de nivel intermedio								
Propiedades de los núcleos								
9								
Radiactividad								
25				■				
27								
29		■						
31		■						
Reacciones nucleares								
37					■			
Fisión y fusión								
47						■		
Problemas generales								
63		■						
65								
67								
69								

1. **(a)** ^{15}N, ^{13}N; **(b)** ^{57}Fe, ^{58}Fe; **(c)** ^{117}Sn, ^{119}Sn

3. **(a)** 31,99 MeV, 5,332 MeV/nucleón;
(b) 333,7 MeV, 8,557 MeV/nucleón;
(c) 1636 MeV, 7,868 MeV/nucleón

5. **(a)** $3C/4\pi R_0^3$; **(b)** $1{,}17 \times 10^{14}$ g/cm^3

7. $1{,}17 \times 10^{14}$ g/cm^3

9. **(a)** 7,81 fm, 6,77 fm; **(b)** 199 MeV

11. La emisión α suele ser seguida por una emisión β^- (no β^+) porque el núcleo hijo tiene un exceso de neutrones.

13. Ello ocasionaría inexactitudes, ya que damos por supuesto que la relación ^{14}C/^{12}C fue la misma que hoy se acepta.

15. **(a)** 500 cuentas/s; **(b)** 250 cuentas/s; **(c)** 125 cuentas/s

17. $3{,}61 \times 10^{10}$ desintegraciones/s

19. **(a)** 4,868 MeV; **(b)** 6,999 MeV

21. 3350 a

23. **(a)** 13 950 a **(b)** Sí

25. La respuesta viene dada en el problema.

27. **(a)** La respuesta viene dada en el problema.
(b) $6{,}76 \times 10^{-3}$ s^{-1}, 103 s

29. **(a)** $4{,}16 \times 10^{-9}$ s^{-1}; **(b)** 5,28 a

31. **(a)** 156 h; **(b)** 551 h

33. La respuesta viene dada en el problema.

35. **(a)** 4,032 MeV; **(b)** 18,35 MeV; **(c)** 4,785 MeV

37. **(a)** 1,20 MeV;
(b) La masa del $^{13}_{6}$C incluye un electrón menos que el $^{13}_{7}$N, de modo que debe añadirse la masa de un electrón más la masa del electrón emitido.

39. Los neutrones emitidos en la fisión son rápidos (del orden de 1 MeV), mientras que la probabilidad de captura varía inversamente con la velocidad de los neutrones, de modo que se necesita un moderador para reducir los neutrones emitidos a energías térmicas (del orden de 0,02 eV.)

41. Escapan del reactor o son capturados por otros núcleos distintos del ^{235}U.

43. $1{,}56 \times 10^{19}$ fisiones/s

45. $1{,}16 \times 10^8$ K

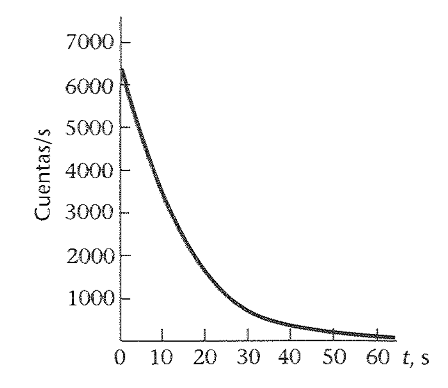
47. $3{,}20 \times 10^{10}$ J

49. **(a), (b)** La respuesta viene dada en el problema.
(c) $3{,}74 \times 10^{38}$ protones/s, $5{,}07 \times 10^{10}$ a

51. Los cambios de presión afectan a las nubes de electrones que rodean el núcleo y por tanto, al espaciado de los núcleos (ligeramente), y los cambios de temperatura afectan a la energía de vibración de los núcleos, pero no afectan a la estructura interna del núcleo responsable de la radiactividad.

53. La temperatura del Sol es tan grande que la energía térmica de los núcleos positivamente cargados, tales como ^{1}H y ^{2}He, pueden vencer la repulsión culombiana y aproximarse lo suficiente para su fusión. Sobre la Tierra, la temperatura es demasiado baja para que la energía térmica venza la energía culombiana de repulsión.

55. $\lambda = 0{,}0693$ s^{-1}



57. 0,156 MeV

www.elsolucionario.net

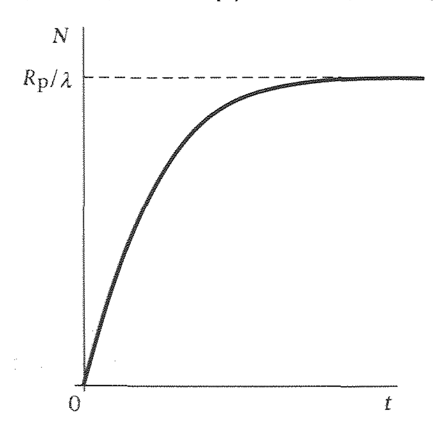
59. Sí, 1 h

61. $6{,}60 \times 10^3$ desintegraciones/s

63. 6,3 L

65. **(a)** 22,96 MeV; **(b)** 4179 MeV; **(c)** 1286 MeV

67. **(a)**



(b) $8{,}66 \times 10^4$ núcleos

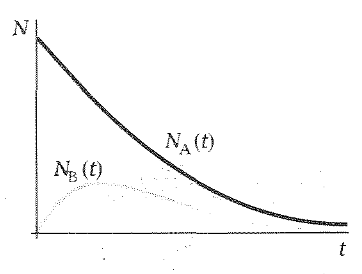
69. **(a)** 4 fm; **(b)** 310 MeV/c;
(c) La respuesta viene dada en el problema.
(d) 310 MeV

71. **(a)** 1,19 MeV/c; **(b)** 0,752 keV; **(c)** 0,0962%

73. **(a)** La respuesta viene dada en el problema;
(b) 55 colisiones

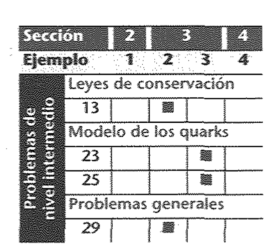
75. **(a)-(c)** La respuesta viene dada en el problema.
(d)





77. La respuesta viene dada en el problema.

CAPÍTULO 41



Sección	2	3		4
Ejemplo	1	2	3	4
Problemas de nivel intermedio — Leyes de conservación				
13		■		
Modelo de los quarks				
23			■	
25			■	
Problemas generales				
29		■		

1. Ambos son hadrones, es decir, interaccionan por vía nuclear fuerte y están formados por quarks. Los bariones tienen espines semienteros, mientras que los mesones tienen espín cero o entero. Los mesones son menos masivos.

3. Por medio del período de vida.

5. Falso.

7. **(a)** 279,2 MeV; **(b)** 1876,6 MeV; **(c)** 211,4 MeV

9. **(a)** $\Delta S = +1$, interacción débil;
(b) $\Delta S = +2$, no permitido
(c) $\Delta S = +1$, interacción débil

11. **(a)** $\Delta S = +2$, no permitido;
(b) $\Delta S = +1$, interacción débil

13. **(a)** No, $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$; **(b)** $\Omega^- \rightarrow p + 3e^- + 3\bar{\nu}_e + 2\bar{\nu}_\mu + 2\nu_\mu + e^+ + \nu_e$
(c) Sólo la extrañeza no se conserva

15. Dos quarks forman un mesón y tres quarks un barión.

17. **(a)** +1, +1, 0, p^+; **(b)** +1, 0, 0, n; **(c)** +1, +1, −1, Σ^+;
(d) +1, +1, −1, Σ^-; **(e)** +1, 0, −2, Ξ^0; **(f)** +1, −1, −2, Ξ^-

19. *uuu*

21. **(a)** $c\bar{d}$; **(b)** $\bar{c}d$

23. **(a)** *uds*; **(b)** $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$; **(c)** *dds*

25. **(a)** *sss*; **(c)** *dds*

27. **(a)** Falso **(b)** Verdadero; **(c)** Falso;
(d) Verdadero **(e)** Verdadero

29. **(a)** Sí; **(b)** $\Xi^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu + 2\gamma$
(c) Sólo la extrañeza no se conserva
(d) No, la masa en reposo de $(\Lambda^0 + \pi^0)$ es mayor que la de Σ^0.

31. **(a)** 38,1 MeV; **(b)** 6,72;
(c) $K_{\text{protón}} = 4{,}93$ MeV, $K_{\text{pion}} = 33{,}2$ MeV

33. **(a)**, **(b)** La respuesta viene dada en el problema
(c) $7{,}5 \times 10^{-12})c$, 40,3 s; **(d)** $(30 \times 10^{-12})c$, 161s

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

FA... REGIONAL CONCEPCION DEL URUGUAY
U... TECNOLOGICA NACIONAL
... HISTORICO NACIONAL
TEL/FAX ... 425541 / 423803
Ing. PEREYRA 676 ... CONCEPCION DEL URUGUAY
ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Índice alfabético

Aberración cromática 1133
Aberración esférica 1117, 1133
  círculo de mínima confusión 1133
Absorción por resonancia 1080
Acomodación (ojo) 1134
Acumulador eléctrico 855
Afinidad electrónica 1242
Agua, índice de refracción 1088
Agua pesada 1330
Agujero negro 1305
Ampére, André Marie 935
  Véase Ley de Ampère
Amperímetro **865**
Amperímetros 865, **865**
Amperio 721
  definición 946, 947
  unidad 844, 1363
Amperio-horas 852
Amplificador de corriente 1270
  ganancia de voltaje 1270
Analizador 1100
Anchura de resonancia 1025
Anderson, Carl 1346
Ángulo de incidencia 1089
Ángulo sólido 770
Ángulos, factores de conversión para 1364
Anillos de Newton 1155, **1155**
Ánodo 854
Año-luz 1087
Antena dipolar eléctrica 1056, **1057**, 1057
Anteojo de Galileo **1140**
Antineutrinos 1350
Antipartículas 1345–1349
Antiprotón 1347
Arco iris 1077, 1094, 1095, **1095**, 1096, **1098**
  radio angular 1098
Arco iris infrarrojo 1096, **1097**
Arco iris secundario 1095, **1098**
Área 1364
Argón, configuración electrónica 1227
Astigmatismo 1133
Aston, Francis William 918
Atiquarks, propiedades 1353
Átomo nuclear 1210–1211
Átomos 1209–1233
  afinidad electrónica 1242
  configuraciones electrónicas 1223, **1227**, 1228, 1229, 1230
  espectros atómicos 1210
  espectros de rayos X 1230–1233
  espectros ópticos 1230–1233
  estado fundamental 1219
  estructura fina 1222–1223
  fecto espín–órbita 1222–1223
  isótopos 1315
  modelo de Bohr del átomo de hidrógeno 1211–1215
  modelo de J. J. Thomson 1210
  momento angular de espín 1222
  número atómico 1209, 1315
  número de masa 1315
  orbitales atómicos 1248
  teoría cuántica 1215–1217
  transiciones, reglas de selección 1218
  unidad de masa unificada 1250
Aumento lateral 1120, **1120**
Autoinducción 990
  solenoide 991
Balanza de corriente 947, **947**
Balanza de torsión de Coulomb 724
Balmer, serie 1214
Banda de conducción 896
Banda de valencia 896
Bardeen, John 898, 1265
Bario, espectro de rayas **1078**
Bariones 1344, 1345, 1352
  número y conservación 1349
Barn, unidad 1325
Batería
  ánodo y cátado 854
  carga total 852
  energía total almacenada 852
  igualación de impedancias 853
  intensidad de corriente 852
  resistencia interna 852
  tecnología 854
  tensión en los bornes 851, 852
Baterías ideal y real 851, **852**
BCS, teoría sobre superconductividad 898
Becquerel, unidad 1321
Bednorz, Johannes George 898
Berilio, configuración electrónica 1226
Big-bang 1357, 1358
Binnig, Gert 1196
Biot, Jean Baptiste 935
Biot y Savart, ley 937–948
Birrefringencia 1102
Bobinas de Helmholtz 935
Bohr
  magnetón 957
  modelo del átomo de hidrógeno 1211–1215
    energía en una órbita circular 1211
    frecuencia del fotón 1212
    momento angular cuantizado 1212
    niveles energéticos 1214
    órbitas no radiantes 1212
  postulados 1212
  primer radio 1213
  radio de las órbitas 1213
Bohr, Niels 1209, 1211, 1328
Boro, configuración electrónica 1226

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Bosón de Higgs 1355
Bosones 889, 1345, 1355
Bosones vectoriales 1354
Botella de Leyden 811
Botella magnética **916**, 916
Bottom (quark) 1354
Brackett, F. 1214
Brattain, Walter H. 1265
Bremsstrahlung 1057
Brewster, Sir David 1101
ley 1101
Cable coaxial **817**
Caja unidimensional
condición de onda estacionaria 889
cuantización de la energía 889
Calcio, configuración electrónica 1227
Calcita **1104**
Calor 1363, 1364
unidad de 1363
Calor de Joule 850
Cámara de burbujas **719**
Campo de Higgs 1355
Campo eléctrico 728–732
aceleración en campo eléctrico 735
cálculo mediante la ley de Coulomb 750–756
cálculo mediante la ley de Gauss 760–766
carga anular 754
carga lineal finita 750
carga lineal infinita 752
carga testigo 728
comportamiento de dipolos eléctricos 736–738
conductores 767–769
corteza esférica de carga 761
de un dipolo 732
debido a un sistema de cargas puntuales 729
debido a una carga puntual 728, 729
definición 728
determinación a partir del potencial 788–789
disco uniformemente cargado 754
discontinuidad 766–767
distribuciones continuas de carga 749–770
distribuciones discretas de carga 719–738
ejemplos en la naturaleza 728
geometría cilíndrica 765
geometría esférica 761
geometría plana 760
ley de Gauss 756
líneas de fuerza 732–735, **733**
reglas para dibujarlas 733
movimiento de cargas puntuales 735–736
plano infinito de carga 755, 760
relación con potencial eléctrico 789
Campo electrostático
densidad de energía 821
energía 820
Campo magnético 909–926, 1363, 1364
cargas puntuales en movimiento 935–936
conductor rectilíneo 943, 944
corrientes eléctricas 937–948
definición 910
dipolo magnético 939
efecto Hall 924–926
espiras de corriente 937–939
fuentes 935–964
fuerza ejercida 909–914
Campo magnético (*continuación*)
movimiento de una carga puntual 914–920
permeabilidad del espacio libre 936
solenoide 940, 942
toroide 950
y pares de fuerzas sobre espiras e imanes 921–924
Campo remanente 961
Campos cruzados 916, 917
Candela (cd), unidad 1363
Cantidad de movimiento relativista 1295–1296
Capacidad 814–818
condensador cilíndrico 816, 817
condensador de placas paralelas 815
definición 811, 814
efecto de un dieléctrico 826
unidad derivada de 1363
Capacidad calorífica de metales 894
Capacidad equivalente 822
condensadores en paralelo 822
condensadores en serie 823
Capacitancia 1017
Carbón vegetal **1260**
Carbono
configuración electrónica 1226
enlaces 1248
estructura cristalina **1260**
orbitales híbridos 1249
Carga de color 1355
Carga eléctrica 719–722, 755
aceleración de cargas puntuales 735
carga por contacto **721**
conductores 767–769
conservación 721
cuantización 720
densidad lineal 749
densidad superficial 749
densidad volúmica 749
fuerzas ejercidas por un sistema 726–727
magnitud de la fuerza 724
movimiento en campos eléctricos 735–736
movimientos 843–846
unidad fundamental 720, 721
Carga eléctrica anular 754
Carga eléctrica continua, campo eléctrico 750
Carga eléctrica discoidal 754
Carga eléctrica lineal finita 750
Carga eléctrica lineal infinita 752
Carga eléctrica móvil
campo magnético 935
fuerza magnética 910
Carga eléctrica plana infinita 755
Carga eléctrica por inducción 723
Carga eléctrica puntual, movimiento en un campo magnético 914–920
Carga ligada al dieléctrico 831, 832
Carga testigo 728
Cátodo 854
Celda unitaria 1256
Célula solar 1264
Células químicas 854
Chamberlain, O. 1347
Charm (encanto) 1354
Chips 1266
de memoria de burbuja magnética 1267
Ciclotrón 919, 920
frecuencia 914
periodo 914
Cinturones de Van Allen **916**, 916
Circuito de corriente continua 843–871
de múltiples mallas 862
método de análisis 863
de una sola malla 859
Circuito eléctrico, energía 850–853
Circuitos de corriente alterna 1009–1038
Circuitos integrados 1266
Circuitos *LC* 1019–1022
Circuitos *LCR* 1019–1022
y números complejos 1030
Circuitos *LCR* con un generador 1022–1029
anchura de resonancia 1025
curvas de resonancia 1025
factor de potencia 1024
factor Q 1025
frecuencia de resonancia 1024
resonancia 1024
Circuitos *LCR* en paralelo **1029**
Circuitos *LCR* en serie 1022
corriente 1023
impedancia 1023
Circuitos *RC* 866–871
carga de un condensador 868
descarga de un condensador 866
Circuitos *RL* 994–998
constante de tiempo 995
Círculo de mínima confusión 1133
Cloruro de hidrógeno, espectro de absorción **1256**
Cloruro de sodio
cristales **1257**
estructura **1256**
Cockcroft, J. D. 1324
Coeficiente de reflexión 1193
Coeficiente de temperatura de la resistividad 848
Coeficiente de transmisión 1193
Coherencia de ondas armónicas 1153–1154
Compton
dispersión 1080
longitud de onda 1366
Condensador 815
almacenamiento de energía en presencia de un dieléctrico 828
botella de Leyden 811
carga 818, 819, 868
conservación de la energía 870
combinaciones 821–825
corriente alterna 1014–1018
densidad de energía 820, 821
descarga 866
constante de tiempo 867
efecto de un dieléctrico 826
energía almacenada 819
energía del campo electrostático 820
Condensador cilíndrico 816
capacidad 816, 817
Condensador de lámina arrollada **818**
Condensador de múltiples capas **826**
Condensador de placas paralelas 815
capacidad 815

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Condensador en paralelo 821, 822, **822**
capacidad equivalente 822
carga total 822
diferencia de potencial 822
Condensador en serie 822, **822**
capacidad equivalente 823
diferencia de potencial 822, 823
Condensador plano **815**
Condensador variable **818**
Condensadores cerámicos **818**
Conducción eléctrica
dispersión de ondas electrónicas 895
electrones libres 886
recorrido libre medio 887
tiempo de colisión 887
energía de Fermi 890
factor de Fermi 891
gas electrónico de Fermi 888
imagen microscópica 885–888
metales 885
potencial de contacto de dos metales 893
predicción de la ley de Ohm 885
superconductividad 897
temperatura de Fermi 892
teoría cuántica 894–895
teoría de bandas de los sólidos 896
teoría microscópica 885–903
velocidad de Fermi 892
Conductor eléctrico 722–723, 848
alambres de cobre 848
calor de Joule 850
campo en la superficie 767–769
carga en la superficie 767–769
carga por inducción 723
conexión a tierra 723
densidad numérica de portadores de carga 844
equilibrio electrostático 767
fuerza magnética 912
movimiento de electrones 844
polarizado 723
potencia disipada 850
resistencia 847
Conductor eléctrico rectilíneo, campo magnético 943, 944
Conductor esférico, energía electrostática **821**
Conexión a tierra 723, **723**
Configuración electrónica 1223
Confinamiento inercial 1333
Confinamiento magnético 1333
Constante de Boltzmann, gas ideal 1366
Constante de Coulomb 724
Constante de desintegración 1319
Constante de gravitación universal (*G*) 1366
Constante de Hubble 1357
Constante de Madelung 1258
Constante de Planck 1366
Constante de reproducción 1329
Constante de Rydberg 1210
Constante de von Klitzing 926
Constante dieléctrica 826
de diversos materiales 827
Constantes físicas 1366
Construcción de Huygens 1087, **1088**
Contracción de longitudes 1284
Contracción de Lorentz-FitzGerald 1284
Cooper, Leon 898
par de 898
pares electrónicos **885**
Corriente alterna
circuitos 1009–1038
condensadores 1014–1018
fasores 1018
generadores 1009–1011
inductores 1014–1018
rectificación 1263
resistencias 1011–1014
Corriente amperiana 953
Corriente continua 843
circuito de múltiples mallas 862
circuito de una sola malla 859
método de análisis 863
circuitos 843–871
Corriente de desplazamiento 1052
Corriente de desplazamiento de Maxwell 1052–1054
Corriente eficaz 1012
relación con valor máximo 1012
Corriente eléctrica 843–846, 886
creación de campos magnéticos 937
definición 843, 844
relación con velocidad de desplazamiento de electrones 844
Corriente inducida 979
Corriente túnel **899**, 1264
Corriente, unidad básica de 1363
Corrientes de Foucault 989–990, 1029
Corrientes turbillonarias 989–990, 1029
Coulomb, Charles 724
balanza de torsión 724
constante 724
ley. *Véase* Ley de Coulomb
potencial 784
Cristal birrefringente **1104**
Cristal de memoria de granate 1267
Cristalino 1134, **1137**
Criterio de Lawson 1333
Criterio de resolución de Rayleigh 1169
Cromodinámica cuántica (CDQ) 1355
Cuantos de campo 1354–1355
Cuarzo **1257**
Culombio (C), unidad derivada de carga 721, 1363
Curie, Pierre 959
ley 959
temperatura 960
unidad 1321
Curva de histéresis 961, **962**
Curvas de resonancia 1025
Datación por carbono radiactivo 1322
Datos numéricos astronómicos 1365
Datos numéricos terrestres 1365
DCA. *Véase* Dispositivos de carga acoplada
Decrecimiento exponencial 867
Densidad de energía magnética 993, 994
Densidad de probabilidad radial 1220
Densidad energética 820
Densidad, factores de conversión para 1364
Dentritas **1241**
Descarga en arco 799
Descarga en corona **751**
Desdoblamiento de estructura fina 1222
Desintegración alfa 1323
Desintegración beta 1321
Desintegración gamma 1323
estados metaestables 1323
Desintegración radiactiva exponencial **1320**
Desintegración radiactiva. *Véase* Radiactividad
Desplazamiento gravitatorio hacia el rojo 1305
Detectores de barrera superficial 1265
Diagramas de difracción
de Fraunhofer 1168–1169
de Fresnel 1168–1169
de una sola rendija 1159–1162
cálculo 1165
intensidad 1166
máximo central de difracción 1160
puntos de intensidad cero 1160
Diagramas de interferencia
de dos rendijas 1157–1159
cálculo de la intensidad 1158
distancia a las franjas brillantes 1158
intensidad en función de la diferencia de fase 1158
de tres o más fuentes 1163
intensidades 1164
máximo secundario 1164
máximos principales 1164
Diagramas de interferencia-difracción
de dos rendijas 1161
cálculo 1167
intensidad 1167
Diagramas de rayos (espejos) **1119**, **1119**, **1120**
Diagramas de rayos (lentes) 1129
Diamagnetismo 952, 963
superconductores 963
Diamante **1260**
estructura cristalina **1260**
Dieléctrico 825–830
campo eléctrico 826
carga ligada 831
magnitud 832
constante dieléctrica 826, 827
efecto sobre la capacidad 826
energía almacenada en un condensador 828
estructura molecular 830–833
permitividad 826
resistencia a la ruptura 827
ruptura dieléctrica 826
Dieléctrico cerámico **826**
Diferencia de fase 1153–1154
Diferencia de potencial 781–784
Difracción 1153–1174
diagramas. *Véase* Diagramas de difracción
redes. *Véase* Redes de difracción
y resolución 1169–1170
Difracción de Fraunhofer 1168
resolución de instrumentos ópticos 1169–1170
Difracción de Fresnel 1168
Dilatación del tiempo 1281, 1282
Diodo 1263
ruptura por avalancha 1264
Diodo túnel 1264
Diodo Zener 1264
Diodos emisores de luz 1265

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Dioptrías 1128
Dipolo eléctrico 732, **732**, **734**
  campo eléctrico 732
  comportamiento en campos eléctricos 736–738
  líneas de campo 734, **734**
Dipolo magnético
  campo 939
  líneas del campo magnético **948**
Dirac, ecuación 1345
Disco duro de un ordenador **962**
Discos compactos **1171**
Dispersión 1102
Dispersión Compton 1080
Dispersión de la luz 1094
Dispersión elástica 1080
Dispersión inelástica 1080
Dispersión inelástica profunda 1353
Dispersión Raman 1080
Dispersión Rayleigh 1080
Dispositivos de carga acoplada 1268
Distancia focal 1118
Distribución de Fermi-Dirac 900–903
  densidad de estados 901
  función de distribución energética 901
Distribución de Maxwell-Boltzmann 887, 888, 895
DNA
  micrografía de barrido de efecto túnel **1185**
  molécula **1247**
Doble refracción 1102
Dominio magnético 959
Dominios ferromagnéticos **960**
Dopado 1260
Drude, P. 885
Dualidad onda-partícula 1077–1078
Ecuación de Dirac 1345
Ecuación de la lente delgada 1126
Ecuación de onda 1062
  para ondas electromagnéticas 1062–1068
Ecuación de Schrödinger 1185–1205
  aplicaciones 1185–1204
  dependiente del tiempo 1185, 1186
  en coordenadas esféricas 1215
  en tres dimensiones 1200–1203
  independiente del tiempo 1186
  niveles energéticos 1201
  ondas electrónicas, reflexión y transmisión 1192–1200
  oscilador armónico 1190–1192
  para dos partículas idénticas 1203–1204
  partícula en una caja 1187, 1188
  penetración de barrera 1192–1200
  potencial de pozo rectangular infinito 1187
  potencial escalón 1192
  y sistema periódico 1223–1230
Ecuación del constructor de lentes 1125, 1126
Ecuación del espejo 1118
Ecuación radial 1216
Ecuaciones de Maxwell 1054–1055
  y ondas electromagnéticas 1051–1068
Efecto Doppler relativista 1285
  desviación hacia el rojo 1286
Efecto espín–órbita 1222
Efecto fotoeléctrico 1077, 1080
Efecto Hall 924–926
Efecto Hall cuántico 926
Efecto Josephson 900
Efecto Meissner **998**, 998
Efecto piezoeléctrico 833
Efecto piezoeléctrico inverso 833
Efecto túnel 899
Einstein, Albert 1077, **1277**, 1278
  ecuación para la energía del fotón 1077
  postulados 1278–1279
Electricidad 719
  almacenamiento 818–821
  conducción. *Véase* Conducción eléctrica
Electrodinámica cuántica 1354
Electrolito 854
Electrones 719, 1344
  medida del cociente *q/m* 917
  momento magnético debido al espín 957
  momento magnético debido al movimiento orbital 956
  movimiento en un campo magnético **915**
  propiedades en los metales 1196
Electrones libres
  densidad numérica y energía de Fermi 891
  energía media en un metal 844
  movimiento a través de la red cristalina **887**
  movimiento en un conductor 844
  recorrido libre medio 887
    interpretación clásica 887
  tiempo de colisión 887
    interpretación clásica 887
  velocidad de desplazamiento 844, 886
Electrón-voltio 783
Electroscopio 722, **722**
Electrostática 719
Elemento de corriente 912
Elementos de estado sólido 1260
Elementos de transición 1228
Elementos químicos 1209
  periódica 1367
Emisión espontánea 1079
Emisión estimulada 1080
Energía 1363, 1364
  cuantización en una caja unidimensional 889
  en una órbita circular 1211
Energía cinética 1363, 1364
Energía cinética relativista 1297
Energía de disociación 1242
Energía de Fermi 890, 901
  en tres dimensiones 891
  en una dimensión 890
  y densidad numérica de electrones 891
Energía de ionización 1214, 1224
Energía del campo electrostático 820
Energía eléctrica, almacenamiento 818–821
Energía electrostática 811–833
Energía en reposo 1297
Energía magnética 992–994
  almacenamiento en un inductor 992, 993
  densidad 993, 994
Energía potencial
  factores de conversión para 1364
  relación con potencial eléctrico 782
  unidad de 1363
Energía potencial de pozo rectangular **1188**
  finito **1188**
  infinito **1187**
Energía potencial de pozo rectangular infinito **1187**
Energía potencial electrostática 812–814, 818
  sistema de cargas puntuales 812
  sistema de conductores 813
Energía prohibida del superconductor 898
Energía relativista 1296–1305
Enlace covalente 1243
  compartición de electrones 1248
Enlace iónico 1242
Enlace metálico 1247
Enlace molecular 1241
Enlaces de hidrógeno 1246
Enlaces de van der Waals 1246
Equilibrio electrostático 767
Era de los leptones 1358
Esfera uniformemente cargada, campo eléctrico 764
Espectro continuo 1078
Espectro de rayas 1078
Espectro electromagnético 1055, 1056
Espectro visible continuo **1078**
Espectrómetro 919
Espectrómetro de masas 918, 919
Espectros atómicos 1210
  fórmula de Rydberg-Ritz 1210
Espectros continuos 1079
Espectros de rayos X 1230–1233
Espectros luminosos 1078
Espectros ópticos 1230–1233
Espectroscopio **1078**, **1172**, 1172
Espejismo 1093, **1094**
Espejo de Lloyd 1159, **1159**
Espejos 1115–1122
  aberración esférica 1133
  aumento lateral 1120
  diagrama de rayos 1119, **1119**
  distorsión 1133
  ecuación 1118
  rayos principales 1119
  signos para la reflexión 1120
Espejos convexos 1121
  diagrama de rayos **1121**
Espejos esféricos 1117
  aberración esférica 1117
  rayos paraxiales 1117
Espejos planos 1115
  imágenes formadas 1116
Espín
  y antipartículas 1345–1349
  y función de onda 1244
Espiras de corriente 921–924
  campo magnético 937
  líneas de campo magnético 939
  momento 921
  momento dipolar magnético 921
Estados metastables 1323
  de la luz 1080
Estaño fundido, solidificación **1241**
Estereorradián 770
Eta (mesón) 1345
Éter, medio para la velocidad de la luz 1278

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Extrañeza 1351
Factor de Fermi 891, 901, 902
para $T > 0$ 892
Factor Q, circuito *LCR* 1025
Factores de conversión, unidades de 1364
Faraday, Michael 814, 825, 979
Véase Ley de Faraday
Faradio (F), unidad 814, 1363
Fasores 1018–1019, 1162
suma de ondas armónicas 1162–1167
Fem 851
definición 981
Fem de movimiento 987–989
Fem inducida 979, 979
ley de Faraday 981–984
Fermat, Pierre de 1087
principio 1088, 1105
Fermi
energía de 890, 901
factor 902
factor de 891, 901
gas electrónico 888–894
temperatura de 892
velocidad de 892
Fermi-Dirac, distribución 900–903
Fermiones 889, 1345
Ferromagnetismo 952, 959
campo remanente 961
curva de histéresis 961
dominios **960**
imantación 962
interacción de intercambio 959
ley de Curie 959
permeabilidad del material 961
permeabilidad relativa 962
temperatura de Curie 960
Fibra óptica 1092
Física nuclear 1315–1335
Fisión nuclear 1327–1335
agua pesada 1330
moderador 1330
neutrones retardados 1331
reactor reproductor 1332
reactores 1329
uranio enriquecido 1330
uranio natural 1330
Fizeau , Armand H. L. 1086
medición de la velocidad de la luz 1086
Flujo eléctrico 757
definición 758
Flujo magnético 980
unidad derivada de 1363
Flúor, configuración electrónica 1227
Fluorescencia 1080
Fórmula de Rydberg-Ritz 1210
Fotografías térmicas 1097
Fotón 1077
dispersión elástica 1080
dispersión inelástica 1080
ecuación de Einstein para la energía 1077
emisión espontánea 1079
emisión estimulada 1080
energía 1079
Fotones virtuales 1354
Fotos infrarrojas 1097
Foucault
corrientes 1029
medición de la velocidad de la luz **1086**
Franjas de interferencia 1155, 1156
Franklin, Benjamin 720, 811
Fraunhofer, diagrama de difracción 1168–1169
Frecuencia, unidad de 1363
Frecuencia del ciclotrón 914
Fresnel
diagrama de difracción 1168–1169
lente **1128**
Fuente de fem 851
Fuentes luminosas 1079–1083
Fuerza 1363, 1364
Véase también Gravedad
Fuerza contraelectromotriz 986
Fuerza eléctrica, acción a distancia 728
Fuerza electrodébil 1358
Fuerza electromotriz. *Véase* Fem
Fuerza hadrónica 1316
Fuerza magnética 910
dirección y sentido 910
regla de la mano derecha 910
sobre un conductor eléctrico 912
sobre un elemento de corriente 912
sobre una carga móvil 910
y conservación del momento lineal 954
Fuerza nuclear fuerte 1316
Fullerenos **1260**
Función electrotónica 1064
Funciones de onda
representación mediante fasores 1162
y densidades de probabilidad 1218
Fusión nuclear 1327–1335
confinamiento inercial 1333
confinamiento magnético 1333
plasma 1333
reactor piloto Tokamak **1334**
Galileo 1083, 1278
transformación 1280
Galvanómetro 865, **865**
Gamow, George 1195, 1200
Ganancia de corriente 1265
Ganancia de voltaje 1270
Gas, constante 1366
Gas electrónico 886
Gas electrónico de Fermi 888–894
Gauss
unidad 910
Véase Ley de Gauss
Geiger, H. W. 1211
Gell-Mann, M. 1351, 1352
Generador de ca **1010**
Generador de Van de Graaff **799**
Generadores de corriente alterna 1009–1011
potencia media cedida 1012
Gilbert, William 909
Glashow, S. 1354
Gluones 1355
carga de color 1355
Gradiente, vector potencial 788
Grafito **1260**
Granate, cristal de memoria en película delgada **1267**
Gravitón 1354
Hadrones 1344–1345
estables a la desintegración 1345
Hahn, Otto 1328
Hall
efecto 924–926
efecto cuántico 926
resistencia 926
voltaje 925, 926
Helio
configuración electrónica 1224
espectro de rayas **1078**
Helmholtz, bobinas **935**
Henrio (H), unidad 990, 1363
Henry, Joseph 979
Hertz (Hz), unidad de frecuencia 1363
Hertz, Heinrich 1051
Hidrógeno
configuración electrónica 1224
densidad de probabilidad radial 1220
enlace 1246
espectro atómico 1210
fórmula de Balmer 1210
espectro de rayas **1078**, **1210**
estado fundamental 1219
modelo de Bohr del átomo 1211–1215
niveles energéticos
modelo de Bohr 1214
teoría cuántica 1218
teoría cuántica del átomo 1217–1221
Hidrógeno molecular
energía potencial en función de la separación **1245**
enlace saturado 1245
funciones de onda unidimensionales **1245**
Higgs
bosón 1355
campo 1355
Hipermetropía 1134
Histéresis, curva 961, **962**
Holograma 1173
producción **1173**
Hologramas de arco iris 1173
Hubble, E. P. 1357
constante 1357
ley 1357
tiempo 1357
Huygens, Christian 1087
construcción 1087, **1088**
principio 1087, 1088, 1105
Igualación de impedancias 853
Imagen 1090
Imagen real 1117
Imagen virtual 1115, **1120**
Imágenes ópticas 1115–1141
inversión en profundidad 1115
Imanes 909
pares de fuerzas 921–924
polo norte 909
polo sur 909
Imanes permanentes 935
Imantación 952, 953
de materiales ferromagneticos 962
Imantación de saturación 957
Impedancia 1023
igualación 853

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Impedancias complejas 1031
Índice de refracción 1088
de diversos materiales **1094**
Inducción electrostática 723
Inducción magnética 979–999
Inductancia 990–992, 1015
unidad derivada de 1363
Inductancia mutua 992
Inductor 991
almacenamiento de energía magnética 992, 993
corriente alterna 1014–1018
Instrumentos ópticos 1133–1141
poder de resolución 1169
resolución 1169
Intensidad de corriente. *Véase* Corriente eléctrica 844
Intensidad luminosa, unidad básica de 1363
Interacción de intercambio 959
Interacción fuerte 1356
Interacción fuerte residual 1356
Interacciones fotón-átomo **1080**
Interferencia 1153–1174
de dos rendijas
diagramas 1157–1159
máximos 1157
mínimos 1157
número de orden 1157
diagramas. *Véase* Diagramas de interferencia
en películas delgadas 1154–1157
franjas 1155, 1156
placas ópticamente planas 1157
Inversión en profundidad 1115, 1116
Iones 722, 1209
energía de disociación 1242
Iones reticulares 722
imagen clásica 895
imagen mecánico-cuántica 895
Ionización 1214
Isótopos 1315
masa atómica **1317**
Josephson
efecto 900
unión 900
Joule, calor 850
Julio (J), unidad de trabajo y energía 1363
Kaón (mesón) 1345, 1347
Kaón negativo 1347
Kelvin (K), unidad de temperatura 1363
Kilogramo (kg), unidad de masa 1363
Kirchhoff, Gustave **1078**
Véase Reglas de Kirchhoff 859
Laboratorio europeo de física de partículas (CERN) **1348**
Lambda (barión) 1345
Lámina de cuarto de onda 1104
Lámina de media onda 1104
Lámpara de descarga electrónica **817**
Land, E. H. 1099
Láser 1082
aplicaciones 1083
bombeo óptico 1082
formación de un haz de fotones **1083**
inversión de la población 1082
tipos 1083
Láser de rubí **1082**, 1082
niveles energéticos **1082**
Láser helio-neón 1082, **1083**, **1084**
niveles energéticos **1083**
Lawrence, E. O. 919, 1324
Lawson, J. D. 1333
criterio 1333
LEDs 1265
Lente de Fresnel **1128**
Lentes 1122–1133
aberración esférica 1133
amplificación angular 1136
diagramas de rayos 1129
distorsión 1133
fórmula del constructor 1125
imágenes formadas por refracción 1122
plano focal 1128
poder amplificador 1136
potencia 1128
puntos próximos 1134
rayo central 1129
rayo focal 1129
rayo paralelo 1129
rayos principales 1129
signos para la refracción 1122
Lentes convergentes 1126, **1126**
Lentes delgadas 1125
ecuación 1126
Lentes divergentes 1126, **1127**
Lentes múltiples 1130
Lentes negativas 1126
rayos principales 1129
Lentes no reflectantes 1157
Lentes positivas 1126
rayos principales 1129
Lenz, ley 984
Leptón pesado 1344
Leptones 1344–1345
número y conservación 1349
Levitación magnética *909*
Ley de Ampère 949–952, 1052
forma generalizada 1052
limitaciones 951
Ley de Biot y Savart 937–948
Ley de Brewster 1101
Ley de Coulomb 724–727
cálculo del campo eléctrico 750–756
deducción de la ley de Gauss 770
en función de ϵ_0 759
Ley de Curie 959
Ley de Faraday 979, 981, 1053
fem inducida 981–984
Ley de Gauss 756–760, 1052
cálculo del campo eléctrico 760–766
deducción a partir de la ley de Coulomb 770
en función de ϵ_0 759
enunciado cuantitativo 758
para el magnetismo 948, 1055
Ley de Hubble 1357
Ley de la reflexión 1089
deducción 1104–1107
Ley de la refracción 1089
deducción 1104–1107
Ley de Lenz 984–986
Ley de Malus 1100
Ley de Ohm 847–849, 886
predicción a partir de la conducción eléctrica 885
Ley de Snell 1089
Ley de Stefan-Boltzmann 1079
Ley del desplazamiento de Wien 1080
Leyden, botella 811
Líneas de campo eléctrico 732–735
reglas para dibujarlas 733
y potencial eléctrico 783
Líneas de campo magnético 912, **912**
Líneas de fuerza 732
Litio, configuración electrónica 1225
Livingston, M. S. 919, 1324
Lloyd, espejo 1159
Longitud, contracción 1284
Longitud, factores de conversión para 1364
Longitud, unidad básica de 1363
Lorentz, Hendrik A. 885
transformación 1280–1286
Lorentz-FitzGerald, contracción 1284
Lupa 1136
amplificación angular 1136
poder amplificador 1136
Luz
absorción por resonancia 1080
deducción de las leyes de reflexión y refracción 1104–1107
diagramas de difracción
de una sola rendija 1159–1162
de dos rendijas 1157–1159
dispersión 1080, 1094
espectros 1078
continuos 1078, 1079
de rayas 1078
fuentes 1079–1083
interferencia en películas delgadas 1154–1157
medición de la longitud de onda 1171
naturaleza corpuscular 1077
polarización 1099–1104
polarización circular 1099
polarización lineal 1099
polarización por absorción 1099
polarización por birrefringencia 1102
polarización por reflexión 1101
propagación 1078, 1087–1088
fibras ópticas 1092
principio de Huygens 1087
y espejismo 1093
propiedades 1077–1107
reflexión 1088–1099
refracción 1088–1099
velocidad 1083–1087
mediciones 1084
y éter 1278
Luz negra **1081**
Luz reflejada, intensidad relativa 1091
Luz transmitida, intensidad relativa 1091
Luz ultravioleta **1081**
Luz visible 1056
Lyman, T. 1214
serie *1214*
Madelung, constante 1258
Magnetismo
dominios magnéticos 959

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Magnetismo (*continuación*)
 en la materia 952–964
 imantación 952
 ley de Gauss 948
 momentos magnéticos atómicos 955
 permeabilidad relativa 954
 susceptibilidad magnética 952
Magnetita 909, **959**
Magnetón de Bohr 957
Maiman, Theodore 1082
Malus, E. L. 1100
 ley 1100
Maricourt, Pierre 909
Marsden, E. 1211
Masa
 factores de conversión para 1364
 unidad de 1363
Masa en reposo 1296
 energía 1299
Masa reducida 1250
Masa relativista 1296
Materia, magnetismo 952–964
Materiales
 anisótropos 1102
 birrefrigencia 1102
  eje óptico 1102
 diamagnéticos 952
 dieléctricos 825
 ferromagnéticos 952
 fosforescentes 1080
 isótropos 1102
 magnéticamente blandos 962
 magnéticamente duros 962
 no óhmicos 847
 óhmicos 847
 paramagnético 952
Maxwell, James Clerk 1051, 1064
 corriente de desplazamiento 1052–1054
 Véase Ecuaciones de Maxwell 1051
Maxwell-Boltzmann, distribución 887, 888, 895
Meissner, efecto 998, **998**
Memoria digital 1267
Mercurio
 espectro de rayas **1078**, **1210**
 resistencia eléctrica en función de la temperatura **898**
Mesón *Y* 1354
Mesones 1344, 1345
 partícula ψ 1354
Metales
 capacidad calorífica debida a los electrones 894
 conducción eléctrica 885
 distribución de Fermi–Dirac de electrones 900
 enlace 1247
 electrones libres 886
 funciones de trabajo 893
 potencial de contacto 893
 propiedades de los electrones 1196
Metro (m), unidad de longitud 1363
Michelson, Albert A. 1086, 1278
Michelson-Morley, experimento 1278
Microondas, polarización 1099
Microscopio compuesto 1138, **1138**
 longitud de tubo 1138
 objetivo 1138
 ocular 1138
 poder amplificador 1138
Microscopio de barrido por efecto túnel 1196, 1197, 1199, 2000
Microscopio de campo iónico 1196
Microscopio electrónico de transmisión 1196
Microscopio simple 1136
Miopía 1134
Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno 1211–1215
Modelo de la gota líquida del núcleo 1316
Moderador (reactor de fisión nuclear) 1330
Modulación de la velocidad angular 1364
Módulo de la velocidad, factores de conversión 1364
Moléculas 1241–1270
 energía electrónica 1249
 energía rotacional 1249
 energía rotacional característica 1250
 energía vibratoria 1249
 enlace covalente 1243
 enlace iónico 1242
 enlace metálico 1247
 enlace molecular 1241–1247
 enlaces de hidrógeno 1246
 enlaces de van der Waals 1246
 espectros de absorción 1254, **1255**
 espectros de emisión 1253
 masa reducida 1250
 niveles energéticos de vibración 1252, **1253**
 niveles energéticos electrónicos **1253**
 niveles energéticos rotacionales 1249, 1250, **1253**
 número cuántico de vibración 1252
 número cuántico rotacional 1250
 orbitales híbridos 1249
 orbitales moleculares 1241
 orbitales moleculares equivalentes 1249
 unidad de masa unificada 1250
Moléculas diatómicas
 espectros 1249–1256
 niveles energéticos 1249–1256
Moléculas no polares 737
Moléculas polares 737
Moléculas polarizadas 737
Moléculas poliatómicas 1247–1249
 orbitales atómicos 1248
Molibdeno, espectro de rayos X **1232**
Momento dipolar eléctrico 732
Momento dipolar magnético 921
Momento magnético
 espín electrónico 957
 movimiento orbital del electrón 956
 y momento angular 956
Momentos magnéticos atómicos 955
Monosulfuro de samario **1226**
Morley, Edward 1278
MOS, transistores 1266
Moseley, H. 1232
Motor de ca 1010
Motor de inducción 1037
Motor universal 1037
Motores eléctricos 1034
 armadura 1034
 campo del estator 1034
 característica de funcionamiento 1035
 conexión en serie 1036
 conexión paralelo 1035
 conexión shunt 1035
 conmutador de escobillas 1034
 motor de inducción 1037
 motor universal 1037
 polo conformado 1037
Müller, Karl Alexander 898
Muones 1344
 desintegración 1285
Neón, configuración electrónica 1226
Neutrinos 1322, 1344
 detector Super-Kamiokande **1344**
Neutrón térmico 1326
Neutrones 1315, 1317, 1352
 masa atómica **1317**
 reacciones nucleares 1326
Neutrones retardados 1331
Newton 1278
 anillos 1155
 factores de conversión para 1364
 unidad de fuerza 1363
Nishijima, K. 1351
Nitrógeno molecular, espectro de emisión **1254**
Niveles energéticos
 degenerados 1201
 modelo de Bohr del átomo de hidrógeno 1214
 teoría cuántica del átomo de hidrógeno 1218
 y ecuación de Schrödinger 1201
Nucleido 1315
Núcleo atómico
 energía de enlace 1317
 fisión y fusión 1327–1335
 fuerza hadrónica 1316
 fuerza nuclear fuerte 1316
 ligeros, energía en reposo 1298
 masa 1317
 modelo de la gota líquida 1316
 número de masa 1315
 números *N* y *Z* 1316
 propiedades 1315–1318
 radiactividad 1319
 radio nuclear 1316
 tamaño y forma 1316
Núcleo hijo 1321
Nucleones 1344, 1345
Número atómico 1209, 1315, 1316
Número cuántico magnético 1216
Número cuántico orbital 1216
Número cuántico principal 1216
Número cuántico rotacional 1250
Número de Avogadro 1366
Número de bariones 1349
Número de leptones 1349
Número de masa 1315
Números complejos, resolución de circuitos *LCR* 1030
Números cuánticos, en coordenadas esféricas 1216
Objetivo 1138

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Ocular 1138
Oculares 1136
Oersted, Hans Christian 935
experimento **937**
Ohm, ley 847–849, 886
Ohmímetros 865, **866**
Ohmio (Ω), unidad de resistencia 847, 1363
Ojo
acomodación 1134
bastones y conos 1133, **1137**
cristalino 1134, **1137**
distancia de mayor visión distinta 1135
músculos ciliares 1134, **1137**
pupila 1133
retina 1133
sistema lente-córnea 1133
Ojo hipermétrope **1134**
Ojo humano **1133**, **1137**
Ojo miope **1134**
Omega (barión) 1345
Onda plana 1062
Onda-partícula, dualidad 1077–1078
Ondas, reversibilidad 1119
Ondas armónicas
coherencia 1153–1154
diferencia de fase 1153–1154
suma mediante fasores 1162–1167
Ondas electromagnéticas 1051–1062
cantidad de movimiento 1059, 1060
densidad energética 1059
ecuación de onda 1062–1068
para B 1063
para E 1063
energía 1059, 1060
intensidad 1059, 1061
presión de radiación 1059, 1061
vectores de los campos eléctrico y magnético 1055
velocidad en el vacío 1051
y ecuaciones de Maxwell 1051–1068
Ondas electrónicas
coeficiente de reflexión 1193
coeficiente de transmisión 1193
dispersión 895
penetración de barrera 1194
penetración de barrera óptica **1195**
reflexión y transmisión 1192–1200
transmisión a través de una barrera 1194
Ondas infrarrojas 1056
Onnes, H. Kamerlingh 897
Oppenheimer, J. Robert 1305
Óptica 1115–1141
aberraciones 1133
aumento lateral 1120
distancia focal 1118
espejos 1115–1122
imagen 1115
imagen real 1117
imagen virtual 1115
instrumentos 1133–1141
inversión en profundidad 1115
lentes 1122–1133
objeto 1115
profundidad aparente (objeto bajo el agua) 1124
Óptica (*continuación*)
punto focal 1118
reversibilidad de los rayos 1119
Orbitales atómicos 1248
hibridación 1249
Orbitales híbridos 1249
Orbitales moleculares 1241
Orbitales moleculares equivalentes 1249
Orden de corto alcance 1256
Orden de largo alcance 1256
Oscilador armónico 1190–1192
Par de Cooper 898
Paradoja de los gemelos 1290
Paramagnetismo 952, 958
Pararrayos **723**
Pares de fuerzas 921–924
Pares electrónicos de Cooper **885**
Partícula
en un pozo rectangular finito 1188–1190
en un pozo rectangular infinito 1187
Partícula ψ/J 1354
Partículas de campo 1354–1355
Partículas de espín 1345
Partículas elementales 1343–1359
cromodinámica cuántica 1355
energías en reposo 1298
extrañeza 1351
interaccion fuerte 1356
interacciones básicas 1356
ley de conservación 1349–1352
modelo estándar 1343, 1355–1357
teoría electrodébil 1355
teorías de la gran unificación 1357
y espín 1345–1349
Partículas extrañas 1351
Paschen, serie 1214
Pauli, Wolfgang 889, 1204, 1322
principio de exclusión 889, 1204
Penetración de barrera 1192, 1194, **1195**
Penzias, Arno 1358
Período de nucleosíntesis 1359
Período de semidesintegración 1320
Período del ciclotrón 914
Permeabilidad del espacio libre 936
Permeabilidad relativa 954
de materiales ferromagnéticos 962
Permitividad de un dieléctrico 826
Permitividad del espacio libre 759
Pfund, H. A. 1214
Piedra imán **959**
Piezoeléctrico, efecto 833
Pila seca 854
Pinzas de láser **1060**
Pión (mesón) 1345
Plano de incidencia 1089
Plasma (fusión nuclear) 1333
Poder amplificador de un microscopio 1138
Poder amplificador de un telescopio 1139
Poder amplificador de una lupa 1136
Poder de resolución de una red de difracción 1173
Polarización de la luz 1099–1104
Polarización por birrefringencia 1102
Polarización por reflexión 1101
Polarizador 1100
Polarizadores cruzados **1100**, **1103**
Polaroid 1099
Portadores de carga, densidad numérica de 844
Positrón **719**, 1346
Postulados de Einstein 1278–1279
Potasio, configuración electrónica 1227
Potencia
factores de conversión para 1364
unidad de 1363
Potencia de la lente 1128
Potencial de contacto 893
Potencial de Coulomb 784
Potencial de pozo rectangular infinito 1187
Potencial eléctrico 781–801
anillo cargado 790
carga lineal infinita 796
continuidad 782
corteza esférica de carga 794
determinación del campo eléctrico 788–789
disco uniformemente cargado 791
distribuciones continuas de carga 790–796
dos cargas puntuales 784
gradiente 788
plano infinito de carga 792
relación con campo eléctrico 789
relación con energía potencial 782
sistema de cargas puntuales 784–788
superficies equipotenciales 796–801
una carga puntual 784
y líneas de campo eléctrico 783
Potencial escalón de ondas electrónicas 1192
Potencial gravitatorio 1305
Potencial oscilador armónico **1190**
Potencial, unidades derivadas de 1363
Poynting, John 1059
vector 1059
Presión, factores de conversión para 1364
Presión de radiación 1059, 1061
Primer radio de Bohr 1213
Principio de equivalencia 1302
Principio de exclusión de Pauli 889, 1204, 1242
en función de estados espaciales 889
Principio de Fermat 1088, 1105
Principio de Huygens 1087, 1088, 1105
Profundidad aparente 1124
Propagación de la luz 1087–1088
Propiedades térmicas y conductividad, factores de conversión para 1364
Protones 1315, 1352
Punto focal 1118
Pupila 1133
Quarks 720, 1344, 1352–1354
bottom 1354
charm 1354
confinamiento 1354
encanto 1354
propiedades 1353
sabores 1352
top 1354
Radiación, y fuentes de luz 1079–1083
Radiación de enfrenamiento 1057
Radiación dipolar eléctrica 1058
Radiación infrarroja 1097
Radiactividad 1319–1324
constante de desintegración 1319

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Radiactividad (*continuación*)
- desintegración alfa 1323
- desintegración beta 1321
- desintegración gamma 1323
- desintegración radiactiva 1319
- fisión y fusión nucleares 1327–1335
- período de semidesintegración 1320
- tiempo de vida media 1319
- velocidad de desintegración 1319

Radio de las órbitas de Bohr 1213
Radio de Schwarzschild 1305
Radio nuclear 1316
Raman, C.V. 1080
- dispersión 1080

Rayleigh
- criterio de resolución 1169
- dispersión 1080

Rayos gamma 1055
Rayos paraxiales 1117
Rayos ultravioletas 1056
Rayos X, espectros atómicos 1230
Reacción endotérmica 1325
Reacción exotérmica 1325
Reacciones nucleares 1324–1327
- con neutrones 1326
  - resonancia 1326
- reacción endotérmica 1325
- reacción exotérmica 1325
- sección eficaz 1325
- valor Q 1325

Reactancia capacitiva 1017
Reactancia inductiva 1015
Reactancia total 1023
Reactor de ensayo de fusión Tokamak **951**
Reactor nuclear de agua a presión **1330**, 1330
Reactor piloto de fusión Tokamak **1334**
Reactor reproductor (fisión nuclear) 1332
Reactores de fisión nuclear 1329
- constante de reproducción 1329

Recorrido libre medio 887
Rectificación de corriente alterna 1263
Redes de difracción 1171–1174
- espectro de primer orden 1172
- espectro de segundo orden 1172
- hologramas 1173
- línea espectral 1172
- medición de la longitud de onda 1171
- poder de resolución 1173
- raya espectral 1172

Reflexión
- convenio de signos 1120
- intensidad relativa de la luz reflejada y transmitida 1091
- ley 1089, 1104–1107

Reflexión de la luz 1088–1099
Reflexión difusa **1090**, 1090
Reflexión especular **1090**, 1090
Reflexión interna total 1091, **1092**
- ángulo crítico 1091

Refracción 1089–1099
- convenio de signos 1122
- formación de imágenes en lentes 1122
- índice 1088
- ley 1089, 1104–1107

Refracción de la luz 1088–1099
Regla de la mano derecha **910**, **921**, **944**
Regla de las mallas 859
Regla de los nudos 859
Reglas de Kirchhoff 859–866
- regla de las mallas 859
- regla de los nudos 859

Relatividad 1277–1305
- cantidad de movimiento relativista 1295–1296
- contracción de Lorentz-FitzGerald 1284
- contracción de longitudes 1284
  - longitud propia 1284
- desplazamiento gravitatorio hacia el rojo 1305
- dilatación del tiempo 1281
  - tiempo propio 1282
- efecto Doppler relativista 1285
  - desviación hacia el rojo 1286
- energía cinética relativista 1297
- energía en reposo 1297
- energía relativista 1296–1305
- masa en reposo 1296
- masa en reposo y energía 1299
- masa relativista 1296
- paradoja de los gemelos 1290
- postulados de Einstein 1278–1279
- potencial gravitatorio 1305
- relación energía total, cantidad de movimiento y energía en reposo 1299
- simultaneidad 1287
- sincronización de relojes y simultaneidad 1287–1291
- transformación de Lorentz 1280–1286
- transformación de velocidades 1292–1295

Relatividad general 1302
- principio de equivalencia 1302

Relatividad newtoniana 1277–1278
- principio 1278

Reloj de máser de hidrógeno 1304
Relojes, sincronización 1287
Resistencia a la ruptura del dieléctrico de diversos materiales 827
Resistencia dieléctrica 799
Resistencia eléctrica 847–849, 886
- combinaciones 853–859
- corriente alterna 1011–1014
- definición 847
- potencia disipada 850
- unidad derivada 1363

Resistencia eléctrica de carbono 849
Resistencia eléctrica en paralelo 855
- caída de potencial 855
- intensidad de corriente 855
- resistencia equivalente 855, 856

Resistencia eléctrica en serie 854
- caída de potencial 854
- resistencia equivalente 854

Resistencia eléctrica equivalente 854
Resistencia Hall 926
Resistencia interna de una batería 852
Resistencia shunt 865
Resistividad eléctrica 848
- coeficiente de temperatura 848
- de diversos materiales 848
- temperatura crítica 897

Resistividad en función de v_m y λ 887
Resolución de instrumentos ópticos 1169
Resonancia
- circuitos de corriente alterna 1024
- reacciones con neutrones 1326

Retina 1133
Rohrer, Heinrich 1196
Römer, medición de la velocidad de la luz 1084
Römer, Ole 1084
Rubbia, C. 1354
Ruptura dieléctrica 799, 826
Ruptura por avalancha 1264
Rutherford, E. 1211
Rydberg, constante 1210
Rydberg-Ritz, fórmula 1210
Sabores 1352
Salam, A. 1354
Savart, Felix 935
Schrieffer, Robert 898
Schrödinger. *Véase* Ecuación de Schrödinger
Schwarzschild, radio 1305
Sección eficaz 1325
Segré, E. 1347
Segundo (s), unidad de tiempo 1363
Selector de velocidades 917
Semiconductor
- célula solar 1264
- diodo túnel 1264
- diodo Zener 1264
- niveles aceptores 1261
- niveles donadores 1261

Semiconductor tipo n 1261
Semiconductor tipo p 1261
Semiconductores 1260–1262
- amplificadores de corriente 1270
- detectores de barrera superficial 1265
- diodo emisor de luz 1265
- diodos 1263
- dispositivos 1262–1270
- dispositivos de carga acoplada 1268
- dopado 1260
- región de agotamiento 1263
- sensibles a la luz 1268
- transistores 1265
- unión pn 1262, **1262**
  - niveles energéticos **1263**
- uniones 1262–1270
  - polarización directa 1263
  - polarización inversa 1263

Semiconductores con impurezas 1260
Semiconductores intrínsecos 897, 1260
Shockley, William 1265
SI (unidad de medida) 1363, 1363–1364
- temperatura 1363

Sigma (barión) 1345
Silicio cristalino sintético **1261**
Silicio impurificado con arsénico **1261**
Silicio impurificado con galio **1261**
Simultaneidad 1287–1291
- definición 1287

Sincronización de relojes (teoría de la relatividad) 1287–1291
Sistema de referencia 1278
Sistema de referencia inercial 1278
Sistema periódico, y ecuación de Schrödinger 1223–1230

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Snell, ley 1089
Sodio
  configuración electrónica 1227
  diagrama de niveles energéticos **1231**
Solenoide 940, **941**
  autoinducción 991
  campo magnético 942
  líneas de campo magnético **941**
Sólidos 1241–1270
  banda de conducción 896
  banda de valencia 896
  enlace covalente 1243
  enlace iónico 1242
  enlace metálico 1247
  enlace molecular 1241–1247
  enlaces de hidrógeno 1246
  enlaces de van der Waals 1246
  estructura 1256–1260
    celda unitaria 1256
    cúbica centrada en el cuerpo 1259
    cúbica centrada en las caras 1256
    de bandas 897
    hexagonal compacta 1259
    orden de corto alcance 1256
    orden de largo alcance 1256
  estructura cristalina 1256, **1257**, 1258, 1260
    constante de Madelung 1258
    energía de disociación 1258
  intervalo energético prohibido 896
  teoría de bandas 896–897
Sólidos amorfos 1256
Stefan-Boltzmann, ley 1079
Strassmann, Fritz 1328
Superconductividad 897–900
  efecto Josephson 900
  par de Cooper 898
  temperatura crítica 897
  teoría BCS 898
Superconductores
  diamagnetismo 963
  energía prohibida 898
  propiedades magnéticas 998–999
Superconductores de alta temperatura 898
Superconductores del tipo I 998
Superconductores del tipo II 998
Superficie gaussiana 760, **760**
Superficie gaussiana esférica **762**
Superficies equipotenciales 796–801
Super-Kamiokande, detector de neutrinos **1344**
Susceptibilidad magnética 952, 954
  de diversos materiales 954
Tabla periódica de los elementos 1367–1368
Tau 1344
Telescopio 1139
  poder amplificador 1139
Telescopio astronómico **1139**, 1141
Telescopio espacial Hubble **1141**
Telescopio Keck **1141**
Telescopio reflector **1140**, **1141**
Telescopio reflector Hale **1140**
Telescopios reflectores **1140**
Temperatura, unidad de 1363
Temperatura de Curie 960
Temperatura de Fermi 892
Tensión eficaz 1012
Tensión en los bornes 851, 852
Teorema de la equipartición 1065
Teoría BCS 898
Teoría cuántica atómica 1215–1217
Teoría cuántica del átomo de hidrógeno 1217–1221
Teoría de bandas de los sólidos 896–897
Teoría de la relatividad. *Véase* Relatividad 1277
Teoría electrodébil 1354, 1355
Teoría electromagnética 1065
Teorías de la gran unificación (TGU) 1357
Tesla (T), unidad 910, 1363
Thomson, J. J. 735, 917, 1210
  medida del cociente q/m para electrones 917
  modelo del átomo 1210
  tubo 917
Tiempo, dilatación 1281, 1282
  factores de conversión 1364
  unidad basica 1363
Tiempo de colisión 887
Tiempo de Hubble 1357
Tiempo de vida media 1319
Tiempo propio 1282
Tierra
  polos geográficos 909
  polos magnéticos 909
Top (quark) 1354
Torio, serie de emisión alfa **1324**
Toroide 950, **950**, **951**
  campo magnético 950
Trabajo, unidad de 1363
Transformación de Galileo 1280
Transformación de Lorentz 1280–1286
Transformador 1029, **1029**, 1032, 1038
  resistencia de carga 1032
Transformador de alta 1032
Transformador de baja 1032
Transformador elevador 1032
Transformador reductor 1032
Transistor *npn* 1265, **1265**
Transistor *pnp* 1265, **1265**
Transistor simple de unión bipolar 1265
Transistores
  base 1265
  colector 1265
  emisor 1265
  ganancia de corriente 1265
Transistores MOS 1266
Tubo de luz **1093**
Tubo de rayos catódicos **735**, 917
Tubo de Thomson **917**
Unidad de masa unificada 1250
Unidad de medida
  energía 1363
  factor de conversión 1364
  fuerza 1363
  masa 1363
Unidades de masa unificadas 1317
Unidades derivadas de medida 1363
Unidades fundamentales de medida 1363
Unión de Josephson 900
Unión *pn* **1262**
Universo
  big-bang 1357, 1358
  constante de Hubble 1357
  era de la radiación 1359
  era de los leptones 1358
  evolución 1357–1359
  ley de Hubble 1357
  origen 1343–1359
  período de nucleosíntesis 1359
  radiación de fondo 2,7 K 1358
  tiempo de Hubble 1357
Uranio, fisión 1328
Valor Q 1325
Valores eficaces 1012
Van Allen, cinturones **916**, 916
Van de Graaff, generador 798, **799**
Van der Waals, enlace 1246
Vatio (W), unidad de potencia 1363
Vector de Poynting 1059
Velocidad, transformación relativista 1292–1295
Velocidad de desintegración 1319
Velocidad de Fermi 892
Velocidad de la luz 1083–1087
  mediciones 1084
  y éter 1278
Vidrio, índice de refracción 1088
Voltaje 783
Voltaje Hall 925, 926
Voltímetros 865, **865**
Voltio (V), unidad 782, **1363**
Volumen equipotencial 796
Volumen, factores de conversión para 1364
von Klitzing, Klaus 926
  constante 926
Walton, E. T. S. 1324
Weber (Wb), unidad 980, 1363
Weinberg, S. 1354
Wheeler John A. 1328
Wien, ley del desplazamiento 1080
Wilson, Robert 1358
Xi (barión) 1345
Young, Thomas 1077, 1157
Zener, diodo 1264
Zweig, G. 1352

www.elsolucionario.net

Prefijos para las potencias de 10

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	ato	a

Algunos datos físicos

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g	9,81 m/s^2 = 32,2 pies/s^2
Radio de la Tierra	R_T	6370 km = 3960 mi
Masa de la Tierra	M_T	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Masa del Sol		$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Masa de la Luna		$7{,}36 \times 10^{22}$ kg
Velocidad de escape en la superficie de la Tierra		11,2 km/s = 6,95 mi/s
Temperatura y presión en condiciones normales (CN)		0 °C = 273,15 K
		1 atm = 101,3 kPa
Distancia Tierra-Luna		$3{,}84 \times 10^{8}$ m = $2{,}39 \times 10^{5}$ mi
Distancia Tierra-Sol (media)		$1{,}50 \times 10^{11}$ m = $9{,}30 \times 10^{7}$ mi
Velocidad del sonido en aire seco (en CN)		331 m/s
Densidad del aire		1,29 kg/m^3
Densidad del agua		1000 kg/m^3
Calor de fusión del agua	L_f	333,5 kJ/kg
Calor de vaporización del agua	L_v	2,257 MJ/kg

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Ro	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Y	υ
Epsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Unidades físicas y sus abreviaturas

A	amperio	lb	libra
Å	angstrom (10^{-10} m)	L	litro
atm	atmósfera	m	metro
Btu	unidad térmica británica	MeV	megaelectrón voltio
Bq	becquerel	Mm	megámetro (10^{6} m)
C	culombio	mi	milla
°C	grado Celsius	min	minuto
cal	caloría	mm	milímetro
Ci	curie	ms	milisegundo
cm	centímetro	N	newton
din	dina	nm	nanómetro (10^{-9} m)
eV	electrón voltio	pt	pinta
°F	grado Fahrenheit	qt	cuarto de galón
fm	femtómetro, fermi (10^{-15} m)	rev	revolución
ft	pie	R	roentgen
Gm	gigámetro (10^{9} m)	Sv	seivert
G	gauss	s	segundo
Gy	gray	T	tesla
g	gramo	u	unidad de masa unificada
H	henry	V	voltio
h	hora	W	vatio
Hz	hertz	Wb	weber
in	pulgada	a	año
J	julio	yd	yarda
K	kelvin	μm	micrómetro (10^{-6} m)
kg	kilogramo	μs	microsegundo
km	kilómetro	μC	microculombio
keV	kiloelectrón voltio	Ω	ohmio

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Algunos factores de conversión

1 m = 39,37 pulg = 3,281 pies = 1,904 yardas
1 m = 10^{15} fm = 10^{10} Å = 10^9 nm
1 km = 0,6215 millas (mi)
1 mi = 5280 pies = 1.609 km
1 año luz = 1 a.l. = $9{,}461 \times 10^{15}$ m
1 pulgada = 2,540 cm
1 L = 10^3 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 1,057 qt
1 h = 3,6 ks
1 a = 365,24 d = $3{,}156 \times 10^7$ s
1 km/h = 0,278 m/s = 0,6215 mi/h
1 pie/s = 0,3048 m/s = 0,6818 mi/h
1 rev = 2π rad = 360°
1 rad = 57,30°
1 rev/min = 0,1047 rad/s
1 slug = 14,59 kg
1 tonelada = 10^3 kg = 1 Mg
1 atm = 101,3 kPa = 1,013 bar = 76,00 cmHg = 14,70 lb/pulg^2
1 N = 10^5 dinas = 0,2248 lb
1 lb = 4,448 N
1 Pa · s = 10 poise
1 J = 10^7 erg = 0,7373 pie · lb = $9{,}869 \times 10^{-3}$ L · atm
1 kW · h = 3,6 MJ
1 cal = 4,184 J = $4{,}129 \times 10^{-2}$ L · atm
1 L · atm = 101,3 J = 24,22 cal
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 Btu = 778 pie · lb = 252 cal = 1054 J
1 caballo de vapor = 550 pie · lb/s = 746 W
1 W/m · K = 6,938 Btu · pulg/h · pie^2 · °F
1 T = 10^4 G
1 kg pesa aproximadamente 2,205 lb

Algunas constantes físicas

Número de Avogadro	N_A	$6{,}022\,137 \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de Boltzmann	k	$1{,}380\,658 \times 10^{-23}$ J/K
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/2m_e$	$9{,}274\,015\,4 \times 10^{-24}$ J/T
Constante de Coulomb	$k = 1/4\pi\epsilon_0$	$8{,}987\,551\,788 \times 10^9$ N · m^2/C^2
Long. de onda de Compton	$\lambda_C = h/2e$	$2{,}426\,310\,58 \times 10^{-12}$ m
Carga elemental	e	$1{,}602\,177 \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases ideales	$R = N_A k$	8,314 51 J/mol · K = 1,987 22 cal/mol · K = $8{,}205\,78 \times 10^{-2}$ L · atm/mol · K
Constante de gravitación	G	$6{,}672\,6 \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Masa del electrón	m_e	$9{,}109\,390 \times 10^{-31}$ kg = 510,999 1 keV/c^2
Masa del protón	m_p	$1{,}672\,623 \times 10^{-27}$ kg = 938,272 3 MeV/c^2
Masa del neutrón	m_n	$1{,}674\,929 \times 10^{-27}$ kg = 939,565 6 MeV/c^2
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
Constante de Planck	h	$6{,}626\,076 \times 10^{-34}$ J · s = $4{,}135\,669 \times 10^{-15}$ eV · s
	$\hbar$	$1{,}054\,573 \times 10^{-34}$ J · s
		$6{,}582\,112 \times 10^{-16}$ eV · s
Velocidad de la luz	c	$2{,}997\,924\,58 \times 10^8$ m/s
Unidad de masa unificada	u	$1{,}660\,540 \times 10^{-27}$ kg = 931,494 32 MeV/c^2

Símbolos matemáticos

$=$	es igual a	Δx	incremento de x
$\neq$	es distinto a	$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
$\approx$	es aprox. igual a	$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots 1$
$\sim$	es del orden de	Σ	suma (o sumatorio)
$\propto$	es proporcional a	lim	límite
$>$	es mayor que	$\Delta t \to 0$	Δt tiende a 0
$\geq$	es mayor o igual que	$\frac{dx}{dt}$	derivada de x respecto a t
$\gg$	es mucho mayor que		
$<$	es menor que	$\frac{\partial x}{\partial tm}$	derivada parcial de x respecto a t
$\leq$	es menor o igual que		
$\ll$	es mucho menor que		
		$\int$	integral

www.elsolucionario.net